

Proyecto Final de Modelos

López Vergara Juan Felipe, Julián Andrés Muñoz Montoya y Sergio Alonso Marriaga Rivera.

Ingeniería de Sistemas, Universidad de Antioquia

Medellín, Colombia

{juan.lopez78, julian.munozm sergio.marriaga,}@udea.edu.co

Resumen— En el siguiente trabajo realizaremos el modelo correspondiente a una población que sufre de una epidemia, la cual tiene una cura que es introducida con un retardo de 5 años y es temporal. El modelo SIR fue insuficiente para este caso, por lo cual se usó el modelo extendido SIRM y una función de activación sigmoide, para lograr un modelo más realista.

Keywords— Epidemia, crecimiento exponencial, antídoto, función de activación, retardo, función sigmoide, mortalidad.

I. INTRODUCCIÓN

Actualmente, se sabe que toda epidemia que se propague en el mundo tiene como principales fuentes de crecimiento o de expansión, el ecosistema en el que se esté desarrollando, en cualquier ecosistema podemos encontrar varios medios de propagación de epidemias tales como el aire, el agua, los alimentos y también los habitantes de dicho ecosistema, esto de manera general debido a que pueden ser muchos más los medios de propagación que pueden existir.

En el trabajo de Kermack y McKendrick [1] se considera susceptibles a la población que tienen riesgo de infectarse, estos se contagian por contacto directo con los infectados, y por último los removidos son aquellos que se han curado o han muerto. En algunos casos, los removidos pueden pasar a ser otra vez susceptibles, por lo que en estos casos no se puede considerar a los muertos dentro de los removidos, por lo cual en este trabajo se extiende el modelo SIR al modelo SIRM, donde la M representa los muertos.

II. OBJETIVO GENERAL

Modelar un problema de epidemiología y crecimiento poblacional, donde se debe extender el modelo SIR.

III. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Extender el modelo SIR al modelo SIRM.
- Simular un problema de crecimiento poblacional y epidemiológico.
- Simular una epidemia donde el antídoto aparece después de cierto tiempo.
- Usar el modelo para evaluar situaciones particulares que se pueden dar en la población.

IV. MARCO TEÓRICO

Se puede afirmar que en algunos casos de epidemias los habitantes o población del ecosistema son el principal medio para la propagación de ésta, ejemplos de esto se pueden encontrar a lo largo de la historia humana, debido a este motivo se sabe que para poder tener un control respecto a una epidemia específica que se expanda de dicha manera, se necesita de modelos poblacionales y epidemiológicos con los cuales se puede lograr tener un mayor conocimiento de la misma, sus características generales, la forma en que se propaga y también lograr encontrar la manera de combatirla de forma efectiva, esto último debido a que siempre se busca evitar los efectos peligrosos que pueda traer consigo, dichos modelos se presentan a continuación.

Modelo Poblacional

Los modelos poblacionales son aquellos que se pueden usar para hacer simulaciones acerca de cómo los habitantes de un ecosistema crecen o decrecen en un determinado lapso de tiempo, con esto se puede llegar a tener conocimiento y control de un ecosistema y que no se generen problemas o inconvenientes a lo largo del tiempo o conocer algunos antecedentes específicos de dichos habitantes o de la población, para este tipo de modelo se deben poseer algunos datos, uno de los más comunes es la población actual al momento de iniciar el estudio, también es muy común tener un tiempo

determinado, el cual se tendrá como parámetro para ver el crecimiento o decrecimiento. Estos datos son los más generales ya que en este modelo hay mucha más información que se puede tener en cuenta.

Modelo Epidemiológico

Los modelos epidemiológicos son aquellos que sirven para comprender el avance o propagación, de como su nombre lo dice, alguna epidemia. Este tipo de modelos son usados comúnmente en el área de la salud y sirven para identificar características de las epidemias, cómo se propagan, la manera como afectan las poblaciones o un ecosistema en general y con esto poder ayudar a la salud y bienestar de los habitantes. En estos modelos también influyen muchos tipos de datos o de información que afecta en gran medida los resultados, por lo cual se debe tener mucho cuidado con la información que se está utilizando, este modelo tiene una íntima relación con el modelo poblacional.

V. ESTADO DEL ARTE

Aplicaciones de un modelo integral para el estudio de la malaria urbana en San Andrés de Tumaco, Colombia.

Este es un estudio [2] realizado por personal de la universidad cooperativa de Colombia y de la universidad de Nariño en el cual se analizaron las características epidemiológicas y la propagación de la malaria.

Para este estudio se tuvieron en cuenta varios métodos, como lo fue el análisis de literatura de estudios que fueron anteriormente realizados en varias locaciones del mundo, tales como el continente americano donde los países se encuentran separados en varios estados ya sea de eliminación, pre-eliminación, prevención, entre otros. Después de esto el estudio se centró en la investigación en el territorio colombiano, donde tocaron temas respecto a la población, el territorio que habitan algunas comunidades y factores climáticos e incluso los estratos sociales.

También se hizo uso de modelos teóricos los cuales fueron: la teoría de los sucesos, la historia natural de la enfermedad, modelo explicativo, modelo de la alternancia, modelo matemático de malaria. Después de

toda la información recolectada bajo los sucesos anteriormente descritos, empezaron con el tema central del estudio el cual es **Modelo teórico para la malaria en San Andrés de Tumaco**, para este modelo se tuvo en cuenta primero las definiciones y características de la malaria, su definición, información de hospedero-reservorio, Información de antecedentes patológicos, también información del ambiente tales como son: los factores físicos, biológicos y socio-demográficos, también la Dolencia, Estado de salud percibido, Medidas de protección, y el padecimiento.

Modelo matemático para la dinámica de transmisión del VIH/SIDA en una población sexualmente activa.

En este modelo [3], publicado en el año 2009 en el volumen 12 revista de salud pública por los profesores Mónica J. Mesa - Mazo, Juan Vergaño, Claudia E. Sánchez y Aníbal Muñoz de la universidad del Quindío sede Armenia, se analizan datos estadísticos recogidos por el DANE en Colombia, con los que se estudió, la forma en que se transmitió el sida entre parejas heterosexuales activas.

El modelo fue simulado con el código del programa MAPLE. En el artículo se considera que en la propagación del sida influyen muchos factores, de los cuales entre los más determinantes se encuentra la orientación sexual, ya que el modelo varía para cada orientación.

En éste también se considera el crecimiento de la población sexualmente activa, por lo cual se añaden tasas de crecimiento exponencial. Para este artículo se consideró la población susceptible en ambos géneros por separado, los cuales son personas sexualmente activas, esta población crece de manera exponencial, también se consideran los infectados dentro del modelo, se consideran infecciones de hombre o mujeres susceptibles contagiados por alguien de otro sexo, por medio de interacción, también se consideran muertes dentro de la población. El modelo se simula hasta los 20 años.

Tendencia de la mortalidad y sus determinantes como parte de la transición epidemiológica en Colombia [5].

En este modelo el cual fue publicado en el año 2004 se buscó ayudar a moldear la demografía en Colombia, esto se llevó a cabo a través de tres determinantes, las cuales son: La tendencia de la mortalidad (TCM), la tendencia de causas de muerte (agrupadas en patologías), y la tendencia de esperanza de vida al nacer.

Los estudios bajo los cuales se realizaron la primera y la tercera tendencia fueron varios documentos de estudios anteriormente realizados por variedad de instituciones, mientras que las patologías escogidas fueron aquellas enfermedades predominantes en Colombia desde 1974 hasta el 2001 y estas son: Enfermedades cardiovasculares, infecciones y enfermedades parasitarias, tumores, enfermedades maternas y perinatales, deficiencias nutricionales, enfermedades respiratorias crónicas, trastornos neuropsiquiátricos, lesiones intencionales y lesiones no intencionales.

En este modelo se abarcan una serie de transiciones diferentes, pero que se encuentran interconectadas, la primera de ellas se desarrolla en el campo de la epidemiología, las tasas de muertes y los cambios entre algunas enfermedades, también se tienen en cuenta variedades de agentes externos como lo son la política y la economía, tasas de natalidad entre otras.

Después de una larga descripción de los estudios en los cuales se basaron para la realización del modelo, se hizo una descripción de los tres determinantes previamente mencionados y en cada uno se crearon variedad de gráficas donde se veía reflejado los resultados de cada uno de los determinantes.

Este fue un estudio que abarcó gran variedad de departamentos Colombianos, distintos estratos sociales, varios años como el tiempo de recolección de la información y gran variedad de estudios que lo convierten en un estudio lleno de bases concisas para dar resultados más que importantes para la demografía del territorio colombiano.

VI. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

En una isla habita un pueblo llamado los Arhus. Se sabe que los recursos con los que cuentan son limitados. En el año x , la población estuvo expuesta a una epidemia transmisible por contacto con los infectados. Los individuos infectados se pueden recuperar por medio de un tratamiento. Luego de 5 años de convivir con la epidemia, se encontró una vacuna (se aplica a la población susceptible) que hace que los individuos no se contagien, pero no los hace inmunes. En algunos casos la epidemia es mortal. En sus viajes a conocer nuevas tierras, el pueblo contrata trabajadores y recluta soldados que son llevados a la isla. Aparte de la epidemia, la población puede verse reducida a causa de la mortalidad natural.

VII. SOLUCIÓN PLANTEADA

Diagrama que representa el problema

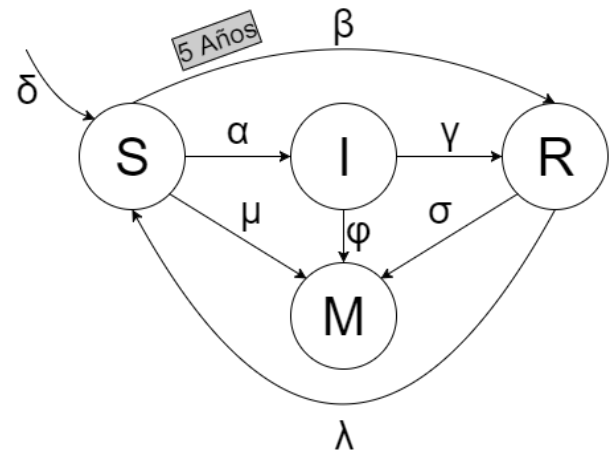


Figura 1- Diagrama del modelo expuesto en el problema

Tal como se puede ver en el diagrama anterior se cuenta con cuatro grupos diferentes representados por la letras mayúsculas “S,I,R,M”, las cuales representan respectivamente la población Susceptible, la población Infectada con la enfermedad, la población Recuperada y la población que ha Muerto por cualquier tipo de causa incluida la enfermedad.

Las demás variables representan diferentes tasas de cambio de la población y se describen a continuación.

- **δ (Delta):** Representa la tasa de cambio de las nuevas personas que ingresan a la población, estos son los trabajadores contratados y los soldados, para este caso no se tendrá en cuenta ninguna tasa de natalidad, ya que no se habla al respecto en el problema.
- **β (Beta):** Representa la tasa de cambio entre los susceptibles y los recuperados por vacunación, cabe anotar que empieza a funcionar a partir del quinto año de la epidemia.
- **α (Alfa):** Representa la tasa de cambio entre los susceptibles y los infectados por contacto.
- **γ (Gama):** Representa la tasa de cambio con la cual se recupera la población infectada.
- **λ (Lambda):** Representa la tasa de cambio con la cual los recuperados vuelven a ser susceptibles a la enfermedad luego de cierto tiempo.
- **μ (Mi):** Representa la tasa de cambio con la cual la población de susceptibles muere.
- **ϕ (Fi):** Representa la tasa de cambio con la cual mueren los infectados, ya sea por la infección o por cualquier otra razón.
- **σ (Sigma):** Representa la tasa de cambio con la cual los recuperados mueren.

Modelo del problema

1.
$$\frac{dS}{dt} = S(\delta - \alpha I - \mu - \beta \frac{1}{1 + e^{(500-100t)}}) + \lambda R$$
2.
$$\frac{dI}{dt} = I(\alpha S - \gamma - \phi)$$
3.
$$\frac{dR}{dt} = \beta S \frac{1}{1 + e^{(500-100t)}} + \gamma I - R(\sigma + \lambda)$$
4.
$$\frac{dM}{dt} = \mu S + \phi I + \sigma R$$

La ecuación $\frac{1}{1 + e^{(500-100t)}}$ representa la función de activación, que se usa para garantizar que a partir de los cinco años de haber comenzado la epidemia, algunas personas puedan pasar directamente al grupo de la población recuperada gracias a la vacuna.

Supuestos y limitaciones del modelo

Las variables que representan las tasas de reducción de la población no representan la causa del deceso, sino el porcentaje con el cual la población de un conjunto específico dentro del modelo tiende a reducirse de acuerdo a diferentes razones, de aquí que sean diferente para cada conjunto. Cabe anotar que para el caso de los infectados (**I**) la variable ϕ incluye también la enfermedad misma como razón de la muerte, así como otras causas, porque no se requiere saber cuál es la tasa de mortalidad por la enfermedad, de otro modo se debería crear una nueva variable para representar dicho valor.

Se da por supuesto que la población no crece por natalidad, es por ello que el conjunto de los susceptibles es el único que tiene una variable de entrada, la cual representa los trabajadores y soldados que vienen de otros lugares y entran a formar parte de la población vulnerable.

Por otro lado, los tiempos de efectividad de la vacuna, el periodo de incubación del virus y la durabilidad de la infección en la población no se tendrán en cuenta, tampoco se establece el tiempo que una persona permanece siendo susceptible antes de infectarse y mucho menos el tiempo que un recuperado tarda en volver a ser susceptible, debido a lo cual la transición de un grupo a otro puede ser inmediata. Debido a todo lo anterior el modelo no será tan efectivo ni acertado de acuerdo a la realidad de un suceso de este tipo.

En cualquiera de los casos, se supondrá que la población inicial es de 100000 individuos e inicialmente hay 1 infectado que hace parte de la misma. Debido a la libertad del problema, la interacción entre los diferentes grupos poblacionales (Susceptibles, infectados, recuperados y muertos), se crearon teniendo en cuenta que la isla cuenta con pocos recursos. Con esto en mente, la vacunación no se aplica efectivamente, y los tratamientos son insuficientes debido a lo cual la expansión de la infección puede ser muy alta.

Resumiendo, se identifican algunas fallas conceptuales y numéricas dejando de lado variables importantes para el modelo, como son la natalidad, y los tiempos de efecto de los tratamientos y de paso de un grupo poblacional a

otro, además numéricamente, las tasas que se han elegido no representan algo cercano realidad.

Población constante

Para lograr que la población permanezca constante en el tiempo se hizo un tanteo, por medio de cuyos resultados se logra una aproximación durante algunos centenares de años, es importante resaltar que los resultados pueden distar un poco de la realidad, las tasas halladas se presentan a continuación.

$$\delta = 0.001$$

$$\beta = 0.05$$

$$\alpha = 0.000009$$

$$\gamma = 0.08$$

$$\lambda = 0.005$$

$$\mu = 0.001$$

$$\phi = 0.00000003$$

$$\sigma = 0.00000001$$

Al hacer iguales a δ (tasa de nuevos individuos) y μ (tasa de susceptibles que mueren) se logra que la población permanezca constante durante los primeros 5 años hasta que la función de activación inicie, para lograrlo se hace muy pequeña la tasa de infección α respecto a éstas dos, evitando que la nueva población se vaya directamente al grupo de población infectada.

Por otro lado, se puede ver que la tasa de población que se recupera por vacunación β a partir del quinto año, y los infectados que se recuperan γ son un poco próximas en su valor, esto para lograr un aumento paulatino en la población que se ha recuperado, sin embargo queda claro que son más altas que las tasas de muerte de los grupos de infectados y recuperados ϕ y σ respectivamente, para que la población no se vea reducida de manera drástica y de este modo λ , que representa el porcentaje de población que vuelve a ser susceptible a la enfermedad, no sea nulo en ningún momento, logrando mantener así un flujo constante de la población que cambia de un grupo a otro.

A continuación se presenta una gráfica del comportamiento poblacional para un tiempo de 100 años.

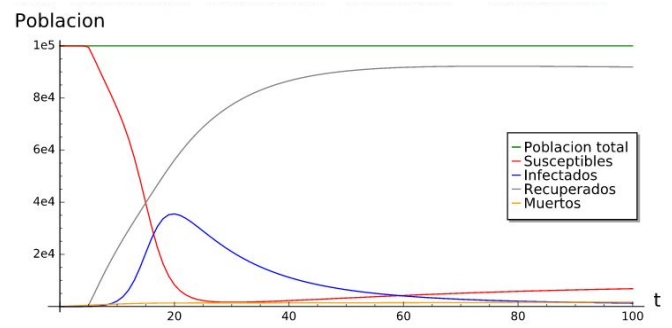


Figura 2- Gráfica de población constante

Analizando la gráfica con detenimiento se puede ver que hasta el año 5 la población susceptible permanece constante debido a que la tasa de mortalidad de dicho grupo es igual a la población que ingresa, luego de este año empieza a crecer la población de recuperados debido al inicio de la función de activación y también se empiezan a ver pequeños cambios en el comportamiento de la población de infectados, la cual empieza a crecer obteniendo su máximo valor en el año 20.

Por su parte, también se puede ver que la población susceptible obtiene su valor más bajo aproximadamente en el año 27. Mientras la población de recuperados sigue en ascenso y la de infectados en descenso, debido a lo cual empieza a aumentar nuevamente en el año 37 la población susceptible. La población de muertos se mantiene casi de forma constante.

Aproximadamente en el año 60, se empieza a ver cómo la población de recuperados toma un valor casi constante en el tiempo, mientras los susceptibles siguen en un aumento constante, pero lento debido a que la cantidad de infectados sigue en descenso y los muertos permanecen en un valor casi constante.

Finalmente, en el año 80 ya se puede ver cómo la población de infectados prácticamente se iguala con la población de muertos y toma un valor casi constante, mientras la cantidad de recuperados va en una lenta disminución, que provoca que la población de susceptibles aumente casi en igual proporción debido a la tasa de cambio λ .

Población extinta en 100 años

Para lograr que la población se extinga en un plazo de 100 años, se hizo un tanteo similar al anterior, sin embargo es importante aclarar que al extender el tiempo más allá de los 100 años pueden reaparecer nuevos individuos, debido a que el modelo no contempla el hecho de que deben haber personas vivas en la población para poder traer gente de otros lugares. Las tasas obtenidas se presentan a continuación.

$$\delta = 0.001$$

$$\beta = 0.16$$

$$\alpha = 0.000009$$

$$\gamma = 0.0007$$

$$\lambda = 0.002$$

$$\mu = 0.0009$$

$$\phi = 0.099$$

$$\sigma = 0.15$$

El porcentaje de población nueva δ y el porcentaje de infección α permanecen igual, sin embargo la tasa de recuperados por la vacuna β aumentó en 0.11, razón por la cual la tasa de muerte para este grupo μ se disminuyó, por su parte, la tasa de infectados que se recuperan γ disminuyó mucho, mientras las tasas de muerte para los infectados y los recuperados, ϕ y σ respectivamente, aumentaron de forma elevada, logrando con esto una disminución progresiva, pero no drástica de la población.

A continuación se puede evidenciar el comportamiento de cada grupo poblacional por medio de la gráfica presentada.

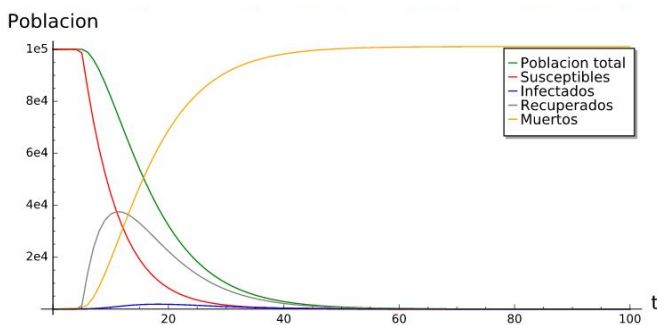


Figura 1- Gráfica de población extinta en 100 años

De la gráfica se puede ver que la población permanece sin mucho cambio durante los cinco primeros años, sin embargo al iniciar la función de activación, se dispara el crecimiento de la población de recuperados y empiezan a disminuir los susceptibles, los infectados para este momento son mínimos, no obstante es visible el aumento de los muertos debido a que tasa de muerte de los recuperados es muy elevada.

Aproximadamente en el año 11 la población de recuperados alcanza su máximo valor, mientras los infectados lo alcanzan aproximadamente en el año 16 para luego empezar a disminuir hasta hacerse imperceptibles en la gráfica, y posteriormente llegar a cero a partir del año 81 para los susceptibles, 97 para los recuperados y 99 para los infectados.

Finalmente, se puede ver cómo la población total disminuye hasta hacerse imperceptible en el gráfico, mientras los muertos aumentan en proporción inversa a esta.

VIII. TRABAJO FUTURO

Para mejorar el modelo se debe incluir que abarca las ciencias sociales y la medicina, en este trabajo incluimos análisis mayormente estadístico, por lo cual se debería mejorar en la parte de la medicina y las ciencias sociales.

El análisis debe entonces, contemplar todas las condiciones ya mencionadas, para lo cual se necesitaría un equipo especializado conformado por varios expertos en las áreas de la medicina y las ciencias sociales para analizar a fondo el problema, además la epidemiología es una ciencia que intersecta estas 2 disciplinas [4] .

Para hacer un buen análisis se necesitaría saber primero el tipo de epidemia por parte de los médicos, que consecuencias biológicas existen en los individuos infectados, se podría conocer la duración de enfermedad, cómo se contagia la población de esta, la efectividad de la vacuna, el tiempo que esta dura activa, que tipo de enfermedad es, que partes del cuerpo afecta, cómo se transmite y las causas de muerte en cada grupo de la población.

A Partir de estos datos un farmacólogo genera la vacuna contra la epidemia, en este caso los removidos o inmunes pueden pasar a ser susceptibles y por lo tanto contraer otra vez la enfermedad, esto puede deberse a causas sanitarias, por lo tanto la vacuna no es suficiente para erradicar la epidemia, aquí es donde entran las ciencias sociales.

El trabajo social puede ser llevado a cargo de un trabajador social, el cual hace un diagnóstico de la población, preguntándose, qué causas socioeconómicas llevaron a la propagación de la epidemia, cómo influye la historia de esta comunidad en las condiciones sanitarias que dieron paso a la epidemia y qué acciones se pueden llevar a cargo para concientizar a la población.

Por ejemplo, si es una enfermedad de transmisión sexual, podría deberse a hábitos de la población, pobreza o un conocimiento pobre sobre sexualidad, también puede ser por hábitos de higiene o condiciones sanitarias, o todas las condiciones mencionadas anteriormente.

Después de un análisis social, médicos y trabajadores sociales pueden colaborar en el área de concientización para indicar a la población las condiciones en las cuales se puede reducir o erradicar la epidemia, esto hace parte de la epidemiología social [2].

IX. CONCLUSIONES

“La epidemiología es la rama de la salud pública que tiene como propósito describir y explicar la dinámica de la salud poblacional, identificar los elementos que la componen y comprender las fuerzas que la gobiernan, a fin de intervenir en el curso de su desarrollo natural.”

Sergio López Moreno et al. [4]

El modelo aquí planteado sólo considera las variables matemáticas del problema, pero no contempla el gran universo que hay detrás de la epidemiología, pues no se toman en cuenta de manera profunda las variables sociales y biológicas que intervienen en el problema, aun así el modelo simple que explica en forma macro la epidemia, es un paso inicial desde el

cual se puede construir un modelo más detallado, pero sin llegar a complejidades innecesarias.

X. REFERENCIAS

[1] W. Kermack and A. McKendrick, "*A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*". *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1st ed. 1927.

[2] C. Borrell, "Epidemiología social: la persona, la población y los determinantes sociales de la salud", *Raco.cat*, 2015. [Online]. Available: <http://www.raco.cat/index.php/QuadernsFDAE/article/viewFile/289650/377977>. [Accessed: 19- Nov- 2016].

[3] M. Mesa Mazo, "Modelo matemático para la dinámica de transmisión del VIH/SIDA en una población sexualmente activa", *Scielo*, 2010. [Online]. Available: <http://www.scielo.org/pdf/rsap/v12n2/v12n2a14.pdf>. [Accessed: 19- Nov- 2016].

[4] S. López-Moreno, F. Garrido-Latorre and M. Hernández-Ávila, "Desarrollo histórico de la epidemiología: su formación como disciplina científica", *scielosp.org*, 2000. [Online]. Available: <http://www.scielo.org/pdf/spm/v42n2/2382.pdf>. [Accessed: 19- Nov- 2016].

[5] Mayorga Carlos, "Tendencia de la mortalidad y sus determinantes como parte de la transición epidemiológica en Colombia", *Javeriana.edu*, 2004. [Online]. Available: <http://revistas.javeriana.edu.co/index.php/gerepolsal/article/download/2771/2040> [Accessed: 19-Nov-2016]