**Konečné automaty (FA) a logiky nad slovy. Logika 1.řádu (FOL) a monadická logika 2.řádu (MSOL): syntax a sémantika FOL a MSOL, principy převoditelnosti mezi FA a formulemi MSOL. Automaty nad nekonečnými slovy a omega-regulární jazyky.**

# 1 FOL a MSOL nad slovami

- First order logic: Štandardná FOL kde kvantifikujem cez pozície v slove a mám k dispozícií predikáty $x < y$ a $Q_a(x)$ - teda pozícia $x$ je pred pozíciou $y$ a na pozícií x sa nachádza znak $a$.
- Pokiaľ má formula voľné premenné, potrebujem ešte k tomu interpretáciu.
- Pozn.: Použitím $\exists$ vynucujem že slovo je neprázdne.
- Môžem si dodefinovať predikáty ako first/last (neexsituje $y$ menší/väčší ako $x$), prípadne next pozíciu (neexsituje $z$ väčšie ako $x$ a menšie ako $y$).
- FOL nemá ani vyjadrovaciu silu regulárnych jazykov (jazyk slov párnej dĺžky nie je vyjadriteľný).
- Monadic second order logic: Rozšírime FOL o kvantifikáciu nad množinami pozícií a predikát $x \in X$.
- Teraz môžem vyjadriť napr. predikát Even (x je v množine iff je druhé alebo existuje pozícia v množine ktorá je o dve predomnou) a jazyk párne dlhých slov (existuje množina pozícií ktoré sú párne a posledná pozícia slova je v tejto množine).
- MSOL je ekvivalentná regulárnym jazykom. Dôkaz prekladom:
  - FA $(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ to MSOL (okrem prázdneho slova, to sa musí pridať do formule ešte explicitne):
  - 1) Pozície $i$ v slove sú rozdelené do $n$ množín ($n$ je počet stavov), podľa toho, či sa automat nachádza v danom stave po prečítaní prvých $i$ znakov nejakého slova. Pozn.: Tu už uvažujeme "pre fixné slovo", keďže to je to o čom sa formula vyjadruje.
  - 2) Skonštruujeme predikát $visits(X_0....X_n)$ ktorý toto vyjadruje. Konkrétne chceme povedať že: a) Existuje $x$ t.ž. $x$ je prvá pozícia a ak $Q_a(x)$ a súčasne $q_i \in (q_0, a)$, potom $x \in X_i$ (inicializácia). b) Množiny pozícií sú dizjunktné a každá pozícia patrí do nejakej množiny c) Pozície zachovávajú prechodovú funkciu, teda ak mám $q_i \in (q_j, a)$, mám $x \in X_j$ a $Q_a(x)$, tak $y = x + 1$ patrí do $X_i$.
  - 3) S takýmto predikátom potom môžem povedať že existujú tieto množiny a súčasne posledná pozícia leží v množine odpovedajúcej akceptujúcemu stavu.
  - MSOL to FA:

- Abeceda automatu je pôvodná abeceda, plus jeden bit pre každú voľnú premennú formule, ktorý vyjadruje či zrovna som, alebo nie som na tejto pozícií (res. na pozícií v tejto množine). Automat potom budujem induktívne:
- Pre $Q_a(x)$ — mám jednu voľnú premennú, dva stavy medzi kyotými sa môžem presunúť pod $[a, 1]$, inak cyklím.
- $x < y$ - mám dve premenné a tri stavy nad ktorými cyklím. Prvý presun robím pri $[?, 1, 0]$, druhý pri $[?, 0, 1]$ (? znamená že mi je jedno aké písmeno čítam).
- $x \in X$ - mám dve premenné a dva stavy, presúvam sa pod $[?, 1, 1]$.
- $\varphi = \not\psi$ — nemôžem urobiť hlúpy komplement, lebo by som mohol akceptovať slová ktoré nie sú platnými kódmi (napr. premenná $x$ by mohla mať viac hodnôť). Môžem ale urobiť komplement a sprienikovať to s automatom pre povolené slová (ktorý viem vyrobiť ak viem aká je štruktúra mojich premenných).
- $\varphi = \varphi \vee \varphi$ — musím vhodne rozšíriť abecedy oboch automatov, aby obsahovali rovnaké premenné (tj. pridávam nové pozície, pričom ak mám na prechode $[a, 0]$ tak zamením za $[a, 0, 1]$ aj $[a, 0, 0]$). Potom môžem urobiť obyčajné zjednotenie.
- $\varphi = \exists x$ (alebo $X$, je to jedno) — odstránim danú pozíciu zo symbolov (fakt, nič viac).
- Veľkosť výsledného automatu môže byť až v ráde "veži exponentov"pričom výška veže je úmerná počtu negácií.

# 2 Omega automaty

- Labelled Transition System: $(S, \Sigma, \Delta, S_{in})$ — stavy, abeceda, prechodová relácia, inicálne stavy.
- By default, všetko je nedeterministické!
- Buchi automaton: $(\Sigma, Q, \delta, s_0, F)$ - akceptuje ak existuje beh, ktorý navštívi $F$ nekonečne krát.
- Uzavretosť Buchi: Zjednotenie (trivialne ak dovolim viac inicialnych stavov, inak pridam novy init), Prienik (tiered konštrukcia), Regulárny.Buchi (proste zreťazím), Regulárny$^\omega$ (z akceptujúcych stavov sa zacyklím do iniciálneho)
- $\omega$-regulárne jazyky sú tvaru $A.B^\omega$ kde $A$ a $B$ sú regulárne jazyky a sú rozpoznávané práve Buchiho automatmi.
- Neprázdnosť omega jazyka je rozhodnuteľná (NLOG úplná ako reachabilita). Neuniverzalita je PSPACE.

- Buchi su uzavrete aj na komplement, ale dokaz je TODO.
- Zobecnený Buchi - prienik automatov s rovnakými stavmi a prechodmi, len inými accept množinami.
- Muller — podmienka: množiny stavov, slovo akceptuje ak inf je presne jedna z množín. Je silou ekvivalentná s Buchi, ale na vyjadrenie všetkých jazykov mi stačia deterministické automaty.
- Rabin — podmienka: mám dvojice množín stavov, slovo akceptuje ak inf má prienik s prvou množinou a nemá prienik s druhou. Tiež sú ekvivalentné s Buchi.
- Street — podmienka: tiež dvojice množín, slovo akceptuje ak inf má prienik s prvou, tak má prienik aj s druhou.