

Lineare Algebra I

Mitschrieb

Florian Kramer

6. November 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	4
1.1	Aufbau der Vorlesung	4
1.2	Beispiel: Der Google Pagerank	4
2	Lineare Gleichungssysteme und der n-dimensionale reelle Raum	5
2.1	Der \mathbb{R}^n	5
2.2	Lineare Gleichungssysteme	6
2.2.1	Definition: Normalform	7
2.2.2	Lemma 0.1	8
2.2.3	Zeilenoperationen	8
2.2.4	Lemma 0.2	9
2.2.5	Satz 0.3	9
2.2.6	Korollar 0.4	10
2.2.7	Korollar 0.5	11
2.2.8	Definition 0.6	11
2.2.9	Lemma 0.7	11
2.2.10	Lemma 0.8	12

2.2.11	Satz 0.9	12
2.2.12	Korollar 0.10	13
2.3	Ein wenig euklidische Geometrie	14
2.3.1	Geraden und Ebenen	14
2.3.2	Def 0.11	14
2.3.3	Lemma 0.12	14
2.3.4	Lemma 0.13	14
2.3.5	Definition 0.14	15
2.3.6	Definition 0.15	15
2.3.7	Lemma 0.16	15
2.3.8	Das Skalarprodukt	15
2.3.9	Def 0.17	16
2.3.10	Lemma 0.18	16
2.3.11	Def. 0.19 Norm eines Vektors	16
2.3.12	Def. 0.20 Winkel zweier Vektoren	16
2.3.13	Lemma 0.21 Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung	17
2.3.14	Lemma 0.22 Dreiecksungleichung	17
2.3.15	Korollar 0.23 $\ x - y\ $ ist eine Metrik	17
3	Grundlegende Objekte	18
3.1	Elementare Aussagenlogik	18
3.1.1	Definition 1.1 Logische Operatoren	18
3.2	Mengen und Abbildungen	19
3.2.1	Definition 1.2 Teilmengen und Gleichheit	20
3.2.2	Die Natürliche Zahlen	20
3.2.3	Teilmengen mit Eigenschaften	21
3.2.4	Definition 1.3 Mengenoperationen	21
3.2.5	Definition 1.4 Abbildungen	22
3.2.6	Definition 1.5 Gleichheit von Abbildungen	22
3.2.7	Definition 1.6 Bild und Urbild	22

3.2.8	Definition 1.7 Einschränkung von Funktionen	23
3.2.9	Def 1.8 Injektiv und surjektiv	23
3.2.10	Definition 1.9 f^{-1}	24
3.2.11	Satz 1.10	24
3.2.12	Definition 1.11 Komposition von Abbildungen	25
3.2.13	Definition 1.12 Identität	25
3.2.14	Lemma 1.13	25

1 Einführung

- Das Wort Algebra stammt aus dem arabischen „äl-jabr“.
- Allgemein ist Algebra die Lehre der mathematischen Symbole und deren Manipulation.
- Lineare Algebra: Insbesondere lineare Gleichungen

1.1 Aufbau der Vorlesung

1. Lineare Gleichungssysteme und der n-dimensionale reellen Raum
2. Grundlegende Objekte
3. Gruppen, Ringe, Körper
4. Vektorräume und lineare Abbildungen
5. Determinanten
6. Eigenwerte und Normalformen

1.2 Beispiel: Der Google Pagerank

Gegeben 4 Seiten, mit Verlinkungen zwischen den Seiten. Von einer nicht verlinkten Seite wechselt man zufällig auf eine andere Seite. Der user startet an einer zufälligen Stelle und folgt von dort einem zufälligen link auf eine andere Seite. Zusätzlich wird immer mit Wahrscheinlichkeit $(1 - d)$, $d \in [0, 1]$ auf eine beliebige Website gewechselt.

Die wichtigste Site ist nun die, auf welcher ein Benutzer sich mit der höchsten Wahrscheinlichkeit aufhält.

$$\begin{aligned} p(\delta_1) &= \frac{1-d}{N} + d\left(\frac{p(\delta_2)}{1}, \frac{p(\delta_5)}{4}\right) \\ p(\delta_2) &= \frac{1-d}{N} + d\left(\frac{p(\delta_1)}{3}, \frac{p(\delta_5)}{4}\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zur Berechnung von $p(\delta_j)$, $j \in \{1..5\}$ gibt es Methoden aus der linearen Algebra.

2 Lineare Gleichungssysteme und der n-dimensionale reelle Raum

- Descartes führte "Koordinaten" ein in der Geometrie, also Zahlensysteme. Das führte dazu, das man nun leichter rechnen kann.
- Wir benutzen hier die reellen Zahlen (mit den üblichen Rechenregeln, also für die Addition :

$$- (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$- 0 + x = x + 0 = x$$

$$- \text{Es gibt für jedes } x \text{ ein } y \text{ mit } x + y = 0, \text{ wir nennen dieses } y \text{ das additiv inverse zu } x \text{ (} x'' \text{)}.$$

$$- x + y = y + x$$

Und für Multiplikation:

$$- \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$- (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$- \lambda(\rho\mu) = (\lambda\rho)\mu$$

$$- 1x = x$$

- Weiteres brauchen wir die natürlichen Zahlen, die 1,2,3...

2.1 Der \mathbb{R}^n

Für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

(x_1, \dots, x_n) ist dabei ein geordnetes n-Tupel, die Reihenfolge beim Vergleich Elemente dieser Art ist wichtig.

$$\text{Für } x, y \in \mathbb{R}^n : x = y \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$$

Wir nennen diese n-Tupel auch Vektoren im \mathbb{R}^n .

Mit \mathbb{R}^0 bezeichnen wir die Menge $\{0\}$, welche nur das Nullelement enthält.

Die Rechenregeln übertragen sich nun von \mathbb{R} . Wir schreiben

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \text{ für } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ (Vektoraddition)}$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \text{ (Skalarmultiplikation)}$$

2.2 Lineare Gleichungssysteme

Eine lineare Gleichung ueber \mathbb{R} ist ein Ausdruck der Form:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \beta$$

Für reelle Zahlen $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Einen Vektor, $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in \mathbb{R}^n$ nennen wir Lösung, wenn die reellen Zahlen ξ_1, \dots, ξ_n eingesetzt in x_1, \dots, x_n die Gleichung erfüllen.

Ein lineares Gleichungssystem G ist ein System

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

\vdots

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

In Kurzform $= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \forall i \in \{1, \dots, m\}$

oder, noch kürzer, in Matrixschreibweise

$$Ax = b$$

Wobei A eine Matrix ist mit Einträgen $a_{i,j}$, wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \ddots & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Ax für $x \in \mathbb{R}^n$ ist dann eine Kurzform für $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ mit einem Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Das Ergebnis ist ein Vektor $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ für eine Matrix A mit m Zeilen und n Spalten.

Der Vektor b heißt rechte Seite des linearen Gleichungssystems, A heißt Koeffizienten Matrix des linearen Gleichungssystems. Eine Spalte / Zeile von A kann mit einem Vektor im \mathbb{R}^m bzw. im \mathbb{R}^n identifiziert werden. Wir sprechen von Spalten- / Zeilen Vektoren

der Matrix A .

Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten nennen wir $m \times n$ -Matrix. Für $x \in \mathbb{R}^n$, A eine $m \times n$ -Matrix und B eine $l \times m$ -Matrix gilt die Rechenregel $BAx = B(Ax)$. Ein Gleichungssystem $Ax = b$ heißt homogen, falls b der Nullvektor $(0, \dots, 0)$ ist und quadratisch für $m = n$ (eine quadratische Matrix A).

2.2.1 Definition: Normalform

Ein Gleichungssystem $Ax = b$ ist in Normalform, falls A die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & a_{m,k+1} & \dots & a_{m,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{für } k=2)$$

für ein $k \in \mathbb{N}_0$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ist in Normalform für } k = 2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Ist in Normalform für } k = 3.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ist in Normalform für } k = 0.$$

k heißt Rang der Matrix A (bzw. des Gleichungssystems). Es gilt

$$0 \leq k \leq \min(m, n)$$

Ein Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn gilt:

$$b_{k+1} = b_{k+2} = \dots = b_m = 0$$

In diesem Fall lässt sich eine Lösung $\xi \in \mathbb{R}^n$ bestimmen, indem man ξ_{k+1}, \dots, ξ_n beliebig

wählt, und danach $\xi_i = b_i - \sum_{j=k+1}^n a_{i,j} \xi_j \forall i \in \{1, \dots, n\}$ wählt.

Denn für Zeile $i, i = k+1, \dots, n$ lautet das Gleichungssystem $0x_1 + \dots + 0x_n = b_i = 0$ und

Für Zeile $i, i = 1, \dots, k$

$$a_{i,i}x_i + \sum_{j=k+1}^n a_{i,j}x_j = b_i$$

Beispiele:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wähle $x_3 = 1$. Dann folgt daraus $x_2 = -3$ und $x_1 = -2$

Wir sagen die Lösungsmenge ist

$$\{(b_1 - \sum_{j=k+1}^n a_{1j}\xi_j), \dots, (b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}\xi_j), \xi_{k+1}, \dots, \xi_n : \xi_{k+1}, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}\}.$$

Wir nennen eine solche Mengen (n-k) parametrig.

2.2.2 Lemma 0.1

Sei A eine $m \times n$ -Matrix mit Rang k. Dann gilt $k = n$ genau dann, wenn alle Gleichungssysteme mit A höchstens eine Lösung haben, und $k = m$, genau dann, wenn alle Gleichungssysteme mit A lösbar sind.

Beweis: klar aus der Darstellung.

2.2.3 Zeilenoperationen

Eine Zeilenoperation macht aus dem Gleichungssystem ein neues Gleichungssystem durch Multiplikation der i-ten Zeile mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$ oder durch addieren des λ -fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile ($i \neq j$). Wir bezeichnen diese Operationen mit Z_i^λ bzw. $Z_{i,j}^\lambda$.

Bemerkung: Die Zeilenoperationen sind umkehrbar.

Die Umkehrung von $Z_i^\lambda = Z_i^{\frac{1}{\lambda}}$, die Umkehrung von $Z_{i,j}^\lambda = Z_{i,j}^{-\lambda}$

2.2.4 Lemma 0.2

Ein Gleichungssystem G' , welches aus einem Gleichungssystem G durch Zeilenoperationen hervorgeht besitzt die gleichen Lösungen wie G .

Beweis:

Für Z_I^λ : betrachten wir nur die i -te Zeile.

$$a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n = b_i$$

$$\text{Nach } Z_i^\lambda: \lambda a_{i,1}x_1 + \dots + \lambda a_{i,n}x_n = \lambda b_i$$

Diese besitzen eindeutig die selben Lösungen ξ_1, \dots, ξ_n

Für $Z_{i,j}^\lambda$ ebenso.

2.2.5 Satz 0.3

Jedes lineare Gleichungssystem lässt sich durch Zeilenoperationen und Vertauschungen von Variablen (d.h. Vertauschung von Spalten) in Normalform bringen.

Beweis:

Wir beweisen dies mittels eines expliziten Algorithmus (der Gauß=Jordan Elimination).

Aus praktischen Gründen schreiben wir unser Gleichungssystem als sogenannte erweiterte Koeffizientenmatrix.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

Zunächst vergewissern wir uns, dass wir durch nacheinander Anwendung von $Z_{i,j}^1, Z_{j,i}^{-1}, Z_{i,j}^1$ und Z_i^{-1} die i -te und j -te Zeile vertauschen können.

Sei y die i -te Zeile, z die j -te Zeile.

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_{i,j}^1} \begin{pmatrix} y \\ z+y \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_{j,i}^{-1}} \begin{pmatrix} -z \\ z+y \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_{i,j}^1} \begin{pmatrix} -z \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_i^{-1}} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$$

Algorithmus:

Schritt 1: Falls alle Koeffizienten $a_{i,j}$ Null sind, so ist die Matrix bereits in Normalform, und es ist nichts mehr zu tun.

Falls es einen von Null Verschiedenen Koeffizienten gibt, so können wir diesen in die linke obere Ecke bringen (durch Spalten und Zeilenvertauschungen). Damit ist nun

$a_{1,1} \neq 0$. Nach $Z_1^{\frac{1}{a_{1,1}}}$ gilt $a_{1,1} = 1$. Nun wenden wir $Z_{1,2}^{-a_{2,1}}, \dots, Z_{1,m}^{-a_{m,1}}$ und erhalten $a_{2,1} = \dots = a_{m,1} = 0$.

Die Matrix hat nun die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & | & b_1 \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & | & b_m \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Falls $a_{i,j} = 0$ für $2 \leq i \leq m$ und $2 \leq j \leq n$, so ist die Matrix in Normalform für $k=1$ und wir sind fertig. Falls nicht, so existiert $i \geq 2, j \geq 2$ mit $a_{i,j} \neq 0$.

Wir vertauschen die i -te Zeile mit der zweiten Zeile, und die j -te Spalte mit der zweiten Spalte. Damit ist $a_{2,2} \neq 0$. Nun wenden wir $Z_2^{\frac{1}{a_{2,2}}}$ Damit ist $a_{2,2} = 1$. Danach wenden wir $Z_{2,1}^{-a_{1,2}}, \dots, Z_{2,m}^{-a_{m,2}}$ an,

und erhalten die Form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} & | & b_1 \\ 0 & 1 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} & | & b_2 \\ 0 & 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} & | & b_m \end{pmatrix}$$

\vdots

Wir verwandeln Damit der Reihe nach die Spalten der Matrix in Spalten, in welchen nur der Diagonaleintrag von Null verschieden ist (dieser Eintrag ist gleich 1).

Das Verfahren terminiert, wenn die Matrix in Normalform ist, oder wenn $\min(n, m)$ Schritte vollzogen sind. Auch in diesem Fall ist die Matrix in Normalform.

2.2.6 Korollar 0.4

Sei A eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten. Weiter sei k der Rang einer Normalform von A (d.h. einer Matrix in Normalform, welche aus A durch Zeilenoperationen und Spaltenvertauschungen hervorgeht). Ein Gleichungssystem mit Matrix A besitzt dann entweder keine Lösung, oder ein $(n-k)$ Parametrisches Lösungssystem. Es gilt $k = n$ genau dann wenn jedes Gleichungssystem $Ax = b$ höchstens eine Lösung besitzt und $k = m$

genau dann wenn jedes Gleichungssystem $Ax = b$ mindestens eine Lösung besitzt.

Beweis: Folgt aus Lemma 0.2 und daraus, dass Zeilen / Spaltenoperationen die Lösungsmenge (modulo Variablentausch) nicht ändern.

2.2.7 Korollar 0.5

Ein homogenes Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Variablen hat mindestens eine nicht triviale Lösung.

Beweis

Es gibt für homogene Gleichungssysteme immer die triviale Lösung. Der Rang der Matrix des Gleichungssystems in Normalform sei k . Damit existiert ein $(n-k)$ parametrisches Lösungssystem, aber $k \leq \min(n, m) \leq m \leq (n-1)$. Somit existiert mindestens eine weitere Lösung.

2.2.8 Definition 0.6

Eine Kollektion a_1, \dots, a_n von Vektoren in \mathbb{R}^m heißt linear unabhängig, wenn sich keiner der Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren schreiben lässt.

Bem: Als Linearkombination von a_1, \dots, a_n bezeichnen wir einen Ausdruck der Form $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j a_j$ für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

2.2.9 Lemma 0.7

Vektoren a_1, \dots, a_n sind genau dann linear unabhängig, wenn für alle $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$ gilt falls $\xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n = 0$ dann gilt $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$

Beweis

1. Falls $0 = \xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n$, und oBdA. $\xi_1 \neq 0$ so folgt $a_1 = \sum_{j=2}^n -\frac{\xi_j}{\xi_1} a_j$. Somit habe ich a_1 als Linearkombination von a_2, \dots, a_n geschrieben.
2. Falls aber oBdA. $a_1 = \sum_{j=2}^n \lambda_j a_j$ so gilt: $0 = -a_1 = \sum_{j=2}^n \lambda_j a_j$, damit ist ξ_1 (der erste Koeffizient) von Null verschieden.

2.2.10 Lemma 0.8

Es seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängig und es gelte $b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$, mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann ist diese Linearkombination eindeutig.

Beweis Es sei auch $b = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n$. Für Eindeutigkeit ist nun zu zeigen, dass $\mu_i = \lambda_i, 1 \leq i \leq n$.

Wir ziehen die Gleichungen voneinander ab, und erhalten:

$$\begin{aligned} b - b &= (\lambda_1 - \mu_1)a_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)a_n \\ \Leftrightarrow 0 &= (\lambda_1 - \mu_1)a_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)a_n \end{aligned}$$

Mit Lemma 0.7 folgt die Aussage.

2.2.11 Satz 0.9

Wenn man ein Gleichungssystem durch Zeilenoperationen und Spaltenvertauschungen auf Normalform bringt, so erhält man immer denselben Rang.

Bemerkung Man kann damit vom Rang eines Gleichungssystems (bzw. einer Matrix) sprechen, auch wenn dieses nicht in Normalform ist.

Bemerkung Ein einzelner Vektor a gilt als linear unabhängig, solange $a \neq 0$. Die leere Kollektion von Vektoren ($n=0$) bezeichnen wir ebenfalls als linear unabhängig.

Vor dem Beweis des Satzes 0.9 noch ein paar Feststellungen.

Die Tatsache, dass (ξ_1, \dots, ξ_n) Lösung eines linearen Gleichungssystems ist lässt sich als lineare Abhängigkeit ausdrücken

$\xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n = b$, wobei a_i eine Spalte der Matrix des Gleichungssystems ist.

Ist das Gleichungssystem in Normalform, so sind die ersten k Spaltenvektoren linear unabhängig. Die folgenden $n-k$ Spaltenvektoren lassen sich aber als Linearkombination der ersten k darstellen, also

$$\lambda_{1,i} a_1 + \dots + \lambda_{k,i} a_k = a_i \text{ für } k < i \leq n$$

mit $\lambda_{1,i} = a_{1,i}, \dots$

Falls das Gleichungssystem lösbar ist, kann man dank $\xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n = b$ auch b als

solche Linearkombination schreiben.

Wegen Lemma 0.8 sind diese Linearkombinationen auch eindeutig.

Beweis von Satz 0.9

Wir bemerken zunächst, dass Zeilenoperationen und Spaltenvertauschung die Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren nicht ändern.

Wir überlegen uns nun, dass der Rang eines linearen Gleichungssystems nichts anderes als die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren der Matrix ist.

Die ersten k Spalten sind linear unabhängig, da die Matrix in Normalform.

Seien also $a_{i_1}, \dots, a_{i_{k+1}}$ beliebige Spaltenvektoren der Matrix des Gleichungssystems. Nachdem in diesen Vektoren alle Einträge ab dem $k+1$ -ten Eintrag Null sind, hat das Gleichungssystem

$$x_1 a_{i_1} + \dots + x_{k+1} a_{i_{k+1}} = 0$$

nur k mögliche Gleichungen. (Die Zeilen $k+1$ bis m in diesem Gleichungssystem sind $0 = 0$)

Nach Korollar 0.5 hat dieses homogene Gleichungssystem k Gleichungen und $k+1$ Unbekannten aber mindestens eine nicht triviale Lösung. Die Vektoren $a_{i_1}, \dots, a_{i_{k+1}}$ sind somit nicht linear unabhängig.

2.2.12 Korollar 0.10

Wird ein Gleichungssystem *nur* durch Zeilenoperationen (also ohne Variablentausch) auf Normalform gebracht, so ist die Matrix die man erhält immer die gleiche. Falls das Gleichungssystem lösbar ist, so ist auch das erhaltene b immer das gleiche.

2.3 Ein wenig euklidische Geometrie

2.3.1 Geraden und Ebenen

2.3.2 Def 0.11

1. Sei $v \neq 0$ ein Vektor in \mathbb{R}^n . Mit $\mathbb{R}v$ bezeichnen wir die Menge an Vektoren in \mathbb{R}^n der Form $\mathbb{R}v = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$
2. Sei $a \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$. Als (affine) Gerade bezeichnen wir die Menge der Vektoren der Form $g = \{a + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\} = a + \mathbb{R}v$

Bemerkung: Der Richtungsraum $\mathbb{R}v$ einer Geraden g ist durch diese eindeutig bestimmt als Menge der Differenzen $x - y$ aus Vektoren in g .

2.3.3 Lemma 0.12

Zwei Geraden $a + \mathbb{R}v, b + \mathbb{R}w$ sind genau dann gleich, wenn gilt $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$ und $a - b \in \mathbb{R}v$.

Beweis

Sei also $x = a + \mathbb{R}v$, dh. $x = a + \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Nach Annahme gilt $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$. Damit existiert ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda v = \mu w$ und somit $x = a + \mu w$. Weiteres haben wir nach Annahme, dass $a - b \in \mathbb{R}v$, also existiert ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $a - b = \xi w$, also $x = a - (a - b) + \xi w + \mu w$ und somit $x = b + (\xi + \mu)w$.

Es ist also $x \in b + \mathbb{R}w$.

Die Umkehrung, also die Behauptung, dass sich ein Punkt $y \in b + \mathbb{R}w$ auch als Punkt in $a + \mathbb{R}v$ schreiben lässt, folgt analog.

2.3.4 Lemma 0.13

Durch zwei verschiedene Punkte in \mathbb{R}^n geht genau eine Gerade.

Beweis: Übung

2.3.5 Definition 0.14

Zwei Geraden heißen parallel, wenn sie die gleichen Richtungsgäume haben.

2.3.6 Definition 0.15

Eine (affine) Ebene ist eine Menge der Form $a + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$ für linear unabhängige Vektoren v, w .

Bemerkung: Auch hier gilt, dass der Raum $\mathbb{R}v + \mathbb{R}w$ eindeutig bestimmt ist als Menge aller Differenzen von Punkten in der Ebene.

2.3.7 Lemma 0.16

Zwei nicht-parallele Geraden, die in einer Ebene liegen, schneiden sich.

Beweis:

Es sei $E = c + \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2$, $g_1 = a_1 + \mathbb{R}b_1$, $g_2 = a_2 + \mathbb{R}b_2$ zwei Geraden in E .

Wir suchen ξ_1, ξ_2 , so dass $a_1 + \xi_1 w_1 = a_2 + \xi_2 w_2$.

Nun schreiben wir $a_i = c + \beta_{1,i}v_1 + \beta_{2,i}v_2$ und $w_i = \alpha_{1,i}v_1 + \alpha_{2,i}v_2$ für $i = 1, 2$.

Das führt auf das Gleichungssystem

$$\alpha_{1,1}\xi_1 - \alpha_{1,2}\xi_2 = -\beta_{1,1} + \beta_{1,2}$$

$$\alpha_{2,1}\xi_1 - \alpha_{2,2}\xi_2 = -\beta_{2,1} + \beta_{2,2}$$

Nachdem g_1, g_2 nicht parallel sind, sind w_1, w_2 linear unabhängig. Damit sind aber die Spaltenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & -\alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & -\alpha_{2,2} \end{pmatrix}$ ebenfalls linear unabhängig. Damit besitzt das Gleichungssystem eine Lösung (da $k = m$) nach Satz 0.9.

2.3.8 Das Skalarprodukt

Es seien $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n)$ zwei Vektoren in \mathbb{R}^n .

2.3.9 Def 0.17

Das Skalarprodukt von a und b ist definiert als $(a, b) = \sum_{j=1}^n a_j b_j$.

2.3.10 Lemma 0.18

Das Skalarprodukt zweier Vektoren a und b in \mathbb{R}^n ist eine sogenannte symmetrische, positiv definite Bilinearform, das heißt.

1. $(a, b) = (b, a)$ (symmetrisch)
2. $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$ (linear)
3. $\lambda a, b = \lambda(a, b)$ (linear)
4. $(a, a) \geq 0$ (positiv definit)
5. $(a, a) = 0$ genau dann, wenn $a = 0$

für alle Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: aus 1 und 2 folgt $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$ und $(a, \lambda b) = \lambda(a, b)$ (bilinearität).

Beweis: 1, 2, 3 sind klar aus der Definition.

4 und 5 folgen daraus, dass $(a, a) = a_1^2, \dots, a_n^2$.

2.3.11 Def. 0.19 Norm eines Vektors

Die Norm (oder Länge) von a ist $\sqrt{(a, a)} = \|a\|$.

2.3.12 Def. 0.20 Winkel zweier Vektoren

1. Der Winkel α zwischen zwei Vektoren $a, b \neq 0$ ist definiert durch $0 \leq \alpha \leq \pi$ und $\cos(\alpha) = \frac{|(a, b)|}{\|a\| \cdot \|b\|}$.
2. Zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal, falls gilt $(a, b) = 0$.

2.3.13 Lemma 0.21 Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

Es gilt $|(a, b)| \leq \|a\| \|b\|$.

Beweis:

Es gilt für jedes beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq (a + \lambda b, a + \lambda b) = (a, a) + 2(\lambda a, b) + \lambda^2(b, b)$$

Für $\lambda = -\frac{(a, b)}{(b, b)}$ ergibt sich

$$0 \leq (a, a) - 2\frac{(a, b)^2}{(b, b)} + \frac{(a, b)^2}{(b, b)}$$

Für $b = 0$ ist die Aussage des Lemmas klar. Angenommen $b \neq 0$. Es folgt:

$$(a, b)^2 \leq (a, a)(b, b)$$

Bemerkung: Falls a und b linear unabhängig sind so folgt $|(a, b)| < \|a\| \|b\|$, denn dann ist $a + \lambda b \neq 0$ (für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$) und die Ungleichung ist strikt (d.h. mit " $<$ ").

2.3.14 Lemma 0.22 Dreiecksungleichung

Es gilt $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

Beweis:

$$\|a + b\|^2 = (a + b, a + b) = \|a\|^2 + 2(a, b) + \|b\|^2 \leq \|a\|^2 + 2\|a\| \|b\| + \|b\|^2 = (\|a\| + \|b\|)^2$$

2.3.15 Korollar 0.23 $\|x - y\|$ ist eine Metrik

Der \mathbb{R}^n mit dem Abstand $d(x, y) = \|x - y\|$ ist ein sogenannter metrischer Raum. D.h.

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

für alle x, y, z in \mathbb{R}^n .

Wir nennen d einen Abstand.

3 Grundlegende Objekte

3.1 Elementare Aussagenlogik

Aussagen (in der Mathematik) sind sprachliche Gebilde, welche entweder wahr (w) oder falsch (f) sind.

Darstellung mittels Wahrheitstabelle:

	Aussage	
Beispiele:	A: es sind am 2.11.2017 mehr als fünf Personen im Hörsaal Rundbau.	w
	B = Der Dozent der LA in FR im WS 17/18 heißt Peter	f

3.1.1 Definition 1.1 Logische Operatoren

A, B seien Aussagen.

1. " $\neg A$ ", oder "nicht A" ist die Negation von A

A	$\neg A$
w	f
f	w

2. Junktoren

$A \vee B$, "A oder B" ist wahr, wenn mindestens eine der Aussagen wahr A, B ist.

$A \wedge B$, "A und B" ist wahr, wenn beide wahr sind.

A	b	$A \vee B$	$A \wedge B$
w	w	w	w
f	w	w	f
w	f	w	f
f	f	f	f

3. Implikationen

$A \Rightarrow B$ ist wahr, wenn A die Aussage B impliziert.

$A \Leftrightarrow B$ ist wahr, wenn A genau dann wahr ist, wenn B wahr ist.

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w
f	w	w	f
w	f	f	f
f	f	w	w

Beispiel Sei G ein lineares Gleichungssystem mit m Zeilen, n Spalten und Grad k . Dann gilt

$k = n \Rightarrow$ Lösung immer eindeutig.

$A \Rightarrow B$

Um die Aussage $A \Rightarrow B$ zu zeigen, können wir annehmen, dass A richtig ist und müssen folgern, dass B auch richtig ist.

Bemerkung (De Morgan)

1. $(\neg A \vee \neg B) = \neg(A \wedge B)$
2. $(\neg A \wedge \neg B) = \neg(A \vee B)$

3.2 Mengen und Abbildungen

Problem: Der Begriff der Menge ist sehr schwer zu definieren. (Die Menge aller Mengen die sich nicht selbst enthalten, ist zwar naiv eine Menge, macht aber keinen Sinn, da die Definition dieser Menge zum Widerspruch geführt werden kann. Objekte wie dieses machen die Definition schwer.)

Endliche Mengen kann man durch Auflistung aller Elemente angeben.

z.B. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$

x_1, x_2, x_3 heißen dann Elemente von X und wir schreiben $x_1 \in X$.

Reihenfolge der Elemente und Mehrfachauflistung sind nicht relevant. Die Mächtigkeit einer Menge ist die Anzahl paarweise verschiedener Elemente.

$\{1, 2, 2, 3\}$ hat Mächtigkeit 3.

Die leere Menge $\{\}$ oder \emptyset enthält kein Element.

3.2.1 Definition 1.2 Teilmengen und Gleichheit

1. Eine Menge Y heißt Teilmenge von X , wenn aus $x \in y$ immer folgt $x \in X$. Wir schreiben $Y \subset X$.
2. Wir sagen $X = Y$ genau dann, wenn $X \subset Y$ und $Y \subset X$
(d.h. zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. ("Extensinalitätsprinzip"??))

Bemerkungen

1. $\emptyset \subset M$, für jede Menge M
2. $M \subset M$, für jede Menge M
3. Wenn gilt $M \subset N$, aber nicht $M = N$, dann heißt M "echte Teilmenge" von N , wir schreiben dann $M \subsetneq N$ (Die ISO vorschreibt sieht hier \subset für "echte Teilmenge" und \subseteq für "Teilmenge" vor, dies wird jedoch selten benutzt.)

3.2.2 Die Natürliche Zahlen

Die einfachste unendliche Menge ist die der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, deren Existenz wir annehmen, zusammen mit den üblichen Rechenregeln.

Die natürlichen Zahlen genügen dem Prinzip der vollständigen Induktion.

Sei $M \subset \mathbb{N}$ und es gelte:

1. $1 \in M$
2. falls $m \in M$, so ist auch $m + 1 \in M$

Dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Durch Erweiterung von Zahlbereichen können wir aus \mathbb{N} auch die ganzen Zahlen \mathbb{Z} , die rationalen Zahlen \mathbb{Q} sowie die reellen Zahlen \mathbb{R} konstruieren.

(ebenso die komplexen Zahlen \mathbb{C})

Bemerkung

Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

3.2.3 Teilmengen mit Eigenschaften

Aus einer Menge können wir Teilmengen Auswählen, welche durch bestimmte Eigenschaften charakterisiert werden. Wir schreiben

$X' = \{x \in X : x \text{ hat Eigenschaft } E\}$ (auch $\{x \in X | x \text{ hat Eigenschaft}\}$ ist verbreitet)

3.2.4 Definition 1.3 Mengenoperationen

Sind X, Y Mengen, so können wir bilden:

1. Die Vereinigung $X \cup Y$, ist die Menge aller Elemente, welche in X sind oder welche in Y sind.
2. Der Schnitt $X \cap Y = \{x \in X : x \in Y\}$, ist die Menge aller Elemente, die sowohl in X als auch in Y sind.
3. Für $Y \subset X$ schreiben wir $X \setminus Y$ sprich "X ohne Y" für die Menge $\{x \in X : x \notin Y\}$
4. Das "kartesische Produkt" $X \times Y$ ist die Menge aller geordneten Tupel $\{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$

Beispiele

1. $\{1, 2, 4\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$
2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
3. Die Elemente der Menge $\{1, \{1\}, 2\}$ sind genau $1, \{1\}, 2$

3.2.5 Definition 1.4 Abbildungen

Seien X, Y Mengen. Als Abbildung von X nach Y bezeichnen wir eine Vorschrift f , welche jedem Element x in X genau ein Element y in Y zuordnet. Wir schreiben

$$f : X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$$

3.2.6 Definition 1.5 Gleichheit von Abbildungen

Zwei Abbildungen $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Y$ heißen gleich, wenn für alle $x \in X$ gilt $f(x) = g(x)$.

3.2.7 Definition 1.6 Bild und Urbild

Sei $f : X \rightarrow Y, M \subset X, N \subset Y$

1. Wir schreiben $f(M) = \{y \in Y : \text{es existiert } x \in M \text{ mit } f(x) = y\} \subset Y$ Bild von M
2. $f^{-1}(N) = \{x \in X : f(x) \in N\} \subset X$ Urbild von N

Beispiel:

1. $X = \{1, 2, 3\}$
 $Y = \{3, 4, 5, 6\}$
 $f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 5$
 $M = \{1, 2\} \subset X$
 $f(M) = \{4, 5\} \subset Y$
 $f(\emptyset) = \emptyset \subset Y$
 $f(X) = \{4, 5\}$
 $N = \{3, 4, 5\}$
 $f^{-1}(N) = \{1, 2, 3\}$
 $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
 $f^{-1}(\{6\}) = \emptyset$
 $f^{-1}(\{5\}) = \{2, 3\}$

$$2. \quad X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$$

$$f : X \rightarrow Y, x \mapsto f(x) = x^2$$

$$f([1, 2]) = [1, 4] \subset Y$$

$$f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$$

$$f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$$

$$f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$$

Achtung: $f^{-1}(N)$ ist nur definiert für Mengen $N \subset Y$. Insbesondere ist f^{-1} (zumindest jetzt) keine Abbildung von Y nach X .

3.2.8 Definition 1.7 Einschränkung von Funktionen

Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, $M \subset X$.

Die Einschränkung von f auf M ist die Abbildung $f|_M : M \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$

Bemerkung

Der Unterschied zu f ist nur der eingeschränkte Definitionsbereich.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2$$

$$M = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

$$(f|_M)^{-1}(\{1\}) = \{1\}$$

3.2.9 Def 1.8 Injektiv und surjektiv

Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

1. f heißt injektiv, falls gilt

$$(x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

2. f heißt surjektiv, falls gilt

$$f(X) = Y$$

3. f heißt bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Beispiel

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2$$

ist nicht injektiv, da $f(-1) = f(1)$, $1 \neq -1$. f ist auch nicht surjektiv, da $f(x) \geq 0$.

$f|_{\mathbb{R}_0^+} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv

$f|_{\mathbb{R}_0^+} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ist injektiv, und surjektiv, also bijektiv

3.2.10 Definition 1.9 f^{-1}

Es sei $f : X \rightarrow Y$ bijektiv. Wir schreiben dann $f^{-1} : Y \rightarrow X$, $f^{-1}(y) = x$ mit dem eindeutig definierten $x \in X$, sodass gilt $f(x) = y$.

Bemerkung

Die Sinnhaftigkeit der Definition 1.9 folgt sofort aus der Definition von Bijektivität.

3.2.11 Satz 1.10

Sei X eine endliche Menge, so sind für $f : X \rightarrow X$ äquivalent:

1. f ist injektiv
2. f ist surjektiv
3. f ist bijektiv

Bemerkung Für nicht endliche Mengen haben wir einfache Gegenbeispiele:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto f(x) = 2x$$

Beweis

X ist eine endliche Menge, wir schreiben $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ mit paarweise verschiedenen x_j .

1. Wir zeigen zunächst $1. \Rightarrow 2.$. Zu zeigen ist also falls f injektiv ist, so ist f auch surjektiv. Dies wird impliziert durch die Aussage "Ist f *nicht* surjektiv, so ist f auch *nicht* injektiv", welche wir zeigen.

Sei f also nicht surjektiv. Also $f(X) \neq X$. Damit besteht $f(X)$ aus $m < n$ Elementen. Verteilt man aber n Elemente in $m < n$ Schubladen, so muss eine Schublade existieren, in der mehr als ein Element ist. Damit kann f nicht injektiv sein (es existiert $x \neq x'$ mit $f(x') = f(x)$).

2. $2. \Rightarrow 1.$ Sei f also nicht injektiv, dann existieren nach Definition $x, x' \in X, x' \neq x$ aber $f(x) = f(x')$. Damit kann aber $f(X)$ höchstens $n-1$ Elemente enthalten und f ist auch nicht surjektiv.
3. $3. \Rightarrow 1.$ trivial nach der Definition der Bijektivität
4. $3. \Rightarrow 2.$ ebenso
5. $1. \Rightarrow 3.$ Aus Injektivität folgt bereits Surjektivität und damit auch Bijektivität.
6. $2. \Rightarrow 3.$ Aus Surjektivität folgt bereits Injektivität und damit auch Bijektivität.

3.2.12 Definition 1.11 Komposition von Abbildungen

Es seien X, Y, Z Mengen, $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen.

Dann definiert $g \circ f : X \rightarrow Z, x \mapsto g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ die Komposition von Abbildungen.

Bemerkung

Es gilt Assoziativität: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ für $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, h : Z \rightarrow A$ aber *nicht* Kommutativität, d.h. im Allgemeinen gilt nicht $f \circ g = g \circ f$ für $f : X \rightarrow X, g : X \rightarrow X$, denn

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$$

ist ein Gegenbeispiel, denn im Allgemeinen gilt *nicht*, dass $(x + 1)^2 = x^2 + 1$.

3.2.13 Definition 1.12 Identität

Mit $Id_X : X \rightarrow X$ bezeichnen wir die identische Abbildung $x \mapsto x$

3.2.14 Lemma 1.13

Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann gilt:

1. f ist genau dann injektiv, wenn eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ existiert, mit $g \circ f = Id_X$
2. f ist genau dann surjektiv, wenn $g : Y \rightarrow X$ existiert, mit $f \circ g = Id_Y$

3. f ist genau dann bijektiv, falls $g : Y \rightarrow X$ existiert, so dass sowohl $g \circ f = Id_X$ und $f \circ g = Id_Y$. Es gilt dann $g = f^{-1}$