

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. Ломоносова

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Кафедра Исследования Операций



Денисов Никита Сергеевич

Построение и идентификация нормативной динамической модели экономики

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:

В.Н.С., доцент

Н.Н. Оленёв

Москва, 2021

Содержание

1	Введение	2
2	Постановка задачи	2
2.1	Производственный сектор	2
2.2	Домашние хозяйства (сектор населения)	4
2.3	Агент T (торговец)	5
2.4	Агент G (правительство, консолидированный бюджет)	5
2.5	Агент B (банковская система)	6
2.6	Промежуточные результаты построения модели	7
3	Сбор и подготовка статистических данных	8

1 Введение

В моей выпускной квалификационной работе рассматривается вопрос построения и идентификации нормативной динамической модели экономики. Для начала, разберем основные термины в названии данной работы. Модель называется *нормативной*, так соотношения между различными экономическими показателями, которые описывают деятельность экономических агентов, связаны путем *нормативов*, то есть некоторых параметров, которые требуется идентифицировать. Модель называется *динамической*, так как она строится по статистическим данным, а именно временным рядам. Таким образом, общая задача состоит из следующих шагов: построение системы уравнений на основе множества экономических агентов, наличия или отсутствия теневого сектора, количества секторов описываемой экономики; определение параметров, которые необходимо идентифицировать; сбор статистических данных по экзогенным переменным; подготовка данных, то есть написание программного кода для представления построенной системы уравнений на языке Python; выбор целевой функции, необходимой в процессе идентификации параметров; выбор алгоритма для нахождения этих параметров.

Описываемая система уравнений строится из общих макроэкономических соображений, которые являются достаточно интуитивными. Рассуждения базируются на принципе потоков, то есть передаче разных благ между экономическими агентами.

В данной работе построение модели и идентификация её параметров будут происходить на примере Англии.

2 Постановка задачи

В основе модели экономики лежит система уравнений, описывающая взаимодействия между различными экономическими агентами. Каждая отдельная группа уравнений связана с конкретным агентом, а все уравнения в целом образуют замкнутую систему. Рассматриваемая модель будет с одним сектором производства, без теневого оборота товара, труда и капитала. Будем поэтапно вводить необходимые формулы, обозначения и понятия.

2.1 Производственный сектор

Запишем производственную функцию данного сектора:

$$Y_X = Y_0 \left(\frac{Q_L^X}{Q_{L0}^X} \right)^\alpha \left(\frac{Q_K^X}{Q_{K0}^X} \right)^\beta, \quad \alpha + \beta = 1 \quad (1)$$

Это производственная функция вида Кобба-Дугласа. Классический и общий вид данной функции:

$$F(L, K) = AL^\alpha K^\beta$$

Она зависит от двух факторов производства: труда L и капитала K , а коэффициент A характеризует уровень технологического развития. Разберемся с обозначениями в формуле (1).

Y_0 — уровень технологий производства (некая константа). Для всех остальных переменных, здесь и далее, нижний индекс означает развоидность блага: X — товар производственного сектора, L — труд (labour), K — капитал. Верхний же индекс показывает *поток* блага (между экономическими агентами), обозначенного в нижнем индексе. Например,

T^{XG} - оплата налогов (taxes) сектором производства, то есть поток денег от производителя к государству (G — government). Если начальный и конечный экономические агенты потока совпадают, то в верхнем индексе пишется одна латинская буква. Теперь, когда введены разновидности и смысл индексов, разберем оставшиеся переменные из формулы (1). $\frac{Q_L^X}{Q_{L0}^X}$ — количество труда, используемого в производстве, причем Q_L^X — переменная величина, а Q_{L0}^X — некая константа. Для капитала всё аналогично. Учитывая вид функции (1), а именно степени α и β , удобно прологарифмировать равенство (1) и получить новую, но описывающую те же самые зависимости, функцию:

$$\ln Y_X = \ln Y_0 + \alpha \ln \frac{Q_L^X}{Q_{L0}^X} + \beta \ln \frac{Q_K^X}{Q_{K0}^X}, \quad \alpha + \beta = 1 \quad (2)$$

Введем изменение запаса блага X :

$$\frac{dQ_X^X}{dt} = Y_X - (a_X^{XL} + a_X^{XO})Q_X - c_X^X I_X, \quad (3)$$

где a_X^{XL} — норма продажи блага X населению, a_X^{XO} — норма продажи блага X внешнему рынку (O = out), c_X — коэффициент фондоемкости, а I_X — инвестиции.

Выражение для инвестиций:

$$I_X = \frac{b_K^{XK} W^X}{c_X^X p_X^X}, \quad (4)$$

где W_X — запас денег, b_X^{XK} — норматив (доля денег), который идет на создание капитала, c_X — коэффициент фондоемкости, p_X^X — стоимость продукции производственного сектора.

Введем изменение запаса капитала как фактора производства:

$$\frac{dQ_K^X}{dt} = I_X - \mu_K^X Q_K^X \quad (5)$$

Введем изменение запаса труда как фактора производства:

$$\frac{dQ_L^X}{dt} = \frac{b_L^{XL} W^X}{s_X^L} - a_L^X Q_L^X \quad (6)$$

Любая экономическая модель реализуется в конкретном государстве, поэтому, производственный сектор платит налоги, всего 5 разновидностей.

$$T^{XG} = \sum_{i=1}^5 T_i^{XG}, \quad (7)$$

— суммарный налог, который платит сектор производства. Разберем каждый из налогов в отдельности.

Налог на таможенный экспорт:

$$T_5^{XG} = n_5 w p_X^O a_X^{XO} Q_X^X, \quad (8)$$

где a_X^{XO} — доля товара на экспорт, p_X^O — цена экспортного товара, w — курс доллара в рублях, n_5 — налог (доля от выручки).

Единый социальный налог (пенсионное страхование, медицинская помощь и т.д.):

$$T_4^{XG} = n_4 b_L^{XL} W^X, \quad (9)$$

где n_4 — налоговая ставка, b_L^{XL} — норматив (доля) от чистых денег, W_X — запас чистых денег у сектора X .

Акцизный налог:

$$T_3^{XG} = n_3[wp_X^O a_X^{XO} Q_X^X + p_X^L a_X^{XL} Q_X^X], \quad (10)$$

где n_3 — ставка налога от экспорта и продажи продукции населению, p_X^L — цена продукции при продаже населению, a_X^{XL} — норматив (доля) продукции на продажу.

Налог на добавленную стоимость (НДС):

$$T_2^{XG} = n_2[wp_X^O a_X^{XO} Q_X^X + p_X^L a_X^{XL} Q_X^X - b_Z^{XB} W^X - T_3^{XG} - T_4^{XG} - T_5^{XG}], \quad (11)$$

где n_2 — ставка налога, b_Z^{XB} — норматив (доля от запаса денег), выплачиваемая банковской системе в виде аннуитета по задолженности (кредиту).

Налог на прибыль:

$$T_1^{XG} = n_1[wp_X^O a_X^{XO} Q_X^X + p_X^L a_X^{XL} Q_X^X - (b_L^{XL} + b_Z^{XB}) W^X - T_2^{XG} - T_3^{XG} - T_4^{XG} - T_5^{XG}], \quad (12)$$

где $b_L^{XL} W^X$ — уже не ЕСН, а заработные платы, выплачиваемые сотрудникам.

Производственному сектору могут потребоваться дополнительные средства для реализации своей деятельности. В этом случае он возьмет кредит у банковской системы B , и с течением времени задолженность по этому кредиту будет изменяться согласно формуле:

$$\frac{dZ^X}{dt} = C^{BX} + rZ^X - b_Z^{XB} W^X, \quad (13)$$

где C^{BX} — кредит, выданный сектору X , $b_Z^{XB} W^X$ — регулярно выплачиваемые им аннуитеты, равные нормативу (доле) b_Z^{XB} от всего запаса денег в производственном секторе, а r — ставка процента по суммарной задолженности.

Теперь можно ввести уравнение изменения запаса денег в секторе X :

$$\frac{dW^X}{dt} = (p_X^L a_X^{XL} + p_X^O a_X^{XO}) Q_X^X + C^{BX} - b_L^{XL} W^X - T^{XG} + T^{GX}, \quad (14)$$

где b_X^{GX} — норматив платежей производственному сектору от государства, C^{BX} — кредит от банковской системы, $T^{GX} = b_X^{GX} W^G$ — трансферты от государства.

Таким образом, мы описали всё необходимое для сектора производства, и на данном этапе множество нормативов, которые нужно идентифицировать, состоит из (а надо ли их перечислять?..).

2.2 Домашние хозяйства (сектор населения)

Теперь рассмотрим сектор домашнего хозяйства. Прежде всего, определим уровень безработицы (то есть дефицит труда как фактора производства) в секторе X :

$$\frac{dQ_L^{LX}}{dt} = a_L^{LX} Q_L^{LX} - \frac{b_L^{LX} W^X}{s_L^X}, \quad (15)$$

где a_L^{LX} — норматив (доля) труда, который идет на работу в секторе X , s_L^X — ставка заработной платы,

Изменение ставки заработной платы в зависимости от уровня безработицы:

$$\frac{ds_L^X}{dt} = \alpha_L^X \left(\frac{b_L^{LX} W^X}{s_L^X} - a_L^{LX} Q_L^{LX} \right) \quad (16)$$

Можно заметить, что правая часть равенства (16) — правая часть равенства (15), но с обратным знаком и с коэффициентом α_L^X .

Домашние хозяйства, как и производственный сектор, платят налог:

$$T^{LG} = n_6 b_M^{LO} W^L + n_7 (d^{BL} + b_L^{XL} W^X), \quad (17)$$

где n_6 — таможенный налог за импорт (или всё же экспорт), n_7 — ставка подоходного налога.

Запас капитала у сектора населения:

$$\frac{dW^L}{dt} = d^{BL} + b_L^{XL} W^X + b_L^{GL} W^G - b_X^{LX} W^L - b_M^{LO} W^L - T^{LG}, \quad (18)$$

где ...

2.3 Агент T (торговец)

Между производственным сектором X и домашними хозяйствами существует посредник — чистый торговец T . Его роль — передача продукции от сектора X к сектору населения L .

Соответственно, можем записать формулу изменения запаса продукции у посредника:

$$\frac{dQ_X^L}{dt} = a_X^{XL} Q_X^X - \frac{b_X^{LX} W^L}{p_X^L}, \quad (19)$$

где a_X^{XL} — норматив (доля) продукции, идущей от производственного сектора к домашним хозяйствам, а второе слагаемое в правой части — затраты сектора населения на продукцию сектора X .

Изменение цены про продукцию производственного сектора:

$$\frac{dp_X^L}{dt} = \alpha_X^L \left(\frac{b_X^{LX} W^L}{p_X^L} - a_X^{XL} Q_X^X \right), \quad (20)$$

где α_X^L — коэффициент пропорциональности, а выражение в скобках — правая часть равенства (19) с обратным знаком.

Посредник — полноценный экономический агент. Следовательно, можем записать изменение его запаса денег:

$$\frac{dW^T}{dt} = b_X^{LX} W^L - p_X^L a_X^{XL} Q_X^X \quad (21)$$

Равенство (21) представляет собой разность между затратами домашних хозяйств на покупку продукции и суммарной прибылью производственного сектора от продажи этой продукции, где население тратит деньги по нормативу b_X^{LX} , а сектор X продает долю a_X^{XL} своего товара по цене p_X^L .

2.4 Агент G (правительство, консолидированный бюджет)

Все экономические агенты осуществляют свою деятельность в рамках государства и подчиняются его законодательству. В частности, они производят налоговые отчисления в консолидированный бюджет, через который происходит поток денег: в него поступают налоги от производственного сектора и домашних хозяйств, и часть поступающих средств

тратится на трансферты секторам X и L . Исходя из этого, можно записать изменение запаса денег на счетах консолидированного бюджета:

$$\frac{dW^G}{dt} = T^{XG} + T^{LG} - (b_X^{GX} + b_X^{GL})W^G, \quad (22)$$

где $b_X^{GX}W^G = T^{GX}$, $b_X^{GL}W^G = T^{GL}$ — трансферты от государства соответствующим секторам.

Дефицит консолидированного бюджета — обратная величина к выражению, стоящему в правой части равенства (21):

$$D^G = -T^{XG} - T^{LG} + T^{GX} + T^{GL} \quad (23)$$

Если $D^G < 0$, то такая ситуация называется профицитом консолидированного бюджета.

2.5 Агент B (банковская система)

Как и в любой экономике, в описываемой нами модели присутствует банковская система. Основываясь на макроэкономической теории, банковская система состоит из центрального и коммерческих банков. Роль центрального банка — установка ключевых ставок процента, выдача кредитов коммерческим банкам, установка норм резервирования и некоторые другие. В рамках данной работы, однако, мы не будем осуществлять деление на коммерческие и некоммерческие банки, а будем считать их единым целым, то есть одним экономическим агентом B , функция которого — выдача кредитов другим экономическим агентам.

Банковские активы состоят из золото-валютных резервов $R(t)$ и суммарной задолженности $Z(t)$ секторов, которым были выданы кредиты. В свою очередь пассивы состоят из суммарных запасов денег $W(t)$ у контрагентов банковской системы. Все три описанные величины подчиняются финансовому балансу банковской системы:

$$wR(t) + Z(t) = W(t), \quad (24)$$

где w — курс обмена иностранной валюты на отечественную (определяется как заданная функция времени), измеряется в рублях за £1.

Золото-валютные резервы $R(t)$ (в млрд. £) определяются платежным балансом:

$$\frac{dR(t)}{dt} = p_X^O X_X^{XO} - M_M^{OL} \quad (25)$$

Правая часть равенства (25) представляет собой разность между выручкой от продажи продукции на внешний рынок и импортом зарубежных товаров для сектора домашних хозяйств.

Сумма M_M^{OL} , затрачиваемая на импорт, представима в следующем виде:

$$M_M^{OL} = \frac{b_M^{LO} W^L}{w}, \quad (26)$$

где b_M^{LO} — норматив (доля) запаса денег W^L , идущая на импорт, а w — рублевый курс фунта.

Из макроэкономической теории известно, что банки (как коммерческие, так и центральный), зарабатывают на процентах по выдаваемым кредитам. Центральный банк выдает кредиты коммерческим банкам и получает от них аннуитеты, а коммерческие банки, в свою

очередь, получая кредиты (а также депозиты от населения), часть денег резервируют, а оставшуюся часть выдают в виде кредитов физическим и юридическим лицам и зарабатывают на разнице процентов между ставкой центрального банка (под которую банки получают кредит) и ставками, по которым они выдают кредиты населению. Но так как в данной модели мы рассматриваем банковскую систему как единое целое, без разделения на отдельные банки, то её прибыль можно описать следующим образом:

$$d^{BL} = r(t)Z(t) \quad (27)$$

Как видим, из левой части этого равенства следует, что банковская прибыль поступает на доходы населения.

Таким образом, общий запас денег в описанной модели равен сумме запасов денег каждого из следующих экономических агентов:

$$W(t) = W^X + W^T + W^L + W^G \quad (28)$$

Как уже было отмечено ранее, центральный банк устанавливает норму резервирования, представляющую собой долю денег, которая резервируется на счетах банков и не идет на кредиты населению. Другими словами, резервы банковской системы $wR(t)$ обеспечивают вклады (или же депозиты) контрагентов при законодательно установленной норме резервирования ξ :

$$wR(t) \geq \xi W(t) \quad (29)$$

Соответственно, в данных условиях банковская система стремится предоставить максимальный кредит (то есть неравенство (29) превращается в равенство), удовлетворяющий соотношениям (24) и (29):

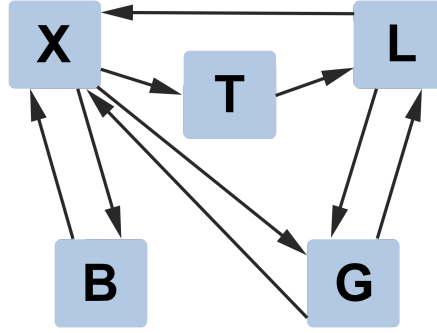
$$Z = \frac{1 - \xi}{\xi} wR \quad (30)$$

Будем считать, что спрос на кредиты, обеспеченные ликвидационной стоимостью производственных фондов, полностью удовлетворяется банковской системой. Тогда, из равенств (25) (26), (13) (задолженность сектора X перед банковской системой) и (30) можно выразить ставку процента:

$$r(t) = \frac{\frac{1-\xi}{\xi} w(p_X^O X_X^{XO} - M_M^{OL}) + H^{XB} - C^{BX}}{Z(t)} \quad (31)$$

2.6 Промежуточные результаты построения модели

Итак, были описаны взаимодействия между всеми экономическими агентами в контексте потоков благ и нормативов. Все соотношения подчиняются макроэкономическим и логическим соображениям и отображают немного упрощенную, но всё же реальную экономическую модель. Для простоты понимания, на схеме ниже изображены все описанные взаимодействия экономических агентов: Дифференциальные уравнения, приведенные выше, описывают динамику изменения соответствующих показателей. В дискретном случае это заменяется на первый дифференциал временного ряда, а именно на разности $element_t - element_{t-1}$. На данном этапе мы имеем модель, описываемую линейными уравнениями, и набор нормативов, которые требуется идентифицировать. Для этого, сначала, требуется собрать статистические данные по всем параметрам, которые являются экзогенными, то есть внешними (уже известными) переменным, выбрать целевую функцию, которая будет определять точность описанной модели, и определиться с алгоритмом решения окончательной задачи.



3 Сбор и подготовка статистических данных

В данной работе модель, описанная в разделе 2, будет использоваться для моделирования экономики Великобритании, соответственно, все необходимые статистические данные для оценки параметров модели собраны конкретно для этой модели. Внутренняя валюта Англии — фунт стерлингов, а валюта внешнего рынка — доллар США.

Модель включает в себя лишь один сектор производства, соответственно этим сектором будет вся экономика Великобритании, а производимый ей продукт — ВВП (внутренний валовый продукт). Исходя из таких условий, можно сделать некоторые допущения, а именно: в формулах (15) и (16) присутствует норматив a_L^{LX} , отражающий долю населения, занятую в производственном секторе, а так как этот сектор — экономика в целом, то можно положить $a_L^{LX} = 1$ и $a_L^{LX} Q_L^{LX} = Q_L^X$. Помимо этого, оговорим особенности нескольких эндогенных переменных. Q_X^X отражает запас блага у сектора X , которое идет на экспорт и на потребление населением. В односекторной модели Q_X^X будет равняться сумме расходов населения и прибыли от сбыта товаров и услуг на внешний рынок, оба слагаемых измерены в постоянных ценах 2015 года. Y_X — величина выпуска, и в нашем случае она равна ВВП, то есть миллиарды фунтов в год. Поэтому нормативы a_X^{XL} , a_X^{X0} , b_K^{XK} , b_L^{XL} и μ_K^X в формулах (3), (4), (5) и (6) будут иметь размерность $\frac{1}{year}$.