Lineare Algebra I
Mitschrieb

Florian Kramer

30. Oktober 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

- Das Wort Algebra stammt aus dem arabischen äl-jabr".
- Allgemein ist Algebra die Lehre der mathematischen Symbole und deren Manipulation.
- Lineare Algebra: Insbesondere lineare Gleichungen

1.1 Aufbau der Vorlesung

1. Lineare Gleichungssysteme und der n-dimensionale reellen Raum
2. Grundlegende Objekte
3. Gruppen, Ringe, Körper
4. Vektorräume und lineare Abbildungen
5. Determinaten
6. Eigenwerte und Normalformen

1.2 Beispiel: Der Google Pagerank

Gegeben 4 Seiten, mit Verlinkungen zwischen den Seiten. Von einer nicht verlinkten Seite wechselt man zuf̈llig auf eine andere Seite. Der user startet an einer zuf̈lligen Stelle und folgt von dort einem zufälligen link auf eine andere Seite.Zusätzlich wird immer mit Wahrscheinlichkeit $(1-d), d \in [0,1]$ auf eine beliebige Website gewechselt.
Die wichtigste Site ist nun die, auf welcher ein Benutzer sich mit der höchsten Wahscheinlichkeit aufhält.
$p(\delta_1) = \frac{1-d}{N} + d(\frac{p(\delta_2)}{1}, \frac{p(\delta_5)}{4})$
$p(\delta_2) = \frac{1-d}{N} + d(\frac{p(\delta_1)}{3}, \frac{p(\delta_5)}{4})$
$\vdots$
Zur Berechnung von $p(\delta_j), j \in \{1..5\}$ gibt es Methoden aus der linearen Algebra.

2 Lineare Gleichungssyteme und der n-dimensionale reelle Raum

- Descartes führte "Koordinatenëin in der Geometrie ein, also Zahlensysteme. Das führte dazu, das man nun leichter rechnen kann.
- Wir benutzen hier die reellen Zahlen (mit den üblichen Rechenregeln, also für die Addition :
  - $(x+y)+z = x+(y+z)$
  - $0+x = x+0 = x$
  - Es gibt fúr jedes x ein y mit $x+y=0$, wir nennen dieses y das additiv inverse zu x (x").
  - $x+y = y+x$

  Und für multiplikation:
  - $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
  - $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x)$
  - $\lambda(\rho\mu) = (\lambda\rho)\mu$
  - $1x = x$
- Weiteres brauchen wir die natürlichen Zahlen, die 1,2,3. . .

2.1 Der $\mathbb{R}^n$

Für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir:
$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$
$(x_1, \dots, x_n)$ ist dabei ein geordnetes n-Tupel, die Reihenfolge beim Vergleich Elemente dieser Art ist wichtig.
Für $x, y, \in \mathbb{R} : x = y \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots x_n, = y_n$
Wir nennen diese n-Tupel auch Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

Mit $\mathbb{R}^0$ bezeichnen wir die Menge $\{0\}$, welche nur das Nullelement enthält.

Die Rechenregeln übertragen sich nun von $\mathbb{R}$. Wir schreiben

$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ (Vektoradition)

$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ (Skalarmultiplikation)

2.2 Lineare Gleichungssyteme

Eine lineare Gleichung ueber $\mathbb{R}$ist ein Ausdruck der Form:

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots \alpha_n x_n = \beta$

Fuer reele Zahlen $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Einen Vektor, $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ nennen wir Loesung, wenn die reelen Zahleen , $\xi_1, \dots, \xi_n$ eingesetzt in $x_1, \dots, x_n$ die Gleichung erfüllen.

Ein lineares Gleichungssystem G ist ein System

$a_1 1 x_1 + a_1 2 + x_2 \dots a_1 n x_n = b_1$

$a_2 1 x_1 + a_2 2 + x_2 \dots a_2 n x_n = b_1$

$\vdots$

$a_m 1 x_1 + a_m 2 + x_2 \dots a_m n x_n = b_1$

In Kurzform $= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i \forall i \in \{1, \dots, m\}$

oder, noch kürzer, in Matrixschreibweise

$Ax = b$

Wobei A eine Matrix ist mit Einträgen $a_{i,j}$, wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Ax für $x \in \mathbb{R}^n$ ist dann eine Kurzform für $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j$ mit einem Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Das Ergebnis ist ein Vektor $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ für eine Matrix A mit m Zeilen und n Spalten.

Der Vektor b heißt rechte Seite des linearen Gleichungssystems, A heißt Koeffizienten Matrix des linearen Gleichungssystems. Eine Spalte / Zeile von A kann mit einem Vektor im $\mathbb{R}^m$ bzw. im $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden. Wir sprechen von Spalten- / Zeilen Vektoren der Matrix a.

Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten nennen wir mxn - Matrix. Fuer $x \in \mathbb{R}^n$, A eine mxn - Matix und B eine lxm - Matrix gilt die Rechenregel $BAx = B(Ax)$. Ein Gleichugnssystem $Ax = b$ heisst homogen, falls b der Nullvektor $(0, \ldots, 0)$ ist und quadratisch fuer $m = n$ (eine quadratische Matrix A).

2.2.1 Definition: Normalform

Ein Gleichungssytstem $Ax = b$ ist min Normalform, falss A die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & a_{m,k+1} & \ldots & a_{m,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{(fuer k=2)}$$

fuer ein $k \in \mathbb{N}_0$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Ist in Normalform für } k = 2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Ist in Normalform für } k = 3.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Ist in Normalform für } k = 0.$$

k heißt Rang der Matrix A (bzw. des Gleichungssytems). Es gilt

$0 \leq k \leq min(m, n)$

Ein Gleichungssystem ist genau dann Lösbar, wenn gilt:

$b_{k+1} = b_{k+2} = \cdots = b_m = 0$

In diesem Fall lässt sich eine Lösung $\xi \in \mathbb{R}^n$ bestimmen, indem man $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$ beliebig

wählt, und danach $\xi_i = b_i - \sum_{j=k+1}^{n} a_{i,j}\xi_j \forall i \in \{1, \dots, n\}$ wählt.
Denn für Zeile $i, i = k+1, \dots, n$ lautet das Gleichungssystem $0x_1 + \dots + 0x_n = b_i = 0$ und
Für Zeile $i, i = 1, \dots, k$
$a_{i,i}x_i + \sum_{j=k+1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i$

Beispiele: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wähle $x_3 = 1$. Dann folgt daraus $x_2 = -3$ und $x_1 = -2$
Wir sagen die Lösungsmenge ist
$\{(b_1 - \sum_{j=k+1}^{n} a_{1j}\xi_j), \dots, (b_k - \sum_j = k + 1^n a_{kj}\xi_j), \xi_{k+1}, \dots, \xi_n : \xi_{k+1}, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}\}$.
Wir nennen eine solche Mengen (n-k) parametrig.

2.2.2 Lemma 0.1

Sei A eine mxn -Matrix mit Rang k. Dann gilt $k = n$ genau dann, wenn alle Gleichungssysteme mit A höchstens eine Lösung haben, und k = m, genau dann, wenn alle Gleichungssyteme mit A lösbar sind.
Beweis: klar aus der Darstellung.

2.2.3 Zeilenoperationen

Eine Zeilenoperation macht aus dem Gleichungssystem ein neues Gleichungssytem durch Multiplikation der i-ten Zeile mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$ oder durch addieren des λ-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile $(i \neq j)$. Wir bezeichnen diese Operationen mit Z_i^λ bzw. $Z_{i,j}^\lambda$.
Bemerkung: Die Zeilenoperationen sind umkehrbar.
Die Umkehrung von $Z_i^\lambda = Z_i^{\frac{1}{\lambda}}$, die Umkehrung von $Z_{i,j}^\lambda = Z_{i,j}^{-\lambda}$

2.2.4 Lemma 0.2

Ein Gleichugnssystem G', welches aus einem Gleichungssytem G durch Zeilenoperationen hervorgeht besitzt die gleichen Lösungen wie G.

Beweis:

Für Z_I^λ : betrachten wir nur die i-te Zeile.

$a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$

Nach Z_i^λ: $\lambda a_{i,1}x_1 + \cdots + \lambda a_{i,n}x_n = \lambda b_i$

Diese besitzen eindeutig die selbe Lösungen $\xi_1, \ldots, \xi_n$

Für $Z_{i,j}^\lambda$ ebenso.

2.2.5 Satz 0.3

Jedes lineare Gleichungssytem lässt sich durch Zeilenoperationen und Vertauschungen von Variablen (d.h. Vertauschung von Spalten) in Normalform bringen.

Beweis:

Wir beweisen dies mittels eines expliziten Algorithmus (der Gauß=Jordan Elimination).

Aus praktischen Gruenden schreiben wir unser Gleichugnssystem als sogenannte erweiterte Koeffizientenmatrix. $\begin{pmatrix} a_1 1 & a_1 2 & \ldots & a_1 n & | & b_1 \\ \vdots & & & & | & \\ a_m 1 & a_m 2 & \ldots & a_m n & | & b_m \end{pmatrix}$

Zunaechst vergewissern wir uns, dass wir durch nacheinander Anwendung von $Z_{i,j}^1, Z_{j,i}^{-1}, Z_{i,j}^1$und Z_i^{-1} die i-te und j-te Zeile vertauschen koennen.

Sei y die i-te Zeile, z die j-te Zeile.

$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \overset{Z_{i,j}^1}{\to} \begin{pmatrix} y \\ z+y \end{pmatrix} \overset{Z_{j,i}^{-1}}{\to} \begin{pmatrix} -z \\ z+y \end{pmatrix} \overset{Z_{i,j}^1}{\to} \begin{pmatrix} -z \\ y \end{pmatrix} \overset{Z_i^{-1}}{\to} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$

Algorithmus:

Schritt 1: Falls alle Koeffizienten $a_{i,j}$ Null sind, so ist die Matrix bereits in Normalform, und es ist nichts mehr zu tun.

Falls es einen von Null Verschiedenen Koeffizienten gibt, so können wir diesen in die linke obere Ecke bringen (durch Spalten und Zeilenvertauschungen). Damit ist nun

$a_{1,1} \neq 0$. Nach $Z_1^{\frac{1}{a_{1,1}}}$ gilt $a_{1,1} = 1$. Nun wenden wir $Z_{1,2}^{-a_{2,1}}, \dots, Z_{1,m}^{-a_{m,1}}$ und erhalten $a_{2,1} = \cdots = a_{m,1} = 0$.

Die Matrix hat nun die Form $\begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & \mid & b_1 \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & \mid & b_m \end{pmatrix}$

Schritt 2: Falls $a_{i,j} = 0$ für $2 \leq i \leq m$ und $2 \leq j \leq n$, so ist die Matrix in Normalform für k=1 und wir sind fertig. Falls nicht, so existiert $i \geq 2, j \geq 2$ mit $a_{i,j} \neq 0$.

Wir vertauschen die i-te Zeile mit der zweiten Zeile, und die j-te Spalte mit der zweiten Spalte. Damit ist $a_{2,2} \neq 0$. Nun wenden wir $Z_2^{\frac{1}{a_{2,2}}}$ Damit ist $a_{2,2} = 1$. Danach wenden wir $Z_{2,1}^{-a_{1,2}}, \dots, Z_{2,m}^{-a_{m,2}}$ an,

und erhalten die Form: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} & \mid & b_1 \\ 0 & 1 & a_{2,3} & \dots & a_{1,n} & \mid & b_2 \\ 0 & 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} & \mid & b_m \end{pmatrix}$

$\vdots$

Wir verwandeln Damit der Reihe nach die Spalten der Matrix in Spalten, in welchen nur der Diagonaleintrag von Null verschieden ist (dieser Eintrag ist gleich 1).

Das Verfahren terminiert, wenn die Matrix in Normalform ist, oder wenn $min(n, m)$ Schritte vollzogen sind. Auch in diesem Fall ist die Matrix in Normalform.

2.2.6 Korolar 0.4

Sei A eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten. Weiter sei k der Rang einer Normalform von A (d.h. einer Matrix in Normalform, welche aus A durch Zeilenoperationen und Spaltenvertauschungen hervorgeht). Ein Gleichungssystem mit Matrix A besitzt dann entweder keine Lösung, oder ein (n-k) Parametriges Lösungssytem. Es gilt $k = n$ genau dann wenn jedes Gleichungssystem $Ax = b$ höchstens eine Lösung besitzt und $k = m$

genau dann wenn jedes Gleichungssytem $Ax = b$ mindestens eine Lösung besitzt.

Beweis: Folgt aus Lemma 0.2 und daraus, dass Zeilen / Spaltenoperationen die Lösungsmenge (modulo Variablentausch) nicht ändern.

2.2.7 Korolar 0.5

Ein homogenes Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Variablen hat mindestens eine nicht triviale Lösung.

Beweis

Es gibt für homogene Gleichungssyteme immer die triviale Lösung. Der Rang der Matrix des Gleichungssystems in Normalform sei k. Damit existiert ein (n-k) parametriges Lösungssystem, aber $k \leq min(n, m) \leq m \leq (n-1)$. Somit existiert mindestens eine weitere Lösung.

2.2.8 Definition 0.6

Eine Kollektion $a_1, \ldots, a_n$ von Vektoren in $\mathbb{R}^m$ heißt linear unabhängig, wenn sich keiner der Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren schreiben lässt.

Bem: Als Linearkombination von $a_1, \ldots, a_n$ bezeichnen wir einen Ausdruck der Form $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j$ für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

2.2.9 Lemma 0.7

Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für alle $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}$ gilt falls $\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = 0$ dann gilt $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$

Beweis

1. Falls $0 = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n$, und oBdA. $\xi_1 \neq 0$ so folgt $a_1 = \sum_{j=2}^{n} -\frac{\xi_j}{\xi_1} a_j$. Somit habe ich a_1 als Linearkombination von $a_2, \ldots, a_n$ geschrieben.

2. Falls aber oBdA. $a_1 = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j a_j$ so gilt: $0 = -a_1 = \sum j = 2^n$, damit ist ξ_1 (der erste Koeffizient) von Null verschieden.

2.2.10 Lemma 0.8

Es seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängig und es gelte $b = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$, mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann ist diese Linearkombination eindeutig.
Beweis Es sei auch $b = \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_n a_n$. Fuer Eindeutigkeit ist nun zu zeigen, dass $\mu_i = \lambda_i, 1 \leq i \leq n$.
Wir ziehen die Gleichungen voneinander ab, und erhalten:
$b - b = (\lambda_1 - \mu_1)a_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)a_n$
$\Leftrightarrow 0 = (\lambda_1 - \mu_1)a_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)a_n$
Mit Lemma 0.7 folgt die Aussage.

2.2.11 Satz 0.9

Wenn man ein Gleichungssystem durch Zeilenoperationen und Spaltenvertauschungen auf Normalform bringt, so erhält man immer denselben Rang.

Bemerkung Man kann damit vom Rang eines Gleichungssystems (bzw. einer Matrix) sprechen, auch wenn dieses nicht in Normalform ist.
Bemerkung Ein einzelner Vektor a gilt als linear unabhängig, solange $a \neq 0$. Die leere Kollektion von Vektoren (n=0) bezeichnen wir ebenfalls als linear unabhängig.

Vor dem Beweis des Satzes 0.9 noch ein paar Feststellungen.
Die Tatsache, dass ($\xi_1, \dots, \xi_n$ Lösung eines linearen Gleichungssystems ist laesst sich als linaere Abhaengigkeit ausdruecken
$\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = b$, wobei a_i eine Spalte der Matrix des Gleichungssystems ist.
Ist das Gleichungssystem in Normalform, so sind die ersten k Spaltenvektoren linear unabhängig. Die folgenden n-k Spaltenvektoren lassen sich aber als Linearkombination der ersten k darstellen, also
$\lambda_{1,i} a_1 + \cdots + \lambda_{k,i} a_k = a_i$ fuer $k < i \leq n$
mit $\lambda_{1,i} = a_{1,i}, \dots$.
Falls das Gleichungssystem lösbar ist, kann man dank $\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n = b$ auch b als

solche Linearkombination schreiben.

Wegen Lemma 0.8 sind diese Linearkombinationen auch eindeutig.

Beweis von Satz 0.9

Wir bemerken zunächst, dass Zeilenoperationen und Spaltenvertauschung die Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren nicht ändern.

Wir überlegen uns nun, dass der Rang eines linearen Gleichungssystems nichts anderes als die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren der Matrix ist.

Die ersten k Spalten sind linear unabhängig, da die Matrix in Normalform.

Seien also $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k+1}}$ beliebige Spaltenvektoren der Matrix des Gleichungssystems. Nachdem in diesen Vektoren alle Einträge ab dem k+1-ten Eintrag Null sind, hat das Gleichungssystem

$x_1 a_{i_1} + \cdots + x_{k+1} a_{i_{k+1}} = 0$

nur k mögliche Gleichungen. (Die Zeilen k+1 bis m in diesem Gleichungssystem sind $0 = 0$)

Nach Korolar 0.5 hat dieses homogene Gleichungssystem mir k Gleichungen und k+1 Unbekannten aber mindestens eine nicht triviale Lösung. Die Vektoren $a_{i_1}, \ldots a_{i_{k+1}}$ sind somit nicht linear unabhängig.

2.2.12 Korolar 0.10

Wird ein Gleichungssystem *nur* durch Zeilenoperationen (also ohne Variablentausch) auf Normalform gebracht, so ist die Matrix die man erhält immer die gleiche. Falls das Gleichungssystem lösbar ist, so ist auch das erhaltene b immer das gleiche.

2.3 Ein wenig euklidische Geometrie

2.3.1 Geraden und Ebenen

2.3.2 Def 0.11

1. Sei v != 0 ein Vektor in $\mathbb{R}^n$. Mit $\mathbb{R}v$ bezeichnen wir die Menge an Vektoren in $\mathbb{R}^n$der Form $\mathbb{R}v = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$
2. Sei $a \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$. Als (affine) Gerade bezeichnen wir die Menge der Vektoren der Form $g = \{a + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\} = a + \mathbb{R}v$

Bemerkung: Der Richtungsraum $\mathbb{R}v$ einer Geraden g ist durch diese eindeutig bestimmt als Menge der Differenzen $x - y$ aus Vektoren in g.

2.3.3 Lemma 0.12

Zwei Geraden $a+\mathbb{R}v, b+\mathbb{R}w$ sind genau dann gleich, wenn gilt $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$ und $a-b \in \mathbb{R}v$.
Beweis
Sei also $x = a + \mathbb{R}v$, dh. $x = a + \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Nach Annahme gilt $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$. Damit existiert ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda v = \mu w$ und somit $x = a + \mu w$. Weiteres haben wir nach Annahme, dass $a-b \in \mathbb{R}v$, also existiert ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $a-b = \xi w$, also $x = a-(a-b)+\xi w+\mu w$ und sommit $x = b + (\xi + \mu)w$.
Es ist also $x \in b + \mathbb{R}w$.
Die Umkehrung, also die Behauptung, dass sich ein Punkt $y \in b + \mathbb{R}w$ auch als Punkt in $a + \mathbb{R}v$ schreiben lässt, folgt analog.

2.3.4 Lemma 0.13

Durch zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^n$geht genau eine Gerade.
Beweis: Übung

2.3.5 Definition 0.14

Zwei Geraden heißen parallel, wenn sie die gleichen Richtungsgäume haben.

2.3.6 Definition 0.15

Eine (affine) Ebene ist eine Menge der Form $a+\mathbb{R}v+\mathbb{R}w$ für linear unabhängige Vektoren v, w.

Bemerkung: Auch hier gilt, das der Raum $\mathbb{R}v+\mathbb{R}w$ eindeutig bestimmt ist als Menge aller Differenzen von Punkten in der Ebene.

2.3.7 Lemma 0.16

Zwei nicht-parallele Geraden, die in einer Ebene liegen, schneiden sich.

Beweis:

Es sei $E = c + \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2$, $g_1 = a_1 + \mathbb{R}b_1$, $g_2 = a_2 + \mathbb{R}b_2$ zwei Geraden in E.

Wir suchen ξ_1, ξ_1, so dass $a_1 + \xi_1 w_1 = a_2 + \xi_2 w_2$.

Nun schreiben wir $a_i = c + \beta_{1,i}v_1 + \beta_{2,i}v_2$ und $w_i = \alpha_{1,i}v_1 + \alpha_{2,i}v_2$ für $i = 1, 2$.

Das führt auf das Gleichungssystem

$\alpha_{1,1}\xi_1 - \alpha_{1,2}\xi_2 = -\beta_{1,1} + \beta_{1,2}$

$\alpha_{2,1}\xi_1 - \alpha_{2,2}\xi_2 = -\beta_{2,1} + \beta_{2,2}$

Nachdem g_1, g_2 nicht parallel sind, sind w_1, w_2 linear unabhängig. Damit sind aber die Spaltenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & -\alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & -\alpha_{2,2} \end{pmatrix}$ ebenfalls linear unabhängig. Damit besitzt das Gleichungssystem eine Lösung (da $k = m$) nach Satz 0.9.

2.3.8 Das Skalarprodukt

Es seien $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n)$ zwei Vektoren in $\mathbb{R}^n$.

2.3.9 Def 0.17

Das Skalarprodukt von a und b ist definiert als $(a, b) = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$.

2.3.10 Lemma 0.18

Das Skalarprodukt zweier Vektoren a und b in $\mathbb{R}^n$ist eine sogenannante symmetrische, positiv definite Bilinearform, das heißt.

1. $(a, b) = (b, a)$ (symmetrisch)

2. $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$ (linear)

3. $\lambda a, b = \lambda(a, b)$ (linear)

4. $(a, a) \geq 0$ (positiv definit)

5. $(a, a) = 0$ genau dann, wenn $a = 0$

für alle Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: aus 1 und 2 folgt $(a, b + c = (a, b) + (a, c)$ und $(a, \lambda b) = \lambda(a, b)$ (bilinearität).

Beweis: 1, 2, 3 sind klar aus der Definition.

4 und 5 folgen daraus, dass $(a, a) = a_1^2, \ldots, a_n^2$.

2.3.11 Def. 0.19 Norm eines Vektors

Die Norm (oder Länge) von a ist $\sqrt{(a, a)} = ||a||$.

2.3.12 Def. 0.20 Winkel zweier Vektoren

1. Der Winnkel α zwischen zwei Vektoren $a, b \neq 0$ ist definiert durch $0 \leq \alpha \leq \pi$ und $cos(\alpha) = \frac{|(a,b)|}{||a|| \cdot ||b||}$.

2. Zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal, falls gilt $(a, b) = 0$.

2.3.13 Lemma 0.21 Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

Es gilt $|(a,b)| \leq ||a||||b||$.

Beweis:

Es gilt für jedes beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$:

$0 \leq (a + \lambda b, a + \lambda b) = (a,a) + 2(\lambda a, b) + \lambda^2(b,b)$

Für $\lambda = -\frac{(a,b)}{(b,b)}$ ergibt sich

$0 \leq (a,a) - 2\frac{(a,b)^2}{(b,b)} + \frac{(a,b)^2}{(b,b)}$

Für $b = 0$ ist die Aussage des Lemmas klar. Angenommen $b \neq 0$. Es folgt:

$(a,b)^2 \leq (a,a)(b,b)$

Bemerkung: Falls a und b linear unabhängig sind so folgt $|(a,b)| < ||a||||b||$, denn dann ist $a + \lambda b \neq 0$ (fir jedes $\lambda \in \mathbb{R}$) und die Ungleichung ist strikt (d.h. mit "<").

2.3.14 Lemma 0.22 Dreiecksungleichung

Es gilt $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$.

Beweis:

$||a+b||^2 = (a+b, a+b) = ||a||^2 + 2(a,b) + ||b||^2 \leq ||a||^2 + 2||a||||b|| + ||b||^2 = (||a|| + ||b||)^2$

2.3.15 Korollar 0.23 $||x - y||$ ist eine Metrik

Der $\mathbb{R}^n$mit dem Abstand $d(x,y) = ||x - y||$ ist ein sogennanter metrischer Raum. D.h.

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

für alle x, y, z in $\mathbb{R}^n$.

Wir nennen d einen Abstand.