2021年度　数式処理演習　pair試験問題

cc by Shigeto R. Nishitani, 2021/12/2実施

- file: ~/symbolic_math/exams/21_pair_ans.ipynb

以下の問題をpythonで解き，LUNAへ提出せよ．LUNAへはipynbとpdf形式の２種類を提出すること．

1微積分

1(a) 関数の概形(15点)

（テキストp.216の図6.6の確認)

直線$y=-2x+4$が, シグモイド関数

$$\sigma(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

を通す($y=\sigma(-2x+4)$）ことによって0と1の範囲に潰されることを確認せよ．

sympyのplotに対してy軸の表示範囲は，オプション

```
ylim=(-1,2)
```

をつけることで指定できる．

In [1]:
```
from sympy import *
init_session()
```

IPython console for SymPy 1.6.2 (Python 3.8.5-64-bit) (ground types: gmpy)

These commands were executed:
>>> from __future__ import division
>>> from sympy import *
>>> x, y, z, t = symbols('x y z t')
>>> k, m, n = symbols('k m n', integer=True)
>>> f, g, h = symbols('f g h', cls=Function)
>>> init_printing()

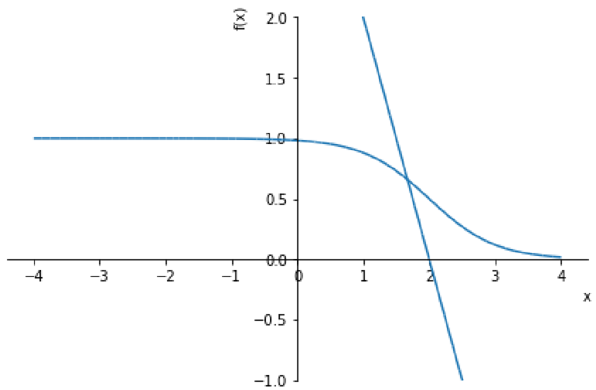
Documentation can be found at https://docs.sympy.org/1.6.2/

In [2]:
```
y1=-2*x+4
```

In [3]:
```
y2=1/(1+exp(-(-2*x+4)))
```

In [4]:
```
%matplotlib inline

plot(y1,y2,(x,-4,4),ylim=(-1,2))
```



Out[4]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fe689559d90>

1(b) シグモイド関数(15点)

（テキストp.131の4-118式の確認)

シグモイド関数

$$\sigma(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

の増減，極値，凹凸を調べ，曲線$y=\sigma(x)$の概形を描け． シグモイド関数の微分が

$$\sigma(x)(1-\sigma(x))$$

に一致することを確かめよ．両者を同時にプロットすることでも確かめられる． ただし，曲線は重なるので，どちらかをy軸方向に0.01程度ずらして表示すること．

In [5]:
```
from sympy import *
init_session()
```

IPython console for SymPy 1.6.2 (Python 3.8.5-64-bit) (ground types: gmpy)

These commands were executed:
>>> from __future__ import division
>>> from sympy import *
>>> x, y, z, t = symbols('x y z t')
>>> k, m, n = symbols('k m n', integer=True)
>>> f, g, h = symbols('f g h', cls=Function)
>>> init_printing()

Documentation can be found at https://docs.sympy.org/1.6.2/

In [6]:
```
y = 1/(1+exp(-x))
y
```

Out[6]: $\frac{1}{1+e^{-x}}$

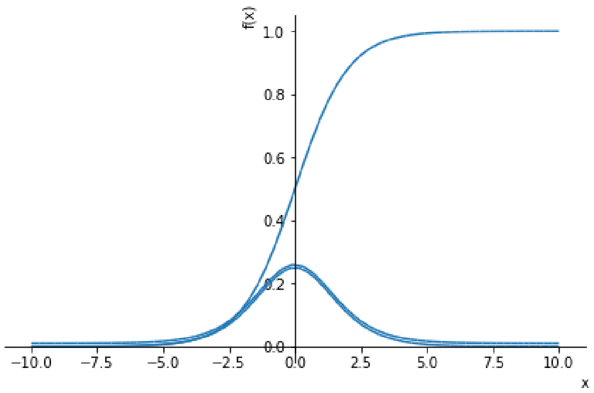
In [7]:
```
dy = diff(y, x)
```

```
dy
```

Out[7]:
$$\frac{e^{-x}}{\left(1 + e^{-x}\right)^{2}}$$

In [8]:
```
%matplotlib inline

plot(y,y*(1-y)+0.01,dy,(x,-10,10))
```



Out[8]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fe6895cfd00>

2 線形代数

2(a) 転置(15点)

(テキストp.115, 4-94式の確認)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{\mathrm{T}}$$

に対して，公式

$$(\ AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$$

が成り立つことを確かめよ．

In [9]:
```
from sympy import *

#init_session()
#init_printing(use_unicode=True)
init_printing()
list_a = [1,2,3]
list_b = [4,5,6]
A=Matrix([list_a, list_b])
A
```

Out[9]:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

In [10]:
```
(A.T*A).T
```

Out[10]:
$$\begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{bmatrix}$$

In [11]:
```
A.T*A
```

Out[11]:
$$\begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{bmatrix}$$

2(b) (15点)

次の行列Aの固有値とそれに対する固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

それぞれの固有値（λ_i），固有空間(x_i)に対して，

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

が成立することを確かめよ．

In [12]:
```
from sympy import *
A=Matrix([[-2,-3,3],[1,2,-3],[1,1,-2]])
```

In [13]:
```
A.eigenvects()
```

Out[13]:
$$\left[\left(-2, \ 1, \ \left[\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right), \ \left(-1, \ 1, \ \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \right), \ \left(1, \ 1, \ \left[\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] \right) \right]$$

In [14]:
```
x1,x2,x3=A.eigenvects()
x1[2][0]
```

Out[14]:
$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In [15]:
```
pprint(A*x1[2][0])
pprint(x1[0]*x1[2][0])
```

```
⎡2 ⎤
⎢  ⎥
⎢-2⎥
⎢  ⎥
⎣-2⎦
⎡2 ⎤
⎢  ⎥
⎢-2⎥
```

```
|   |
⎣-2⎦
```

In [16]:
```
pprint(A*x2[2][0])
pprint(x2[0]*x2[2][0])
```

```
⎡0 ⎤
|   |
| -1 |
|   |
⎣-1⎦
⎡0 ⎤
|   |
| -1 |
|   |
⎣-1⎦
```

In [17]:
```
pprint(A*x3[2][0])
pprint(x3[0]*x3[2][0])
```

```
⎡-1⎤
|   |
| 1  |
|   |
⎣0 ⎦
⎡-1⎤
|   |
| 1  |
|   |
⎣0 ⎦
```

3 センター試験原題(20点)

(2019大学入試センター試験　数学II・B 第2問(1),(2))

p, q を実数とし，関数$f(x) = 3x^3 + px^2 + qx$ は$x = -1$で極値2を取るとする．また，座標平面上の曲線$y = f(x)$をC,放物線$y = -kx^2$ をD, 放物線D上の点$(a, -ka^2)$をAとする．ただし，$k > 0, a > 0$である．

(1) 関数$f(x)$が$x = -1$で極値をとるので，$f'(-1) = \boxed{\text{ア}}$である．これと$f(-1) = 2$より，$p = \boxed{\text{イ}}, q = \boxed{\text{ウエ}}$である．よって$f(x)$は$x = \boxed{\text{オ}}$で極小値$\boxed{\text{カキ}}$をとる．

In [18]:
```
from sympy import *
init_session()

a,k,p,q,x,y=symbols('a k p q x y')
```

```
IPython console for SymPy 1.6.2 (Python 3.8.5-64-bit) (ground types: gmpy)

These commands were executed:
>>> from __future__ import division
>>> from sympy import *
>>> x, y, z, t = symbols('x y z t')
>>> k, m, n = symbols('k m n', integer=True)
>>> f, g, h = symbols('f g h', cls=Function)
>>> init_printing()

Documentation can be found at https://docs.sympy.org/1.6.2/
```

In [19]:
```
fx = x**3+p*x**2+q*x
fx
```

Out[19]: $px^2 + qx + x^3$

In [20]:
```
df = diff(fx, x)
df
```

Out[20]: $2px + q + 3x^2$

In [21]:
```
x0=-1
y0=2
```

In [22]:
```
e1=fx.subs({x:x0})-y0
e2=df.subs({x:x0})
```

In [23]:
```
{e1,e2}
```

Out[23]: $\{-2p + q + 3, p - q - 3\}$

In [24]:
```
subs_pq=solve({e1,e2},{p,q})
subs_pq
```

Out[24]: $\{p : 0, \ q : -3\}$

In [25]:
```
sol1 = solve(df.subs(subs_pq),x)
sol1
```

Out[25]: $[-1, \ 1]$

In [26]:
```
fx.subs(subs_pq).subs({x:sol1[1]})
```

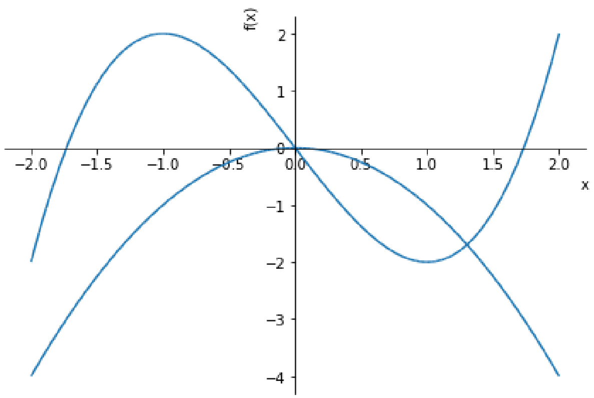
Out[26]: -2

In [27]:
```
fx0 = fx.subs(subs_pq)
fx0
```

Out[27]: $x^3 - 3x$

In [28]:
```
%matplotlib inline

plot(fx0,-x**2,(x,-2,2))
```



Out[28]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fe6a8144730>

(2) 点Aにおける放物線Dの接線をlとする． Dとlおよびx軸で囲まれた図形の面積Sを aとkを用いて表そう．

lの方程式は

$$y = \boxed{\text{クケ}}kax + ka^{\boxed{\text{コ}}} \quad \ldots(1)$$

と表せる． lとx軸の交点のx座標は$\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$であり， Dとx軸および 直線$x = a$で囲まれた図形の面積は$\dfrac{k}{\boxed{\text{ス}}}a^{\boxed{\text{セ}}}$である． よって，$S = \dfrac{k}{\boxed{\text{ソタ}}}a^{\boxed{\text{セ}}}$である．

In [29]:
```
fx2=-k*x**2
fx2
```

Out[29]: $-kx^2$

In [30]:
```
aa= diff(fx2,x).subs({x:a})
aa
```

Out[30]: $-2ak$

In [31]:
```
ll = expand(aa*(x-a)+fx2.subs({x:a}))
ll
```

Out[31]: $a^2k - 2akx$

In [32]:
```
x0 = solve(ll,x)
x0
```

Out[32]: $\left[\frac{a}{2}\right]$

In [33]:
```
Sd = -integrate(fx2,(x,0,a))
Sd
```

Out[33]: $\frac{a^3k}{3}$

In [34]:
```
Sll=-integrate(ll,(x,a/2,a))
Sll
```

Out[34]: $\frac{a^3k}{4}$

In [35]:
```
SS=Sd - Sll
SS
```

Out[35]: $\frac{a^3k}{12}$

4 数値改変(20点)

大問3.において，関数$f(x)$が$x = -0.9$で極値2をとるとして問3(a)を解きなさい． 問3(b)は変わらないので，解く必要ありません． 極小値は-0.2735658836980167ぐらいである． さらに，これらの値を用いて，(x,-2,1)で曲線C, Dを同時にプロットしなさい．

In [61]:
```
from sympy import *
init_session()

a,k,p,q,x,y=symbols('a k p q x y')
```

```
IPython console for SymPy 1.6.2 (Python 3.8.5-64-bit) (ground types: gmpy)

These commands were executed:
>>> from __future__ import division
>>> from sympy import *
>>> x, y, z, t = symbols('x y z t')
>>> k, m, n = symbols('k m n', integer=True)
>>> f, g, h = symbols('f g h', cls=Function)
>>> init_printing()

Documentation can be found at https://docs.sympy.org/1.6.2/
```

In [62]:
```
fx = 3*x**3+p*x**2+q*x
fx
```

Out[62]: $px^2 + qx + 3x^3$

In [63]:
```
df = diff(fx, x)
df
```

Out[63]: $2px + q + 9x^2$

In [64]:
```
x0=-0.9
y0=2
```

In [65]:
```
e1=fx.subs({x:x0})-y0
e2=df.subs({x:x0})
```

In [66]:
```
{e1,e2}
```

Out[66]: $\{-1.8p + q + 7.29, 0.81p - 0.9q - 4.187\}$

In [67]:
```
subs_pq=solve({e1,e2},{p,q})
subs_pq
```

Out[67]: $\{p : 2.93086419753086, \ q : -2.01444444444444\}$

In [68]:
```
sol1 = solve(df.subs(subs_pq),x)
sol1
```

Out[68]: $[-0.9, \ 0.248696844993141]$

In [69]:
```
fx.subs(subs_pq).subs({x:sol1[1]})
```

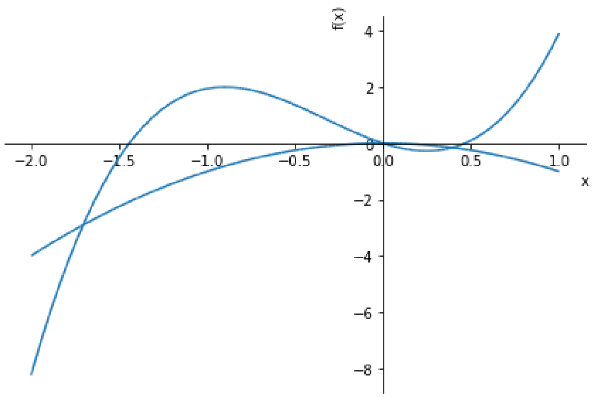
Out[69]: -0.27356588369801

In [70]:
```
fx1 = fx.subs(subs_pq)
fx1
```

Out[70]: $3x^3 + 2.93086419753086x^2 - 2.01444444444444x$

In [73]:
```
%matplotlib inline

plot(fx1,-x**2,(x,-2,1))
```



Out[73]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fe6aa937400>

In [ ]: