Lista de Exercícios — Álgebra Linear

Capítulo 5: Transformações Lineares

Página 152

1. Seja V o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$. Seja B um elemento de V fixado e considere a aplicação $\varphi_B : V \to V$ dada por

$$\varphi_B(A) = A \cdot B - B \cdot A.$$

Mostre que φ_B é uma transformação linear.

2. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1,0,0) = (2,0), \quad T(0,1,0) = (1,1), \quad T(0,0,1) = (0,-1).$$

Em seguida, obtenha $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(\vec{v}) = (3,2)$.

3. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1,2) = (2,3), \quad T(0,1) = (1,4).$$

4. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear e C o conjunto dos vetores de V que são deixados fixos por T, ou seja,

$$C = \{\vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{v}\}.$$

Mostre que C é um subespaço vetorial de V.

5. (**Sel. Mestrado UFRGS 2007/2**) Obtenha todas as transformações lineares $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que

$$L(u) = 3u, \quad L(v) = 3v, \quad L(w) = 3w,$$

onde $u = (1,0,0)$, $v = (1,1,0)$ e $w = (0,1,1)$.

Gabarito — Lista de Exercícios

3. **(Transformação linear de matrizes)** Seja $\varphi_B(A) = AB - BA$. Precisamos mostrar que φ_B é linear, isto é:

$$\varphi_B(A_1 + A_2) = \varphi_B(A_1) + \varphi_B(A_2) \quad \text{e} \quad \varphi_B(cA) = c\,\varphi_B(A)$$

para todo $A, A_1, A_2 \in V$ e $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\varphi_B(A_1 + A_2) &= (A_1 + A_2)B - B(A_1 + A_2) \\
&= A_1B + A_2B - BA_1 - BA_2 \\
&= (A_1B - BA_1) + (A_2B - BA_2) \\
&= \varphi_B(A_1) + \varphi_B(A_2).
\end{aligned}$$

E

$$\varphi_B(cA) = (cA)B - B(cA) = c(AB - BA) = c\,\varphi_B(A).$$

Logo, φ_B é uma transformação linear.

—

4. **(Transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$)**

Dados:

$$T(1,0,0) = (2,0), \quad T(0,1,0) = (1,1), \quad T(0,0,1) = (0,-1).$$

A matriz de T (em relação à base canônica) é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para $\vec{v} = (x, y, z)$, temos:

$$T(x, y, z) = (2x + y,\ y - z).$$

Queremos $T(\vec{v}) = (3, 2)$, logo:

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ y - z = 2. \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x, \\ z = y - 2 = 1 - 2x. \end{cases}$$

Portanto:

$$\vec{v} = (x, 3 - 2x, 1 - 2x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

—

5. **(Transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$)**

Sabemos que:

$$T(1,2) = (2,3), \quad T(0,1) = (1,4).$$

Podemos escrever $(1,2) = (1,0) + 2(0,1)$.

Seja $T(1,0) = (a,b)$. Então:

$$T(1,2) = T(1,0) + 2T(0,1) = (a,b) + 2(1,4) = (a+2, b+8).$$

Mas $T(1,2) = (2,3)$, logo:

$$\begin{cases} a + 2 = 2 \Rightarrow a = 0, \\ b + 8 = 3 \Rightarrow b = -5. \end{cases}$$

Portanto:

$$T(1,0) = (0,-5), \quad T(0,1) = (1,4).$$

A matriz de T é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$T(x,y) = (y, -5x + 4y).$$

—

6. **(Subespaço dos vetores fixos)**

Seja $C = \{\vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{v}\}$.

Verificações:

1. $0_V \in C$, pois $T(0_V) = 0_V$.

2. Se $\vec{u}, \vec{v} \in C$, então

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = \vec{u} + \vec{v},$$

logo $\vec{u} + \vec{v} \in C$.

3. Se $\vec{v} \in C$ e $c \in \mathbb{R}$,

$$T(c\vec{v}) = cT(\vec{v}) = c\vec{v},$$

logo $c\vec{v} \in C$.

Portanto, C é um subespaço vetorial de V.

—

7. **(Mestrado UFRGS 2007/2)**

   Temos $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

   $$L(u) = 3u, \quad L(v) = 3v, \quad L(w) = 3w,$$

   onde

   $$u = (1,0,0), \quad v = (1,1,0), \quad w = (0,1,1).$$

   Note que:

   $$L(u) = 3u = (3,0,0), \quad L(v) = 3v = (3,3,0), \quad L(w) = 3w = (0,3,3).$$

   Esses vetores mostram que L age como multiplicação por 3 em cada um desses vetores. Como $\{u, v, w\}$ é um conjunto gerador (e linearmente independente), temos que:

   $$L(\vec{x}) = 3\vec{x} \quad \forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

   Portanto,

   $$L = 3I,$$

   onde I é a transformação identidade.

   Conclusão: a única transformação linear que satisfaz as condições é $L(\vec{x}) = 3\vec{x}$.