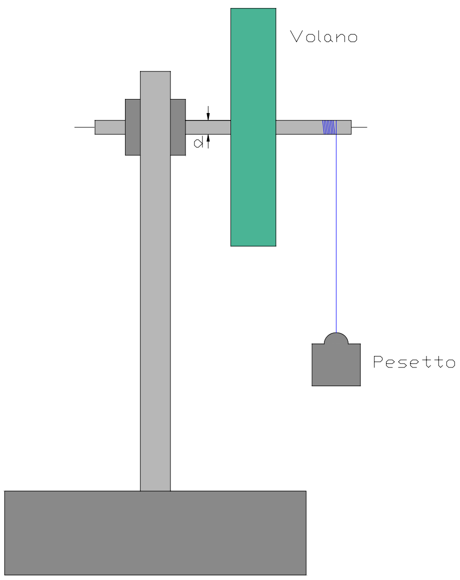
Paolo Martinis — Trieste, 28 luglio 2003

Università degli Studi di Trieste - Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Relazione di Laboratorio di Fisica Generale
Misura del momento d'inerzia di un volano

Introduzione



Lo scopo dell'esperienza è quello di ricavare il momento d'inerzia di un volano a partire dalla misura delle grandezze dell'apparecchiatura e dei tempi t_1 e t_2.
Il volano in questione è libero di ruotare attorno ad un asse fisso, che passa per l'asse di simmetria orizzontale di un albero di diametro d, sostenuto da un'intelaiatura metallica. L'albero è dotato di due cuscinetti a sfera, che consentono di mantenere costante l'attrito volvente con l'intelaiatura, e di un perno. Sull'albero viene avvolto un filo inestensibile di lunghezza h, ad esso assicurato tramite un occhiello libero di staccarsi dal perno una volta terminato lo srotolamento del filo. All'estremità libera del filo è poi fissato un pesetto di massa m.
Una volta lasciato libero il pesetto, esso inizia a scendere e la tensione del filo causa la rotazione del volano.
L'esperienza pratica consiste nella misura del tempo t_1, che occorre al filo per srotolarsi, e del tempo t_2, che occorre al volano per fermarsi.

Note di teoria

Da queste due misure, conoscendo le grandezze m, d, g è possibile risalire al momento d'inerzia del volano tramite l'espressione

(1) $$I = \frac{md^2 t_2 (g t_1^2 - 2h)}{8h(t_1 + t_2)}$$

Tale espressione è stata ricavata dall'applicazione al sistema del teorema del momento assiale della quantità di moto, espresso da

$$\frac{dL}{dt} = M$$

dove M è il momento assiale delle forze esterne agenti, mentre L è il momento assiale risultante della quantità di moto.

Poiché il momento risultante L è espresso come il prodotto tra la velocità angolare ω e il momento d'inerzia I incognito, avremo

(2) $$M = I\frac{d\omega}{dt} = I \cdot \alpha$$

dove α è l'accelerazione angolare del volano.

Le forze esterne agenti sul volano sono:

- La tensione T del filo, che possiamo esprimere in funzione della massa m del corpo e della sua accelerazione di caduta:

  $$T = mg - ma$$

  Il momento assiale di T rispetto all'asse di rotazione è dunque

  $$M_T = m(g-a)\frac{d}{2}$$

  dove $\frac{d}{2}$ è il braccio della forza applicata al volano tramite il filo.
- La forza di attrito, il cui momento assiale indichiamo con M_A.

Poiché nella prima fase del moto, ossia durante la discesa della massa m, vale la relazione

$$M_T - M_A = I\alpha$$

la (2) può essere espressa come:

(3) $$m(g-a)\frac{d}{2} - M_A = I\alpha$$

Nella seconda fase del moto, ossia quando il filo si è staccato, il volano ruota sotto la sola azione delle forze di attrito e la (2) risulta

$$M_A = I\alpha'$$

dove α' è l'accelerazione (negativa) del volano in questa fase.
Sostituendo nella (3) il valore di M_A ricavato da quest'ultima equazione, abbiamo

$$m(g-a)\frac{d}{2} = I(\alpha + \alpha')$$

Indicando con ω_1 la velocità angolare che il volano possiede nell'istante in cui il filo si stacca, possiamo osservare che essa:

- è stata raggiunta in seguito ad un moto rotatorio uniformemente accelerato nell'intervallo di tempo t_1, e possiamo quindi scrivere

  $$\omega_1 = \alpha t_1$$
- passa al valore 0 nell'intervallo di tempo t_2 con una decelerazione costante α', così possiamo scrivere anche

  $$\omega_1 = \alpha' t_2$$

In definitiva abbiamo la relazione

$$\alpha' = \alpha\left(\frac{t_1}{t_2}\right)$$

Vediamo ora di ricavare il valore di α in funzione di parametri noti: la velocità v di un punto sulla superficie dell'albero del volano è uguale alla velocità di caduta del pesetto, il quale percorre nella caduta una distanza pari alla lunghezza del filo; poiché è per definizione

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\left(\frac{2v}{d}\right)}{dt} = \frac{2a}{d}$$

abbiamo

$$\frac{1}{2}at_1^2 = h \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{2h}{t_1^2}$$

Quindi avremo le espressioni per le due accelerazioni angolari:

$$\alpha = \frac{2h}{rt_1^2}$$

$$\alpha' = \frac{2h}{rt_1t_2}$$

L'equazione del moto del volano è quindi

$$m\frac{d}{2}\left(g - \frac{2h}{t_1^2}\right) = I\frac{4h}{d}\left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_1t_2}\right)$$

ovvero

$$m\left(\frac{d}{2}\right)^2 t_2\left(gt_1^2 - 2h\right) = I2h\left(t_1 + t_2\right)$$

Da quest'ultima espressione è facile ricavare la (1).

Esperienza e misure

Oltre al sistema sopra descritto, gli strumenti utilizzati nell'esperienza sono stati:

- un calibro ventesimale (cost. di lettura λ=0,05mm) per la misura del diametro *d* dell'albero;
- un metro avvolgibile (cost. di lettura λ=1mm) per la misura della lunghezza *h* del filo;
- un cronometro (cost. di lettura λ=0,1s) dotato della funzione intertempo per la misura dei tempi t_1 e t_2.

Le determinazioni di *d*, *h* ed *m* sono state eseguite una sola volta preliminarmente all'esperienza: la massa *m* è stampigliata dal costruttore sul pesetto stesso, mentre la lunghezza *h* è stata misurata con il filo in tensione già legato al pesetto.
I dati ottenuti sono:

$$m = 0{,}4Kg$$

$$h = 5{,}73 \cdot 10^{-1} m$$

$$d = 29{,}65 \cdot 10^{-3} m$$

e, tenendo conto delle caratteristiche degli strumenti di misura e delle tolleranze previste dal costruttore del pesetto, i relativi scarti quadratici sono:

$$\Delta m = 0{,}5 \cdot 10^{-3} Kg$$

$$\Delta h = 2{,}0 \cdot 10^{-3} m$$

$$\Delta d = 0{,}5 \cdot 10^{-3} m$$

Abbiamo inoltre assunto nei calcoli g=9,81ms^{-2} con uno scarto Δg=5,0·10^{-3} ms^{-2}.

Per la misura dei tempi:

1. il filo è stato avvolto strettamente, senza sovrapporlo, intorno all'albero del volano fino a quando l'anello di fissaggio del peso non sfiorava l'albero stesso;
2. il volano è stato poi lasciato libero di ruotare e, contemporaneamente, si è fatto partire il cronometro;
3. nell'istante in cui il filo si è staccato dal perno, è stato fermato l'intertempo e si è registrato il valore di t_1;
4. nell'istante in cui il volano si è fermato, è stato fermato anche il cronometro.

Poiché le misurazioni sono affette da errori accidentali dovuti a svariate cause, tra le quali la più rilevante è il tempo di reazione dell'operatore, le rilevazioni sono state ripetute 14 volte da persone diverse. I dati così rilevati sono riportati nella tabella della pagina seguente.

Misura	Tempo totale t_1+t_2	Intertempo 1 t_1	Intertempo 2 t_2
1	412,6	10,2	402,4
2	412,4	10,4	402,0
3	405,5	10,3	395,2
4	405,4	10,2	395,2
5	411,4	10,1	401,3
6	411,7	10,2	401,5
7	419,4	10,2	409,2
8	419,2	10,2	409,0
9	410,5	10,3	400,2
10	410,5	10,3	400,2
11	412,1	10,3	401,8
12	411,9	10,5	401,4
13	416,5	10,2	406,3
14	416,3	10,0	406,3

Per il campione delle 14 misure possiamo calcolare il valor medio di t_1 e t_2:

$$\overline{t_1} = \frac{\sum_{i=1}^{14} t_{1,i}}{14} = \frac{143,4s}{14} = 10,2s$$

$$\overline{t_2} = \frac{\sum_{i=1}^{14} t_{2,i}}{14} = \frac{5632,0s}{14} = 402,3s$$

e le deviazioni standard:

$$\sigma_{\overline{t_1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{14}\left(\overline{t_1} - t_{1,i}\right)^2}{14}} = 3,267 \cdot 10^{-2}\, s$$

$$\sigma_{\overline{t_2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{14}\left(\overline{t_2} - t_{2,i}\right)^2}{14}} = 1,141s$$

Risultati

Il valore atteso del momento di inerzia del volano è così:

$$\overline{I} = \frac{md^2\overline{t_2}(g\overline{t_1^2} - 2h)}{8h(\overline{t_1} + \overline{t_2})} = \frac{4,0 \cdot 10^{-2} \cdot (29,65 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 402,3 \cdot (9,81 \cdot 10,2^2 - 2 \cdot 0,573)}{8 \cdot 0,573 \cdot (10,2 + 402,3)} = 0,07688 Kg \cdot m^2$$

mentre la relativa deviazione standard è:

$$\sigma_{\overline{I}} = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial t_1}\right)^2_{t_1=\overline{t_1}} \sigma^2_{\overline{t_1}} + \left(\frac{\partial I}{\partial t_2}\right)^2_{t_2=\overline{t_2}} \sigma^2_{\overline{t_2}}} = \sqrt{\frac{md^2 t_2}{8h(t_1+t_2)^2}\left[gt_1\left(t_1 + 2t_2\right) + 2h\right]\sigma^2_{\overline{t_1}} + \frac{md^2 t_1 (gt_1^2 - 2h)}{8h(t_1+t_2)^2}\sigma^2_{t2}} =$$

$$= \ldots = 4,85 \cdot 10^{-4}\, Kg \cdot m^2$$

Ciò significa che il vero valore di I si trova in un intervallo C di confidenza intorno al valore medio da noi calcolato ($\overline{I}$), con C che varia in base al grado di fiducia desiderato.
Per un grado di fiducia del 68,3%, l'intervallo di confidenza per la media $\overline{I}$ è

$$C_{68,3} = \left[76,40 \cdot 10^{-3}\, Kg \cdot m^2 ; 77,36 \cdot 10^{-3}\, Kg \cdot m^2\right]$$

ossia, con una probabilità di sbagliare del 31,7%, possiamo dire che

$$I = \overline{I} \pm \sigma_{\overline{I}} = (76,88 \pm 0,48) \cdot 10^{-3}\, Kg \cdot m^2$$

Per un grado di fiducia del 95,4%, l'intervallo di confidenza per la media $\overline{I}$ è

$$C_{95,4} = \left[75,91 \cdot 10^{-3}\, Kg \cdot m^2 ; 77,85 \cdot 10^{-3}\, Kg \cdot m^2\right]$$

ossia, con una probabilità di sbagliare del 4,6%, possiamo dire che

$$I = \overline{I} \pm 2\sigma_{\overline{I}} = (76,88 \pm 0,97) \cdot 10^{-3}\, Kg \cdot m^2$$

Per un grado di fiducia del 99,7%, l'intervallo di confidenza per la media $\overline{I}$ è

$$C_{99,7} = \left[75,47 \cdot 10^{-3}\, Kg \cdot m^2 ; 78,29 \cdot 10^{-3}\, Kg \cdot m^2\right]$$

ossia, con una probabilità di sbagliare dello 0,3%, possiamo dire che

$$I = \overline{I} \pm 3\sigma_{\overline{I}} = (76,88 \pm 1,41) \cdot 10^{-3}\, Kg \cdot m^2$$

Osservazione
In realtà il valore k che troviamo nell'espressione $I = \overline{I} \pm k\sigma_{\overline{I}}$ varrebbe per grandi campioni ($n \geq 30$). Per piccoli campioni (come nel nostro caso, con $n = 14$) i valori di k sono un po' differenti: ad esempio per un grado di fiducia del 95% il valore di k è in realtà 2,16 (contro il valore di 1,96 relativo al caso dei grandi campioni). Ne deriva quindi che l'intervallo di confidenza diventa più ampio: nel caso in questione abbiamo $C_{95}^{'} = \left[\overline{I} - 2,16\sigma_{\overline{I}} ; \overline{I} + 2,16\sigma_{\overline{I}}\right] = \left[75,84;77,92\right]$, che è più ampio di $C_{95,4}$ nonostante il grado di fiducia sia minore. In questo caso avremmo potuto effettuare un maggior numero di misurazioni (almeno 30). Le variazioni sono però minime: possiamo pertanto assumere i valori sopra proposti come significativi.