TUGAS MINGGUAN 7

Nama : Muhammad Daffa Rizky Sutrisno

NRP : 5025231207

Matriks :

	MK_1	MK_2	MK_3	MK_4	MK_5
D1	2	0	1	1	0
D2	0	1	0	1	0
D3	0	1	1	1	0
D4	0	0	0	1	1

1. Sebagai representasi permasalahan edge coloring, misalkan terdapat 4 orang dosen dg 5 mata kuliah yg harus diajar. Sebuah matriks P = [pij] yg menunjukkan berapa kali seorang dosen harus mengajar setiap mata kuliah dpt dilihat pd tabel berikut:
    a. Jk tersedia 4 slot waktu mengajar, berapa jumlah minimal kelas yg dibutuhkan agar tabel di atas dapat direalisasikan?
    b. Jk tersedia 6 slot waktu mengajar, berapa jumlah minimal kelas yg dibutuhkan agar tabel di atas dapat direalisasikan?
    c. Buatlah tabel utk menggambarkan solusi penjadualan yg anda buat pd a & b.

a. Modelkan Sebagai Graf Bipartit

- Dosen (D1,D2,D3,D4) dan mata kuliah (MK1,MK2,MK3,MK4,MK5) menjadi dua set simpul.

- Hubungkan setiap dosen Di ke mata kuliah MKj sesuai jumlah pij (jumlah sisi antara Di dan MKj).

2. Cari derajat maksimum (Δ):

- Derajat maksimum (Δ) adalah nilai maksimum dari:
  - **Total beban mengajar tiap dosen**: Jumlah kolom tiap baris.
  - **Total kebutuhan mengajar tiap mata kuliah**: Jumlah baris tiap kolom.

Perhitungan:

- Derajat tiap dosen:
  - D1 = 4, D2 = 2, D3 = 3, D4 = 2.
- Derajat tiap mata kuliah:
  - MK1 = 2, MK2 = 2, MK3 = 2, MK4 = 4, MK5 = 1.
- Derajat maksimum (Δ) = **4**.

b. Jawaban Soal Hexagonal

a. Jika tersedia 4 slot waktu mengajar:

- Karena Δ = 4, maka graf ini dapat diwarnai dengan **4 warna** (4 slot waktu). Jadi, **jumlah minimal kelas yang dibutuhkan adalah 4**.

b. Jika tersedia 6 slot waktu mengajar:

- Dengan 6 slot waktu tersedia, jumlah minimal kelas tetap **4**, karena Δ = 4. Slot tambahan tidak diperlukan untuk memenuhi kebutuhan.

c. Tabel Penjadwalan

Dengan 4 slot waktu (hasil *edge coloring* dari graf):

Slot Waktu	Pengajaran
Slot 1	D1-MK1, D2-MK4

Slot 2	D1-MK3, D3-MK4
Slot 3	D3-MK3, D4-MK5
Slot 4	D1-MK4, D3-MK2

Penjelasan:

- **Slot 1**: D1 mengajar MK1, dan D2 mengajar MK4.
- **Slot 2**: D1 mengajar MK3, dan D3 mengajar MK4.
- **Slot 3**: D3 mengajar MK3, dan D4 mengajar MK5.
- **Slot 4**: D1 mengajar MK4, dan D3 mengajar MK2.

Untuk kasus soal **a** dan **b**, jawabannya **sama** karena jumlah minimal slot waktu yang diperlukan untuk memenuhi penjadwalan (yaitu $\Delta = 4$) tidak berubah, meskipun ada tambahan slot waktu dalam kasus **b**. Jika tambahan slot waktu (6 slot) diminta untuk digunakan, maka pengajaran bisa dipindahkan ke slot tambahan, tetapi itu **tidak akan meminimalkan jumlah kelas**.

2. Jelaskan bagaimana sebuah permainan Sudoku dapat merepresentasikan permasalahan 9-vertex coloring?

Sudoku adalah permainan logika berbasis grid 9x9 yang mengharuskan pemain mengisi setiap kotak dengan angka 1 hingga 9, sehingga memenuhi aturan:

1. Setiap angka hanya muncul sekali di setiap baris.
2. Setiap angka hanya muncul sekali di setiap kolom.
3. Setiap angka hanya muncul sekali di setiap subgrid 3x3.

Masalah ini dapat direpresentasikan sebagai masalah **9-vertex coloring** dalam teori graf, di mana setiap angka dalam permainan Sudoku dapat dianggap sebagai "warna," dan setiap sel dalam grid diwakili oleh simpul dalam graf. Berikut adalah bagaimana permainan Sudoku dapat dihubungkan dengan konsep pewarnaan graf:

a. Membentuk Graf dari Grid Sudoku

Untuk merepresentasikan Sudoku dalam bentuk graf:

- Setiap kotak dalam grid Sudoku direpresentasikan sebagai **simpul (vertex)** dalam graf.
- Dua simpul dihubungkan oleh **sisi (edge)** jika mereka berada di:
  - Baris yang sama.
  - Kolom yang sama.
  - Subgrid 3x3 yang sama.

Dengan definisi ini, graf yang merepresentasikan Sudoku adalah graf dengan 81 simpul (9x9), di mana derajat setiap simpul bergantung pada posisinya:

- Simpul di tengah (misalnya, sel tengah dalam subgrid 3x3) memiliki derajat 20, karena berhubungan dengan 8 simpul dalam baris, 8 simpul dalam kolom, dan 4 simpul dalam subgrid.
- Simpul di sudut memiliki derajat lebih rendah, yaitu 8.

b. Hubungan dengan 9-Vertex Coloring

Masalah pewarnaan graf bertujuan untuk menetapkan warna yang berbeda pada simpul yang saling terhubung, sehingga tidak ada dua simpul yang bertetangga memiliki warna yang sama. Dalam Sudoku:

- **Warna** merepresentasikan angka 1 hingga 9.
- Aturan permainan memastikan bahwa simpul yang saling terhubung (baik dalam baris, kolom, atau subgrid) tidak memiliki warna yang sama.

Dengan demikian, menyelesaikan Sudoku setara dengan menyelesaikan masalah **9-vertex coloring** pada graf Sudoku: menentukan cara memberi warna pada graf menggunakan tepat 9 warna, sehingga aturan pewarnaan terpenuhi.

c. Sifat Graf Sudoku

Graf Sudoku memiliki beberapa sifat penting:

- Graf ini adalah **graf planar**, karena dapat digambar pada bidang tanpa sisi yang saling berpotongan.
- Setiap simpul memiliki derajat maksimum 20 (di tengah) dan minimum 8 (di sudut).
- Pewarnaan graf ini membutuhkan **tepat 9 warna**, yang sesuai dengan angka 1 hingga 9.

d. Solusi Sudoku sebagai Pewarnaan Graf

Ketika pemain menyelesaikan Sudoku, mereka sebenarnya melakukan pewarnaan graf:

1. Setiap angka yang ditempatkan di kotak tertentu memastikan bahwa simpul terkait diberi warna yang berbeda dari tetangganya.
2. Pemain harus memeriksa keterhubungan simpul melalui baris, kolom, dan subgrid untuk memastikan aturan permainan dipatuhi.

Proses ini identik dengan algoritma untuk menyelesaikan masalah pewarnaan graf, seperti **backtracking** atau metode optimisasi lainnya.

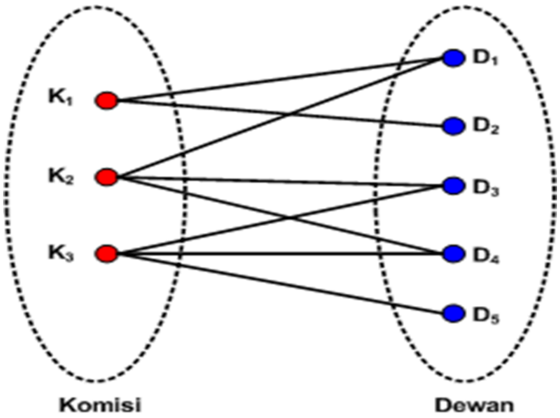
e. Kesimpulan

Permainan Sudoku adalah representasi sempurna dari permasalahan **9-vertex coloring**. Dalam konteks teori graf, Sudoku melibatkan pewarnaan graf planar dengan 81 simpul dan memastikan tetangga tidak memiliki warna yang sama. Proses penyelesaian Sudoku adalah aplikasi langsung dari prinsip pewarnaan graf, yang menjadikan permainan ini contoh nyata dan intuitif dari masalah pewarnaan dalam matematika diskrit.

Sifat utama graf toroidal adalah bahwa meskipun tidak planar, graf tersebut tetap dapat digambar di permukaan torus tanpa crossing. Sebagai contoh, graf K7 (graf lengkap dengan 7 simpul) adalah graf toroidal tetapi **tidak planar** karena mengandung subgraf K5, yang menurut **Teorema Kuratowski** membuat graf tersebut tidak dapat diembed di bidang datar. Namun, K7 dapat diembed pada torus karena torus memungkinkan lebih banyak sisi dan simpul daripada bidang datar.

Perbedaan utama antara graf toroidal dan graf planar adalah bahwa graf toroidal memiliki **toroidal crossing number 0** di permukaan torus, tetapi crossing number-nya lebih besar dari 0 di bidang datar. Jadi, meskipun graf toroidal bukan graf planar, ia tetap memiliki sifat embedding yang unik pada permukaan dengan genus 1.

Diagram :



3. Sebagai representasi permasalahan matching, terdapat 5 anggota dewan yg merupakan anggota dari 3 komisi. Satu anggota dr setiap komisi akan ditunjuk untuk mewakili sebuah kepanitiaan ad-hoc. Jk pemetaan kelima anggota dewan thd 3 komisi spt gambar di bawah, mungkinkah setiap komisi dapat mengirimkan satu wakilnya?

a. Representasi Hubungan dalam Matriks Biaya

Hubungan antara komisi dan dewan:

- Komisi K1: Relasi dengan D1,D2
- Komisi K2: Relasi dengan D1,D3,D4
- Komisi K3: Relasi dengan D3,D4,D5

Matriks biaya C dirumuskan sebagai berikut:

- Jika ada relasi antara komisi Ki dan dewan Dj, biayanya 0.
- Jika tidak ada relasi, biayanya dianggap ∞ (atau nilai besar untuk menunjukkan bahwa pasangan tidak valid).

C =

0	0	∞	∞	∞
0	∞	0	0	∞
∞	∞	0	0	0

b. Langkah-Langkah Hungarian Method

a. Reduksi Baris

Kurangi nilai terkecil dari setiap baris dari semua elemen di baris tersebut:

- Baris 1: Nilai terkecil = 0 → Tidak ada perubahan.
- Baris 2: Nilai terkecil = 0 → Tidak ada perubahan.
- Baris 3: Nilai terkecil = 0 → Tidak ada perubahan.

Setelah reduksi baris, matriks tetap sama.

b. Reduksi Kolom

Kurangi nilai terkecil dari setiap kolom dari semua elemen di kolom tersebut:

- Kolom 1: Nilai terkecil = 0 → Tidak ada perubahan.
- Kolom 2: Nilai terkecil = 0 → Tidak ada perubahan.
- Kolom 3: Nilai terkecil = 0 → Tidak ada perubahan.
- Kolom 4: Nilai terkecil = 0 → Tidak ada perubahan.
- Kolom 5: Nilai terkecil = 0 → Tidak ada perubahan.

Setelah reduksi kolom, matriks tetap sama.

c. Penutupan Nol (Cover Lines)

Identifikasi jumlah garis minimum untuk menutupi semua elemen nol:

- Tutup elemen nol pada C[1][1], C[1][2], C[2][1], C[2][3], C[2][4], C[3][3], C[3][4], dan C[3][5].

Jumlah garis minimum yang diperlukan adalah 3. Karena jumlah garis sama dengan dimensi matriks (3x3), solusi optimal dapat ditemukan.

c. Pasangan Optimal

Gunakan algoritma untuk menugaskan pasangan komisi ke dewan berdasarkan elemen nol:

- K1→D2
- K2→D1
- K3→D5

d. Kesimpulan

Setiap komisi dapat mengirimkan satu wakil ke dalam kepanitiaan ad-hoc:

- **Komisi 1** mengirimkan wakil ke **Dewan 2**.
- **Komisi 2** mengirimkan wakil ke **Dewan 1**.
- **Komisi 3** mengirimkan wakil ke **Dewan 5**.

Masalah ini berhasil diselesaikan dengan Hungarian Method, menunjukkan bahwa ada solusi optimal untuk pemetaan ini.