FURG

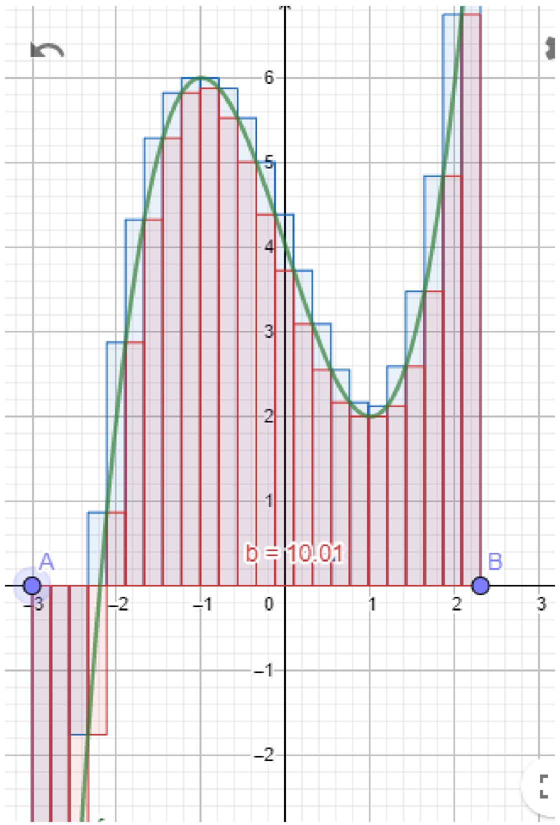
IMEF INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

PROFª. DENISE MARIA VARELLA MARTINEZ

A INTEGRAL DEFINIDA

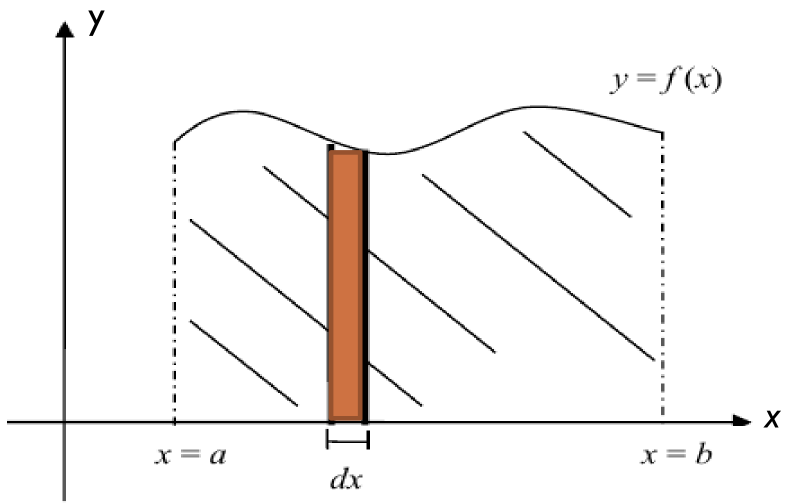
CÁLCULO DE ÁREAS



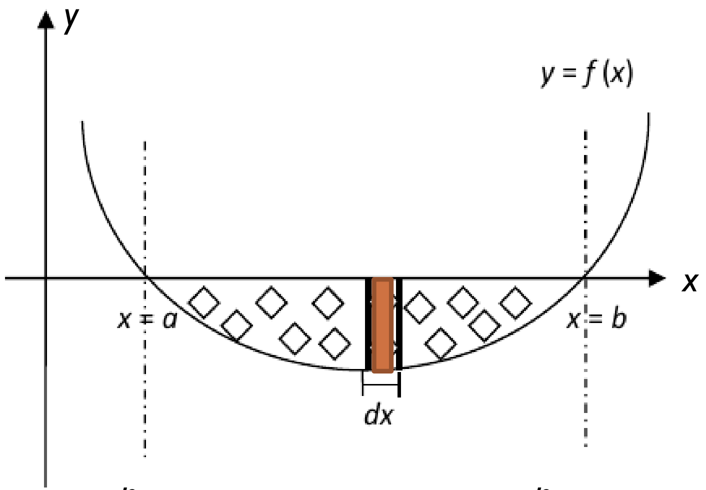
Fonte: geogebra.org

CÁLCULO DE ÁREAS

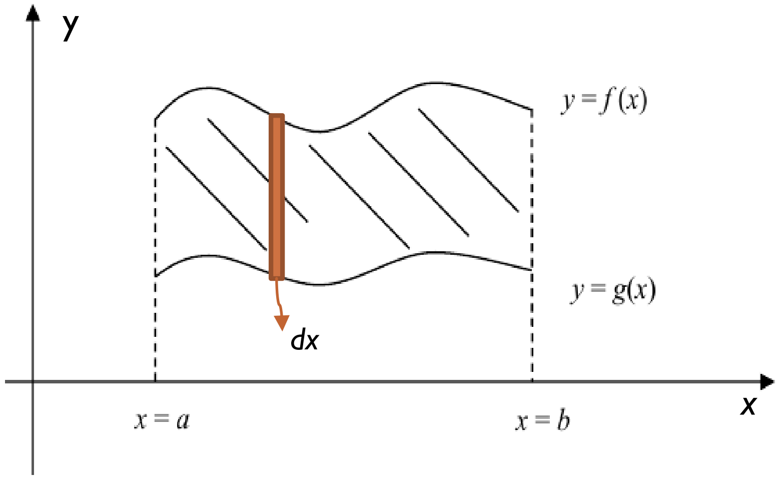
- ELEMENTO DE ÁREA dx



$$A = \int_a^b [f(x) - 0]dx = \int_a^b f(x)dx$$



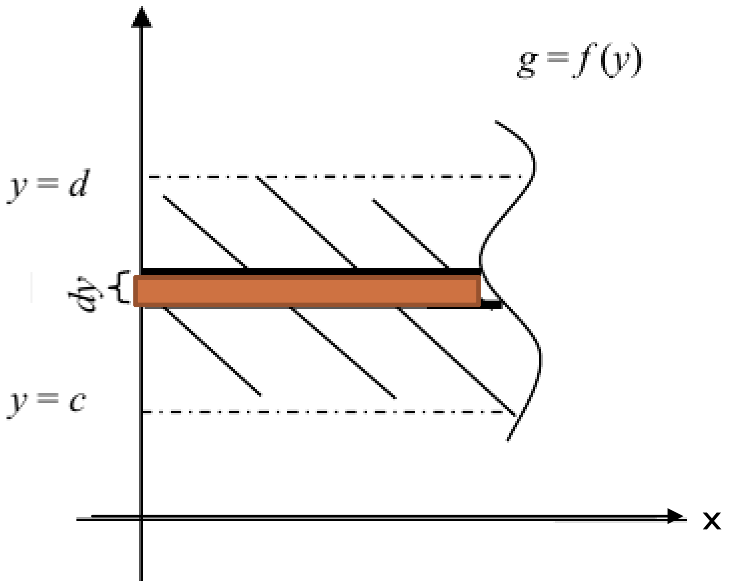
$$A = \int_a^b [0 - f(x)]dx = -\int_a^b f(x)dx$$

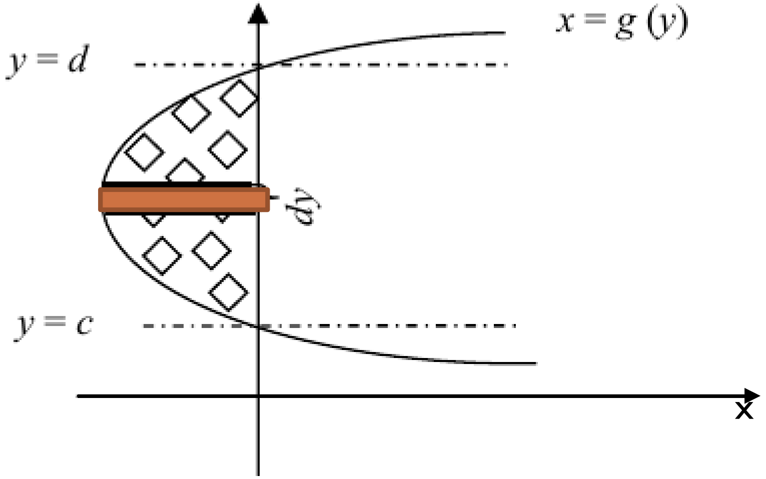


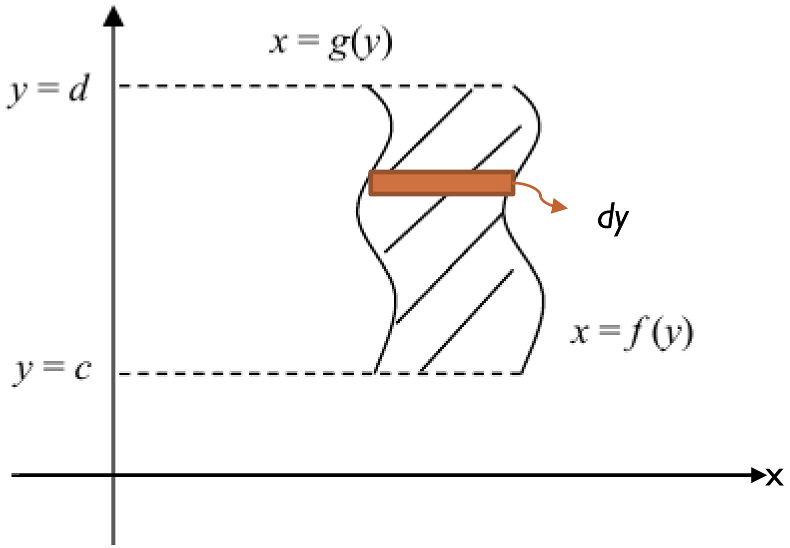
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

CÁLCULO DE ÁREAS

ELEMENTO DE ÁREA dy





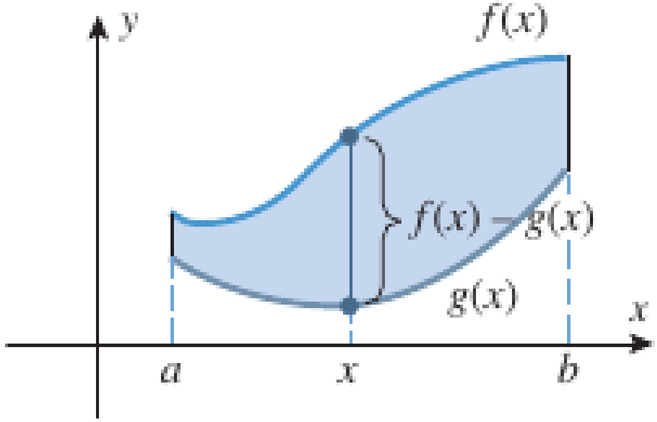


$$A = \int_c^d [f(y) - 0]dy = \int_c^d f(y)dy$$

$$A = \int_c^d [o - g(y)]dy = -\int_c^d g(y)dy$$

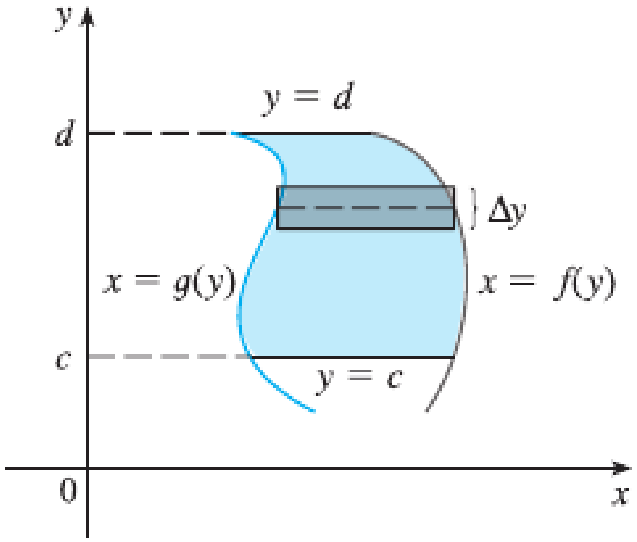
$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

Área entre curvas



Se f e g forem funções contínuas no intervalo $[a, b]$ e se $f(x) \geq g(x)$ em cada x de $[a, b]$, então a área da região limitada acima por $y = f(x)$, abaixo por $y = g(x)$, à esquerda pela reta $x = a$ e à direita pela reta $x = b$ é

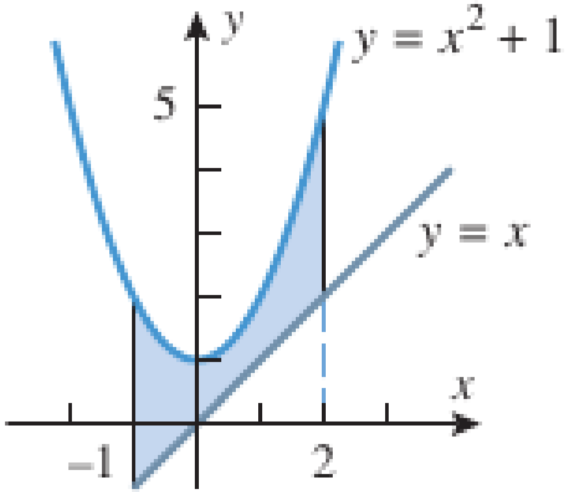
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$



Se f e g forem funções contínuas no intervalo $[c, d]$ e se $f(y) \geq g(y)$ em cada y de $[c, d]$, então a área da região limitada à esquerda por $x = g(y)$. à direita por $x = f(y)$, acima por $y = d$ e abaixo por $y = c$ é

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

Exemplo 1. Calcular, por integração, a área da região "sombreada" do gráfico.



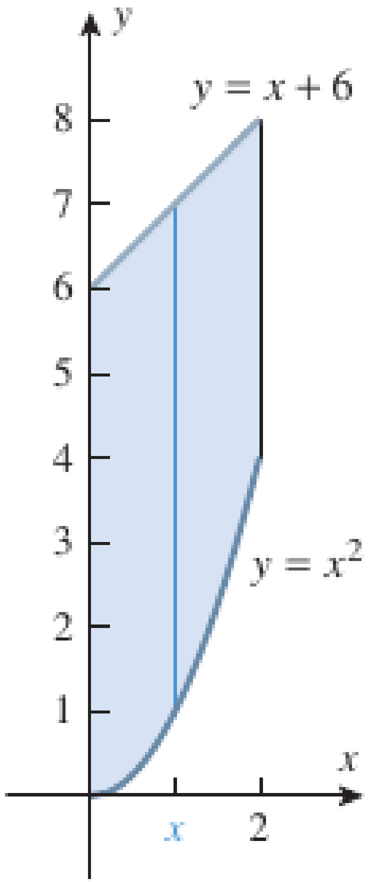
A área da região sombreada está limitada acima por $y = x^2 + 1$, abaixo por $y = x,$ à esquerda pela reta $x = -1$ e à direita pela reta $x = 2$, então a área é representada por:

$$A = \int_{-1}^{2} [(x^2 + 1) - x]\, dx = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1 - x) dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} + x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{2^3}{3} + (2) - \frac{2^2}{2}\right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} + (-1) - \frac{(-1)^2}{2}\right] =$$

$$A = \left[\frac{8}{3} + (2) - \frac{4}{2}\right] - \left[\frac{-1}{3} - 1 - \frac{1}{2}\right] = \frac{9}{3} + \frac{3}{2} = \frac{18 + 9}{6} = \frac{27}{6} u.a.$$

Exemplo 2. Calcular, por integração, a área da região “sombreada” do gráfico.



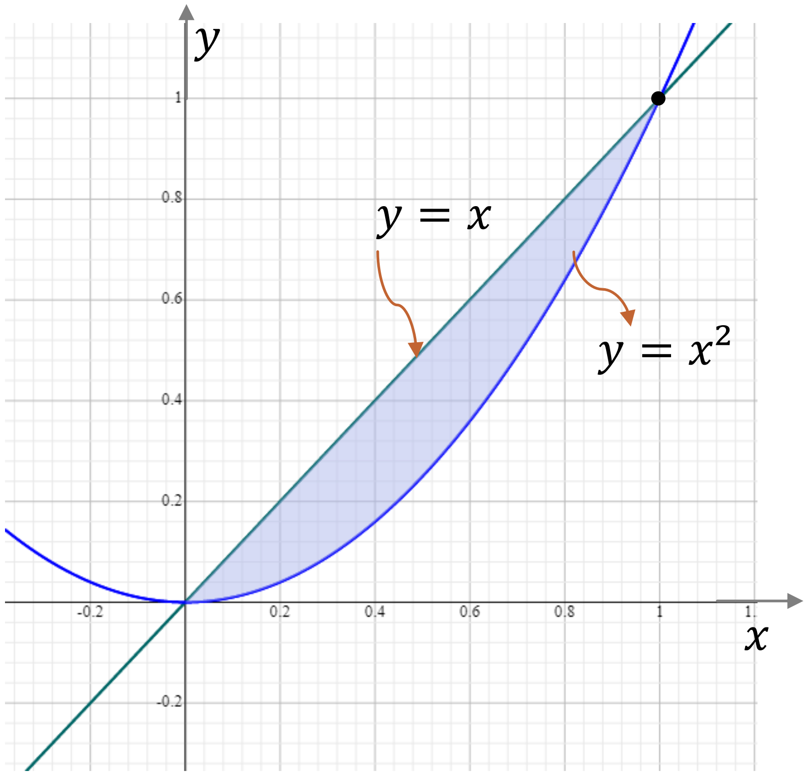
A área da região sombreada está limitada acima por $y = x + 6$, abaixo por $y = x^2$, à esquerda pela reta $x = 0$ e à direita pela reta $x = 2$, então a área é representada por:

$$A = \int_0^2 [(x+6) - x^2]\, dx = \int_0^2 (x + 6 - x^2) dx$$

$$A = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left[\frac{2^2}{2} + 6(2) - \frac{2^3}{3}\right] - 0 = 2 + 12 - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{42}{3} - \frac{8}{3} = \frac{34}{3}$$

Exemplo 3. Calcular, por integração, a área da região "sombreada" do gráfico.



Primeiro devemos achar os pontos de intersecção das curvas. Para atingir este objetivo igualamos os y. Assim

$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \;\; e \;\; x = 1,$

logo os pontos de intersecção são: (0,0) e (1,1).

Desta forma, a área da região hachurada, limitada superiormente por $y = x$ e inferiormente por $y = x^2$, é dada por

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x =$$

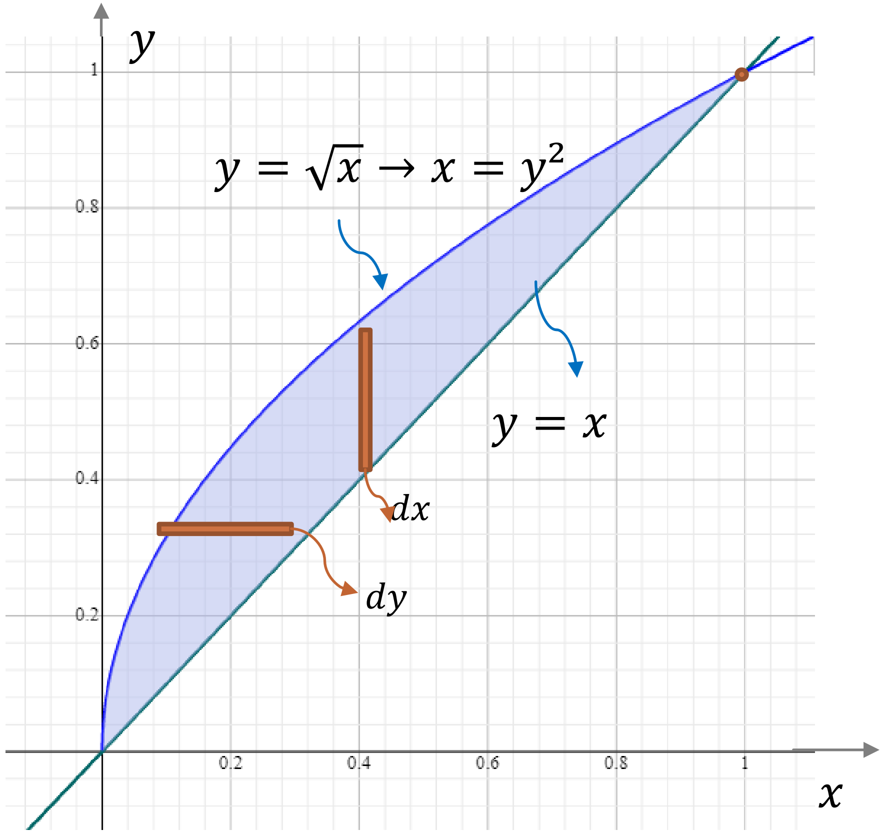
$$= \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 - \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{3} + 0$$

$$= \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6} u.a.$$

Exemplo 4. Determine a área limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x$, usando elemento de área dx e elemento de área dy.

Calculando os pontos de intersecção:

$$igualando\ \ x = y^2\ e\ x = y \rightarrow y^2 = y \rightarrow y^2 - y = 0 \rightarrow y(y-1) = 0 \rightarrow y = 0\ e\ y = 1 \rightarrow\ \ P(0,0)\ e\ P(1,1)$$



1) usando elemento de área dx

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_o^1 x dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3/2}\right)_0^1 - \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 =$$

$$= \frac{2(1^{3/2} - 0)}{3} - \frac{(1^2 - 0)}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6} u.a.$$

2) usando elemento de área dy

$$A = \int_0^1 (y - y^2)dy = \int_0^1 y\, dy - \int_o^1 y^2 dy = \left(\frac{y^2}{2}\right)_0^1 - \left(\frac{y^3}{3}\right)_0^1 =$$

$$= \frac{(1^2 - 0)}{2} - \frac{(1^3 - 0)}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6} u.a.$$