제14강: 옵션 가치평가 및 변동성 매매

금융 통계 및 시계열 분석

TRADE INFORMATIX

2014년 2월 25일

목차

1. 확률 프로세스 (Stochastic Process)
   - 브라우니안 모션 (Brownian Motion)
2. 옵션 가격 결정 (Option Pricing)
   - Black-Scholes Equation
3. 옵션 헷지 (Option Hedge) 와 변동성 매매 (Volatility Trading)
   - 옵션 Greek
   - 옵션 Hedge
   - 옵션 Hedge 손익
   - Variance Swap

확률 프로세스 (Stochastic Process)

- 이산시간 시계열 (discrete-time series)
  - 계별 시간 $\{t_i\}$ 의 값 $\{x(t_i)\}$ 을 특정 분포의 샘플값으로 가정
- 연속시간 시계열 (discrete-time series)
  - 확률 프로세스 (Stochastic Process)
  - 시간 t 에 대한 함수 전체 $\{X(t), t \geq 0; \omega_i\}$ 를 하나의 샘플로 가정
  - 브라우니안 모션 (Brownian Motion) 를 이용한 이토 프로세스 (Ito Process) 로 표현

브라우니안 모션 (Brownian Motion)

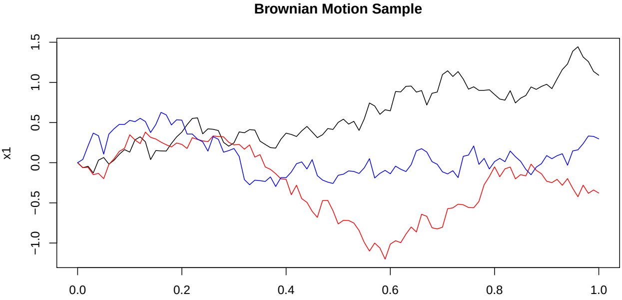
- ❑ 정적통계분석, 이산시간 시계열 분석에서의 정규분포의 역할
- ❑ 위너 프로세스 (Wiener Process)
- ❑ 다음과 같은 특성을 지니는 random walk 샘플을 생성
  - ▶ 모든 시간 구간 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ 동안의
  - ▶ 증가분 $W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1})$ 이
  - ▶ 서로 독립적 (independent) 이고
  - ▶ 분산이 시간구간크기인 정규분포

$$
\begin{aligned}
E[W(t_{i+1}) - W(t_i))] &= 0 \\
\mathrm{Var}[W(t_{i+1}) - W(t_i))] &= t_{i+1} - t_i
\end{aligned}
$$

브라우니안 모션 시뮬레이션

- ❑ sde 패키지
- ❑ `BM(x=0, t0=0, T=1, N=100)`
  - ▶ `x` : 초기값 $x(t_0)$
  - ▶ `t0` : 초기시간 t_0
  - ▶ `T` : 종료시간 T
  - ▶ `N` : 초기시간과 종교시간 사이의 이산시간 샘플 값 (discrete-time sampling)

```
> library("sde")
> set.seed(1)
> x1 <- BM(); x2 <- BM(); x3 <- BM();
> plot(x1, ylim=c(min(c(x1, x2, x3)), max(c(x1, x2, x3))), main="Brownian Motion Sample")
> lines(x2, col="red"); lines(x3, col="blue")
```



브라우니안 모션의 Quadratic Variation

- Quadratic Variation
  - 임의의 미세한 시간구간 Π에 대한 미세 분산의 합

$$[f, f](T) = \sum_{||\Pi|| \to 0} (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2$$

- 일반적인 연속함수는 Quadratic Variation = 0
- 브라우니안 모션은 Quadratic Variation = T
- 미분 표현

$$\begin{aligned} dW(t)dW(t) &= dt \\ dW(t)dt &= 0 \\ dtdt &= 0 \end{aligned}$$

이토 미적분 (Ito Calculus)

- 브라우니안 모션의 Quadratic Variation 특성으로 인해
- 확률프로세스의 경우 일반적인 테일러 시리즈 전개가 적용되지 않음
- 일반적인 미분

$$df(x) = f_x(x)dx$$

- 이토 미분

$$\begin{aligned} df(W) &= f_w(W)dW + \frac{1}{2}f_{ww}(W)dW^2 \\ &= f_w(W)dW + \frac{1}{2}f_{ww}(W)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df(t, W) &= f_t(t, W)dt + \frac{1}{2}f_w(W)dW + \frac{1}{2}f_{ww}(W)dt \\ &= \left(f_t(t, W) + \frac{1}{2}f_{ww}(W)\right)dt + \frac{1}{2}f_W(w)dW \end{aligned}$$

이토 프로세스 (Ito Process)

❑ 브라우니안 모션과 결정론적 drift의 조합

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

❑ 이토 프로세스의 미분

$$\begin{aligned}
df(t,X) &= f_t(t,X)dt + \frac{1}{2}f_x(X)dX + \frac{1}{2}f_{xx}(X)dX^2 \\
&= f_t(t,X)dt + \frac{1}{2}f_x(X)\left(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)\right) + \\
&\quad \frac{1}{2}f_{xx}(X)\left(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)\right)^2 \\
&= f_t(t,X)dt + \frac{1}{2}f_x(X)\left(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)\right) + \frac{1}{2}f_{xx}(X)\sigma^2(t)dt \\
&= \left(f_t(t,X) + \frac{1}{2}f_x(X)\mu(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(X)\sigma^2(t)\right)dt + \frac{1}{2}f_x(X)\sigma(t)dW(t)
\end{aligned}$$

Geometric Brownian Motion

- 옵션 가치평가를 위한 일반적인 주가 모형
- Black-Scholes 모형

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \\ \frac{dS(t)}{S(t)} &= \mu dt + \sigma dW(t) \end{aligned}$$

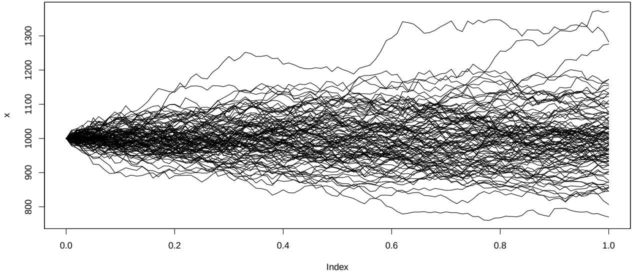
- 이토 적분

$$S(t) = S(0)\,\text{exp}\left\{\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t)\right\}$$

주가 시뮬레이션

- ❏ sde 패키지
- ❏ `sde.sim(t0=0, T=1, X0=1, N=100, M=1, model="BS", theta)`
  - ▶ `M` : 시뮬레이션 횟수
  - ▶ `theta` : drift와 변동성 (μ, σ)

```
> library("zoo")
> set.seed(1)
> x <- sde.sim(model="BS", theta=c(0.01, 0.1), X0=1000, M=100);
> plot.zoo(x, screen=1)
```



옵션의 종류

- Payoff
  - Plain Vanila Call/Put

$$\begin{aligned} \text{Payoff}_{\text{call}} &= \max(S-K,0) \\ \text{Payoff}_{\text{put}} &= \max(K-S,0) \end{aligned}$$

  - Digital (Binary) Call/Put
- 행사
  - Eurorean : 정해진 만기에만 행사 가능
  - American : 항상 행사 가능
  - Bermudan : 만기전 정해진 기간에 행사 가능
- 종목
  - Basket : 복수 종목의 포트폴리오
  - Spread : 두 종목의 가격차
  - Worst : 복수 종목 중 가장 수익률이 낮은 종목 기준
- Barrier
  - Knock-In : 지정 가격을 터치하면 옵션 생성
  - Knock-Out : 지정 가격을 터치하면 옵션 소멸
  - Asian : 일정 구간의 가격 평균

Black-Scholes Equation

- 콜옵션 가치 $V(t, S, K, r, T, \sigma)$ 방정식

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

- 해 (solution)

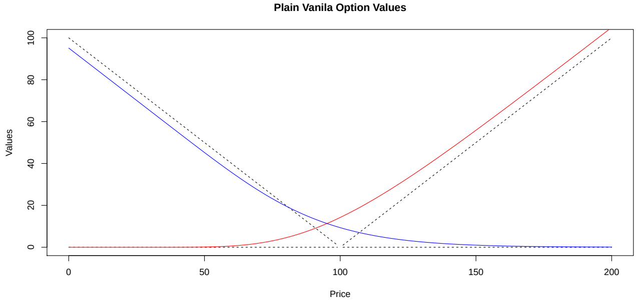
$$\begin{aligned}
V &= N(d_1)S - N(d_2)Ke^{-r(T-t)} \\
d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right] \\
d_2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right] \\
&= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}$$

Plain Vanila 옵션 가격 계산 명령

- fOptions 패키지
- `GBSOption(TypeFlag, S, X, Time, r, b, sigma)`
  - `TypeFlag` : `"c", "p"` (콜/풋)
  - `S` : 주가
  - `X` : 행사가
  - `Time` : 만기까지 잔존기간 (year)
  - `r` : 이자율 (1% pa = 0.01)
  - `b` : cost of carry = r - d + q (1% pa = 0.01)
  - `sigma` : 변동성 (1% pa = 0.01)

Plain Vanila 옵션 가격 계산 명령

```
> library("fOptions")
> Vc0 <- GBSOption('c', S=0:200, X=100, Time=0, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)
> Vc1 <- GBSOption('c', S=0:200, X=100, Time=1, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)
> Vp0 <- GBSOption('p', S=0:200, X=100, Time=0, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)
> Vp1 <- GBSOption('p', S=0:200, X=100, Time=1, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)
> plot(Vc0@parameters$S, Vc0@price, type='l', lty=2, xlim=c(0,200), ylim=c(0,100),
+      main="Plain Vanila Option Values", xlab="Price", ylab="Values")
> lines(Vc1@parameters$S, Vc1@price, col='red')
> lines(Vp0@parameters$S, Vp0@price, lty=2)
> lines(Vp1@parameters$S, Vp1@price, col='blue')
```



옵션 가격 결정 방법

- Closed Form Equation
  - Plain Vanila Call/Put, 디지털 옵션등 일부 간단한 옵션만 가능
- 몬데카를로 (Monte Carlo)
  - 가능한 주가 시나리오를 수치적으로 생성하여 기대치 계산
  - 단순하지만 계산량 많음
  - 복잡한 옵션의 경우 정확도가 떨어짐
  - Greek 계산 정확도 부족하여 헤지 불가능
- FDM (Finite Difference Method)
  - Black-Sholes 수식을 이산화 (discretization) 하여 행렬 방정식으로 변환
  - 3차 이상 불가능

옵션 Greek

❑ Greek : 가격결정변수들의 변화에 의한 옵션 가치의 변화량

❑ Delta : 기초자산가격 변화에 의한 옵션 가치의 변화량

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

❑ Theta : 시간 변화에 의한 옵션 가치의 변화량

$$\theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

❑ Vega : 변동성 변화에 의한 옵션 가치의 변화량

$$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

❑ Rho : 이자율 변화에 의한 옵션 가치의 변화량

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$$

고차 Greek 및 Cross Greek

- Gamma : 기초자산가격 변화에 의한 델타 변화량 (2차 미분)

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

- Speed : 기초자산가격 변화에 의한 감마 변화량 (3차 미분)

$$\text{Speed} = \frac{\partial^3 V}{\partial S^3}$$

- Vanna : 변동성 변화에 의한 델타 변화 혹은 주가변화에 의한 베가 변화 (cross 2차)

$$\text{Vanna} = \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} = \frac{\partial \nu}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma}$$

- Volga : 변동성 변화에 의한 베가 변화 (2차)

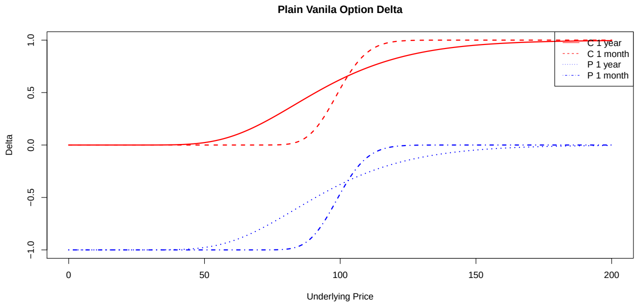
$$\text{Volga} = \frac{\partial \nu}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}$$

Plain Vanila 옵션 Greek 계산 명령

- fOptions 패키지
- `GBSGreeks(Selection, TypeFlag, S, X, Time, r, b, sigma)`
    - `Selection`：`"delta", "gamma", "vega", "theta", "rho"`

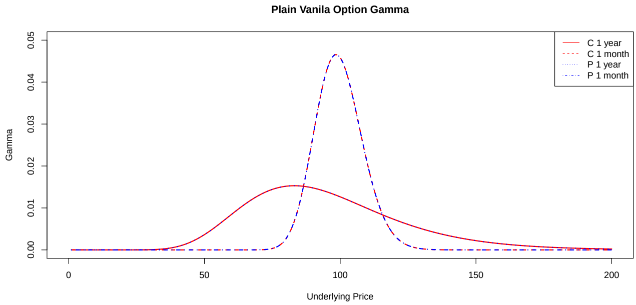
Plain Vanila 옵션 델타

```
> library("fOptions")
> VcDelta1 <- GBSGreeks('delta', 'c', S=0:200, X=100, Time=1, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)
> VcDelta2 <- GBSGreeks('delta', 'c', S=0:200, X=100, Time=1.0/12, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)
> VpDelta1 <- GBSGreeks('delta', 'p', S=0:200, X=100, Time=1, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)
> VpDelta2 <- GBSGreeks('delta', 'p', S=0:200, X=100, Time=1.0/12, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)
> plot(0:200, VcDelta1, type='l', lty=1, lwd=2, col="red", ylim=c(-1,1),
+      xlab="Underlying Price", ylab="Delta", main="Plain Vanila Option Delta")
> lines(0:200, VcDelta2, type='l', lty=2, lwd=2, col="red")
> lines(0:200, VpDelta1, type='l', lty=3, lwd=2, col="blue")
> lines(0:200, VpDelta2, type='l', lty=4, lwd=2, col="blue")
> legend("topright", col=c("red", "red", "blue", "blue"), lty=1:4,
+        legend=c("C 1 year", "C 1 month", "P 1 year", "P 1 month"))
```



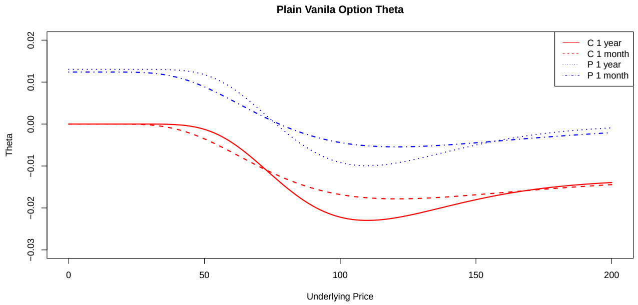
Plain Vanila 옵션 감마

```
> library("fOptions")
> VcDelta1 <- GBSGreeks('gamma', 'c', S=0:200, X=100, Time=1, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)
> VcDelta2 <- GBSGreeks('gamma', 'c', S=0:200, X=100, Time=1.0/12, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)
> VpDelta1 <- GBSGreeks('gamma', 'p', S=0:200, X=100, Time=1, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)
> VpDelta2 <- GBSGreeks('gamma', 'p', S=0:200, X=100, Time=1.0/12, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)
> plot(0:200, VcDelta1, type='l', lty=1, lwd=2, col="red", ylim=c(0,0.05),,
+      xlab="Underlying Price", ylab="Gamma", main="Plain Vanila Option Gamma")
> lines(0:200, VcDelta2, type='l', lty=2, lwd=2, col="red")
> lines(0:200, VpDelta1, type='l', lty=3, lwd=2, col="blue")
> lines(0:200, VpDelta2, type='l', lty=4, lwd=2, col="blue")
> legend("topright", col=c("red", "red", "blue", "blue"), lty=1:4,
+        legend=c("C 1 year", "C 1 month", "P 1 year", "P 1 month"))
```



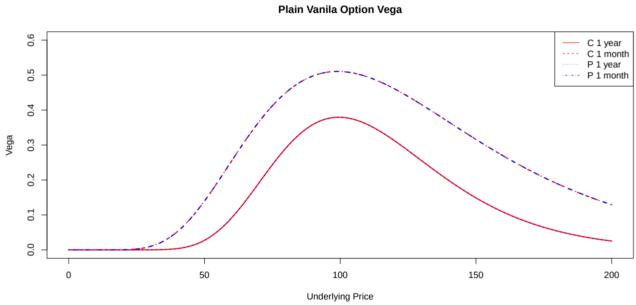
Plain Vanila 옵션 쎄타

```
> library("fOptions")
> VcDelta1 <- GBSGreeks('theta', 'c', S=0:200, X=100, Time=1, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)/365.0
> VcDelta2 <- GBSGreeks('theta', 'c', S=0:200, X=100, Time=2, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)/365.0
> VpDelta1 <- GBSGreeks('theta', 'p', S=0:200, X=100, Time=1, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)/365.0
> VpDelta2 <- GBSGreeks('theta', 'p', S=0:200, X=100, Time=2, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)/365.0
> plot(0:200, VcDelta1, type='l', lty=1, lwd=2, col="red", ylim=c(-0.03,0.02),
+      xlab="Underlying Price", ylab="Theta", main="Plain Vanila Option Theta")
> lines(0:200, VcDelta2, type='l', lty=2, lwd=2, col="red")
> lines(0:200, VpDelta1, type='l', lty=3, lwd=2, col="blue")
> lines(0:200, VpDelta2, type='l', lty=4, lwd=2, col="blue")
> legend("topright", col=c("red", "red", "blue", "blue"), lty=1:4,
+        legend=c("C 1 year", "C 1 month", "P 1 year", "P 1 month"))
```



Plain Vanila 옵션 베가

```
> library("fOptions")
> VcDelta1 <- GBSGreeks('vega', 'c', S=0:200, X=100, Time=1, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)/100.0
> VcDelta2 <- GBSGreeks('vega', 'c', S=0:200, X=100, Time=2, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)/100.0
> VpDelta1 <- GBSGreeks('vega', 'p', S=0:200, X=100, Time=1, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)/100.0
> VpDelta2 <- GBSGreeks('vega', 'p', S=0:200, X=100, Time=2, r=0.05, b=0.05, sigma=0.3)/100.0
> plot(0:200, VcDelta1, type='l', lty=1, lwd=2, col="red", ylim=c(0,0.6),
+      xlab="Underlying Price", ylab="Vega", main="Plain Vanila Option Vega")
> lines(0:200, VcDelta2, type='l', lty=2, lwd=2, col="red")
> lines(0:200, VpDelta1, type='l', lty=3, lwd=2, col="blue")
> lines(0:200, VpDelta2, type='l', lty=4, lwd=2, col="blue")
> legend("topright", col=c("red", "red", "blue", "blue"), lty=1:4,
+        legend=c("C 1 year", "C 1 month", "P 1 year", "P 1 month"))
```



Hedge

- Hedge
  - 전체 포트폴리오가 시장변화에 무관하게 가치를 유지하도록 관리
  - 시장변수의 변화에 대한 포트폴리오의 민감도 즉 Greek이 0이 되도록 hedge instrument를 추가 보유
  - hedge instrument는 보통 Greek계산이 쉽고 유동성이 많으며 거래비용이 적은 것을 선택
- Dynamic Hedge
  - 시간이 지나거나 시장변수가 변하면 시장변수의 변화에 대한 포트폴리오의 민감도 즉 Greek자체가 변화
  - 2차 Greek 혹은 Cross Greek의 값이 0이 아니라 발생하는 현상
  - 따라서 매일 hedge instrument 보유량을 조절할 필요가 있음
- Dynamic Delta Hedge
  - 여러 시장변수 중 가장 영향이 큰 기초자산가격에 대한 민감도만 hedge

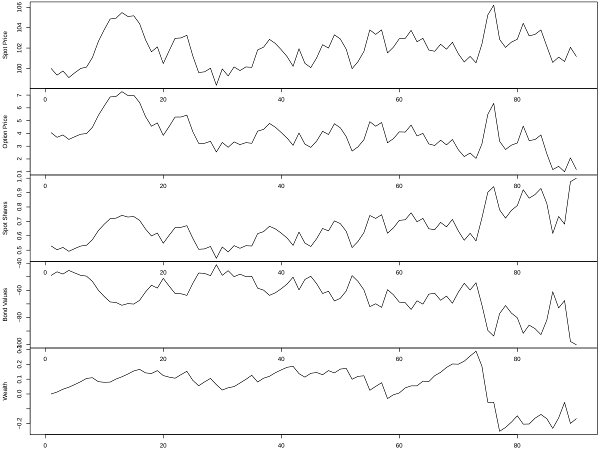
델타 Hedge Simulation 명령

- DynamicSimulation 패키지
- `deltaHedge(instruments, env, params)`
  - `instruments` : fInstrument 패키지의 `fInstrumentFactory` 명령으로 생성한 옵션 오브젝트
  - `env` : `DataProvider` 명령으로 생성한 시장정보 container
  - `params` : 시뮬레이션 파라미터
    - `dtSim` : 시뮬레이션 날짜 벡터
    - `transaction.cost` : 거래비용

델타 Hedge Simulation 예

```
> library("zoo")
> library("empfin")
> library("fInstrument")
> library("DynamicSimulation")
> set.seed(1)
> dtStart <- as.Date("2013-01-01")
> dtEnd <- as.Date("2013-03-31")
> S0 <- 100
> mu <- 0.01
> sigma <- 0.2
> d <- 0
> dtSim <- seq(dtStart, dtEnd, by=1)
> tSpot <- pathSimulator(dtSim=dtSim, nbPaths=100, S0=S0, path.param=list(mu=mu, sigma=sigma))
> c <- fInstrumentFactory("vanilla", quantity=1,
+         params=list(cp="c", strike=S0, dtExpiry=dtEnd, underlying="STOCK", discountRef="CD91", trace = FALSE))
> base.env <- DataProvider()
> setData(base.env, "STOCK", "Price", time(tSpot), as.matrix(tSpot))
> setData(base.env, "STOCK", "ATMVol", dtStart, sigma)
> setData(base.env, "STOCK", "DivYield", dtStart, d)
> setData(base.env, "STOCK", "discountRef", dtStart, "CD91")
> setData(base.env, "CD91", "Yield", dtStart, mu)
> hedge.result <- deltaHedge(list(c), base.env, params=list(dtSim=time(tSpot)), trace=FALSE)
> N <- 1
> par(oma=c(4, 2, 4, 1),mar=c(0, 5, 0, 4))
> layout(matrix(1:5))
> plot(hedge.result$spot[,N], type="l", ylab="Spot Price")
> plot(hedge.result$price[,N], type="l", ylab="Option Price")
> plot(hedge.result$stock[,N], type="l", ylab="Spot Shares")
> plot(hedge.result$bond[,N], type="l", ylab="Bond Values")
> plot(hedge.result$wealth[,N], type="l", ylab="Wealth")
```

델타 Hedge Simulation 결과 1 : 샘플 히스토리



델타 Hedge Simulation 결과 2-1

	time	stock price	delta	option	bond pos	hedge port.
1	1.00	100.00	0.53	4.06	-49.02	4.06
2	2.00	99.34	0.50	3.69	-46.34	3.71
3	3.00	99.76	0.52	3.88	-48.00	3.91
4	4.00	99.11	0.49	3.53	-45.31	3.58
5	5.00	99.57	0.51	3.74	-47.21	3.80
6	6.00	100.00	0.53	3.94	-48.95	4.02
7	7.00	100.14	0.53	3.99	-49.52	4.09
8	8.00	101.08	0.57	4.48	-53.44	4.59
9	9.00	102.64	0.64	5.41	-59.92	5.49
10	10.00	103.80	0.68	6.15	-64.55	6.22
11	11.00	104.85	0.72	6.86	-68.56	6.94
12	12.00	104.93	0.72	6.89	-68.96	6.99
13	13.00	105.48	0.74	7.27	-71.02	7.38
14	14.00	105.10	0.73	6.97	-69.78	7.10
15	15.00	105.16	0.73	6.99	-70.13	7.15
16	16.00	104.38	0.71	6.41	-67.34	6.57
17	17.00	102.80	0.65	5.31	-61.14	5.45
18	18.00	101.64	0.60	4.56	-56.24	4.70
19	19.00	102.11	0.62	4.82	-58.36	4.98
20	20.00	100.48	0.55	3.84	-51.17	3.97
21	21.00	101.74	0.60	4.54	-56.89	4.66
22	22.00	102.95	0.66	5.28	-62.27	5.39
23	23.00	102.99	0.66	5.28	-62.53	5.41
24	24.00	103.25	0.67	5.43	-63.72	5.58
25	25.00	101.24	0.58	4.14	-54.89	4.23
26	26.00	99.60	0.51	3.22	-47.22	3.28
27	27.00	99.67	0.51	3.23	-47.50	3.31
28	28.00	100.02	0.53	3.38	-49.18	3.49
29	29.00	98.35	0.44	2.55	-41.10	2.61
30	30.00	99.96	0.52	3.29	-48.95	3.32

Table : Delta hedging simulation

델타 Hedge Simulation 결과 2-2

	time	stock price	delta	option	bond pos	hedge port.
31	31.00	99.27	0.49	2.92	-45.52	2.96
32	32.00	100.15	0.53	3.34	-49.92	3.39
33	33.00	99.79	0.51	3.12	-48.09	3.20
34	34.00	100.15	0.53	3.28	-49.89	3.38
35	35.00	100.11	0.53	3.23	-49.67	3.35
36	36.00	101.82	0.61	4.18	-58.45	4.26
37	37.00	102.09	0.63	4.31	-59.85	4.42
38	38.00	102.85	0.67	4.78	-63.70	4.90
39	39.00	102.45	0.65	4.48	-61.82	4.63
40	40.00	101.83	0.62	4.07	-58.81	4.23
41	41.00	101.15	0.58	3.63	-55.30	3.81
42	42.00	100.21	0.53	3.07	-50.27	3.26
43	43.00	101.93	0.63	4.03	-59.67	4.17
44	44.00	100.51	0.55	3.16	-52.01	3.28
45	45.00	100.08	0.53	2.91	-49.64	3.04
46	46.00	101.05	0.58	3.40	-55.13	3.55
47	47.00	102.33	0.65	4.16	-62.37	4.29
48	48.00	102.00	0.63	3.92	-60.65	4.07
49	49.00	103.30	0.70	4.76	-67.86	4.90
50	50.00	102.89	0.68	4.44	-65.90	4.61
51	51.00	101.89	0.63	3.75	-60.48	3.92
52	52.00	99.98	0.52	2.62	-49.14	2.71
53	53.00	100.67	0.56	2.95	-53.42	3.07
54	54.00	101.66	0.62	3.50	-59.62	3.63
55	55.00	103.78	0.74	4.92	-72.02	4.94
56	56.00	103.34	0.72	4.56	-69.91	4.61
57	57.00	103.78	0.75	4.85	-72.58	4.93
58	58.00	101.52	0.62	3.27	-59.51	3.24
59	59.00	102.08	0.65	3.59	-63.28	3.58
60	60.00	102.92	0.71	4.12	-68.70	4.13

Table : Delta hedging simulation

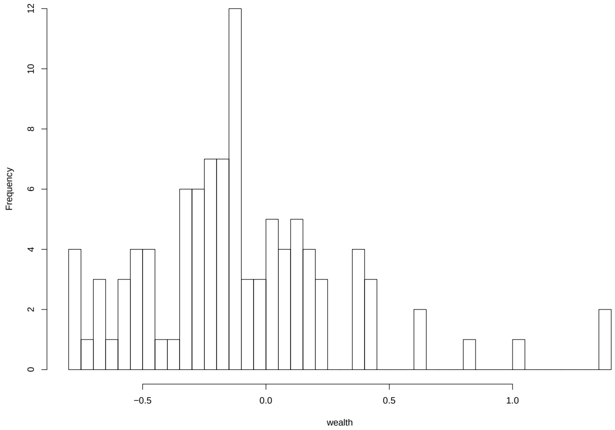
델타 Hedge Simulation 결과 2-3

	time	stock price	delta	option	bond pos	hedge port.
61	61.00	102.94	0.71	4.10	-69.12	4.14
62	62.00	103.74	0.76	4.65	-74.12	4.71
63	63.00	102.62	0.70	3.80	-67.72	3.85
64	64.00	102.95	0.72	4.00	-70.18	4.09
65	65.00	101.81	0.65	3.18	-62.82	3.26
66	66.00	101.69	0.64	3.06	-62.17	3.18
67	67.00	102.37	0.69	3.47	-67.35	3.61
68	68.00	101.89	0.66	3.10	-64.20	3.28
69	69.00	102.56	0.71	3.52	-69.50	3.73
70	70.00	101.44	0.63	2.72	-61.37	2.92
71	71.00	100.63	0.57	2.19	-54.84	2.41
72	72.00	101.18	0.62	2.46	-59.75	2.72
73	73.00	100.56	0.56	2.05	-54.42	2.33
74	74.00	102.39	0.72	3.18	-70.84	3.37
75	75.00	105.25	0.90	5.49	-89.53	5.44
76	76.00	106.21	0.94	6.35	-93.73	6.30
77	77.00	102.85	0.78	3.38	-77.10	3.13
78	78.00	102.06	0.72	2.74	-71.24	2.52
79	79.00	102.59	0.78	3.08	-76.81	2.89
80	80.00	102.86	0.81	3.25	-80.23	3.11
81	81.00	104.43	0.92	4.58	-91.72	4.37
82	82.00	103.20	0.86	3.44	-85.64	3.23
83	83.00	103.34	0.89	3.52	-88.25	3.36
84	84.00	103.78	0.93	3.88	-92.65	3.74
85	85.00	102.16	0.82	2.40	-81.94	2.24
86	86.00	100.59	0.62	1.17	-61.02	0.94
87	87.00	101.12	0.73	1.42	-72.97	1.26
88	88.00	100.68	0.68	1.00	-67.61	0.94
89	89.00	102.07	0.98	2.09	-97.68	1.89
90	90.00	101.18	1.00	1.18	-100.17	1.01

Table : Delta hedging simulation

델타 Hedge Simulation 결과 3 : 손익 히스토그램

```
> hist(tail(hedge.result$wealth, 1), 50, xlab = "wealth", main = "")
```



옵션 Hedge 손익

- 주가에 대한 가정
  - 옵션 거래시점부터 만기까지 주식 가격은 고정된 실제 변동성 σ_r 로 BS모형을 따름
  - 실제 변동성 σ_r 은 옵션 거래시점의 내재 변동성 σ_i 과 다를 수 있음
- hedge 가정
  - case 1: 거래한 옵션 내재변동성 $\sigma_h = \sigma_i$ 로 hedge
  - case 2: 옵션 거래시점부터의 실제 변동성 $\sigma_h = \sigma_r$ 로 hedge

case 1: 거래한 옵션 내재변동성으로 hedge하는 경우

- 옵션 가치 변화

$$\begin{aligned} dV &\approx \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma dS^2 \\ &\approx \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma S^2 \sigma_h^2 dt \end{aligned}$$

- hedge 주식 가치변화로 인한 평가손익

$$-\Delta dS$$

- hedge 주식 매매로 인한 실현손익 (Gamma 손익)

$$-\frac{1}{2}\Gamma dS^2 \approx -\frac{1}{2}\Gamma S^2 \sigma_r^2 dt$$

- hedged 포트폴리오 가치 변화

$$\frac{1}{2}\Gamma S^2 \left(\sigma_i^2 - \sigma_r^2\right) dt$$

case 1: 거래한 옵션 내재변동성으로 hedge하는 경우 (계속)

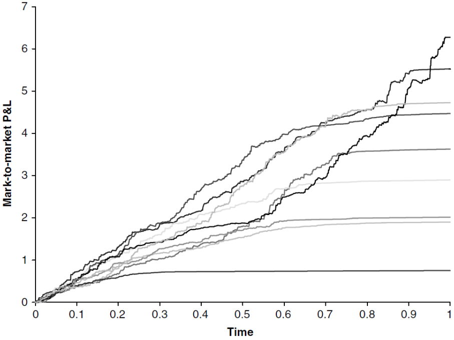
❑ Exact Solution

$$\frac{1}{2}\int_0^T \exp(-rT)S^2\Gamma\left(\sigma_i^2-\sigma_r^2\right)dt$$

❑ 실제 변동성과 관계없이 최초 거래한 변동성으로 헷지를 하는 경우 두 변동성의 차이만큼 손익 발생

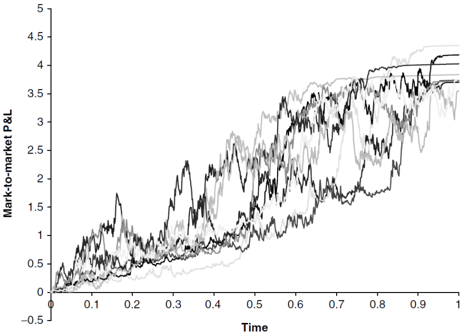
❑ 만일 실제변동성과 헷지변동성 (최초 거래한 내재변동성) 이 같으면 손익은 0

❑ S 와 Γ 의 값이 path dependent하므로 샘플에 따라 손익이 크게 차이남



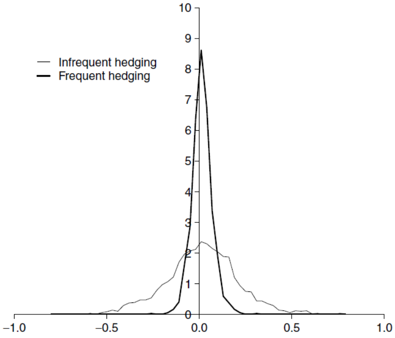
case 2: 옵션 거래시점부터의 실제 변동성 $\sigma_h = \sigma_r$ 로 hedge

- 실제변동성으로 평가하면 거래 가격과 실제변동성으로 계산한 가격만큼 평가 손익 발생
- 이후에는 실제변동성과 hedge변동성이 같으므로 hedge 손익은 0
- 따라서 최초의 옵션 가격 차이가 헷지 손익
- 헷지 손익은 불확실성이 적어짐



Discrete Hedge 효과

- ❑ Dynamic Delta Hedge는 미세한 시간간격 (continuous time) 으로 hedge하는 것을 가정
- ❑ 이산 시간 간격으로 hedge를 하게 되면 다음 영향 발생
  - ▶ 시간간격이 커질수록 hedge 오차 증가
  - ▶ 시간간격이 작아질수록 거래비용 (transaction cost) 증가
- ❑ 적정한 hedge 간격 선택의 문제



거래비용에 따른 가치변화

- LeLand 공식
  - 시간간격 δt에 따른 거래비용 증가 효과 계산
  - 옵션 변동성 가치가 변화한것과 마찬가지 효과

$$\hat{\sigma} = \sigma\sqrt{\left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{8k}{\pi\sigma\delta t}\right)}\right)}$$

  - k :수수료 비율
  - 옵션 매수인 경우에는 변동성 감소
  - 옵션 매도인 경우에는 변동성 증가

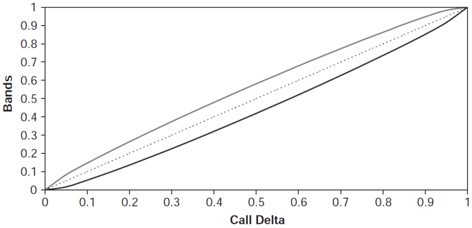
Bandwidth Hedge : Whalley and Willmott 방법

- 시간간격이 아닌 delta 오차가 특정 기준 이상이 되면 hedge
- 효용성 (utility) 기준에 따른 최적 delta hedge
- Whalley and Willmott 방법

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \pm \sqrt{\frac{3}{2\gamma} \exp\left(-rTfS\Gamma^2\right)}$$

여기에서 γ는 utility 함수 계수

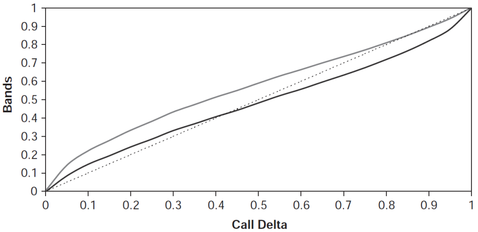
$$U(W) = -\exp(\gamma W)$$



Bandwidth Hedge : Zakamouline 방법

❑ Zakamouline 방법

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial V(\sigma_m)}{\partial S} \pm (H_1 + H_0) \\
H_1 &= \frac{k}{\gamma S \sigma^2 T} \\
H_0 &= 1.12 k^{0.31} T^{0.05} \left(\frac{\exp(-rT)}{\sigma} \right)^{0.25} \left(\frac{|\Gamma|}{k} \right)^{0.5} \\
\sigma_m &= -5.76 k^{0.78} T^{-0.02} \left(\frac{\exp(-rT)}{\sigma} \right)^{0.25} \left(k S^2 |\Gamma| \right)^{0.15}
\end{aligned}
$$



Variance Swap

- ❑ 옵션을 이용한 변동성 매매의 단점
  - ▶ delta hedge의 번거로움
  - ▶ path dependency
- ❑ Variance Swap
  - ▶ 순수한 변동성 betting
  - ▶ delta hedge가 필요없이 변동성 매매 가능
  - ▶ path dependency 없음

$$
\begin{aligned}
\text{Payoff} &= N_{\text{var}}(\sigma^2_{\text{realised}} - \sigma^2_{\text{strike}}) \\
N_{\text{var}} &= \text{Variance Nominal Amount} \\
\sigma^2_{\text{realised}} &= \frac{A}{n}\sum_{\text{i}=1}^{\text{n}} R_{\text{i}}^2
\end{aligned}
$$

Variance Swap Hedge

❑ Variance Swap은 다음과 같이 delta-hedged log 계약으로 복제 가능

$$
\begin{aligned}
\text{Variance} &= \frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2 dt \\
&= \frac{2}{T}\left(\int_0^T \frac{dS}{S} - \log\frac{S_T}{S_0}\right)
\end{aligned}
$$

❑ 주식은 항상 $1/S$ 만큼의 계약수를 유지하도록 dynamic rebalancing. 이는 log계약에 대한 delta hedge

❑ log 계약 $\log\frac{S_T}{S_0}$ 은 다음과 같은 옵션 포트폴리오로 대체 가능

$$
\log\frac{S_T}{S_0} = -\frac{S_T - S^*}{S^*} + \int_{K\le S^*}(K-S_T)^+\frac{dK}{K^2} + \int_{K\ge S^*}(S_T-K)^+\frac{dK}{K^2}
$$

여기에서 S^* 는 임의의 cut-off 주가

Variance Swap Hedge (계속)

- $S^* = F_T = S_0 e^{rT}$ 으로 하면 Variance Swap은 다음과 같이 표현

$$\frac{2e^{rT}}{T}\left(\int_0^{F_T}\frac{1}{K^2}\,P(K)dK+\int_{F_T}^{\infty}\frac{1}{K^2}\,C(K)dK\right)$$

- 실제로는 가능한 strike이 제한되어 있으므로 다음 옵션 포트폴리오로 approximation

$$\sum_{\text{put}}\frac{K_i-K_{i-1}}{K_i^2}\text{Put}(K)+\sum_{\text{call}}\frac{K_i-K_{i-1}}{K_i^2}\text{Call}(K)$$

- call/put은 현재 ATM ($S^* = F_T = S_0 e^{rT}$) strike 기준으로 OTM 선택

Variance Swap 옵션 포트폴리오

- stike K 에 대해 $1/K^2$ 에 비례하는 옵션 개수 보유
- dollar Gamma ΓS^2 이 항상 일정