Espaço e Subespaço vetorial

1. Verifique se os conjuntos abaixo, com as operações dadas, são espaços vetoriais:

   a) O conjunto de todos os ternos ordenados (x, y, z) de números reais com as operações

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \quad \text{e} \quad k(x, y, z) = (kx, y, z).$$

   (Conjunto $\mathbb{R}^3$.)

   b) O conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais com as operações

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{e} \quad k(x, y, z) = (2kx, 2ky).$$

   c) O conjunto de todos os números reais com as operações usuais de adição e multiplicação.

   d) O conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais com as operações

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1) \quad \text{e} \quad k(x, y) = (kx, ky)$$

   e) O conjunto das matrizes de ordem 2 com as operações usuais de adição entre matrizes e multiplicação por escalar.

   f) O conjunto das matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ com as operações usuais de adição entre matrizes e multiplicação por escalar.

   g) O conjunto das matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ com as operações usuais de adição entre matrizes e multiplicação por escalar.

   h) O conjunto das matrizes com 3 linhas e duas colunas.

   i) O conjunto $\mathbb{P}_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \ ; \ a_0, \ a_1, \ a_2 \in \mathbb{R}\}$

2. Verifique quais dos conjuntos abaixo formam um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

   a) A reta de equação $x + 2y = 0$

   b) A reta de equação $x + 2y = 1$

3. Verifique quais dos conjuntos abaixo formam um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

   a) O plano de equação $x + y + z = 0$

   b) A reta de equação $x + y + z = 1$

4. Verifique se os seguinte conjuntos de matrizes formam um subespaço:

   a) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $ad - bc = 1$

   b) Conjunto das matrizes invertíveis

   c) $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 \ ; \ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \in \mathbb{R}\}$

   d) $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 \ ; \ a_0, \ a_1, \ a_2 \in \mathbb{Z}\}$

5. Verifique se o vetor $w = (9, 2, 7)$ pode ser escrito como combinação dos vetores $u = (1, 2, -1)$ e $v = (6, 4, 2)$. E o vetor $w_1 = (4, -1, 8)$. Quem é o espaço gerado por u e v.

6. Mostre que o conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq 0$. não forma um espaço vetorial.

7. Considere os vetores $u_1 = (2, 1, 0, 3), u_2 = (3, -1, 5, 2)$ e $u_3 = (-1, 0, 2, 1)$. Qual dos vetores abaixo pertencem ao espaço gerado por u_1, u_2 e u_3 :

   $(1, 2, 3, 4)$ $(2, 3, -7, 3)$ $(1, 1, 1, 1)$ $(0, 0, 0, 0)$

8. Mostre que o conjunto das funções contínuas formam um espaço vetorial. Se restringirmos as funções contínuas tais que $f(0) = 0$, ainda é um espaço vetorial? (apenas verifique se é subespaço ;)) E o caso $f(0) = 2$?

9. Expresse, quando possível, os seguinte polinômios como combinações lineares de $p_1 = x^2 + 1, p_2 = x + x^2$ e $1 - x$

   a) $5x^2 + x + 4$

   b) $2x^2 + 4$

   c) $x^3 + 2x^2 + x + 1$

   d) Quem é o espaço gerado por esses polinômios?

10. Encontre o espaço gerado pelas matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ está nesse espaço gerado? E a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$?

11. Determine quais dos vetores abaixo geram $\mathbb{R}^3$

    a) $u_1 = (2, 1, 0), u_2 = (3, -1, 5)$ e $u_3 = (-1, 0, 2)$.

    b) $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0)$ e $u_3 = (1, 0, 0)$.

    c) $u_1 = (2, 1, 1), u_2 = (3, -1, 5)$ e $u_3 = (5, 0, 6)$.

12. Sejam E_1 e E_2 dois subespaços vetoriais de V. Justifique se as afirmações abaixo são é verdadeiras ou falsas.

    ( ) O conjunto $E_1 \cup E_2$ é um subespaço de V

    ( ) Se u e v são dois vetores que não pertencem a E_1 então $u + v$ não pertence a E_1

    ( ) Se u não pertence a E_1 e $\alpha \neq 0$ então $\alpha \cdot u$ não pertence a E_1.

    ( ) $S(E_1 \cap E_2) = S(E_1) \cap S(E_2)$

    ( ) Dados $X = \{v_1, v_2\}$ e $Y = \{v_1 - v_2, v_2\}$ temos que $S(X) = S(Y)$

13. Sejam u, v e w vetores de um espaço vetoria V. Usando as propriedades de espaço vetorial mostre que se $w + u = w + v$ então $u = v$. Após, mostre que $-1 \cdot v = -v$.(É por isso que -1· 1= -1)