Universidad Nacional Autónoma de México

Examen 2

Reconocimiento de patrones

Acosta Imandt Daniel

01/06/2022

1.

(1 punto) Queremos clasificar lápices que pueden ser de plomo o grafito. Sea p(C1) = 1/3, p(C2) = 2/3 y suponga que queremos que cada lápiz es amarillo (Y), blanco (W) o rojo(R) con probabilidades condicionales dadas por:

	Y	W	R
C_1	3/5	3/4	1/4
C_2	3/5	1/4	3/4

Construya el clasificador de Bayes discreto.

Solución

Nota: Como vemos que las probabilidades no cuadran se tomo Y, C_2 como 2/5 en vez de 3/5

Primero recordamos la formula de bayes:

$$p(C_i|x) = \frac{p(C_i)p(x|C_i)}{p(x)}$$

Ahora tenemos que $p(C_1) = 1/3, p(C_2) = 2/3$, por otro lado tenemos unas probabilidades condicionales $p(Y|C_1) = 3/5, p(W|C_1) = 3/4, p(R|C_1) = 1/4$ y $p(Y|C_2) = 2/5, p(W|C_2) = 1/4, p(R|C_2) = 3/4$.

Ahora por probabilidad total tenemos que:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} P(x|y_i)P(y_i)$$

Por lo que tenemos que:

$$P(Y) = \frac{7}{15}, P(W) = \frac{5}{12}, P(R) = \frac{5}{12}$$

$$p(C_1|Y) = \frac{1/3(3/5)}{7/15} = \frac{21}{225}$$

$$p(C_1|W) = \frac{1/3(3/4)}{5/12} = \frac{15}{144}$$

$$p(C_1|r) = \frac{1/3(1/4)}{7/12} = \frac{7}{144}$$

$$p(C_2|Y) = \frac{2/3(2/5)}{7/15} = \frac{28}{225}$$

$$p(C_2|w) = \frac{2/3(1/4)}{5/12} = \frac{10}{144}$$

$$p(C_2|r) = \frac{2/3(3/4)}{7/12} = \frac{42}{144}$$

Por lo que si es color amarillo lo asignamos a C_2 si es blanco a C_1 y si es rojo a C_2

2.

(1 punto) Considere un problema de clasificación donde las clases están normalmente distribuidas con la misma matriz de covarianza

$$C = [2, 1 : 1, 2]$$

Las medias de las clases son:

$$\mu_1 = [1, 1]^T, \mu_2 = [2, 1]^T$$

Respectivamente y $p(C_1) = p(C_2) = 1/2$. Obtenga la frontera de decisión entre las dos clases.

Solución

Sabemos que las funciones de decisión están dadas por:

$$d_i(x) = p(C_i)p(x|C_i), 1 \leq i \leq m$$

después de un poco de manipulación como se vio en la clase 18 llegamos a que:

$$d_i = -\frac{1}{2}ln|\Sigma_i| - \frac{1}{2}(x - \mu_i)^T \Sigma_i^{-1}(x - \mu_i) + ln(p(C_i))$$

Y ademas si $\Sigma_i = \Sigma, 1 \leq i \leq m$ tenemos que:

$$d_i(x) = x^T \Sigma^{-1} \mu - \frac{1}{2}\mu_i^T \Sigma^{-1} \mu + ln(p(C_i))$$

Ahora tenemos que:

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies \Sigma_1^{-1} = \Sigma_2^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y el determinante de la matriz de covarianza es 3

Por lo que tenemos que:

$$d_1(x) = (x_1, x_2)^T \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}(1, 1) - \frac{1}{2}(1, 1)^T \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}(1, 1) + ln(1/2)$$

$$d_2(x) = (x_1, x_2)^T \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}(2, 1) - \frac{1}{2}(2, 1)^T \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}(2, 1) + ln(1/2)$$

3.

(2 puntos) Considere un problema de clasificación con patrones normalmente distribuidos. Suponga que el vector de patrones $[0,0]^T, [1,0]^T, [0,1]^T, [1,1]^T$ que pertenecen a C_1 y $[-1,0]^T, [0,-1]^T, [-1,-1]^T, [-2,-2]^T$ a C_2. Aproxime la media y matriz de covarianza de cada clase utilizando solo los patrones clasificados y calcule la frontera de decisión entre las clases.

Solución

Primero vamos a encontrar las medias, por lo que tenemos que:

$$\mu_1 = (\frac{0+1+0+1}{4}, \frac{0+0+1+1}{2})^T = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$$

$$\mu_2 = (\frac{-1+0-1-2}{4}, \frac{0-1-1-2}{4})^T = (-1,-1)^T$$

Ahora con esto sacamos la matriz de covarianza.
Recordando que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Var(X_1) & COV(X_1,X_2) \\ COV(X_2,X_1) & VAR(X_2) \end{pmatrix}$$

$$COV(X_1,X_2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - E[X)(y_i - E[Y]) \quad VAR(X,X) = COV(X,X)$$

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \implies \Sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \implies \Sigma_2^{-1} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora digamos que $p(C_1) = p(C_2) = \frac{1}{2}$ Por lo tanto tenemos que las fronteras de decisión son:

$$d_1(x) = -\frac{1}{2}ln(16) - \frac{1}{2}(x-\mu_1)^T \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} (x-\mu_1) + ln(1/2)$$

$$d_2(x) = -\frac{1}{2}ln(\frac{3}{16}) - \frac{1}{2}(x-\mu_2)^T \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} (x-\mu_2) + ln(1/2)$$

4.

(2puntos) Aplicar el método de aproximación de funciones para estimar $p(x|C_1)$ y$p(x|C_2)$ donde

$$C_1 = [1,0]^T, [1,1]^T, [2,1]^T, [3,0]^T, [4,1]^T$$

$$C_2 = [-1,0]^T, [-2,0]^T, [-2,-1]^T, [-3,1]^T, [-3,2]^T$$

Utilice los primeros tres polinomios de Hermite para 2D para obtener los coeficientes

Solución

Primero recordamos que los tres primeros polinomios de Hermite para 2D son

$$H_0 = 1, H_1 = 2x, H_2 = 4x^2 - 2$$

Por lo tanto tenemos:

$$\Phi_1(x) = H_0(x_1)H_0(x_2) = 1 \quad \Phi_2(x) = H_1(x_1)H_0(x_2) = 2x_1 \quad \Phi_3(x) = H_0(x_1)H_1(x_2) = 2x_2$$

$$\Phi_4(x) = H_1(x_1)H_1(x_2) = 4x_1x_2 \quad \Phi_5(x) = H_0(x_1)H_2(x_2) = 4x_2^2 - 2 \quad \Phi_6(x) = H_1(x_1)H_2(x_2) = 8x_!x_2^2 - 4x_1$$

$$\Phi_7(x) = H_2(x_1)H_0(x_2) = 4x_1^2 - 2 \quad \Phi_8(x) = H_2(x_1)H_1(x_2) = 8x_1^2x_2 - 4x_2$$

$$\Phi_9(x) = H_2(x_1)H_2(x_2) = 16x_1^2x_2^2 - 8x_1^2 - 8x_2^2 + 4$$

Por lo tanto tenemos que para C_1:

$$a_1 = \frac{1}{5}(5) = 1 \quad a_2 = \frac{1}{5}(2+2+4+6+8) = \frac{22}{5} \quad a_3 = \frac{1}{5}(0+2+2+0+2) = \frac{6}{5}$$

$$a_4 = \frac{28}{5} \quad a_5 = \frac{2}{5} \quad a_6 = \frac{12}{5} \quad a_7 = \frac{114}{5} \quad a_8 = \frac{156}{5} \quad a_9 = \frac{84}{5}$$

Y para C_2

$$a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{-22}{5} \quad a_3 = \frac{4}{5} \quad a_4 = \frac{-28}{5} \quad a_5 = \frac{14}{5} \quad a_6 = \frac{-92}{5} \quad a_7 = \frac{98}{5} \quad a_8 = \frac{176}{5} \quad a_9 = \frac{540}{5}$$

Juntando esto llegamos a que:

$$p(x|C_1) = 1 + \frac{22}{5}(2x_1) + \frac{6}{5}(2x_2) + \frac{28}{5}(4x_1x_2) + \frac{2}{5}(4x_2 - 2) + \frac{12}{5}(8x_1x_2^2 - 4x_1) + \frac{114}{5}(4x_1^2 - 2)$$
$$+\frac{156}{5}(8x_1^2x_2 - 4x_2) + \frac{84}{5}(16 + x_1^2 + x_2^2 - 8x_1^2 - 8x_2^2 + 4)$$

$$p(x|C_2) = \frac{1}{5}(5 - 22(2x_1) + 4(2x_2) - 28(4x_1x_1) + +14(4x_2^2 - 2) - 92(8x_1x_2^2 4x_1) + 98(4x_1^2 - 2)$$
$$+176(8x_1^2x_2 - 4x_2) + 540(16x_1^2x_2 - 8x_1^2 - 8x_2 + 4))$$

5.

(1 punto) Para el alfabeto $V = 0, 1$ encuentre todas las palabras con menos de 4 símbolos.

Solución

Ahora queremos ver todas las palabras que tengan a lo más tres símbolos utilizando el alfabeto dado.

$$\emptyset, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$$

6.

(2 puntos) Escriba el automáta de pila para el lenguaje que reconoce palindromos paras $L = \{ww^R : |w| \geq 1\}$

7.

(2 puntos) Escriba una gramatica libre de contexto para reconocer el lenguaje

$$L = \{a^ib^jc^k : i, j, k \geq 0 \quad y \quad i = j \quad o \quad i = k\}$$

Solución Tenemos que el alfabeto consta de $v = a, b, c$, en donde a debe de aparcer la misma cantidad de veces que b o c, por lo que creamos un lenguaje libre de contexto para poder crear este tipo de lenguaje, el cual queda de la siguiente forma:

$$G = \{V_n, V_t, P, S\}$$

$$V_n = \{S, T, A, B, C, D\} \quad V_t = \{a, b, c\}$$

$$P = \{S \to T$$

$$T \to A$$

$$T \to C$$

$$A \to Ac$$

$$A \to B$$

$$B \to \epsilon$$

$$B \to aBb$$

$$C \to D$$

$$C \to aCc$$

$$D \to \epsilon$$

$$D \to b\}$$

8.

(1 punto) Opinión del curso (qué salió bien, qué se puede mejorar, qué cosas se deberían tratar o quitar, estaban preparados para tomar el curso,etc.)

Opinión

En lo general el curso me gusto, sobre todo la exposición que daba el profesor a los temas y que se enfocara tanto en la teoría y así poder entender más fácil la práctica, así mismo me gusto bastante la forma en la que se fomentaba la participación del grupo, otra cosa que me gusto en contra de opinión popular fue el proyecto final y la forma en la que estaba enfocado a crear un producto o servicio, ya que es algo que nunca había hecho antes y creo que es de suma importancia.

Algo que considero que se puede mejorar bastante es la parte de los laboratorios, ya que había unos demasiado fáciles u al contrario bastante complicados y no existió algún punto medio, así mismo nunca tuvimos clases de programación en conjunto para poder entender mejor los problemas, así mismo me hubiera gustado ver más temas(aunque esto ya va más en cuestión del plan de estudios) ya que casi todo lo que se vio ya se había enseñado en otras clases aunque en menor medida y sin tanta teoría detrás.

En cuestión de si estábamos preparados para tomar el curso considero que si justo por lo que ya se comento de que ya teníamos una idea de los temas.