Reconocimiento de patrones
2022-2

Tarea#2

28/02/2022

Acosta Imandt Daniel

1. Encuentra todas las funciones ortogonales2D de Legendre de orden ≤ 3

Solución

Recordando los polinomios de Legendre $p_n(x), n \geq 0$, definidos como $p_0(x) = 1, p_1(x) = x$ y la función recursiva $np_n(x) - (2n-1)xp_{n-1}(x) + (n-1)p_{n-2}(x) = 0$.
Ahora encontraremos todas las funciones ortogonales 2D en orden ≤ 3 Sustituyendo.

$$3p_3(x) - (2(3)-1)xp_2(x) + (3-1)p_1(x) = 0$$
$$\implies 3p_3(x) - 5xp_2(x) + 2p_1(x) = 0$$
$$\implies p_3(x) = \frac{5xp_2(x) - 2x}{3}$$

Por otro lado

$$2p_2(x) - (3)xp_1(x) + (1)p_0(x) = 0$$
$$\implies p_2(x) = \frac{3xp_1(x) - 1}{2} = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

Sustituyendo $p_2(x)$ tenemos que

$$p_3(x) = \frac{5x(\frac{3x^2-1}{2}) - 2x}{3} = \frac{\frac{15x^3-5x}{2} - 2x}{3} = \frac{15x^3 - 9x}{6} = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

Por lo tanto tenemos que las funciones de Legendre ortogonales en 2D de orden ≤ 3 son las siguientes:

$$\underline{p_0(x) = 1 \quad p_1(x) = x_1, x_2 \quad p_2(x) = \frac{1}{2}(3x_1^2 - 1), \frac{1}{2}(x_2^2 - 1), x_1x_2, x_1^2, x_2^2}$$

$$\underline{p_3(x) = \frac{1}{2}(5x_1^3 - 3x), \frac{1}{2}(5x_2^3 - 3x), x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1^3, x_2^3, x_1(\frac{3x_1^2}{2} - \frac{1}{2}), x_1(\frac{3x_2^2}{2} - \frac{1}{2}), x_2(\frac{3x_1^2}{2} - \frac{1}{2}), x_2(\frac{3x_2^2}{2} - \frac{1}{2})}$$

2. Encuentre todas las funciones ortogonales 4D de Hermite de orden ≤ 3

Solución

Recordando que Hermite esta definido por el sistema $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x$ y la función recursiva $H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x) = 0$.
Por lo que sustituyendo primero para $n = 2$ tenemos que

$$H_2(x) - 2xH_1(x) + 2(1)H_0(x) = 0$$
$$\implies H_2(x) = 2xH_1(x) - 2H_0(x) = 4x^2 - 2$$

Y con esto ahora vemos para orden 3.

$$H_3(x) - 2xH_2(x) + 2(2)H_1(x) = 0$$

$$\implies H_3(x) = 2xH_2(x) - 4H_1(x) = 2x(4x^2-2) - 4(2x) = 8x^3 - 12x$$

Por lo tanto tenemos que las funciones de Hermite ortogonales en 4D de orden ≤ 3 son las siguientes:

$$\underline{H_0(x) = 1 \quad H_1(x) = 2x_1, 2x_2, 2x_3, 2x_4}$$

$$\underline{H_2(x) = 4x_1^2 - 2, 4x_2^2 - 2, 4x_3^2 - 2, 4x_4^2 - 2, 4x_1^2, 4x_2^2, 4x_3^2, 4x_4^2, 4x_1x_2, 4x_1x_3, 4x_1x_4, 4x_2x_3, 4x_2x_4, 4x_3x_4}$$

$$\underline{H_3(x) = 8x_1^3 - 12x_1, 8x_23 - 12x_2, 8x_3^3 - 12x_3, 8x_4^3 - 12x_4}$$

Para $i = 1, 2, 3, 4$

$$\underline{2x_i(4x_1^2-2), 2x_i(4x_2^2-2), 2x_i(4x_3^2-2), 2x_i(4x_4^2-2), 2x_i(4x_1^2), 2x_i(4x_2^2), 2x_i(4x_3^2), 2x_i(4x_4^2)}$$

$$\underline{2x_i(4x_1x_2), 2x_i(4x_1x_3), 2x_i(4x_1x_4), 2x_i(4x_1x_4), 2x_i(4x_2x_3), 2x_i(4x_2x_4), 2x_i(4x_3x_4)}$$

3. Dado un sistema ortogonal 1D , escriba un algoritmo para obtener un sistema ortonormal 1D con respecto a $w(x) = 1$

Solución

Sabemos que un sistema ortogonal puede ser remplazado por uno ortonormal definiendo $u_i^*(x) = \frac{1}{\sqrt{A_i}}u_i(x)$.
Por lo que primero pedimos $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ el cual va a ser un sistema ortogonal con $w(x) = 1$.
Proseguimos a sacar la siguiente integral $\int u_i(x)u_i(x) \; \forall i = 1, 2, ..., n$ a la cual denotaremos como $A_i \neq 0$ ya que por como escogimos el sistema es ortogonal , por ultimo proseguimos a dividir cada función entre el cuadrado de su A_i correspondiente, por lo que hemos hecho nuestro sistema ortonormal y queda de la siguiente manera $(\frac{u_1(x)}{\sqrt{A_1}}, \frac{u_2(x)}{\sqrt{A_2}}, ..., \frac{u_n(x)}{\sqrt{A_n}})$