ФОКУСИРОВКА ОБЫКНОВЕННОЙ ЛИНЗОЙ

1. 1.

Уравнение Шредингера:

$$\mathbf{i}\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right) = 0 \tag{1.1}$$

Вид решения:

$$E = A(z)\exp\left(-ar^2\right)\exp\left(\mathbf{i}br^2\right), \tag{1.2}$$

где $A \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Подставим (1.2) в (1.1):

$$\mathbf{i}A' - \mathbf{i}Aa'r^2 - Ab'r^2 - 4DA(a-\mathbf{i}b) + 4DA(a-\mathbf{i}b)^2r^2 = 0 \tag{1.3}$$

Тогда имеем следующие равенства:

$$a' = -8Dab \tag{1.4}$$

$$-b' + 4D(a^2 - b^2) = 0 \tag{1.5}$$

$$\mathbf{i}A' - 4DA(a - \mathbf{i}b) = 0 \tag{1.6}$$

Из уравнений (1.4) и (1.5) получим:

$$-a''a + \frac{3}{2}a'^2 = 32D^2a^4 \tag{1.7}$$

$$b = -\frac{a'}{8Da} \tag{1.8}$$

решение этой системы следующее:

$$a = \frac{1}{\frac{16D^2}{R_0^2}z^2 + R_0^2} \tag{1.9}$$

$$b = \frac{4Dz}{R_0^2}\frac{1}{\frac{16D^2}{R_0^2}z^2 + R_0^2} \tag{1.10}$$

Обратные формулы:

$$R_0^2 = \frac{a}{a^2 + b^2} \tag{1.11}$$

$$z = \frac{1}{4D}\frac{b}{a^2 + b^2} \tag{1.12}$$

Здесь R_0^2 радиус пятна $1/a(0)$ в перетяжке $z = 0$. Рассмотрим уравнение для $|A|$ и ϕ ($A = |A|\exp(\mathbf{i}\phi)$) складывая и вычитая то что получается из (1.6):

$$\mathbf{i}A'A^* - 4D|A|^2(a - \mathbf{i}b)$$

$$-\mathbf{i}A^{*\prime}A - 4D|A|^2(a + \mathbf{i}b)$$

Тогда

$$(|A|^2)' - 8D|A|^2b = 0$$

откуда с применением (1.4) имеем

$$\frac{(|A|^2)'}{|A|^2} + \frac{a'}{a} = 0$$

то есть:

$$|A|^2a = \text{const}$$

а для ϕ получим:

$$\phi' + 4Da = 0$$