# BAB III. Pengantar Analisis Peubah Ganda

Pada bagian sebelumnya kita telah bahas mengenai distribusi dari peubah ganda, terutama untuk yang ganda dua, atau bivariate. Pada bagian ini akan dibahas untuk yang lebih umum, yaitu lebih dari dua peubah acak. Pembahasan akan diarahkan untuk melakukan analisis data peubah ganda. Dengan analisis analisis ini, maka kita akan dapat mengeksplorasi data multivariate secara serempak. Oleh karena itu akan diperoleh informasi lebih lengkap dan lebih informatif. Kegunaan lainnya adalah dengan teknik ini dimungkinkan untuk melakukan transformasi peubah asli yang berdimensi tinggi menjadi peubah hasil transformasi yang berdimensi jauh lebih rendah. Hal ini sangat berguna untuk meningkatkan kinerja algoritma. Pembahasan akan dimulai dengan nilai harapan dan matriks koragam vektor peubah acak, vektor ciri dan akar ciri, dan dilanjutkan dengan beberapa analisis yang biasa dilakukan, yaitu : analisis komponen utama, analisis biplot melalui penguraian nilai singular (singular value decomposition, SVD), analisis diskriminan dan analisis cluster.

### 3.1 Vektor Peubah Acak

Sumber : http://cda.psych.uiuc.edu/statistical_learning_course/Jolliffe%20I.%20Principal%20Component%20Analysis%20(2ed.,%20Springer,%202002)(518s)_MVsa_.pdf

Misalkan **x** adalah vector peubah acak berdimensi p, maka dapat dituliskan sebagai :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

maka nilai harapan dan matriks koragam (*covariance*) peubah acak **x** adalah :

$$\mu = \begin{pmatrix} E(x_1) \\ E(x_2) \\ \cdots \\ E(x_p) \end{pmatrix} \text{ serta matriks } \textit{covariance} \quad {}_p\sum{}_p = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ . & . & \cdots & . \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}$$

dalam hal ini :

$\sigma_{ij}$ = covariance($x_i$,$x_j$) = $E(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)$

Oleh karena itu matriks koragam tersebut dapat dituliskan dalam bentuk :

$${}_p\sum{}_p = E(x-\mu)(x-\mu)^T$$

Beberapa hal berikut penting untuk diketahui :

a. Jika y=$\mathbf{a}^T\mathbf{x}$, dengan $\mathbf{a}^T=(a_1, a_2, \ldots, a_p)$, maka E(y)=$\mathbf{a}^T\mu$ serta Var(y)=$\mathbf{a}^T\Sigma\mathbf{a}$

b. E(A**x**+**b**)=AE(x)+b

c. Covariance(($\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$),**y**)=**cov**($\mathbf{x}_1$,**y**)+cov($\mathbf{x}_2$,**y**)

d. Covariance(Ax,By)=A covariance(x,y) $B^T$.

e. Covariance($a^T$x, $b^T$y)= $a^T$covariance(x,y) $b^T$.

f. Jika y=$\mathbf{a}^T\mathbf{x}$, maka $\frac{dy}{dx}=a$

g. Jika y=$\mathbf{a}^T\mathbf{Ax}$, maka $\frac{dy}{dx}=A^Ta$ sedangkan untuk $\frac{dy}{da}=Ax$

h. Pengoptimuman dengan kendala :

Ingin mencari titik kritis dari suatu fungsi f(x,y,z) dengan kendala Q1(x,y,z)=0 serta Q2(x,y,z)=0, maka yang dilakukan adalah dengan membuat fungsi baru, yaitu : F(x,y,z,$\lambda_1$, $\lambda_2$), yaitu :

$$F(x,y,z, \lambda_1, \lambda_2)= f(x,y,z) - \lambda_1 Q1(x,y,z) - \lambda_2 Q2(x,y,z)$$

Setelah itu diturunkan berturut-turut terhadap semua variable dan disamakan dengan 0.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=\frac{\partial F}{\partial \lambda_2}=0$$

Contoh :

1. tentukan tururan dari y= $\mathbf{x}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{x}$, dalam hal ini $\Sigma$ adalah matriks covariance, terhadap vector **x**.
2. tentukan tururan dari y= $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ terhadap vector **x**.
3. tentukan vector **a** yang memaksimumkan $\mathbf{a}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a}$, dengan kendala panjang vector **a** adalah 1.
4. tentukan vector **a** yang memaksimumkan $y = \dfrac{a^T \Sigma_1 a}{a^T \Sigma_2 a}$

**3.2 Review Akar ciri dan vektor ciri**

**Definisi :**

Suatu skalar $\boldsymbol{\lambda}$ dan suatu vector **a** yang memenuhi system persamaan :

$\mathbf{Aa}=\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}$, atau dengan bentuk lain $\mathbf{(A-\boldsymbol{\lambda}I)a=0}$

Maka dikatakan bahwa $\boldsymbol{\lambda}$ adalah akar ciri dan **a** adalah vector ciri (padanannya) dari matriks **A.**

Akar ciri sering disebut juga eigen value atau characteristic root atau latent root

Vector ciri sering disebut juga eigen vector atau characteristic vektor atau latent vektor

Contoh :

Tentukan akar ciri dan vector ciri yang bersesuaian untuk matriks $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Berdasarkan teori dalam aljabar matriks kita telah tahu bahwa system persamaan $\mathbf{(A-\boldsymbol{\lambda}I)a=0}$ akan memiliki jawab vector **a**=**0** kalau matriks $\mathbf{(A-\boldsymbol{\lambda}I)}$ berpangkat penuh. Oleh karena itu system tersebut hanya akan memiliki jawab yang tidak nol kalau matriks $\mathbf{(A-\boldsymbol{\lambda}I)}$ tidak berpangkat penuh, atau dengan dengan kata lain determinan matriks $\mathbf{(A-\boldsymbol{\lambda}I)}$ adalah nol, $|\mathbf{A-\boldsymbol{\lambda}I}|=0$.

Persamaan :

$Q(\lambda)=|\mathbf{A-\boldsymbol{\lambda}I}|=0$

disebut sebagai persamaan ciri, characteristic equation. Sedangkan fungsi $Q(\lambda)=|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|$ disebut fungsi ciri, polynomial equation.

**Beberapa istilah :**

1. Dua vector saling orthogonal jika perkalian dot dari keduanya menghasilkan 0
2. Dua vector yang saling orthogonal dan mempunyai panjang satu disebut dua vector yang ortonormal
3. Bentuk kuadrat dari suatu vector **x** adalah $y=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, dengan A adalah suatu matriks.

   Contoh : $y=\begin{pmatrix} x1 & x2 & x3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}$

4. Suatu matriks A disebut :
   1. definit positif jika : $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}>0$ untuk semua $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$
   2. definit negatif jika : $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}<0$ untuk semua $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$
   3. semi definit positif jika : $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}\geq 0$ untuk semua $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$
   4. semi definit negatif jika : $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}\leq 0$ untuk semua $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$
   5. indefinit positif jika : ada **x** sehingga $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}>0$ serta ada **x** sehingga $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}<0$
5. Penguaraian nilai singular (*singular value decomposition*, *SVD*)

   Suatu matriks ${}_nX_p$ selalu dapat ditulis dalam bentuk :

   $${}_nX_p={}_nU_r \cdot {}_rL_r \cdot {}_rA_p^T$$

   dalam hal ini :

   1. A=[**v1 v2 v3 … vr**] dengan v adalah vector ciri dari matriks $X^TX$
   2. L adalah matriks diagonal berorde rxr, dengan r adalah pangkat matriks X, dan dirumuskan sebagai :

$$ {}_rL_r = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{\lambda r} \end{pmatrix} $$ dalam hal ini $\lambda_I$ adalah akar cirri yang bersesuaian dengan vector cirri $v_i$.

3. U=[$\mathbf{u_1}$ $\mathbf{u_2}$ $\mathbf{u_3}$ **…** $\mathbf{u_r}$] dengan $u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} X \cdot v_i$

Contoh : tentukan bentuk SVD dari matriks $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Latihan Soal :**

1. Perhatikan matriks data dari 5 jenis kualitas buah jeruk (A, B, C, D, dan E) yang masing-masing diamati 2 peubah, yaitu ukuran dan kecerahan warna kulit.

| Jenis : | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Ukuran (x1) : | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 |
| Kecerahan (x2) : | 1 | 4 | 5 | 3 | 2 |

   a. Hitung matriks kovarian (koragam) dari data tersebut !

   b. Hitung akar ciri dan vektor ciri matriks kovarian pada point a !

2. Misalkan kita mempunyai data berikut :

| Observasi ke | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| x1 | 4 | 5 | 6 | 7 | 3 |
| x2 | 12 | 9 | 10 | 11 | 8 |

   Suatu transformasi $y=a^Tx$, dengan $a^T$ adalah vektor (2 -1). Berdasar 5 observasi tersebut, tentukan : (a) S, yaitu matriks koragam vektor $x^T$=(x1 x2), (b) Rataan dari vektor x, (c) variance dari y, (d) akar ciri (Eigen value) dan vektor ciri (Eigen Vector) yang bersesuaian dari matriks S.

3. Hitung hasil penguraian nilai singular (Singular Value Decomposition, SVD) terhadap matriks berikut :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

# BAB IV. Analisis Komponen Utama

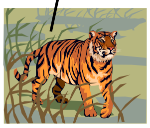
Analisis komponen utama merupakan salah satu analisis peubah ganda yang bertujuan untuk mereduksi dimensi data tanpa harus kehilangan informasi secara berarti. Peubah hasil transformasi ini merupakan kombinasi linear dari peubah asli, tidak berkorelasi antar sesama, serta tertata berdasar informasi yang dikandungnya.

**4.1 Dasar Pemikiran**

Hal yang mendasari analisis komponen utama ini adalah bahwa dari suatu obyek, diamati p peubah. Kemungkinan yang menjadi masalah adalah : ukuran p mungkin sangat besar. Sebagai contoh pada proses pengenalan wajah. Untuk citra wajah yang berukuran 50x40 piksel saja, kita berhadapan obyek dengan dimensi 2000. Kalau algoritma pengenalan harus memproses vector yang berdimensi 2000 ini, maka kinerja akan turun. Oleh karena itu perlu dilakukan transformasi ruang vector dari dimensi 2000 (dimensi p) menjadi ruang lain yang berdimensi lebih rendah, namun informasi yang dikandung dari ruang baru masih menyimpan informasi dari ruang asli dengan baik.

Permasalahan kedua adalah p peubah yang diamati tersebut mungkin saling berkorelasi. Pada beberapa pemodelan, rumusan model mensyaratkan adalah kebebasan antar variable. Hal ini dikarenakan multikorelasi akan menjadi permasalahan serius pada saat dilakukan uji hipotesis terhadap parameter model.

Kerangka berpikir proses tranformasi melalui analisis komponen utama ini adalah seperti dilustrasikan pada Gambar 4.1.



obyek

Pengamatan : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix}$

$${}_p\sum{}_p = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ . & . & \dots & . \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \rightarrow a_1^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix}$$
$$\lambda_2 \rightarrow a_2^T = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \end{pmatrix}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\lambda_q \rightarrow a_q^T = \begin{pmatrix} a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix}$$

Transformasi :

$$y_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = a_1^T x$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = a_2^T x$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_q = \begin{pmatrix} a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = a_q^T x$$

Hasil transformasi :

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_q \end{pmatrix}$$

Gambar 4.1 Ilustrasi proses transformasi dengan analisis komponen utama

## 4.2 Formulasi

Jika kita mempunyai n data berikut :

| Obyek | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | … | $x_{1p}$ |
| 2 | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | … | $x_{2p}$ |
| 3 | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | … | $x_{3p}$ |
| … | … | … | … | … | … |
| n | $x_{n1}$ | $x_{n2}$ | $x_{n3}$ | … | $x_{np}$ |

Atau matriks datanya adalah :

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

Berikut ini akan disajikan formulasi formal dari analisis komponen. Andaikan peubah asli adalah vektor **x** yang berdimensi p :

$$\mathbf{x}=(x_1, x_2, ..., x_p)^T,$$

maka peubah hasil transformasi adalah **y** yang berdimensi q :

$$\mathbf{y}=(y_1, y_2, ..., y_q),$$

dengan q<<p. Dalam hal ini $y_i$ dirumuskan sebagai :

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = \mathbf{a}_1^T\mathbf{x}$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = \mathbf{a}_2^T\mathbf{x}$$

**.......................................................**

$$y_q = a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + ... + a_{qp}x_p = \mathbf{a}_q^T\mathbf{x}$$

Kalau matriks koragam (*covariance matrix*) dari vektor **x** adalah $\Sigma$, maka ragam (*variance*) $y_i$ dirumuskan sebagai :

$$\text{ragam}(y_i)=\sigma_{y_i}^2 = \mathbf{a}_i^T\Sigma\,\mathbf{a}_i$$

Dari penjabaran di atas terlihat bahwa permasalahan transformasi adalah bagaimana memilih koefisien dari kombinasi linear tersebut sehingga :

informasi $y_1$ > informasi $y_2$ > ... > informasi $y_q$

dengan kata lain :

ragam($y_1$) > ragam($y_2$) > ........ > ragam($y_q$)

Dari sudut pandang geometrik, unsur-unsur dalam vektor $\mathbf{a_i}$ merupakan komponen-komponen penyusun sumbu koordinat. Oleh karenanya dapat dipilih vektor $\mathbf{a}_i$ yang mempunyai panjang satu dan saling ortogonal (sumbu yang ortonormal). Dengan demikian permasalahan ini menjadi masalah optimisasi dengan fungsi tujuan memaksimumkan ragam($y_i$) dengan kendala $\mathbf{a_i}^T\mathbf{a_i}$=1 dan cov($\mathbf{a_i}$,$\mathbf{a_j}$)=0 untuk $i \neq j$.

**Penentuan $\mathbf{a_1}$**

Masalah optimisasi :

Maksimumkan : ragam($y_1$)= $\mathbf{a}_1^T \Sigma\, \mathbf{a}_1$

Kendala : $\mathbf{a_1}^T\mathbf{a_1}$=1

Melalui pengganda lagrange, fungsi yang dimaksimumkan adalah :

$$f(\mathbf{a_1}) = \mathbf{a}_1^T \Sigma\, \mathbf{a}_1 - \lambda(\mathbf{a_1}^T\mathbf{a_1} - 1)$$

Pengoptimuman dilakukan dengan cara menurunkan fungsi f terhadap peubah-peubah yang dicari, dan diperoleh :

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = 2\Sigma a_1 - 2\lambda a_1 = 0 \Leftrightarrow (\Sigma a_1 - \lambda a_1) = 0$$

Ini berarti $\mathbf{a_1}$ adalah vektor eigen dari matriks $\Sigma$ dengan nilai eigen (*eigen value*) $\lambda$. Berdasar hasil di atas, maka :

$$(\Sigma a_1 - \lambda a_1) = 0 \Leftrightarrow \Sigma a_1 = \lambda a_1 \Leftrightarrow a_1^T \Sigma a_1 = a_1^T \lambda a_1 = a_1^T a_1 \lambda = 1\lambda = \lambda$$

Ini berarti ragam($y_1$) adalah $\lambda$ yang merupakan nilai eigen matriks $\Sigma$. Karena diinginkan peubah hasil transformasi tertata berdasar 'pentingnya' maka vektor $\mathbf{a_1}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen terbesar pertama.

**Penentuan $\mathbf{a_2}$**

Masalah optimisasi :

maksimumkan : ragam($y_2$)= $\mathbf{a_2}^T \Sigma \mathbf{a_2}$

kendala : $\mathbf{a_2}^\mathbf{T}\mathbf{a_2}$=1 dan $\mathbf{a_1}^\mathbf{T}\mathbf{a_2}$=0

Melalui pengganda lagrange, fungsi yang dimaksimumkan adalah :

$$f(\mathbf{a_1})= \mathbf{a_2}^T \Sigma \mathbf{a_2}-\lambda_2 ( \mathbf{a_2}^\mathbf{T}\mathbf{a_2}-1)-\delta( \mathbf{a_1}^\mathbf{T}\mathbf{a_2})$$

Setelah didifferensialkan, diperoleh :

$$\frac{\partial f}{\partial a_2} = 2\Sigma a_2 - 2\lambda_2 a_2 - \delta a_1 = 0$$

Dengan mengalikan $\mathbf{a_2}^\mathbf{T}$ pada ruas kiri dan kanan diperoleh :

$$2a_2^T \Sigma a_2 - 2\lambda_2 a_2^T a_2 - \delta a_2^T a_1 = 0 \Leftrightarrow a_2^T \Sigma a_2 = \lambda_2$$

Oleh karena itu $\Sigma\mathbf{a_2}=\lambda_2\mathbf{a_2}$ yang berarti bahwa vektor $\mathbf{a_2}$ merupakan vektor eigen dari $\Sigma$ yang bersesuaian dengan nilai eigen terbesar kedua, $\lambda_2$.

**Penentuan $a_i$**

Analog cara di atas, maka vektor $\mathbf{a_i}$ merupakan vektor eigen dari matriks $\Sigma$ yang bersesuaian dengan nilai eigen terbesar ke i, $\lambda_i$. Atau dengan kata lain berlaku [5]:

$$\Lambda = A^T \Sigma A \qquad \text{dengan matriks } \Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\} \text{ dan } A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_p]^T$$

**Latihan soal:**

1. Jika peubah asli adalah x berdimensi q dan matriks kovarian serta vektor rataan masing-masing adalah $\Sigma$ dan $\mu$.

   a. Berapa dimensi atau ordo dari matriks kovarian tersebut!

   Misalkan akan dilakukan analisis PCA dengan vector x berdimensi 4, dan dari perhitungan diperoleh akar ciri dan vector ciri sebagai berikut :

```
Eigenvalue ke 1=2.5991  ke 2=1.0949  ke 3=0.2160 dan ke 4=0.0900

Vector ciri yang bersesuaian dengan akar ciri di atas :

Vector ciri ke :        1       2       3       4
                      ______________________________
                       0.3    -0.8    -0.5     0.1
                      -0.5    -0.5     0.6     0.4
                      -0.6    -0.2    -0.2    -0.8
                      -0.6     0.2    -0.6     0.5
```

   b. Ada berapa komponen yang diambil jika proporsi informasi data asal yang disimpan dalam peubah hasil transformasi adalah sekitar 95 %.

   c. Tentukan hasil tranformasi dari observasi :
   (100, -0.1, -0.1, -0,2)

2. Tugas laboratorium : lakukan transformasi PCA untuk citra wajah anda yang diambil dengan ukuran 50x40 piksel sebanyak 15 kali. Jika diinginkan vector hasil transformasi mampu menyimpan 95% informasi dari data asli, tentukan hasil transofmasi yang sesuai dari 15 citra tersebut.