Konečné automaty (FA) a logiky nad slovy. Logika 1.řádu (FOL) a monadická logika 2.řádu (MSOL): syntax a sémantika FOL a MSOL, principy převoditelnosti mezi FA a formulemi MSOL. Automaty nad nekonečnými slovy a omega-regulární jazyky.

1 FOL a MSOL nad slovami

- First order logic: Štandardná FOL kde kvantifikujem cez pozície v slove a mám k dispozícií predikáty $x < y$ a $Q_a(x)$ - teda pozícia x je pred pozíciou y a na pozícií x sa nachádza znak a.
- Pokiaľ má formula voľné premenné, potrebujem ešte k tomu interpretáciu.
- Pozn.: Použitím $\exists$ vynucujem že slovo je neprázdne.
- Môžem si dodefinovať predikáty ako first/last (neexsituje y menší/väčší ako x), prípadne next pozíciu (neexsituje z väčšie ako x a menšie ako y).
- FOL nemá ani vyjadrovaciu silu regulárnych jazykov (jazyk slov párnej dĺžky nie je vyjadriteľný).
- Monadic second order logic: Rozšírime FOL o kvantifikáciu nad množinami pozícií a predikát $x \in X$.
- Teraz môžem vyjadriť napr. predikát Even (x je v množine iff je druhé alebo existuje pozícia v množine ktorá je o dve predomnou) a jazyk párne dlhých slov (existuje množina pozícií ktoré sú párne a posledná pozícia slova je v tejto množine).
- MSOL je ekvivalentná regulárnym jazykom. Dôkaz prekladom:
  - FA $(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ to MSOL (okrem prázdneho slova, to sa musí pridať do formule ešte explicitne):
  - 1) Pozície i v slove sú rozdelené do n množín (n je počet stavov), podľa toho, či sa automat nachádza v danom stave po prečítaní prvých i znakov nejakého slova. Pozn.: Tu už uvažujeme "pre fixné slovo", keďže to je to o čom sa formula vyjadruje.
  - 2) Skonštruujeme predikát $visits(X_0....X_n)$ ktorý toto vyjadruje. Konkrétne chceme povedať že: a) Existuje x t.ž. x je prvá pozícia a ak $Q_a(x)$ a súčasne $q_i \in (q_0, a)$, potom $x \in X_i$ (inicializácia). b) Množiny pozícií sú dizjunktné a každá pozícia patrí do nejakej množiny c) Pozície zachovávajú prechodovú funkciu, teda ak mám $q_i \in (q_j, a)$, mám $x \in X_j$ a $Q_a(x)$, tak $y = x + 1$ patrí do X_i.
  - 3) S takýmto predikátom potom môžem povedať že existujú tieto množiny a súčasne posledná pozícia leží v množine odpovedajúcej akceptujúcemu stavu.
  - MSOL to FA:

- Abeceda automatu je pôvodná abeceda, plus jeden bit pre každú voľnú premennú formule, ktorý vyjadruje či zrovna som, alebo nie som na tejto pozícií (res. na pozícií v tejto množine). Automat potom budujem induktívne:
- Pre $Q_a(x)$ — mám jednu voľnú premennú, dva stavy medzi kyotými sa môžem presunúť pod $[a, 1]$, inak cyklím.
- $x < y$ - mám dve premenné a tri stavy nad ktorými cyklím. Prvý presun robím pri $[?, 1, 0]$, druhý pri $[?, 0, 1]$ (? znamená že mi je jedno aké písmeno čítam).
- $x \in X$ - mám dve premenné a dva stavy, presúvam sa pod $[?, 1, 1]$.
- $\varphi = \not\psi$ — nemôžem urobiť hlúpy komplement, lebo by som mohol akceptovať slová ktoré nie sú platnými kódmi (napr. premenná x by mohla mať viac hodnôť). Môžem ale urobiť komplement a sprienikovať to s automatom pre povolené slová (ktorý viem vyrobiť ak viem aká je štruktúra mojich premenných).
- $\varphi = \varphi \vee \varphi$ — musím vhodne rozšíriť abecedy oboch automatov, aby obsahovali rovnaké premenné (tj. pridávam nové pozície, pričom ak mám na prechode $[a, 0]$ tak zamením za $[a, 0, 1]$ aj $[a, 0, 0]$). Potom môžem urobiť obyčajné zjednotenie.
- $\varphi = \exists x$ (alebo X, je to jedno) — odstránim danú pozíciu zo symbolov (fakt, nič viac).
- Veľkosť výsledného automatu môže byť až v ráde ”veži exponentov”pričom výška veže je úmerná počtu negácií.