# TUGAS PERTEMUAN 4 ALJABAR LINEAR 2

Daffa Randika (H1A023089)

1. Tahun 1225 Leonardo da Pisa mencari akar persamaan

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

dan menemukan $x = 1.368808107$. Tidak seorang pun yang mengetahui cara Leonardo menemukan nilai ini. Sekarang, rahasia itu dapat dipecahkan dengan metode lelaran titik-tetap. Bentuklah semua kemungkinan prosedur lelaran titik-tetap dari $f(x) = 0$, lalu dengan memberikaan sembarang tebakan awal (misalnya $x_0 = 1$), tentukan prosedur lelaran mana yang menghasilkan akar persamaan yang ditemukan Leonardo itu.
**Jawaban**
Kemungkinan pertama:

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + 10x - 20 &= 0 \\ x^3 + 2x^2 + 10x &= 20 \\ x(x^2 + 2x + 10) &= 20 \\ x &= \frac{20}{(x^2 + 2x + 10)} \end{aligned}$$

Kemungkinan kedua:

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + 10x - 20 &= 0 \\ x^3 &= -2x^2 - 10x + 20 \\ x &= \sqrt[3]{-2x^2 - 10x + 20} \end{aligned}$$

Maka $g(x) = \frac{20}{(x^2+2x+10)}$, dengan $x_0 = 1$

$$
\begin{aligned}
x_{r+1} &= \frac{20}{(x_r^2 + 2x_r + 10)} \\
x_0 &= 1 \\
x_1 &= \frac{20}{(1^2 + 2 \cdot 1 + 10)} = 1.53846 \\
x_2 &= \frac{20}{(1.53846^2 + 2 \cdot 1.53846 + 10)} = 1.29501 \\
x_3 &= \frac{20}{(1.29501^2 + 2 \cdot 1.29501 + 10)} = 1.40182 \\
x_4 &= \frac{20}{(1.40182^2 + 2 \cdot 1.40182 + 10)} = 1.35421 \\
x_5 &= \frac{20}{(1.35421^2 + 2 \cdot 1.35421 + 10)} = 1.37529 \\
x_6 &= \frac{20}{(1.37529^2 + 2 \cdot 1.37529 + 10)} = 1.37008 \\
x_7 &= \frac{20}{(1.37008^2 + 2 \cdot 1.37008 + 10)} = 1.36824 \\
x_8 &= \frac{20}{(1.36824^2 + 2 \cdot 1.36824 + 10)} = 1.36906 \\
x_9 &= \frac{20}{(1.36906^2 + 2 \cdot 1.36906 + 10)} = 1.36869 \\
x_{10} &= \frac{20}{(1.36869^2 + 2 \cdot 1.36869 + 10)} = 1.36886 \\
x_{11} &= \frac{20}{(1.36886^2 + 2 \cdot 1.36886 + 10)} = 1.36878 \\
x_{12} &= \frac{20}{(1.36878^2 + 2 \cdot 1.36878 + 10)} = 1.36882 \\
&\text{dst}
\end{aligned}
$$

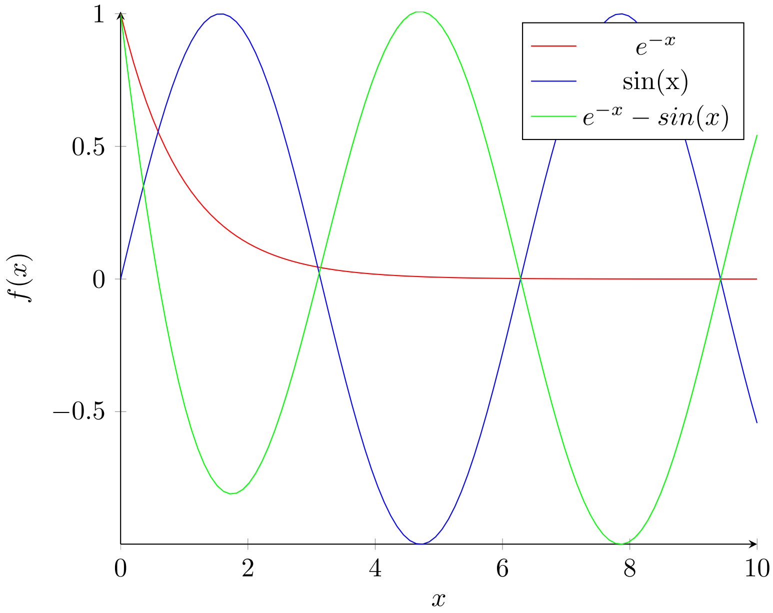
Jadi prosedur lelaran yang menghasilkan akar persamaan yang ditemukan Leonardo itu adalah $g(x) = \frac{20}{(x^2+2x+10)}$

2. Apa yang terjadi jika persaman $x^2 = 2$ diatur sebagai $x_{r+1} = \frac{2}{x_r}$ dan metode lelaran titik-tetap digunakan untuk menemukan akar kuadrat dari 2?
   **Jawaban**
   $x_{r+1} = \frac{2}{x_r}$, dengan $x_0 = 1$

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1.5 \\
x_1 &= \frac{2}{1.5} = 1.33333 \\
x_2 &= \frac{2}{1.33333} = 1.5 \\
x_3 &= \frac{2}{1.5} = 1.33333 \\
&\text{dst}
\end{aligned}
$$

   karena lelaran di atas tidak konvergen, maka dapat disimpulkan bahwa $x_{r+1} = \frac{2}{x_r}$ tidak dapat digunakan untuk mencari akar dari 2

3. Tentukan titik potong kurva $f(x) = e^{-x}$ dengan kurva $g(x) = sin(x)$ dengan metode Newton-Raphson.
   **Jawaban**
   Pertama, gambar grafik f(x), g(x), dan h(x) = f(x)-g(x)




dapat dilihat bahwa untuk x > 2 terdapat banyak titik potong antara ketiga fungsi tersebut

4. Tentukan selang sehingga sehingga prosedur lelaran $x_r + 1 = \frac{x_r}{2} - cos(2x_r)$ konvergen di dalam selang itu (x dalam radian)
   **Jawaban**

   $$g(x) = \frac{x_r}{2} - cos(2x_r)$$
   $$g'(x) = 2\sin(2x_r) + \frac{1}{2}$$

   Syarat konvergen adalah $g'(x) < 1$. Jadi,

   $$|2\sin(2x_r) + \frac{1}{2}| < 1$$
   $$-1 < 2\sin(2x_r) + \frac{1}{2} < 1$$
   $$-\frac{3}{2} < 2\sin(2x_r) < \frac{1}{2}$$

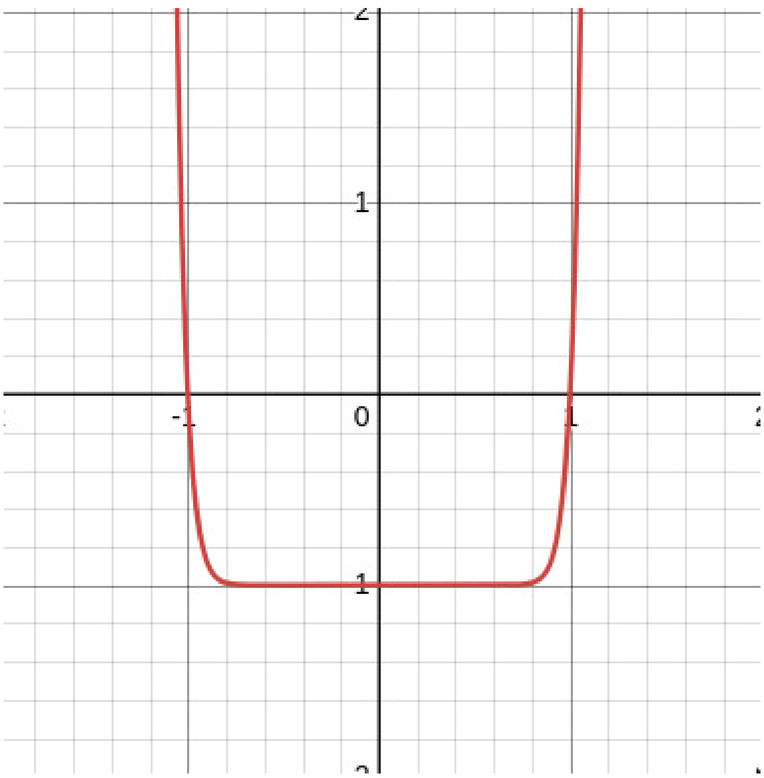
   Urai satu persatu,

   i. $2\sin(2x_r) > -\frac{3}{2}$ memiliki nilai yang memenuhi
   ii. $2\sin(2x_r) + \frac{1}{2} < 1$ memiliki nilai yang memenuhi

   Maka selang agar konvergen adalah $-\frac{3}{2} < 2\sin(2x_r) < \frac{1}{2}$

5. Perlihatkan bahwa semua akar $x^{20} - 1 = 0$ berkondisi baik.

   **Jawaban**
   Perhatikan graf dari fungsi $x^{20} - 1 = 0$




   Dapat dilihat bahwa fungsi tersebut mempunyai dua akar yaitu -1 dan 1

6. Gunakan metode
   (i) bagidua
   (ii) regula-falsi, untuk menemukan akar persaman Leonardo dalam selang [1, 1.5], dan juga dengan metode
   (iii) Newton-Raphson, x0 = 1
   (iv) secant, x0=1, x1=1.5
   Untuk semua metode, $\epsilon = 10^{-6}$
   **Jawaban**

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

   i. bagidua

| a | b | x | f(a) | f(b) | f(c) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.000000000 | 1.500000000 | 1.250000000 | -7.000000000 | 1.375000000 | -3.046875000 |
| 1.250000000 | 1.500000000 | 1.375000000 | -7.000000000 | 1.375000000 | -3.046875000 |
| 1.375000000 | 1.500000000 | 1.437500000 | -3.046875000 | 1.375000000 | -0.900390625 |
| 1.375000000 | 1.437500000 | 1.406250000 | -0.900390625 | 1.375000000 | 0.220458984 |
| 1.406250000 | 1.437500000 | 1.421875000 | -0.900390625 | 0.220458984 | -0.344085693 |
| 1.421875000 | 1.437500000 | 1.429687500 | -0.344085693 | 0.220458984 | -0.062854766 |
| 1.421875000 | 1.429687500 | 1.425781250 | -0.062854766 | 0.220458984 | 0.078540325 |
| 1.421875000 | 1.425781250 | 1.423828125 | -0.062854766 | 0.078540325 | 0.007777512 |
| 1.423828125 | 1.425781250 | 1.424804687 | -0.062854766 | 0.007777512 | -0.027554921 |
| 1.424804687 | 1.425781250 | 1.425292968 | -0.027554921 | 0.007777512 | -0.009892781 |
| 1.425292968 | 1.425781250 | 1.425537109 | -0.009892781 | 0.007777512 | -0.001058654 |
| 1.425292968 | 1.425537109 | 1.425415039 | -0.001058654 | 0.007777512 | 0.003359174 |
| 1.425292968 | 1.425415039 | 1.425354003 | -0.001058654 | 0.003359174 | 0.001150196 |
| 1.425292968 | 1.425354003 | 1.425323486 | -0.001058654 | 0.001150196 | 0.000045755 |
| 1.425323486 | 1.425354003 | 1.425338745 | -0.001058654 | 0.000045755 | -0.000506453 |
| 1.425338745 | 1.425354003 | 1.425346374 | -0.000506453 | 0.000045755 | -0.000230350 |
| 1.425346374 | 1.425354003 | 1.425350189 | -0.000230350 | 0.000045755 | -0.000092297 |
| 1.425350189 | 1.425354003 | 1.425352096 | -0.000092297 | 0.000045755 | -0.000023271 |
| 1.425350189 | 1.425352096 | 1.425351142 | -0.000023271 | 0.000045755 | 0.000011241 |
| 1.425351142 | 1.425352096 | 1.425351619 | -0.000023271 | 0.000011241 | -0.000006014 |
| 1.425351142 | 1.425351619 | 1.425351381 | -0.000006014 | 0.000011241 | 0.000002613 |
| 1.425351381 | 1.425351619 | 1.425351500 | -0.000006014 | 0.000002613 | -0.000001700 |
| 1.425351381 | 1.425351500 | 1.425351440 | -0.000001700 | 0.000002613 | 0.000000456 |
| 1.425351440 | 1.425351500 | 1.425351470 | -0.000001700 | 0.000000456 | -0.000000621 |
| 1.425351470 | 1.425351500 | 1.425351485 | -0.000000621 | 0.000000456 | -0.000000082 |
| 1.425351470 | 1.425351485 | 1.425351478 | -0.000000082 | 0.000000456 | 0.000000186 |
| 1.425351470 | 1.425351478 | 1.425351474 | -0.000000082 | 0.000000186 | 0.000000052 |
| 1.425351474 | 1.425351478 | 1.425351476 | -0.000000082 | 0.000000052 | -0.000000015 |
| 1.425351474 | 1.425351476 | 1.425351475 | -0.000000015 | 0.000000052 | 0.000000018 |
| 1.425351474 | 1.425351475 | 1.425351474 | -0.000000015 | 0.000000018 | 0.000000001 |
| 1.425351474 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000015 | 0.000000001 | -0.000000006 |
| 1.425351475 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000006 | 0.000000001 | -0.000000002 |
| 1.425351475 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000002 | 0.000000001 | -0.000000000 |
| 1.425351475 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000000 | 0.000000001 | 0.000000000 |
| 1.425351475 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000000 | 0.000000000 | -0.000000000 |
| 1.425351475 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000000 | 0.000000000 | 0.000000000 |
| 1.425351475 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000000 | 0.000000000 | 0.000000000 |
| 1.425351475 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000000 | 0.000000000 | 0.000000000 |
| 1.425351475 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000000 | 0.000000000 | -0.000000000 |
| 1.425351475 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000000 | 0.000000000 | 0.000000000 |
| 1.425351475 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000000 | 0.000000000 | -0.000000000 |
| 1.425351475 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000000 | 0.000000000 | -0.000000000 |
| 1.425351475 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000000 | 0.000000000 | 0.000000000 |
| 1.425351475 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000000 | 0.000000000 | -0.000000000 |
| 1.425351475 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000000 | 0.000000000 | -0.000000000 |
| 1.425351475 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000000 | 0.000000000 | -0.000000000 |
| 1.425351475 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000000 | 0.000000000 | 0.000000000 |
| 1.425351475 | 1.425351475 | 1.425351475 | -0.000000000 | 0.000000000 | -0.000000000 |

ii. regula falsi

| a | b | x | f(a) | f(b) | f(c) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.0000000000 | 1.5000000000 | 1.4179104478 | -0.1344081553 | -7.0000000000 | 1.3750000000 |
| 1.4179104478 | 1.5000000000 | 1.4252202700 | -0.0023740705 | -0.1344081553 | 1.3750000000 |
| 1.4252202700 | 1.5000000000 | 1.4253491619 | -0.0000418607 | -0.0023740705 | 1.3750000000 |
| 1.4253491619 | 1.5000000000 | 1.4253514345 | -0.0000007381 | -0.0000418607 | 1.3750000000 |
| 1.4253514345 | 1.5000000000 | 1.4253514746 | -0.0000000130 | -0.0000007381 | 1.3750000000 |
| 1.4253514746 | 1.5000000000 | 1.4253514753 | -0.0000000002 | -0.0000000130 | 1.3750000000 |
| 1.4253514753 | 1.5000000000 | 1.4253514753 | -0.0000000000 | -0.0000000002 | 1.3750000000 |
| 1.4253514753 | 1.5000000000 | 1.4253514753 | -0.0000000000 | -0.0000000000 | 1.3750000000 |
| 1.4253514753 | 1.5000000000 | 1.4253514753 | 0.0000000000 | -0.0000000000 | 1.3750000000 |
| 1.4253514753 | 1.4253514753 | 1.4253514753 | 0.0000000000 | -0.0000000000 | 0.0000000000 |

iii. Newton Raphson

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1\\
x_1 &= 1.6470588235294117\\
x_2 &= 1.8285178051069293\\
x_3 &= 1.9121971010799943\\
x_4 &= 1.9540961957181762\\
x_5 &= 1.9757662001654153\\
x_6 &= 1.9871438621531745\\
x_7 &= 1.9931625952150789\\
x_8 &= 1.9963588018179341\\
x_9 &= 1.9980595620433097\\
x_10 &= 1.9989655352107734\\
x_11 &= 1.9994484091572369\\
x_12 &= 1.9997058533833614\\
x_13 &= 1.9998431318038132\\
x_14 &= 1.9999163398057687
\end{aligned}
$$

iv. Secant

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 2.128205\ f(x_2) = 1.862725\\
x_2 &= 1.981709\ f(x_2) = -0.254747\\
x_2 &= 1.999333\ f(x_2) = -0.009333\\
x_2 &= 2.000003\ f(x_2) = 0.000049\\
x_2 &= 2.000000\ f(x_2) = -0.000000
\end{aligned}
$$

7. Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 = 2$ dan hiperbola $x^2 - y^2 = 1$. Tentukan titik potong kedua kurva dengan metode lelaran titik-tetap (Soal ini adalah mencari solusi sistem persamaan nirlanjar).
**Jawaban**
Dari persamaan lingkaran, kita bisa menyatakan $y^2$ sebagai fungsi dari $x^2$:
$y^2 = 2x^2$

Dari persamaan lingkaran, kita bisa menyatakan $y^2$ sebagai fungsi dari $x^2$:
$y^2 = x^2 1$

Selanjutnya, dari kedua persamaan di atas, kita dapat mengeliminasi $y^2$ dengan menyetarakan kedua persamaan:
$2x^2 = x^2 1$

Gabungkan dan selesaikan persamaan berikut:

$$
\begin{aligned}
x - x^2 &= x^2 - 1\\
2 + 1 &= 2x^2\\
3 &= 2x^2\\
x^2 &= \frac{3}{2}\\
x &= \pm\sqrt{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

Untuk mencari y, substitusikan nilai $x^2 = \frac{3}{2}$ ke salah satu persamaan. Misal persamaan lingkaran:

$$
\begin{aligned}
y^2 &= 2 - x^2 \\
y^2 &= 2 - \frac{3}{2} \\
y^2 &= \frac{1}{2} \\
y &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, titik-titik potong kedua kurva adalah:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \\
p_2 &= \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \\
p_3 &= \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \\
p_4 &= \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$