

情報科学科 数式処理実習試験問題

資料を参考にして以下の問題を解き，pdf 出力して ipynb と共に提出せよ．何番をやっているかが分かるようにせよ．メンバー全員の学籍番号と名前を忘れないように

1. 関数のプロットと微分

- (a) 関数プロット (テキスト p.216 の図 6.6 の確認)(15 点)

直線 $y = -2x + 4$ が，シグモイド関数

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

を通す ($y = \sigma(-2x + 4)$) ことによって 0 と 1 の範囲に潰されることを確認せよ．

sympy の plot に対して y 軸の表示範囲は，オプション

$$\text{ylim}=(-1,2)$$

をつけることで指定できる．

- (b) 関数の微分 (テキスト p.131 の 4-118 式の確認)(15 点)

シグモイド関数

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

の増減，極値，凹凸を調べ，曲線 $y = \sigma(x)$ の概形を描け．シグモイド関数の微分が

$$\sigma(x)(1 - \sigma(x))$$

に一致することを確認せよ．両者を同時にプロットすることでも確かめられる．ただし，曲線は重なるので，どちらかを y 軸方向に 0.01 程度ずらして表示すること．

2. (a) 行列の転置公式 (テキスト p.115, 4-94 式の確認)(15 点)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = A^T$$

に対して，公式

$$(AB)^T = B^T A^T$$

が成り立つことを確かめよ．

- (b) 固有値，固有ベクトル (15 点)

次の行列 A の固有値とそれに対する固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

また、それぞれの固有値 (λ_i) 、固有空間 (x_i) に対して、

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

が成立することを確かめよ。

3. センター試験原題 (20 点)

(2019 大学入試センター試験 数学 II・B 第 2 問 (1),(2))

p, q を実数とし、関数 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ は $x = -1$ で極値 2 を取るとする。また、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C 、放物線 $y = -kx^2$ を D 、放物線 D 上の点 $(a, -ka^2)$ を A とする。ただし、 $k > 0, a > 0$ である。

(a) 関数 $f(x)$ が $x = -1$ で極値をとるので、 $f'(-1) = \boxed{\text{ア}}$ である。これと $f(-1) = 2$ より、 $p = \boxed{\text{イ}}, q = \boxed{\text{ウエ}}$ である。よって $f(x)$ は $x = \boxed{\text{オ}}$ で極小値 $\boxed{\text{カキ}}$ をとる。

(b) 点 A における放物線 D の接線を l とする。 D と l および x 軸で囲まれた図形の面積 S を a と k を用いて表そう。

l の方程式は

$$y = \boxed{\text{クケ}} kax + ka \boxed{\text{コ}} \dots (1)$$

と表せる。 l と x 軸の交点の x 座標は $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ であり、 D と x 軸および直線 $x = a$

で囲まれた図形の面積は $\frac{k}{\boxed{\text{ス}}} a \boxed{\text{セ}}$ である。よって、 $S = \frac{k}{\boxed{\text{ソタ}}} a \boxed{\text{セ}}$

である。

4. 数値改変 (20 点)

大問 3. において、関数 $f(x)$ が $x = -0.9$ で極値 2 をとるとして問 3(a) を解きなさい。問 3(b) は変わらないので、解く必要ありません。極小値は -3.6656765533430 ぐらいである。さらに、これらの値を用いて、 $(x, -2, 2)$ で曲線 C, D を同時にプロットしなさい。