Matemáticas Discretas

Examen #2

01/Octubre/2021

Acosta Imandt Daniel

Problema 1

Resuelva la siguiente recursión:

$$T(n) = 3\sqrt{n}T(\sqrt{n}) + \sqrt{n}lg(n)$$

Hint: use cambio de variable dos veces y luego aplique el método maestro

Solución 1

Primero hacemos un cambio de vartiable a $n = 2^k$ por lo que nos queda

$$T(2^k) = 3 * 2^{k/2}T(2^{k/2}) + 2^{k/2}lg(2^k)$$

Dividimos entre 2^k

$$T(2^k)/2^k = \frac{3}{2^{k/2}}T(2^{k/2}) + \frac{1}{2^{k/2}}lg(2^k)$$

Ahora sea $y(k) = \frac{T(2^k)}{2^k}$ por lo que nos queda

$$y(k) = 3y(k/2) + \frac{lg2^k}{2^{k/2}} = 3y(k/2) + \frac{log2^k}{log(10) * 2^{k/2}}$$

De aquí notamos que $f(k) = \frac{log2^k}{log(10)*2^{k/2}} < log(2^k)$

$$f(k) = \Theta(k^d log^r(k))$$

Y aplicando el teorema maestro llegamos a que

$$\underline{T(k) = k^d log^{r+1}(k)}$$

Donde $d = log_2(3)$

Problema 2

Resuelva la siguiente recursión:

$$T(n) = T(n/6) + T(5n/6) + \theta(n)$$

$$QED$$

Solución 2

Primero notamos que $T(n) = T(n/6) + T(5n/6) + \theta(n) \leq T(n) = T(n/6) + T(5n/6) + cn$ Y vamos a hacer una recursión bien densa viendo que $T(n/6) = T(n/36) + T(5n/36)$ y así para los demas casos, con este ejemplo nos podemos dar una idea.
Con esto vamos a crear un árbol en donde no va a estar balanceado ya que la parte derecha se tarda mucho más en terminar y la altura de este árbol va a ser $log_{6/5}(n)$ ya que esto es lo que se va a tardar para que todas las hojas del árbol sean $T(1)$ Por lo tanto llegamos a que, por el Teorema maestro

$$T(n) = nlog(n)$$

$$QED$$

Problema 3

Sean k y n enteros tales que $2 \leq k \leq n$ y sea G una gráfica de n vértices.Pruebe que si cada vértice de G tiene grado más grande que $(n-k)/k$ entonces G tiene menos de k componentes.

Solución 3

Demostración Sea una gráfica de $k = 2$ componentes, entonces tenemos lo siguiente

$$\frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1$$

De aquí notamos que solo debe de haber una componente en G, lo que es cierto.
Ahora vamos a suponer que $k = n - 1$, por lo que cada vertice de G tiene grado mayor a

$$\frac{n-(n-1)}{n-1} < 1$$

por lo que debe de haber menos de $n - 1$ componentes debido a que algunos vértices no tienen componentes.
Sea $k = n$componentes por lo que tenemos que

$$\frac{n-n}{n} = 0 < 1$$

Por lo que G tiene menos de k componenetes.

$$QED$$

Problema 4

Sea T un árbol de k vértices.Pruebe que si$G$ es una gráfica tal que el grado mínimo es al menos $k - 1$, entonces T es isomorfo a alguna subgráfica de G.

Solución 4

Demostración Vamos a proceder por inducción.
Para nuestra base inductiva vamos a tomar $k = 1$, por lo tanto tenemos que el grado mínimo de G es 0 por lo que es cierto ya que esto es una subgráfica de cualquier gráfica, por otro lado sea $k = 2$ entonces tenemos que el grado mínimo de G es 1, lo cual es una subgráfica de cualquier gráfica no vacía.
Ahora vamos a suponer que para cualquier árbol de grado $k - 1$ donde $k \geq 3$ y cualquier gráfica G_1 con grado mínimo $k - 2$ entonces T es isomorfo a alguna subgráfica de G_1.
Por ultimo para nuestro paso inductivo probaremos que T es isomorfa a una subgráfica de G para esto vamos a tomar v el cual es el ultimo vértice de una rama de T y u el cual es el vértice adyacente a v , por lo que tenemos que $T - v$ es un árbol de $k - 1$ vértices ahora como $k - 1 > k - 2$ se sigue que $T - v$ es un isomorfismo a una subgráfica T_1 de G Sea u' sea un vértice de T_1 que corresponde al vértice u de $T - v$ a partir de un isomorfismo, como el grado de $u' \geq k - 1$ de la gráfica G y además T_1 tiene $k - 2$ vértices diferentes de u', entonces u' es adyacente a un vértice w de G que no pertenece a T_1 entonces la subgráfica $T_1 + u'w$ de G es isomorfa a T.

$$QED$$

Problema 5

Sea G una gráfica bipartita 3-regular con bipartición (A, B). Muestra que $|A| = |B|$. Muestra que G tiene una subgráfica 1-regular que cubre a todos los vértices. Finalmente, muestra que se pueden pintar las aristas con 3 colores de modo que no haya aristas del mismo color que lleguen a un mismo vértice.

Solución 5

Muestra que $|A| = |B|$
Dem Por definición de G se tiene que cada vértice tiene tres aristas, ahora es bipartita, por lo que los vértices de un lado de esa gráfica no tiene vecinos de ese conjunto,por lo que no puede suceder que haya una arista uniendo vértices de A o de B ,entonces cada arista de la gráfica une a los vértices de A y de B.Entonces la cantidad de aristas que tiene A las tiene B por lo tanto al ver la cardinalidad de A y la cardinalidad de B vemos que son exactamente el mismo valor $\underline{|B| = |A|}$

$$QED$$

Muestra que G tiene una subgráfica 1-regular que cubre a todos los vértices
Dem Para esto vamos a utilizar el **Teorema de Hall**
Recordando el **Teorema de Hall**: *Si una gráfica bipartita con partición de vértices en conjunto A y B sucede que para cualquier subconjunto X de A se tiene que $|X| \leq |N(X)|$,entonces existe un emparejamiento que cubre a A*
Entonces sea $X \subset A$.
Ahora definiremos a las aristas que tienen un extremo en X como E_X y recordando que cualquier vértice de la gráfica tiene grado 3 entonces $|E_X| = 3|X|$Del mismo modo vemos que para sus vecinos pasa lo mismo es decir $|E_{N(X)}| = 3|N(X)|$ donde $N(X)$ son los vecinos de X pero pues por definición de vecinos sabemos que comparen aristas entonces todo extremo en X tiene extremo en $N(X)$ y llegamos a que $|E_X| \leq |E_{N(X)}| \leftrightarrow 3|X| \leq 3|N(X)| \leftrightarrow |X| \leq |N(X)|$ y ahora si utilizando el teorema de Hall entonces existe un emparejamiento que cubre a A,además en este caso particular se tiene que $|X| = |N(X)|$
Por lo tanto en efecto existe una subgráfica 1-regular que cubre todos los vértices.

$$QED$$

muestra que se pueden pintar las aristas con 3 colores de modo que no haya aristas del mismo color que lleguen a un mismo vértice.
Dem Como ya vimos por el inciso a) $|A| = |B|$ y adamas por b) existe un emparejamiento que cubre a A
Como se tiene un emparejamiento lo denotaremos por P .
Aquí vamos a utilizar el Teorema de Hall tres veces, primero agarraremos un emparejamiento de G tal cada vértice tenga solo una arista,a este emparejamiento lo denotaremos como G'.
Ahora de $G \backslash G'$ agarramos otro emparejamiento tal que cada vértice tenga solo una arista, al que denotaremos como G''.
Por ultimo tomamos todos los elementos de $G \backslash (G') \cup G \backslash (G'')$ el cual sigue siendo un emparejamiento al que denotaremos como G'''.
Ahora notamos que $G' \cup G'' \cup G''' = G$ y además $G' \cap G'' = \emptyset = G' \cap G''' = G''' \cap G''$ por lo que a cada uno de estos emparejamientos le agregamos un color diferente, $\underline{G \text{ tiene una 3-coloración propia}}$

$$QED$$

Problema 6

Halle un algoritmo que eleva un número b a la potencia deseada $n \in N$ cuyo tiempo de ejecución sea $\theta(log_2 n)$

Solución 6

Para este método nos vamos a basar en que

$$x^n = x(x^2)^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{cuando } n \text{ es impar}$$

$$x^n = (x^2)^{n/2} \quad \text{cuando } n \text{ es par}$$

Lo primero que vamos a hacer es escribir el pseudocódigo del algoritmo.

Algorithm 1 Algoritmo para elevar $b >\leq 1$ a la $n\ leq 1$

Require: $b, n > 1$
Ensure: b^n
  if $n \quad mod 2 = 0$ **then**
    $x := x * x$
    $n := n/2$
  else $n \quad mod 2 \neq 0$
    $y := x * y$
    $x := x * x$
    $n := (n-1)/2$
  end if
  return $x * y$

Pero ahora por que esto corre en tiempo $\theta(log_2 n)$ pues esto es por que se necesitan tantas operaciones como dígitos en base 2 de n lo cual es $\lfloor log_2(n) \rfloor + 1$ pero podemos quitarle la constante 1 y la función floor sin problemas ya que es asintóticamente y siempre podemos encontrar una constante que para cierto $n > 0$, $\theta(log_2 n)$ va a ser mayor.
Corre en tiempo $\underline{\theta(log_2 n)}$
Si quieres ver el algoritmo implementado esta aquí NB el cual saque la idea de aquí Referencias