UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Tarea III

Métodos estadísticos

Acosta Imandt Daniel

01/06/2022

All of Statistics

Capitulo 10 pregunta 8

Let $X_1, ..., X_n \sim N(\theta, 1)$. Consider testing

$$H_0 : \theta = 0 \quad \text{versus} \quad \theta = 1$$

Let the rejection region be $R = \{x^n : T(x^n) > c\}$ where $T(x^n) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$

a. Find c so that the test has size α

b. Find the power under H_1, that is, find $\beta(1)$

c. Show that $\beta(1) \to 1$ as $n \to \infty$

Soluciones:

a)

Sea $Z \sim N(0, 1)$. Por lo que la función potencia queda de la siguiente forma:

$$\beta(\mu) = P_\mu(\bar{x} > c) = P_\mu(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{\sigma} > \frac{\sqrt{n}(c - \mu)}{\sigma})$$

Donde $\bar{X} = T$ y además notamos que $\sigma^2 = 1 \implies \sigma = 1$, con lo que llegamos a que:

$$P_\mu(Z > \sqrt{n}(c - \mu)) = 1 - \Phi(\sqrt{n}(c - \mu))$$

Ahora por la definición del tamaño de una prueba sabemos que $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta)$
Por lo que llegamos a que Ahora por el compport

$$\alpha = \beta(0) = 1 - \Phi(\sqrt{n}c) \implies 1 - \alpha = \Phi(\sqrt{n}c) \implies \Phi^{-1}(1 - \alpha) = \sqrt{n}c$$

Por lo tanto llegamos a que el valor de c para alguna α esta dado por:

$$\underline{c = \frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha)}{\sqrt{n}}}$$

b)

Ahora queremos encontrar $\beta(1)$, por lo que recordando del ejercicio anterior que:

$$\beta(\mu) = 1 - \Phi(\sqrt{n}(c-\mu))$$

Sustituyendo $\mu = 1$

$$\underline{\beta(1) = 1 - \Phi(\sqrt{n}(c-1))}$$

c)
Recordando que por le inciso a) tenemos que $\alpha = 1 - \Phi(\sqrt{n}c) \implies \sqrt{n}c = \Phi^{-1}(1-\alpha)$, entonces sustituimos esto en $\beta(1)$, con lo que llegamos a que:

$$\beta(1) = 1 - \Phi(\Phi^{-1}(1-\alpha) - \sqrt{n})$$

Ahora $\Phi^{-1}(1-\alpha)$ es una constante por lo que si

$$n \to \infty \implies \Phi^{-1}(1-\alpha) - \sqrt{n} \to -\infty \implies \Phi(-\infty) = 0$$

$$\underline{\therefore \lim_{n\to\infty} \beta(1) = 1 - 0 = 1}$$

Capitulo 10 pregunta 12

Let $X_1, ..., X_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$

a. let $\lambda_0 > 0$. Find the size α Wald test for

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \lambda \neq \lambda_0$$

b. (Computer Experiment.) Let $\lambda_0 = 1, n = 20$ and $\alpha = 0.05$. Simulate $X_1, ..., X_n \sim \text{Poisson}(\lambda_0)$ and perform the Wald test. Repeat many times and count how often you reject the null.How close is the type I error rate to .05?

Solución

a)
Primero vamos a recordar que nos dice la prueba de Wald:

> *Al considerar poner a prueba*
>
> $$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \textit{versus} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$
>
> *Asumir que $\hat{\theta}$ es asintóticamente Normal:*
>
> $$\frac{(\hat{\theta} - \theta_0)}{\hat{se}} \rightsquigarrow N(0,1)$$
>
> *El tamaño α test de Wald es: Rechazar H_0 cuando $|W| > z_{\alpha/2}$ donde*
>
> $$W = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\hat{se}}$$

Ahora queremos encontrar su desviación estándar, por lo tanto, por lo que vamos a sacar el estimador máximo verosímil de una Poisson(λ) con $\lambda > 0$.
Sabemos que la función de masa de probabilidad de una Poisson es:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$\therefore L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_1} e^{-\lambda}}{x_i!} \implies l(\lambda) = log(\prod_{i=1}^{n} \lambda^{nx_i} e^{-\lambda}) - log(\prod_{i=1}^{n} x_i!) = -nx + \sum_{i=1}^{n} x_i log(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} log(x_i!)$$

Ahora al derivar e igualar a cero tenemos que

$$0 = \frac{d}{d\lambda} l(\lambda) = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} \implies \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Ahora

$$Var(\hat{\lambda}) = Var(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(x_i) = \frac{n\hat{\lambda}}{n^2}$$

Por lo tanto llegamos a que:

$$var(\hat{\lambda}) = \frac{\hat{\lambda}}{n} \implies \hat{se}(\hat{\lambda}) = \sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}$$

Ahora si por la prueba de Wald tenemos que:

$$W = \frac{\hat{\lambda} - \lambda_0}{\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}} = \sqrt{n}(\frac{\hat{\lambda} - \lambda_0}{\sqrt{\hat{\lambda}}})$$

Por lo tanto vamos a rechazar a H_0 cuando:

$$\underline{|W| = |\sqrt{n}(\frac{\hat{\lambda} - \lambda_0}{\sqrt{\hat{\lambda}}})| > z_{\alpha/2}}$$

b)
El código se encuentra anexado junto con esta tarea o lo puede encontrar aquí.

Lo que queremos hacer simular $X_1, ...X_n \sim$ Poisson con $\lambda_0 = 1$ y $n = 20$, de allí vamos a realizar el test de Wald donde tomamos como $\alpha = 0.5$, esto se hará para 10000 possions y vamos a contar el número de veces en donde se rechaza la hipótesis nula, de allí vamos a ver que tan cerca el error tipo 1 esta de 0.05.

Al hacer la simulación computacional 10 veces tenemos que la proporción de error de tipo uno es de alrededor de 0.052 el cual es un valor muy cercano al que nos preguntan que es de 0.05.
Por lo que por lo general las pruebas no suelen caer en la región de rechazo, por lo que no se suele rechazar H_0 solo aproximadamente el 5.2 % es rechazada la hipótesis nula.

Capitulo 10 pregunta 13

Let $X_1, ..., X_N \sim N(\mu, \sigma^2)$. Construct the likelihood ratio test for

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vesrus} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Compare to Wlad test.

Solución

Primero vamos a recordar como esta construido el cociente de verosimilitud:

$$\lambda(\mu, \sigma^2|x^n) = \frac{\sup_{\mu=\mu_0,\sigma^2>0} L_n(\mu, \sigma^2|x^n)}{\sup_{\mu\in R,\sigma^2>0} L_n\mu, \sigma^2|x^n)}$$

Como estamos tratando con una normal tenemos que $\hat{\mu} = \bar{x}, \hat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=0}^n (x_i-\hat{\mu})^2}{n}$ son los estimadores máximo verosímiles. Ahora recordando como se ha visto en clase que la verosimilitud para una normal con μ, σ^2,es:

$$Ln(\mu, \sigma^2|x^n) = (\frac{1}{2\pi\sigma^2})^{n/2} exp[-\sum_{i=0}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}]$$

Ahora notamos por como se comporta una normal que si $\mu_0 \leq \hat{\mu} = \bar{X}$ entonces $\sup_{\mu=\mu_0,\sigma^2>0} Ln(\mu, \sigma^2|x^n) = Ln(\mu_0, \sigma^2|x^n)$ y en caso contrario es $Ln(\mu, \sigma^2|x^n)$ es decir:

$$\sup_{\mu=\mu_0,\sigma^2>0} Ln(\mu, \sigma^2|x^n) = \begin{cases} Ln(\mu_0, \sigma^2|x^n) & \text{si} \quad \mu_0 \leq \hat{\mu} = \bar{X} \\ \\ Ln(\hat{\mu}, \hat{\sigma^2}|x^n) & \text{si} \quad \mu_0 > \hat{\mu} = \bar{X} \end{cases}$$

Por lo tanto cociente de verosimilitud queda como:

$$\lambda(\mu, \sigma^2|x^n) = \begin{cases} \frac{Ln(\mu_0,\sigma^2|x^n)}{Ln(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2|x^n)} & \text{si} \quad \mu_0 \leq \hat{\mu} = \bar{X} \\ \\ 1 & \text{si} \quad \mu_0 > \hat{\mu} = \bar{X} \end{cases}$$

Por lo tanto llegamos a que la región de rechazo queda como

$$R = \{\widetilde{x}| \frac{Ln(\mu_0, \sigma_0^2|x^n)}{Ln(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2|x^n)} \leq c \quad \text{y} \quad \mu_0 \leq \hat{\mu}\}$$

Recordando que para una normal $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu})^2}{n}$ entonces llegamos a que

$$Ln(\mu_0, \sigma_0^2|x^n) = (\frac{n}{2\pi \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2})^{n/2} exp[-\frac{n\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{2\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}]$$
$$= (\frac{n}{2\pi \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2})^{n/2} exp[-\frac{n}{2}]$$

Ahora nos fijamos en el denominador, el cual de una forma prácticamente idéntica llegamos a que:

$$L_n(\hat{\mu}, \hat{\sigma^2}|x^n) = (\frac{n}{2\pi \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2})^{n/2} exp[-\frac{n}{2}]$$

Por lo tanto llegamos a que:

$$\lambda = \frac{(\frac{n}{2\pi\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2})^{n/2} exp[-\frac{n}{2}]}{(\frac{n}{2\pi\sum_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu})^2})^{n/2} exp[-\frac{n}{2}]} = (\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2})^{n/2} < c_\alpha$$

$$\implies c_\alpha^{-2/n} < \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu})^2}$$

Ahora tomamos en cuenta que:

$$\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu})^2 + n(\hat{\mu}-\mu_0)^2$$

Sustituimos esto llegando a :

$$c_\alpha^{-2/n} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu})^2 + n(\hat{\mu}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu})^2} = 1 + \frac{n(\hat{\mu}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu})^2}$$

$$\iff 0 \leq c_\alpha^{-n/2} - 1 < \frac{n(\hat{\mu}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu})^2}$$

Ahora sea $\sqrt{c_\alpha^{-n/2} - 1} = c'$ por lo que tenemos que:

$$0 \leq c' < \sqrt{\frac{(\hat{\mu}-\mu_0)^2}{\hat{\sigma}^2}} \iff c' < \sqrt{\frac{(\hat{\mu}-\mu_0)^2}{\hat{\sigma}^2}}$$

$$\iff c'' = \sqrt{n}c' < \frac{|(\hat{\mu}-\mu_0)|}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

Por lo que tenemos que la región de rechazo de H_0 es:

$$\underline{R = \{\widetilde{x} : c'' < \frac{|(\hat{\mu}-\mu_0)|}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}\}}$$

Entonces tenemos por la prueba del cociente de tamaño α que:

$$\alpha = \sup_{\mu=\mu_0, \sigma^2>0} P(c'' < \frac{|(\bar{X}-\mu_0)|}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}})$$

Ahora notamos que para una n bastante grande $Z = \frac{|(\bar{X}-\mu_0)|}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,por lo que llegamos a que

$$\alpha = \sup_{\mu=\mu_0, \sigma^2>0} P(c'' < +\frac{|(\hat{\mu}-\mu_0)|}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}})$$

Ahora notamos que

$$\sup_{\mu=\mu_0, \sigma^2>0} P(c'' < Z + \frac{\mu-\mu_0}{\hat{\sigma}\sqrt{n}}) = \sup_{\mu=\mu_0, \sigma^2>0} P(c'' - \frac{\mu-\mu_0}{\hat{\sigma}\sqrt{n}} < Z)$$

$$= \sup_{\mu=\mu_0, \sigma^2>0} [1 - P(Z < c'' - \frac{\mu-\mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}})] = \sup_{\mu=\mu_0, \sigma^2>0} [1 - F_z(c'' - (\frac{\mu-\mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}))]$$

Ahora notamos que $\frac{d}{d\mu}[1 - F_z(c'' - (\frac{\mu-\mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}))] = \frac{\sqrt{n}}{\hat{\sigma}} f_z(k - (\frac{\mu-\mu_0}{\sigma/n})) \geq 0$ por lo tanto la función es creceinte en μ Por lo tanto

$$\alpha = 1 - F_z(c'') \implies F^{-1}(1-\alpha) = Z_\alpha \implies Z_{\alpha/2} = F^{-1}(1-\alpha/2)$$

Por otro lado tenemos que si utilizamos Wald la región de rechazo de H_0 esta dada por $|W| > Z_{\alpha/2}$ y sabemos que

$$W = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}}$$

$$\implies R = \{\tilde{x} : Z_{\alpha/2} < \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}}\}$$

Statistical Inference, (Casella Berger)

Capitulo 8 pregunta 1

in 1000 tosses of a coin, 560 heads and 440 tails appear.Is in reasonable to assume that the coin is fair? Justify your answer.

Solución:

Sabemos que el lanzamiento de una moneda se puede ver como una binomial(n,p).
En este caso tenemos que $n = 1000$ con 560 caras y 440 cruces.
Sea H_0 : La moneda es justa es decir $p = 0.5$. Y sea H_1 : La moneda no es justa es decir $p \neq 0.5$.
Ahora al utilizar el test de Wald. Asumimos que $\hat{p}$ es asintóticamente normal:

$$\frac{\hat{p} - p}{\hat{se}} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

Por lo tanto llegamos a que:

$$W = \frac{\hat{p} - p}{\hat{se}}$$

Recordando que la varianza estimada de una binomial es $\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$ y tomando que $\hat{p} = \frac{560}{1000} = 0.56$ llegamos a que:

$$Z = \frac{\sqrt{1000}(0.56 - 5)}{\sqrt{0.56(0.44)}} \approx 3.82235$$

Ahora queremos una confianza del 95 % es decir vamos a tomar un $\alpha = 0.05$. Entonces ahora encontremos el valor de $z_{\alpha/2}$ para eso utilizaremos la tabla z, que se encuentra aquí: Tabla Z, donde vemos que $|z_{\alpha/2}| = 1.96$.
Ahora con el test de Wald vemos que:

$$|3.82235| > 1.96$$

Por lo tanto podemos rechazar a H_0, es decir podemos decir que la moneda no es justa.

Capitulo 8 pregunta 2

In a given city it is assumed that the number of automobile accidents in a given year follows a Posson distribution. In past years the average number of accidents per year was 15, and this year it was 10. Is it justified to claim that the accident rate has dropped?

Solución

Sea nuestra hipótesis nula que la tasa de accidentes es la misma ie $\lambda = 15$ contra la hipótesis

alternativa donde la tasa de accidentes disminuyo ($\lambda < 15$).
Para esto vamos a calcular la probabilidad de que $X \leq 10$ dado que $\lambda = 15$.

$$P(X \leq 10|\lambda = 15) = \sum_{i=1}^{10} \frac{e^{-15}15^i}{i!} = e^{-15}(1 + 15 + \frac{15^2}{2} + \frac{15^3}{6} + ... + \frac{15^{10}}{10!}) \approx 0.11846$$

Por lo que llegamos a que el p-value$\approx$0.11846, ahora si tomamos un $\alpha = 0.05$ notamos que p-value$> \alpha$, por lo que no lo se llega a rechazar H_0 con una confianza del 95 %, por lo que no se puede decir que la tasa de accidentes haya disminuido.

Capitulo 8 pregunta 3

Here, the LRT allouded to in Example 8.2.9 will be derived. Suppose that we observe m iid Bernoulli(θ) random variables, denoted by $Y_1, ..., Y_m$. Show that the LRT of $H_0 : \theta \leq \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$ will reject H_0 if $\sum_{i=1}^m Y_i > b$

Solución

Por definición de el coefeicente de verosimilitud tenemos que:

$$\lambda(\widetilde{y}) = \frac{\sup_{\theta \leq \theta_0} L(\theta|\widetilde{y})}{\sup_{\theta \in R} L(\theta|\widetilde{y})}$$

Ahora como estamos trabajando com m iid Bernoulli(θ),donde la función de masa de probabilidad de una Bernoulli es $P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$ Por lo tanto llegamos a que:

$$L(\theta|\widetilde{y}) = \theta^{\sum_{i=1}^m y_i}(1-\theta)^{m-\sum_{i=1}^m y_i} \implies l(\theta|\widetilde{y}) = log(\theta^{\sum_{i=1}^m y_i}(1-\theta)^{m-\sum_{i=1}^m y_i})$$

Ahora derivamos e igualamos a cero.

$$0 = \frac{d}{d\theta} l(\theta|\widetilde{y}) = \frac{\sum_{i=1}^m y_i}{\theta} - \frac{(m - \sum_{i=1}^m y_i)}{1-\theta} \implies \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^m y_i}{m}$$

Para simplificar notación llamaremos $y = \sum_{i=1}^m y_i$ Ahora por el comportamiento de una Bernoulli sabemos que si $\theta_0 \leq \hat{\theta}$ entonces el estimador máximo verosímil será θ_0, ahora en el caso en donde $\theta_0 > \hat{\theta}$ entonces será $\frac{y}{m} = \bar{y}$ es decir:

$$\hat{\theta}_1 = \begin{cases} \bar{y} & \text{si} \quad \hat{\theta} < \theta_0 \\ \\ \theta_0 & \text{si} \quad \theta_0 \leq \hat{\theta} \end{cases}$$

Por lo tanto tenemos dos casos posibles para el cociente de verosimilitud:

$$\lambda(y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \hat{\theta} < \theta_0 \\ \frac{\theta_0^y(1-\theta_0)^{m-y}}{(\bar{y})^y(1-\hat{\theta})^{m-y}} & \text{si} \quad \theta_0 \leq \hat{\theta} \end{cases}$$

Por lo tanto terminamos rechazando H_0 si $\frac{\theta_0^y(1-\theta_0)^{m-y}}{(\bar{y})^y(1-\theta_0)^{m-y}} < c$

Ahora queremos ver que rechazamos H_0 si $y > b$ para cierta b.

Por lo que debemos mostrar que $\lambda(y)$ es decreciente en y por lo que se cumple que $\lambda(y) < c$ para $y > b > m\theta_0$

Para mostrar que en efecto es decreciente tenemos que mostrar que la derivada de $\lambda(y)$ es negativa en $\lambda(y) < c$.
Para simplificar cuentas lo haremos sobre el logaritmo de esa función. Por lo que :

$$log(\lambda(y)) = log(\frac{\theta_0^y(1-\theta_0)^{m-y}}{(\bar{y})^y(1-\theta_0)^{m-y}}) = ylog(\theta_0)+(m-y)log(1-\theta_0)-ylog(\bar{y})-(m-y)log(\frac{m-y}{m})$$

$$\implies \frac{d}{d(y)}log(\lambda(y)) = log(\theta_0) - log(1-\theta_0) - log(\bar{y}) - 1 + log(1-\bar{y}) + 1 = log(\frac{\theta_0(\frac{m-y}{m})}{\bar{y}(1-\theta_0)/m})$$

Como estamos en el caso en donde $y/m > \theta_0$ entonces $\frac{m-y}{m} < 1 - \theta_0$ por lo que el denominador es mayor que el nominador haciendo que log es negativo, por lo tanto $\frac{d}{dy}log(\lambda(y)) < 0 \implies \frac{d}{dy}(\lambda(y)) < 0$ Por lo tanto λ esta decreciendo en y para $\lambda(y) < c$ si $y > b$.
$\therefore$ rechazamos a H_0 si $\sum_{i=1}^m Y_i > b$

$\blacksquare$