Matematická logika. Výroková a predikátová logika, syntaxe, sémantika. Odvozovací systémy, formální důkazy. Korektnost a úplnost odvozovacích systémů. Gödelovy věty o neúplnosti.

1 Výroková a predikátová logika

- Sylogizmy, Booleova algebra
- Matematická logika: Použitie formálnej logiky na vyjadrovanie sa o matematických štruktúrach.
- Výroková logika:
  - Výroková funkcia $F_i : [0,1]^n \to [0,1]$, valuácia: $v : Var \to [1,0]$, Systém $\mathcal{L}(F_0, ..., F_n)$ - týpicky F_i sú napr. $\wedge, \vee, \neg, ...$.
  - Syntax: $\varphi = X \mid F_i(\varphi_1, ..., \varphi_m)$, sémantika je zjavná.
  - Formula je pravdivá/nepravdivá, splniteľná/nesplniteľná, tautológia, kontradikcia.
  - φ je tautologický dôsledok súboru T, $T \models \varphi$, keď všetky valuácie spĺňajúce všetky $\psi \in T$ spĺňajú aj φ. Ak T je prázdny, φ je tautológia a $\models \varphi$.
  - Systém $\mathcal{L}$ je plnohodnotný ak pre ľubovoľnú výrokovú funkciu existuje ekvivalentná formula vygenerovateľná v $\mathcal{L}$.
  - Shefferovské spojky: Plnohodnotné sami o sebe (NAND, NOR).
  - Normálne tvary: CNF, DNF, literál, klauzula (disjunkcia), duálna klauzula (konjunkcia).
- Predikátová logika:
  - Premenné $x, y, ...$, jazyk $\mathcal{L}$: funkčné symboly f_i, predikátové symboly P_i.
  - Term: $t = x \mid f_i(t_1, ..., t_m)$, Formula: $\varphi = P_i(t_0, ..., t_1) \mid t_0 = t_1 \mid \varphi \to \varphi \mid \neg\varphi \mid \forall x.\varphi$ (Rovnosť je optional).
  - voľný/viazaný výskyt, substituovateľnosť (nesmiem vyrobiť viazaný výskyt z voľného), uzavretosť (bez voľných výskytov), univerzálny uzáver.
  - Realizácia $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$: Univerzum M, realizácia funkčných symbolov $f_i : M^m \to M$ (funkcia), realizácia predikátov: $P_i \subseteq M^m$ (relácia), ohodnotenie $e : Var \to M$.
  - Formula je pravdivá ($\mathcal{M} \models \varphi$) ak je pravdivá pri všetkých ohodnoteniach ($\mathcal{M} \models \varphi[e]$).
  - Model formule je realizácia v ktorej je formula splnená.
  - Teória T — množina prvorádových formulí (prvky sú axiomy teórie), $\mathcal{M} \models T$ — $\mathcal{M}$ je modelom T, teda všetky axiómy sú pravdivé v $\mathcal{M}$
  - Formula je sémantickým dôsledkom teórie ($T \models \varphi$) ak φ je splnená vo všetkych modeloch teórie T.

2 Odvodzovacie systémy

- Odvodzovacý systém: Sada axiómov a (syntaktických) odvodzovacích pravidiel.
- Dôkaz: Postupnosť formulí taká že každá fomula je buď axióm alebo vznikne aplikáciou pravidla na nejaké (v postupnosti) menšie formule. Na konci postupnosti je dokazované tvrdenie.
- Dokázateľná z predpokladu/teórie T — $T \vdash \varphi$, dokázateľná $\vdash \varphi$ (bez predpokladov/teórie).
- Korektnosť: Čo je dokázateľné, je pravdivé: $T \vdash \varphi \implies T \models \varphi$.
- Úplnosť: Čo je pravdivé, je dokázateľné: $T \models \varphi \implies T \vdash \varphi$.
- Lukasiewicz: Odvodzovací systém pre výrokovú logiku:
  - A1: $A \to (B \to A)$
  - A2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
  - A3: $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$
  - MP (modus ponens): Z $(A \to B)$ a A odvoď B.
- Odvodzovací systém pre predikátovú logiky:
  - A1-3
  - A4 (špecifikácia): $\forall x.\varphi \to \varphi(x/t)$ (ak sa x dá substituovať za t)
  - A5 (distribúcia): $(\forall x.(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x.\psi))$ (ak x nemá voľný výskyt v φ)
  - MP a GEN (generalizácia): Z φ odvoď $\forall x.\varphi$.
  - Rovnosť (optional): R1: $x = x$, R2: $(x = y \wedge P(x)) \to P(y)$, R3: $x = y \to f(x) = f(y)$ (pre všetky arity)
- Teoria je sporná, ak je v nej dokázateľná ľubovoľná formula.
- Veta o dedukcií (pre uzavreté a výrokové formule): Ak $T \vdash (\varphi \to \psi)$, potom $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.
- Veta o kompaktnosť: Teória/súbor predpokladov T je má model/ je splniteľný iff každá konečná podteória/podsúbor má model/je splniteľný.
- Lövenheim-Skolem: Ak pre ľubovoľné n existuje model teórie s nosičom mohutnosti n, tak teória má aj model s nekonečným nosičom.

3 Gödel

- 1. veta: Existuje uzavretá formula ktorá je pravdivá v $\mathcal{N}$ ale nie je dokázateľná v PA.
- 2. vera: V PA (Alebo inej dosť silnej teórií) nie je dokázateľná formula $CONSIS$
- Tu PA je Peanova aritmetika, $\mathcal{N}$ jazyk aritmetiky a $CONSIS$ je formula, ktorá tvrdí že existuje nedokázateľná formula (a teda systém je bezsporný).