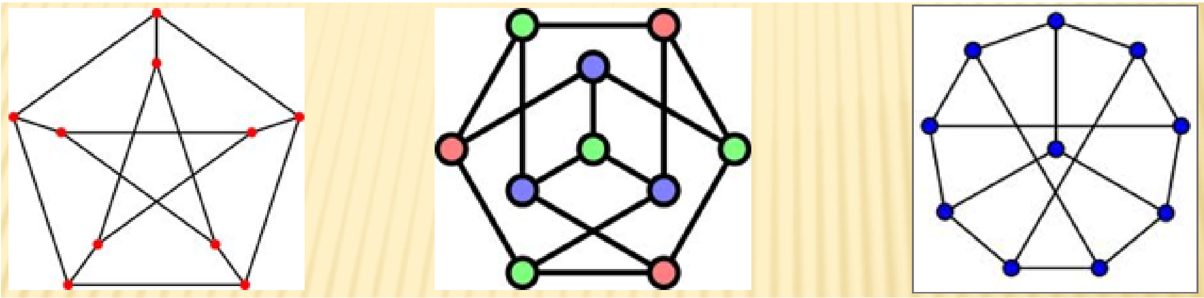
TUGAS MINGGUAN 6

Nama : Muhammad Daffa Rizky Sutrisno

NRP : 5025231207

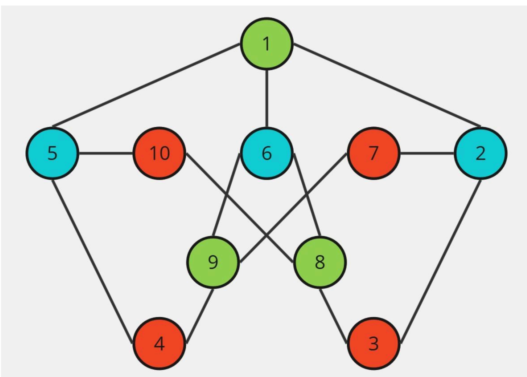
Graph :



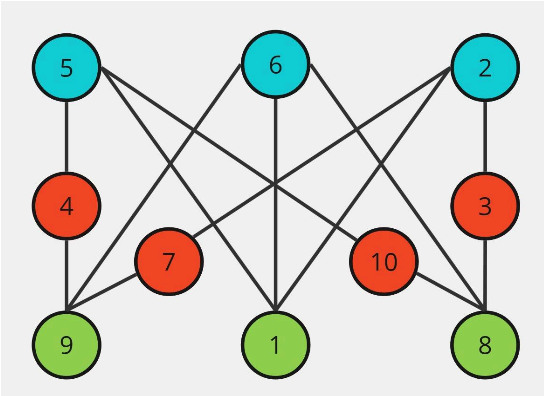
1. Dengan menggunakan teorema2 dalam materi planar graph ini, tunjukkan bahwa graph2 berikut adalah non-planar graph :

a. Graph Bintang Pentagonal

Berdasarkan Teorema 5-4, Syarat perlu dan cukup bagi sebuah graph dapat bersifat planar adalah jika graph tersebut tidak mengandung atau homeomorphic dengan graph Kuratowski. Jika kita perhatikan, graf tersebut adalah graf petersen yang memiliki subgraf sebagai berikut:



Berdasarkan subgraf tersebut bila kita ambil vertex 1, 9, dan 3 serta 5, 6, dan 2 sebagai bigraph (untuk mencocokkan dengan kuratowski graph k3,3), Maka didapat graph sebagai berikut:



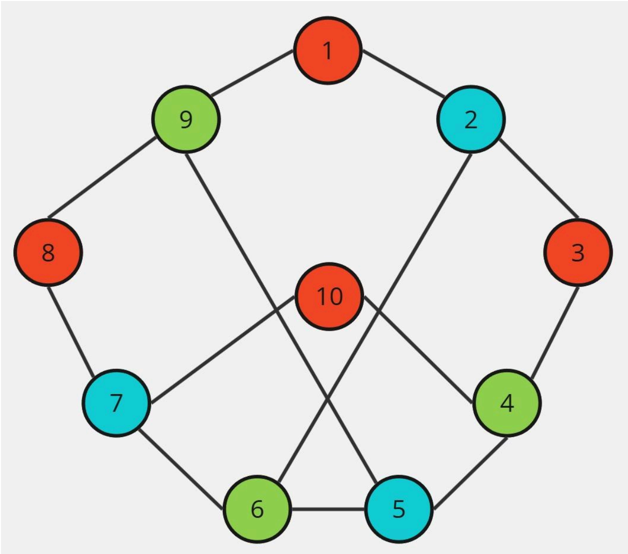
Dapat disimpulkan bahwa graph petersen memiliki subgraph yang homeomorphic dengan kuratowski graph k3,3 sehingga graph petersen juga homeomorphic dengan graph kuratowski. Maka graph petersen tersebut adalah graf yang **tidak planar**.

b. Graph Kubus Hexagonal

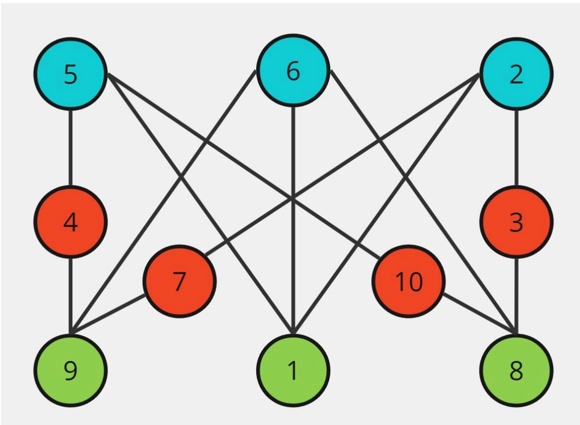
Grafik pada gambar (b) adalah Grafik Petersen, yang memiliki struktur unik dengan simpul-simpulnya membentuk neighborhood 6-cycle. Grafik ini dikenal sebagai contoh klasik dalam teori graf untuk menunjukkan sifat non-planar. Berdasarkan Teorema Kuratowski (1930), sebuah graf dikatakan non-planar jika dan hanya jika graf tersebut mengandung subgraf homeomorfik dengan (K-5) (graf lengkap dengan lima simpul) atau (K-{3,3}) (graf bipartit lengkap dengan partisi 3 dan 3). Grafik Petersen terbukti mengandung (K-{3,3}) sebagai subgraf yang terpisah, di mana simpul-simpulnya dapat dipartisi menjadi dua himpunan ((U) dan (V)) dengan masing-masing tiga simpul, sehingga setiap simpul dalam (U) terhubung dengan setiap simpul dalam (V), menyerupai sifat dari (K-{3,3}). Oleh karena itu, Grafik Petersen adalah grafik **non-planar**, karena tidak mungkin menggambarnya pada bidang dua dimensi tanpa adanya sisi yang saling berpotongan.

c. Graph Segitiga Nonagon

Dengan menggunakan metode yang sama seperti pada nomor 1, berdasarkan Teorema 5-4, syarat perlu dan cukup bagi sebuah graf untuk bersifat planar adalah jika graf tersebut tidak mengandung atau homeomorfik dengan graf Kuratowski. Dalam hal ini, graf yang diberikan merupakan Graf Petersen, yang diketahui memiliki subgraf sebagai berikut:



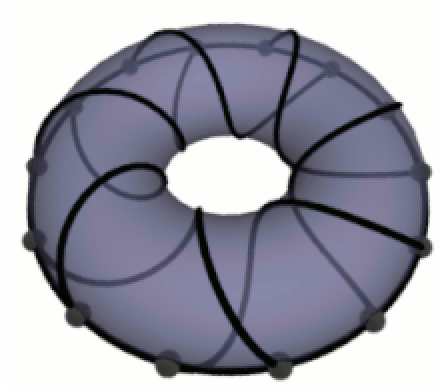
Simpul-simpul dalam graf ini dapat dikelompokkan menjadi empat kombinasi himpunan dengan masing-masing tiga simpul. Sebagai contoh, salah satu pengelompokan dapat berupa simpul 9, 1, dan 2 sebagai satu bagian, serta simpul 9, 8, dan 7 sebagai bagian lainnya. Dengan cara serupa, kita dapat membentuk pengelompokan alternatif lainnya seperti simpul 2, 3, dan 4 pada satu bagian dan simpul 7, 10, dan 4 pada bagian lainnya. Subgraf ini dapat dicocokkan dengan graf K-{3,3}, salah satu graf Kuratowski:



Hal ini menunjukkan bahwa Graf Petersen memiliki subgraf yang homeomorfik dengan graf K-{3,3}, sehingga Graf Petersen juga homeomorfik dengan graf Kuratowski. Oleh karena itu, dengan metode yang sama seperti nomor 1, dapat disimpulkan bahwa Graf Petersen adalah graf yang **tidak planar**.

2. Lakukan observasi untuk menentukan apakah graph2 berikut memiliki sifat planar:
   a.Toroidal Graph
   b.Mobius-Ladder Graph
   c.Heawood Graph

a. Toroidal Graph

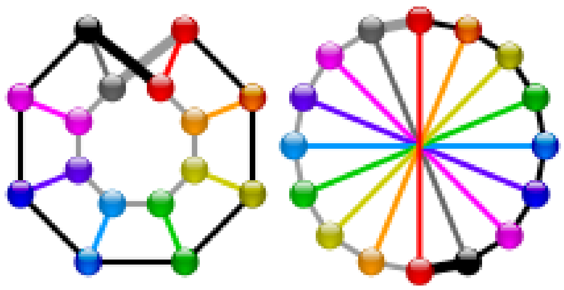


Graf toroidal adalah graf yang dapat digambar pada permukaan torus tanpa ada sisi yang saling berpotongan. Secara matematis, graf toroidal memiliki **genus graf** g=1, yang berarti graf ini membutuhkan permukaan dengan satu lubang (seperti torus) agar bisa diembed tanpa crossing. Sebaliknya, graf planar memiliki genus g=0, sehingga dapat diembed pada bidang datar tanpa ada garis yang berpotongan.

Sifat utama graf toroidal adalah bahwa meskipun tidak planar, graf tersebut tetap dapat digambar di permukaan torus tanpa crossing. Sebagai contoh, graf K7 (graf lengkap dengan 7 simpul) adalah graf toroidal tetapi **tidak planar** karena mengandung subgraf K5, yang menurut **Teorema Kuratowski** membuat graf tersebut tidak dapat diembed di bidang datar. Namun, K7 dapat diembed pada torus karena torus memungkinkan lebih banyak sisi dan simpul daripada bidang datar.

Perbedaan utama antara graf toroidal dan graf planar adalah bahwa graf toroidal memiliki **toroidal crossing number 0** di permukaan torus, tetapi crossing number-nya lebih besar dari 0 di bidang datar. Jadi, meskipun graf toroidal bukan graf planar, ia tetap memiliki sifat embedding yang unik pada permukaan dengan genus 1.

b. Möbius-Ladder Graph

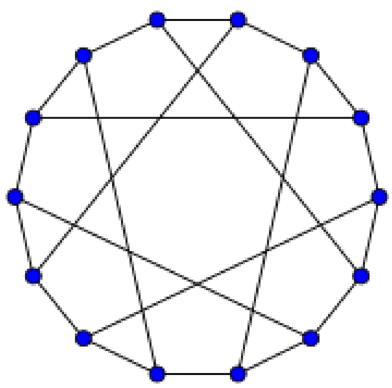


Möbius-Ladder Graph (MLn) adalah graf yang terbentuk dari siklus C2n (dengan 2n simpul), di mana setiap simpul berlawanan dihubungkan oleh tepi tambahan yang membentuk struktur seperti tangga Möbius. Graf ini dinamakan Möbius karena menyerupai bentuk pita Möbius yang memiliki satu sisi.

Untuk $n \geq 3$, Möbius-Ladder Graph **tidak planar**, karena strukturnya menyebabkan garis-garis saling berpotongan jika dicoba digambar di bidang datar tanpa crossing. Sebagai contoh, ML3 (dengan 6 simpul) memiliki struktur seperti K-{3,3} (graf bipartit lengkap dengan dua grup simpul berisi 3 simpul masing-masing), yang menurut Teorema Kuratowski membuatnya tidak planar. Möbius-Ladder Graph untuk $n \geq 3$ mengandung subgraf homeomorfik K-{3,3}, sehingga tidak bisa digambar di bidang tanpa crossing.

Namun, untuk n=2, Möbius-Ladder Graph (dengan 4 simpul) bersifat **planar**, karena struktur tangga Möbius yang kecil memungkinkan penggambaran tanpa crossing. Dengan demikian, planaritas Möbius-Ladder Graph bergantung pada jumlah simpulnya.

c. Heawood Graph



Heawood Graph adalah graf dengan 14 simpul dan 21 sisi. Graf ini sering dikaitkan dengan teori pewarnaan peta, khususnya pada permukaan torus, di mana ia digunakan untuk menentukan jumlah maksimum warna yang diperlukan untuk mewarnai wilayah peta tanpa ada dua wilayah bertetangga yang memiliki warna sama.

Untuk menentukan planaritasnya, kita dapat menggunakan **Teorema Kuratowski**, yang menyatakan bahwa suatu graf tidak planar jika mengandung subgraf homeomorfik dengan K5 atau K-{3,3}. Dalam Heawood Graph, terdapat subgraf homeomorfik K-{3,3}. Hal ini terlihat karena kita dapat membagi simpulnya menjadi dua set berisi 7 simpul masing-masing, di mana setiap simpul di satu set terhubung ke setiap simpul di set lainnya.

Karena mengandung subgraf K-{3,3}, Heawood Graph **tidak planar**. Namun, Heawood Graph dapat digambar di permukaan torus tanpa crossing, menjadikannya graf dengan genus 1. Hal ini juga menjelaskan hubungan Heawood Graph dengan pewarnaan peta di permukaan torus.

d. Perbandingan Ketiga Graf

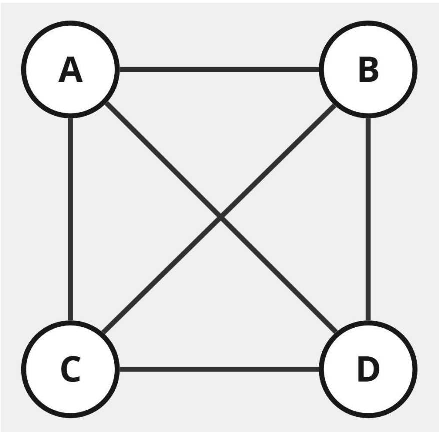
1. **Graf Toroidal**:
    - **Planaritas**: Tidak planar.
    - **Sifat Unik**: Memiliki genus g=1 dan dapat diembed pada torus tanpa crossing.
    - **Contoh**: K7, graf lengkap dengan 7 simpul, yang membutuhkan torus untuk diembed tanpa crossing.

2. **Möbius-Ladder Graph**:
    - **Planaritas**: Planar hanya untuk n=2; tidak planar untuk $n \geq 3$.
    - **Sifat Unik**: Mengandung subgraf K-{3,3} untuk $n \geq 3$, yang menyebabkan crossing pada bidang datar.
    - **Contoh**: ML3 tidak planar, sedangkan ML2 planar.

3. **Heawood Graph**:
    - **Planaritas**: Tidak planar.
    - **Sifat Unik**: Mengandung subgraf K-{3,3}, tetapi dapat diembed pada torus tanpa crossing.
    - **Contoh**: Graf dengan 14 simpul dan 21 sisi yang digunakan untuk pewarnaan peta di permukaan torus.

Kesimpulan : Ketiga graf memiliki properti non-planar, tetapi sifatnya berbeda. Graf toroidal dan Heawood Graph memiliki genus 1 dan dapat diembed pada torus, sementara Möbius-Ladder Graph memiliki planaritas bergantung pada jumlah simpulnya, dengan ML3 dan lebih besar bersifat non-planar.

Graph :



3. Carilah sebuah contoh untuk menunjukkan graph yang dimaksud oleh Teorema Whitney, dan tunjukkan Hamiltonian Cycle-nya.

a. Penjelasan Teorema Whitney (5-7)

Teorema ini menyatakan bahwa jika suatu graf planar GGG:

1. Dibentuk sedemikian rupa sehingga **setiap region (daerah)** dibatasi oleh **tiga sisi (edges)**.
2. Tidak memiliki:
    - **Loop** (sisi yang terhubung ke simpul itu sendiri).
    - **Parallel edges** (dua simpul yang dihubungkan lebih dari satu sisi langsung).
    - **3-cycle** yang bukan merupakan batas dari suatu region.

Maka, graf tersebut akan memiliki **Hamiltonian Cycle**. Dengan kata lain, seluruh simpul dalam graf GGG dapat dilalui tepat sekali dalam suatu siklus tertutup.

b. Pemahaman Komponen dalam Teorema

1. **Graf planar**: Graf yang dapat digambar di bidang tanpa ada sisi yang saling berpotongan.
2. **Region dibentuk oleh 3 edges**: Graf planar dengan region berbentuk segitiga (setiap wilayah dikelilingi oleh 3 sisi).
3. **Tidak ada loop dan parallel edges**: Membatasi struktur graf agar lebih teratur.
4. **3-cycle yang valid hanya untuk region**: Jika ada 3-cycle, harus menjadi bagian dari suatu region, bukan struktur independen.

c. Contoh Graf yang Memenuhi Teorema Whitney

Graf **tetrahedron** (K4) adalah contoh sederhana dari graf yang memenuhi semua kondisi dalam teorema ini:

1. Graf planar dengan **4 simpul** dan **6 sisi**.
2. **Setiap region** adalah segitiga (dibentuk oleh 3 sisi).
3. Tidak ada **loop** atau **parallel edges**.
4. Setiap **3-cycle** merupakan bagian dari batas suatu region.

d. Hamiltonian Cycle pada K4

Hamiltonian Cycle adalah siklus yang melewati setiap simpul tepat satu kali sebelum kembali ke simpul awal.

Pada K4, simpulnya diberi label A,B,C,D.
Salah satu Hamiltonian Cycle-nya adalah:
A→B→C→D→A.

Graf K4 memiliki beberapa Hamiltonian Cycle lainnya karena sifat simetrisnya.

e. Kesimpulan

Teorema Whitney memberikan syarat yang cukup kuat untuk menjamin keberadaan Hamiltonian Cycle pada graf planar. Contoh sederhana seperti K4 menunjukkan penerapan teorema ini, dan prinsip yang sama dapat diterapkan pada graf planar yang lebih kompleks selama syarat teorema terpenuhi.