1er tarea-examen
Matemáticas discretas

11/Septiembre/2021

1(2.5pts)

Recuerda que la sucesión de Fibonacci está dada por $F_0 = 0$,$F_1 = 1$ y$f_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ para cada entero $n \geq 0$

- Encuentra, con demostración, todos los valores de n para los cuales F_n es múltiplo de 5.
- Demuestra que la siguiente fórmula para los números de Fibonacci es valida

$$F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

a)
Demostración Primero vamos a ver los primero números de la secuencia de Fibonacci y ver si podemos encontrar un patrón, por lo que tenemos

$$0, 1, 1, 1, 3, \underline{5}, 8, 13, 21, 34, \underline{55}, 89, 144, 233, 377, \underline{610}, 987, 1597...$$

Olvidando el F_0 parece ser que cada 5 números encontramos un número múltiplo de 5, por lo que procederemos a demostrarlo por inducción.
Cada 5 términos de la sucesión de Fibonacci encontramos un número múltiplo de 5 Para nuestra base inductiva notamos que $F_{5\dot{1}} = 5$ por lo que si cumple.
Supondremos que es valido para F_{5n} es decir $F_{5n} = 5t$ para algún $t \in \mathbb{N}$.
PD F_{5n+5} es múltiplo de 5.

$$F_{5n+5} = F_{5n+4} + F_{5n+3}$$

Vemos que $F_{5n+4} = F_{5n+3} + F_{5n+2}$,vamos a tomar este argumento repetidas veces para diferentes n, entonces

$$F_{5n+5} = F_{5n+2} + 2F_{5n+3} = F_{5n+1} + F_{5n} + 2(F_{5n+2} + F_{5n+1}) = 3F_{5n+1} + 2F_{5n+2} + F_{5n}$$

$$= 3F_{5n+1} + 2(F_{5n+1} + F_{5n}) + F_{5n} = 5F_{5n+1} + 3F_{5n} = 5F_{5n+1} + 3(5t) = 5(F_{5n+1} + 3t)$$

Y vemos que $(F_{5n+1}+3t)$lo que es una suma de números enteros por lo que en efecto es un número entero, entonces claramente llegamos a que $5(F_{5n+1} + 3t)$ es múltiplo de 5(Por el 5 que anda multiplicando allí a un número entero) llegando a que nuestra hipótesis era correcta.
$\therefore$ Cada 5 términos de la sucesión de Fibonacci encontramos un numero múltiplo de 5.

$\blacksquare$

b)

Demostración.
Primero vemos que se cumple para $n = 1, 2$

$$F_1 = 1 = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1}{\sqrt{5}}$$

$$F_2 = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2}{\sqrt{5}} = 1$$

por lo que se cumple para nuestra base inductiva.
Ahora suponemos que es valido para cualquier $k < n$ donde $n \geq 3$
Sabemos que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ por lo que tenemos

$$\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2} + (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2}(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2}(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2})}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2}{\sqrt{5}} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

Como demostramos que la fórmula era valida para $n = 1, 2$ y vimos que se cumple para 3 entonces se va a cumplir $\forall \quad n > 3$ Por lo tanto la sucesión de Fibonacci se puede expresar de la siguiente forma:

$$F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

$\blacksquare$

2(2.5pts)

Demuestra que todo árbol con n vértices tiene $n-1$ aristas y que cualquier bosque con n vértices y k componentes conexas tiene $n-k$ aristas.

Demostración
PD todo árbol con n vértices tiene $n-1$ aristas.
Para esto utilizaremos inducción.
Para un vértice notamos que no tiene ninguna arista por lo que se cumple que tiene $n-1$ aristas, para dos vértices solo hay una arista que los conecta, por lo que también se cumple, por lo que ya tenemos nuestra base inductiva. Supondremos que para una gráfica con k vértices se tiene $k-1$ aristas.
Ahora procederemos a ver si se cumple para $k+1$ vértices.
Por lo que a nuestro árbol de la hipótesis inductiva le vamos a agregar un vértice,que en este caso seria una hoja ya que el árbol es conexo y sería un nodo hijo, por lo que agregaría una sola arista a la gráfica, $\therefore$ para un árbol con $k+1$ vértices tenemos k aristas.
Entonces hemos demostrado la primera parte de la demostración.

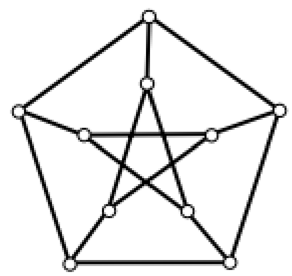
PD Para cualquier bosque con n vértices y k componentes conexas se tiene $n-k$ aristas.
Primero vamos a ver una forma de demostrar esto de manera muy sencilla, si al final al lector no le convencen estos argumentos puede checar la parte en donde se demuestra por inducción, sabemos que un árbol con n vértices tiene $n-1$ aristas, de esta idea vemos que si un bosque tiene k componentes conexas(árboles) entonces por cada árbol vamos a tener una arista menos que la cantidad de sus vértices y como son k árboles en total,se suman el total de vértices de todos los árboles en el bosque y lo denotaremos por n entonces se tendrían $n-k$ aristas.
Para esta parte de la demostración volveremos a utilizar inducción y aparte nos apoyaremos en que para un árbol con n vértices se tiene $n-1$ aristas.
Para nuestra base inductiva tomamos un bosque con un solo árbol con n vértices, por lo que solo hay una componente conexa ie $k = 1$,y como ya vimos se cumple que para un árbol con n vértices se tiene $n-1$ aristas, por lo que se cumple la base inductiva.
Ahora para nuestra hipótesis inductiva suponemos que es cierto para un bosque con k componentes

conexas.
Ahora veremos si es cierto para un bosque con $k+1$ componentes conexas.
Por nuestra hipótesis inductiva tenemos que un bosque con n vértices y k componentes conexas tiene $n-k$ aristas y por nuestra base inductiva sabemos que un árbol con n' vértices tiene $n'-1$ aristas, por lo que al bosque de la hipótesis le plantamos(agregamos) el árbol de nuestra base inductiva, por lo que ahora tenemos un bosque con $n+n'$ vértices y $k+1$ componentes conexas,denotamos como $n+n'=N$ y a $k+1=K$ volviendo a utilizar nuestra hipótesis inductiva tenemos que para un bosque con N vértices y K componentes conexas tenemos $N-K$ aristas.
Por lo tanto se cumple la proposición del problema 2

■

3(2.5pts)

Considera la siguiente gráfica:



- Encuentra su número de independencia
- Encuentra todos sus conjuntos independientes máximos
- Encuentra todos sus conjuntos independientes maximales

Soluciones Lo primero que vamos a hacer es darle nombres a cada vértices para podernos comunicar de una forma adecuada.

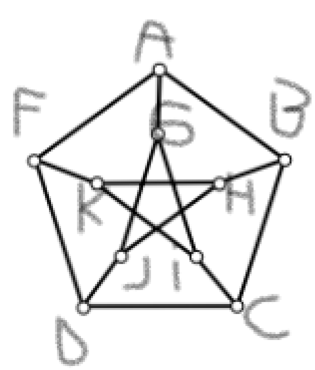


Figura 1: Aquí uno se puede dar cuenta que no me se el abecedario y me salte la E,así mismo que mi pulso es muy malo.

Lo segundo que vamos a hacer sera implementarlo con python, aquí esta mi notebook por si tiene curiosidad nb

a)

Primero recordemos que el número de independencia es el tamaño de el conjunto independiente más grande y un conjunto independiente es aquel el cual no tiene vértices adyacentes.

Notamos que la gráfica tiene 10 vértices y por cada vértice hay tres aristas,por lo tanto el número de aristas es 15, entonces de aquí podemos afirmar que no va a existir un maximal con 5 elementos ya se terminarían utilizando las 15 aristas que hay en la gráfica por lo que si habría vértices adyacentes, por lo que a lo más que esperamos es que su número de independencia es de 4, solo tenemos que encontrar un ejemplar para ver que si existe y en efecto existe por lo menos un caso el cual es {G,D,B,K}.

$\therefore$ su número de independencia es 4.

b)

Como ya vimos el número de independencia es 4, así mismo ya vimos que {G,D,B,K} es máximo y por simetría de la gráfica podemos sacar los demás

$$\{G, D, B, K\}, \{H, F, C, G\}, \{I, A, D, H\}, \{J, B, F, I\}, \{K, C, A, J\}$$

c)

Por definición de conjunto independiente maximal es aquel que no tiene vértices adyacentes y no se le pueden agregar más elementos dado cierta cardinalidad de ese elemento.Por lo que va a haber varios conjuntos independientes máximos,solo tomando los conjuntos de cardinalidad 1 ya tenemos 10 conjuntos.Pero basta de quejarse y procedamos a encontrarlos.

Para cardinalidad de 1 tenemos:

$$\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \{F\}, \{G\}, \{H\}, \{I\}, \{J\}, \{K\}$$

Para cardinalidad de 2 tenemos:

$$\{A, C\}, \{A, D\}, \{A, H\}, \{A, I\}, \{A, J\}, \{A, K\}, \{B, D\}, \{B, F\}, \{B, G\}, \{B, I\}, \{B, J\}, \{B, K\},$$

$$\{C, F\}, \{C, J\}, \{C, K\}, \{C, G\}, \{C, H\}, \{D, B\}, \{D, K\}, \{D, G\}, \{D, H\}, \{D, I\}, \{F, G\}, \{F, H\}, \{F, I\}\{F, J\},$$
$$\{G, H\}, \{G, K\}, \{H, I\}, \{I, J\}, \{J, K\}$$

Para cardinalidad 3 tenemos:

$$\{A, C, H\}, \{A, C, J\}, \{A, C, K\}, \{A, D, H\}, \{A, D, I\}, \{A, D, K\}, \{A, H, I\}, \{A, I, J\}, \{A, J, K\},$$

$$\{B, D, G\}, \{B, D, I\}, \{B, D, K\}, \{B, F, G\}, \{B, F, J\}, \{B, J, K\}, \{B, J, I\}, \{B, I, K\}, \{B, F, I\},$$
$$\{C, F, G\}, \{C, F, J\}, \{C, G, H\}, \{C, G, K\}, \{C, K, J\}, \{D, G, H\}, \{D, G, K\}, \{D, H, I\}, \{F, G, H\},$$
$$\{F, I, J\}, \{F, I, H\}, \{J, F, C\}$$

Para cardinalidad de 4 tenemos:

$$\{G, D, B, K\}, \{H, F, C, G\}, \{I, A, D, H\}, \{I, A, D, H\}, \{J, B, F, I\}, \{K, C, A, J\}$$

Estos son todos los conjuntos independientes maximales.

4(2.5pts)

Sea G una gráfica bipartita cuyo conjunto de vértices está partido en conjuntos A y B , y donde cada vértice tiene grado 3.

- Muestra que $|A| = |B|$
- Muestra que G tiene un emparejamiento que cubre a A. Como sugerencia, tendrás que usar el teorema de Hall.
- Muestra que G tiene una 3-coloración propia de sus aristas.Como sugerencia ,tendías que usar repetidas veces el teorema de Hall.

Demostraciones
a)
Por definición de G se tiene que cada vértice tiene tres aristas, ahora es bipartita, por lo que los vértices de un lado de esa gráfica no tiene vecinos de ese conjunto,por lo que no puede suceder que haya una arista uniendo vértices de A o de B ,entonces cada arista de la gráfica une a los vértices de A y de B.Entonces la cantidad de aristas que tiene A las tiene B por lo tanto al ver la cardinalidad de A y la cardinalidad de B vemos que son exactamente el mismo valor $\underline{\therefore |B| = |A|}$

$\blacksquare$

b)
Recordando el **Teorema de Hall**: *Si una gráfica bipartita con partición de vértices en conjunto A y B sucede que para cualquier subconjunto X de A se tiene que $|X| \leq |N(X)|$,entonces existe un emparejamiento que cubre a A*
Entonces sea $X \subset A$.
Ahora definiremos a las aristas que tienen un extremo en X como E_X y recordando que cualquier vértice de la gráfica tiene grado 3 entonces $|E_X| = 3|X|$Del mismo modo vemos que para sus vecinos pasa lo mismo es decir $|E_{N(X)}| = 3|N(X)|$ donde $N(X)$ son los vecinos de X pero pues por definición de vecinos sabemos que comparen aristas entonces todo extremo en X tiene extremo en $N(X)$ y llegamos a que $|E_X| \leq |E_{N(X)}| \leftrightarrow 3|X| \leq 3|N(X)| \leftrightarrow |X| \leq |N(X)|$ y ahora si utilizando el teorema de Hall entonces existe un emparejamiento que cubre a A,además en este caso particular se tiene que $|X| = |N(X)|$

$\blacksquare$

c)
Como ya vimos por el inciso a) $|A|=|B|$ y adamas por b) existe un emparejamiento que cubre a A
Como se tiene un emparejamiento lo denotaremos por P .
Aquí vamos a utilizar el Teorema de Hall tres veces, primero agarraremos un emparejamiento de G tal cada vértice tenga solo una arista,a este emparejamiento lo denotaremos como G'.
Ahora de $G \backslash G'$ agarramos otro emparejamiento tal que cada vértice tenga solo una arista, al que denotaremos como G''.
Por ultimo tomamos todos los elementos de $G \backslash (G') \cup G \backslash (G'')$ el cual sigue siendo un emparejamiento al que denotaremos como G'''.
Ahora notamos que $G' \cup G'' \cup G''' = G$ y además $G' \cap G'' = \varnothing = G' \cap G''' = G''' \cap G''$ por lo que a cada uno de estos emparejamientos le agregamos un color diferente, $\underline{\therefore G \text{ tiene una 3-coloración propia}}$

$\blacksquare$

Extra(+2pts extra)

Se sabe que una gráfica de intervalos G no tiene a la gráfica completa en 5 vértices como subgráfica.Muestra que G tiene 5-coloración propia de sus vértices.

Demostración

Una gráfica de intervalos es aquella que dados diferentes intervalos en la recta real, cada vértice es un intervalo y se genera una arista si la intersección de estos intervalos es no vacía.

Ahora por definición de la gráfica G se sabe que no tiene a la gráfica completa en 5 vértices como subgráfica,por lo tanto no hay ningún intervalo en la recta real el cual comparta números con otros 5 intervalos. Entonces a lo más un vértice tiene grado 4,ahora notamos algo curioso de las gráficas de intervalo y es que si un intervalo A esta a la izquierda de un intervalo B y su interescción es vacía entonces un intervalo C que esta a la derecha de B nunca tendrá arista con A, por lo que se puede representar que todas sus aristas no se intersectan entre si.Entonces si la gráfica G tiene a lo más vértices con grado 4 notamos que se puede representar de una forma planar.

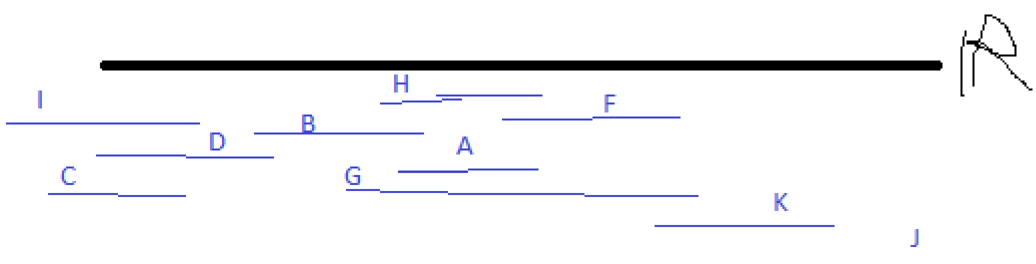


Figura 2: Este puede ser el caso en donde más intervalos se juntan en una sola parte, y se vuelve a confirmar que mi pulso es feo.

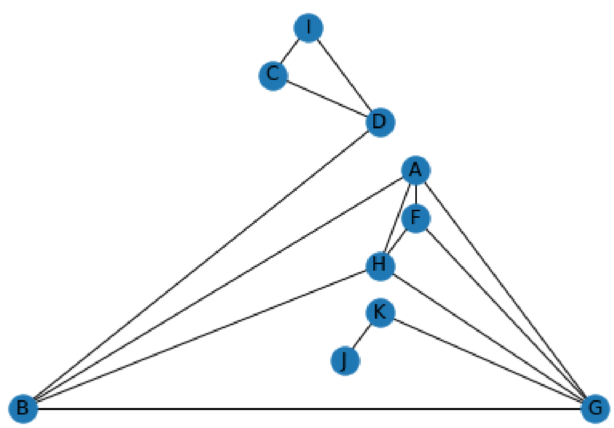


Figura 3: Esta es la gráfica que queda del intervalo, la cual es planar.

Entonces viendo el caso más feo observamos que la gráfica de intervalos con a lo más grado 4 se puede representar de una forma planar.

Ahora por el Teorema de los cuatro colores que se mencionó en clase , tiene una 4-coloración propia, entonces si tiene una 4-coloración propia tiene una 5-coloración propia de sus vértices.

■