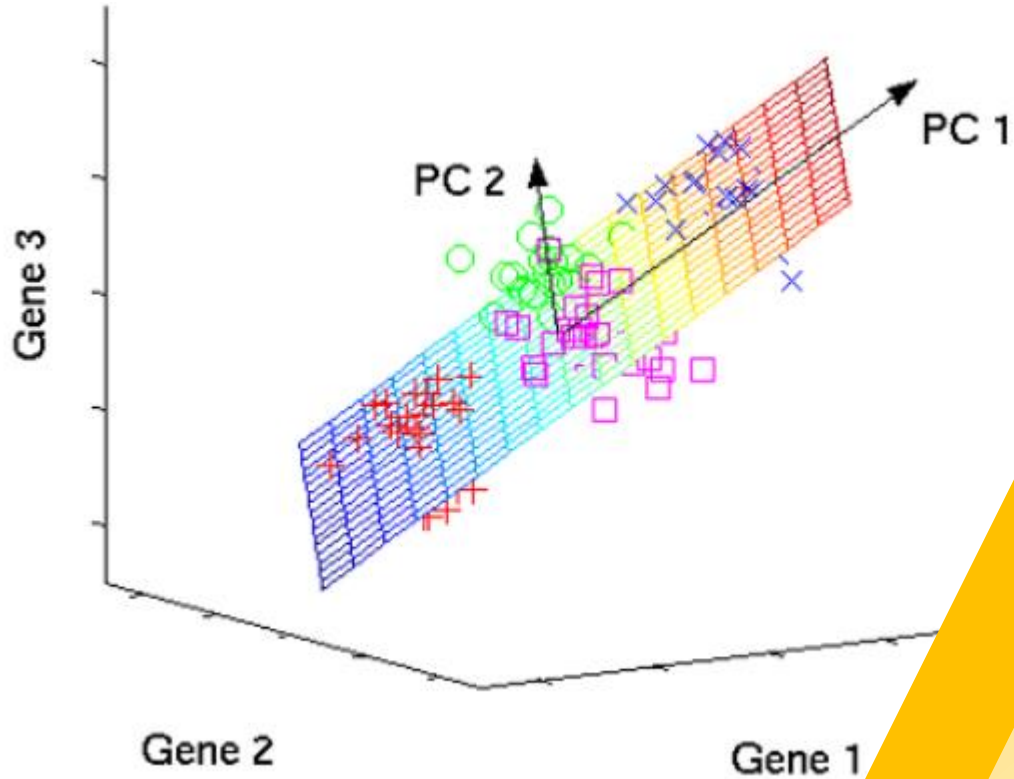




## Mata Kuliah : METODE KUANTITATIF

Program Sarjana Ilmu Komputer  
Departemen Ilmu Komputer  
FMIPA – IPB



## Pertemuan 8 : ANALISIS KOMPONEN UTAMA (AKU)

Dosen :  
Agus Buono

Departemen Ilmu Komputer  
Fakultas MIPA IPB

# OUTLINE

```
graph TD; A((OUTLINE)) --- B[AKU : Motivasi]; A --- C[Ide Dasar dan Formulasi AKU]; A --- D[Mekanisme Perhitungan dan Instruksi dalam Matlab]; A --- E[Contoh Kasus]; A --- F[Tugas];
```

AKU : Motivasi

Ide Dasar dan  
Formulasi AKU

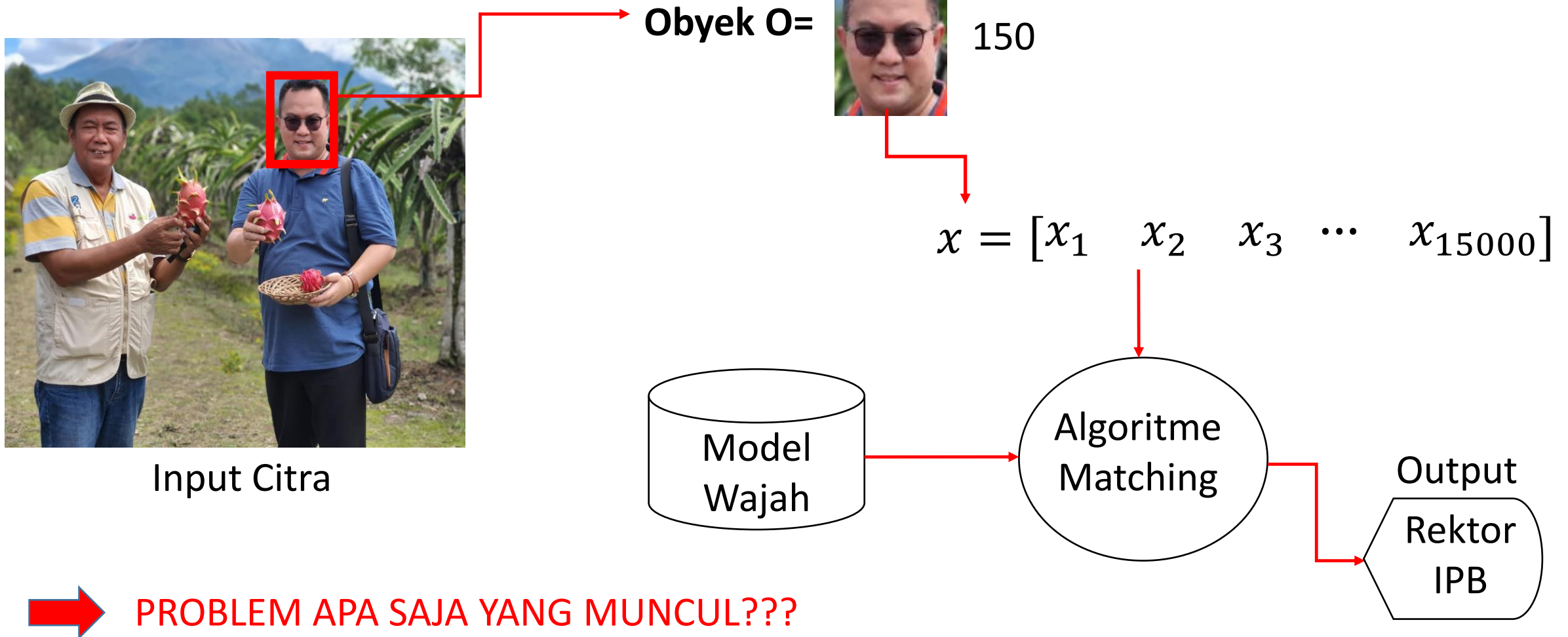
Mekanisme  
Perhitungan dan  
Instruksi dalam  
Matlab

Contoh Kasus

Tugas

# A. AKU : Motivasi

Ambil Kasus : Face Recognition



Dimensi input : SANGAT  
BESAR

WAKTU OPERASI DAN  
PENYIMPANAN DATA  
MENJADI SANGAT BESAR

```
graph TD; A[Dimensi input : SANGAT BESAR  
WAKTU OPERASI DAN PENYIMPANAN DATA  
MENJADI SANGAT BESAR] --> B[VEKTOR INPUT PERLU  
DITRANSFORMASI KE  
RUANG YANG  
DIMENSINYA JAUH LEBIH  
KECIL]; B --> C[DENGAN TETAP  
MEMPERTAHANKAN  
INFORMASI PENTING YANG  
ADA PADA ASLI ATAU];
```

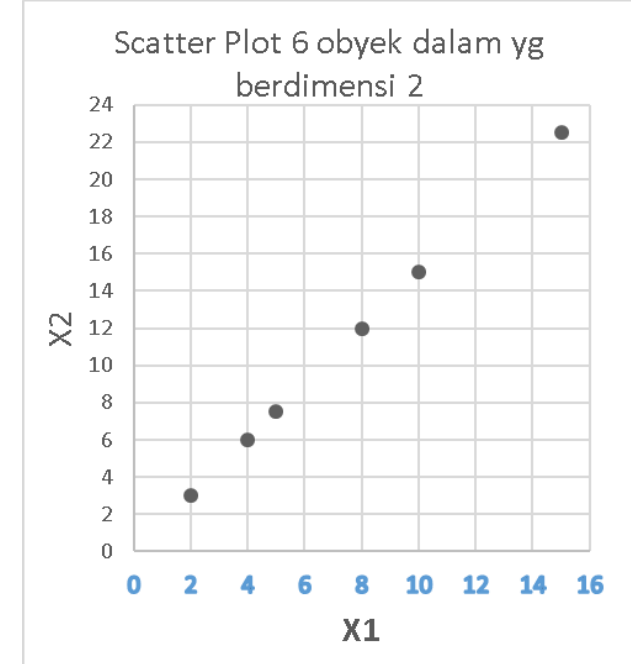
VEKTOR INPUT PERLU  
DITRANSFORMASI KE  
RUANG YANG  
DIMENSINYA JAUH LEBIH  
KECIL

DENGAN TETAP  
MEMPERTAHANKAN  
INFORMASI PENTING YANG  
ADA PADA ASLI ATAU

## OBYEK 2 DIMENSI

### ILUSTRASI :

OBYEK	X1	X2
1	2	3
2	4	6
3	5	7.5
4	8	12
5	10	15
6	15	22.5



Transformasi 1

$$P = 0.5547 * X1 + 0.8321 * X2$$

Transformasi 2

$$Q = -0.8321 * X1 + 0.5547 * X2$$

Transformasi 3

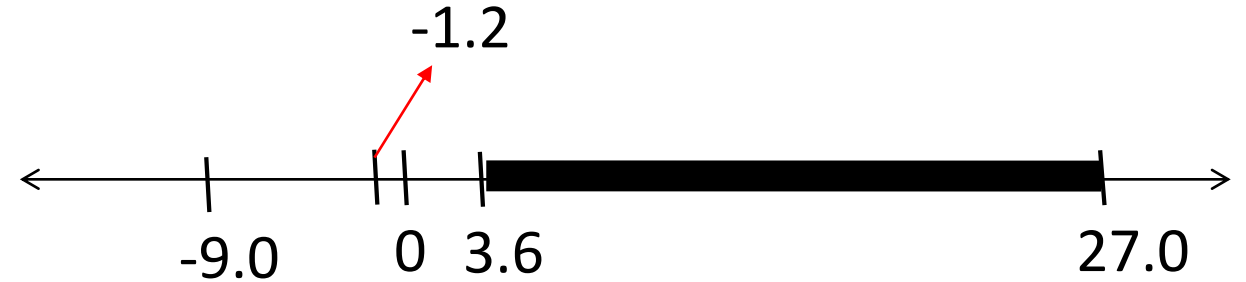
$$R = 0,6 * X1 - 0.8 * X2$$

OBYEK	X1	X2	P	Q	R
1	2.0	3.0	3.6	0.0	-1.2
2	4.0	6.0	7.2	0.0	-2.4
3	5.0	7.5	9.0	0.0	-3.0
4	8.0	12.0	14.4	0.0	-4.8
5	10.0	15.0	18.0	0.0	-6.0
6	15.0	22.5	27.0	0.0	-9.0

OBYEK  
2 DIMENSI

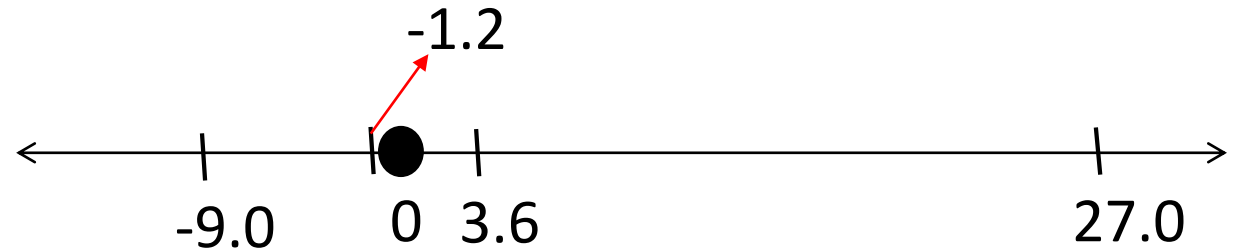
Trans. 1

$$P = 0.5547 \cdot X1 + 0.8321 \cdot X2$$



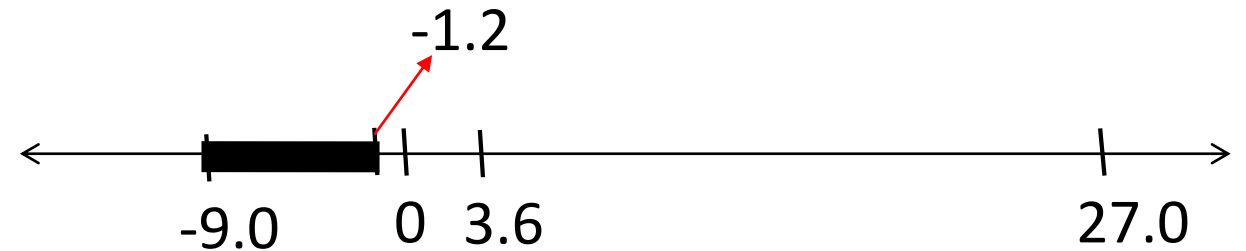
Trans. 2

$$Q = -0.8321 \cdot X1 + 0.5547 \cdot X2$$



Trans. 3

$$R = 0.6 \cdot X1 - 0.8 \cdot X2$$



Menurut anda, jika kita inginkan mereduksi dimensi obyek dari 2 menjadi dimensi 1, maka bisa dilakukan dengan memilih salah satu transformasi tersebut.

Jika anda disuruh memilih, maka transformasi mana yg akan dipilih ???

Kenapa?





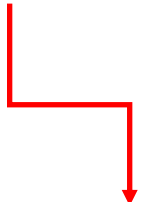
## B. IDE DAN FORMULASI:

---

Obyek dengan dimensi p :

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots \quad x_p]$$

Ditransformasi ke  
peubah baru y

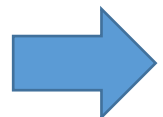

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_px_p$$

$$= [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_p] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

$$= a'x$$

$a'$  adalah vector  
koefisien dari  
transformasi.

Harus mencari  $a'$   
yang bagaimana ???



Jadi transformasi adalah  $y = a'x$

Dalam hal ini  $x$  adalah peubah acak yang berdimensi  $p$ , sehingga vector rata-rata dan matriks kovarian dari peubah acak  $x$  yg berdimensi  $p$  tersebut adalah :

Vektor rata-rata:

$$\mu = \begin{pmatrix} E(x_1) \\ E(x_2) \\ \dots \\ E(x_p) \end{pmatrix}$$

Matriks kovarian:

$$\Sigma_p = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ . & . & \dots & . \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}$$

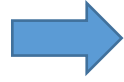
$\sigma_{ij}$  adalah : kovarian antara  $x_i$  dengan  $x_j$

Oleh karena  $y = a'x$  maka ragam dari  $y$  adalah :

Oleh karena  $y=a'x$  maka rata-rata dan ragam dari  $y$  adalah :

$$E(y)=\mathbf{a}^T\boldsymbol{\mu}$$

$$\text{Var}(y)=\mathbf{a}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a}$$



Sehingga permasalahan mendapatkan vector  $\mathbf{a}$  adalah menjadi permasalahan memaksimumkan  $\text{var}(y)$ .  
Dalam sudut pandang ruang vector, vector  $\mathbf{a}'$  adalah suatu sumbu koordinat yang baru, sehingga bisa dibatasi dengan panjang 1, atau dengan kata lain  $\mathbf{a}'\mathbf{a}=1$ .

Formulasi optimisasi matematika :


**Maksimumkan :  $\text{Var}(y)=\mathbf{a}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a}$**

**Kendala :  $\mathbf{a}'\mathbf{a}=1$**

Solusi optimisasi tersebut diselesaikan dengan teorema pengganga lagrange, yaitu :

1. Bentuk fungsi baru :  $f(\mathbf{a}_1) = \mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a} - \lambda(\mathbf{a}^T \mathbf{a} - 1)$
2. Turunkan fungsi tersebut terhadap peubah  $\mathbf{a}$  yg akan dicari dan samakan dengan nol

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} = 2\Sigma \mathbf{a} - 2\lambda \mathbf{a} = 0$$

$$(\Sigma \mathbf{a} - \lambda \mathbf{a}) = 0 \longrightarrow \Sigma \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$$


Ini artinya : vector  $\mathbf{a}$  yg dicari adalah akar ciri dari matriks kovarian,  $\Sigma$   
Dan  $\lambda$  adalah akar cirinya

Namun demikian : vector ciri dari matriks koragam sangat banyak. Oleh karena itu, vector ciri yang mana?. Untuk itu, perhatikan hal berikut :

$$\text{var}(y) = a' \Sigma a$$

*sementara*

$$\Sigma a = \lambda a$$

$$a' \Sigma a = a' \lambda a = \lambda a' a = \lambda \cdot 1 = \lambda$$

Terlihat bahwa  $\lambda$  adalah ragam dari  $y$ .

Oleh karena itu, ambil  $a$  yang  $\lambda$  paling besar. Setelah itu, ambil  $a$  ke dua yang  $\lambda$  terbesar ke dua, dan seterusnya sampai dengan berapa dimensi yang kita inginkan. Misal sampai  $q$  buah  $\lambda$  yang dipilih, sehingga proporsi keragaman peubah transformasi, yaitu :

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q + \lambda_{q+1} + \dots + \lambda_p} * 100\% > 80$$

Dengan memilih vector ciri ini sebagai koefisien, maka kita telah mereduksi dimensi data dari  $p$  menjadi  $q$  :

$$\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_p)^T \quad \longrightarrow \quad \mathbf{y}=(y_1, y_2, \dots, y_q),$$

Dengan :

$$\begin{aligned} y_1 &= \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{1p}\mathbf{x}_p = \mathbf{a}_1^T\mathbf{x} \\ y_2 &= \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{2p}\mathbf{x}_p = \mathbf{a}_2^T\mathbf{x} \\ ..... \\ y_q &= \mathbf{a}_{q1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{q2}\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{a}_{qp}\mathbf{x}_p = \mathbf{a}_q^T\mathbf{x} \end{aligned}$$



# C. MEKANISME PERHITUNGAN:

---

Dalam hal ini kita mempunyai  $n$  obyek yang berdimensi  $p$ , sehingga datanya adalah :

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix}$$

Tahap 1 : hitung  $C$ =covariance  $X$

Tahap 2 : hitung vector ciri dan akar ciri dari matrik  $C$

Tahap 3 : pilih  $q$  vector yang bersesuaian dengan  $q$  akar ciri terbesar

Tahap 4 :  $q$  yg dipilih sedemikian sehingga proporsi keragaman yg diinginkan telah dipenuhi



Hasil :

q vector ciri itulah sebagai koefisien transformasi

## D. Contoh Kasus:

---

Misalkan akan dilakukan analisis PCA dengan vector  $x$  berdimensi 4, dan dari perhitungan diperoleh akar ciri dan vector ciri sebagai berikut :

Eigenvalue ke 1=2.5991 ke 2=1.0949 ke 3=0.2160 dan ke 4=0.0900

Vector ciri yang bersesuaian dengan akar ciri di atas :

Vector ciri ke :	1	2	3	4
	<hr/>			
	0.3	-0.8	-0.5	0.1
	-0.5	-0.5	0.6	0.4
	-0.6	-0.2	-0.2	-0.8
	-0.6	0.2	-0.6	0.5

- Ada berapa komponen yang diambil jika proporsi informasi data asal yang disimpan dalam peubah hasil transformasi adalah sekitar 95 %.
- Tentukan hasil tranformasi dari observasi :  
(100, -0.1, -0.1, -0,2)

## E. Tugas:

---



1. Cari data citra wajah 10 orang, dan masing-masing orang sebanyak 5 citra (jadi semuanya ada  $10 \times 5 = 50$  citra)
2. Ubah citra tersebut dalam tk keabuan dan ukurannya dijadikan berdimensi barisxkolom= $120 \times 100$
3. Data tk keabuan tsb masih bertipe integer, ubah ke tipe fload
4. Ubah dari data citra yg berbentuk matriks menjadi vector berdimensi 12000
5. Gabungkan data tersebut menjadi matriks data yg berukuran  $50 \times 12000$
6. Hitung matriks koragamnya
7. Hitung vector ciri dan akar ciri dari matriks koragam tersebut
8. Tentukan banyaknya vector ciri yg akan diambil jika diinginkan proporsi informasi yg ditangkap oleh sumbu-sumbu baru adalah 90%
9. Lakukan tranformasi data asli yg berukuran  $50 \times 12000$  menjadi data hasil transformasi yang berukuran  $50 \times q$  (q adalah banyaknya sumbu baru yang dihasilkan dari point 8)