Solução de Sistemas de Equações Lineares:

Métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel

Métodos Iterativos

- Quando usar?
  - Sistemas Lineares com matrizes grandes e esparsas
    - Grandes ⇨ Comum para $n > 100.000$
    - Esparsas ⇨ Maioria dos coeficientes nulos
- Principais métodos iterativos:
    - Gauss-Jacobi
    - Gauss-Seidel
    - SOR (Gauss-Seidel com Sub/Sobrerelaxação)
    - TDMA (para matrizes tridiagonais)

Métodos Iterativos

- Vantagens:

$\Rightarrow$ são menos suscetíveis ao acúmulo de erros de arredondamento do que os métodos diretos;

$\Rightarrow$ Dependendo do sistema, a solução pode ser obtida muito mais rapidamente;

Método de Gauss-Jacobi

- **Método de Gauss-Jacobi**
  - Consideremos um sistema linear do tipo $A_{nn}x_{n1} = b_{n1}$

$$
\begin{array}{l}
a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \cdots + a_{1n-1}.x_{n-1} + a_{1n}.x_n = b_1 \\
a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + \cdots + a_{2n-1}.x_{n-1} + a_{2n}.x_n = b_2 \\
a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + a_{33}.x_3 + \cdots + a_{3n-1}.x_{n-1} + a_{3n}.x_n = b_3 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + a_{n3}.x_3 + \cdots + a_{nn-1}.x_{n-1} + a_{nn}.x_n = b_n
\end{array}
$$

Método de Gauss-Jacobi

- **Método de Gauss-Jacobi**
  - Tomando por base a primeira equação (linha 1):
  - $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_2 = b_1$

Isolando x1, temos: $x_1 = (1/a_{11})\,(b_1 - a_{12} x_2 - \dots - a_{1n} x_2)$

Da mesma forma, para x_2, x_3, ..., x_n

$$x_2 = (1/a_{22})\,(b_2 - a_{21} x_1 - \dots - a_{2n} x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = (1/a_{nn})\,(b_n - a_{n1} x_1 - \dots - a_{nn-1} x_{n-1})$$

Método de Gauss-Jacobi

- **Na forma matricial, para um sistema nxn, temos**

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}.x_2^k - a_{13}.x_3^k - \ldots - a_{1,n-1}.x_{n-1}^k - a_{1n}.x_n^k\right)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}.x_1^k - a_{23}.x_3^k - \ldots - a_{2,n-1}.x_{n-1}^k - a_{2n}.x_n^k\right)$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}.x_1^k - a_{32}.x_2^k - \ldots - a_{3,n-1}.x_{n-1}^k - a_{3n}.x_n^k\right)$$

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}.x_1^k - a_{n2}.x_2^k - \ldots - a_{n,n-1}.x_{n-1}^k\right)$$

Método de Gauss-Jacobi

- **Na forma matricial, para um sistema 4x4, temos**

$x_1 = -a_{12} / a_{11}\, x_2 - \; a_{13} / a_{11}\, x_3 - \; a_{14} / a_{11}\, x_4 + b_1 / a_{11}$
$x_2 = -a_{21} / a_{22}\, x_2 - \; a_{23} / a_{22}\, x_3 - \; a_{24} / a_{22}\, x_4 + b_2 / a_{22}$
$x_3 = -a_{31} / a_{33}\, x_2 - \; a_{32} / a_{33}\, x_3 - \; a_{34} / a_{33}\, x_4 + b_3 / a_{33}$
$x_2 = -a_{41} / a_{44}\, x_2 - \; a_{42} / a_{44}\, x_3 - \; a_{43} / a_{44}\, x_4 + b_4 / a_{44}$

$$\vec{x}^{k+1} = C \cdot \vec{x}^{k} + \vec{g}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & -a_{14}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & -a_{24}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & -a_{34}/a_{33} \\ -a_{41}/a_{44} & -a_{42}/a_{44} & -a_{43}/a_{44} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{k} + \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \\ b_4/a_{44} \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jacobi

- **Critérios de Parada**
- **Erro absoluto máximo entre duas iterações**

$$EA^{(k)} = \max \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon$$

- **Erro relativo máximo entre duas iterações**

$$ER^{(k)} = \frac{\max \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|}{\max \left| x_i^{(k)} \right|} < \varepsilon$$

Método de Gauss-Jacobi

- **Método de Gauss-Jacobi – Exemplo 1**
  - **Seja o sistema:**

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases} \quad Use\ \vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{bmatrix}; EA < 0,1$$

  - **Determinação de C e g**

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -3/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{6}{10} \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jacobi

- **Método de Gauss-Jacobi – Exemplo 1**

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -3/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ -1{,}6 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{6}{10} \end{bmatrix}$$

$$EA^{(k)} = \max \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$$

$$\mathbf{x^{(1)} = Cx^{(0)} + g} = \begin{bmatrix} \mathbf{0{,}84} \\ \mathbf{1{,}34} \\ \mathbf{0{,}94} \end{bmatrix}$$

$$máx \left| \begin{bmatrix} 0{,}84 \\ 1{,}34 \\ 0{,}94 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ -1{,}6 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} \right| = máx \begin{bmatrix} 0{,}14 \\ 2{,}94 \\ 0{,}34 \end{bmatrix} = 2{,}94$$

Método de Gauss-Jacobi

- **Método de Gauss-Jacobi – Exemplo 1**
  - **Assim:** $EA^{(k)} = \max \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$

$$x^{(2)} = Cx^{(1)} + g = \begin{bmatrix} 0{,}150 \\ 1{,}244 \\ 0{,}030 \end{bmatrix} \qquad máx \left| \begin{bmatrix} 0{,}150 \\ 1{,}244 \\ 0{,}030 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}84 \\ 1{,}34 \\ 0{,}94 \end{bmatrix} \right| = máx \begin{bmatrix} 0{,}69 \\ 0{,}096 \\ 0{,}91 \end{bmatrix} = 0{,}69$$

e, analogamente:

$$x^{(3)} = Cx^{(2)} + g = \begin{bmatrix} 0{,}4422 \\ 1{,}5640 \\ 0{,}1968 \end{bmatrix} \qquad máx \left| \begin{bmatrix} 0{,}4422 \\ 1{,}5640 \\ 0{,}1968 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}150 \\ 1{,}244 \\ 0{,}030 \end{bmatrix} \right| = máx \begin{bmatrix} 0{,}2922 \\ 0{,}32 \\ 0{,}1668 \end{bmatrix} = 0{,}32$$

Método de Gauss-Jacobi

- **Método de Gauss-Jacobi – Exemplo 1**
  - **Igualmente:**

$$\mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(3)} + \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0{,}3282 \\ 1{,}4722 \\ 0{,}0424 \end{bmatrix}$$

$$m\acute{a}x \left| \begin{bmatrix} 0{,}3282 \\ 1{,}4722 \\ 0{,}0424 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}4422 \\ 1{,}5640 \\ 0{,}1968 \end{bmatrix} \right| = m\acute{a}x \begin{bmatrix} 0{,}114 \\ 0{,}0918 \\ 0{,}1544 \end{bmatrix} = 0{,}1544$$

e, finalmente:

$$\mathbf{x}^{(5)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(4)} + \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0{,}3929 \\ 1{,}5259 \\ 0{,}0927 \end{bmatrix}$$

$$m\acute{a}x \left| \begin{bmatrix} 0{,}3929 \\ 1{,}5259 \\ 0{,}0927 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}3282 \\ 1{,}4722 \\ 0{,}0424 \end{bmatrix} \right| = m\acute{a}x \begin{bmatrix} 0{,}0647 \\ 0{,}0537 \\ 0{,}0503 \end{bmatrix} = 0{,}0647$$

Método de Gauss-Jacobi

- **Em suma:**

$$X^{(0)} \rightarrow X^{(1)} \rightarrow X^{(2)} \rightarrow X^{(3)} \rightarrow X^{(4)} \rightarrow X^{(5)}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}7 \\ -1{,}6 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}84 \\ 1{,}34 \\ 0{,}94 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}150 \\ 1{,}244 \\ 0{,}030 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}4422 \\ 1{,}5640 \\ 0{,}1968 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}3282 \\ 1{,}4722 \\ 0{,}0424 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}3929 \\ 1{,}5259 \\ 0{,}0927 \end{bmatrix}$$

- **E o erro absoluto:**

$$EA^{(1)} \rightarrow EA^{(2)} \rightarrow EA^{(3)} \rightarrow EA^{(4)} \rightarrow EA^{(5)}$$

$$2{,}94 \rightarrow 0{,}69 \rightarrow 0{,}32 \rightarrow 0{,}1544 \rightarrow 0{,}0647$$

Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

- Similarmente ao método de Gauss-Jacobi, conhecida a estimativa inicial, $x^{(0)}$, obtém-se consecutivamente os vetores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(k)}$
- Todavia, ao se calcular $x_j^{(k+1)}$, usa-se todos os valores $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$, ..., $x_{j-1}^{(k+1)}$ que já foram calculados e os valores $x_{j+1}^{(k)}$, $x_{j+2}^{(k)}$, ..., $x_n^{(k)}$ restantes.

Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

- Descrição I
  - Seja o seguinte sistema de equações:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}.x_1 & + & a_{12}.x_2 & + & a_{13}.x_3 & + & \cdots & + & a_{1n-1}.x_{n-1} & + & a_{1n}.x_n & = & b_1 \\
a_{21}.x_1 & + & a_{22}.x_2 & + & a_{23}.x_3 & + & \cdots & + & a_{2n-1}.x_{n-1} & + & a_{2n}.x_n & = & b_2 \\
a_{31}.x_1 & + & a_{32}.x_2 & + & a_{33}.x_3 & + & \cdots & + & a_{3n-1}.x_{n-1} & + & a_{3n}.x_n & = & b_3 \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & & \vdots & & \\
a_{n1}.x_1 & + & a_{n2}.x_2 & + & a_{n3}.x_3 & + & \cdots & + & a_{nn-1}.x_{n-1} & + & a_{nn}.x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

- Descrição II
  - Isolando x_i a partir da linha i, tem-se:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}.x_2 - a_{13}.x_3 - \cdots - a_{1n-1}.x_{n-1} - a_{1n}.x_n\right)\\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}.x_1 - a_{23}.x_3 - \cdots - a_{2n-1}.x_{n-1} - a_{2n}.x_n\right)\\
x_3 &= \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}.x_2 - a_{32}.x_2 - \cdots - a_{3n-1}.x_{n-1} - a_{3n}.x_n\right)\\
&\vdots\\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}.x_1 - a_{n2}.x_2 - \cdots - a_{nn-1}.x_{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

- Descrição III
  - O processo iterativo se dá a partir das equações:

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}.x_2^k - a_{13}.x_3^k - \ldots - a_{1,n-1}.x_{n-1}^k - a_{1n}.x_n^k\right)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}.x_1^{k+1} - a_{23}.x_3^k - \ldots - a_{2,n-1}.x_{n-1}^k - a_{2n}.x_n^k\right)$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}.x_1^{k+1} - a_{32}.x_2^{k+1} - \ldots - a_{3,n-1}.x_{n-1}^k - a_{3n}.x_n^k\right)$$

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}.x_1^{k+1} - a_{n2}.x_2^{k+1} - \ldots - a_{n,n-1}.x_{n-1}^{k+1}\right)$$

Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel- Na forma matricial (caso 4 x 4)

$$\vec{x}^{k+1} = B \cdot \vec{x}^{k} + C \cdot \vec{x}^{k+1} + \vec{g}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & -a_{14}/a_{11} \\ 0 & 0 & -a_{23}/a_{22} & -a_{24}/a_{22} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{34}/a_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{k} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & 0 \\ -a_{41}/a_{44} & -a_{42}/a_{44} & -a_{43}/a_{44} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{k+1} + \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \\ b_4/a_{44} \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

- Critério de Parada: Adotam-se os mesmos critérios de parada já definidos anteriormente para o método da Gauss-Jacobi, ou seja
  - **Erro absoluto máximo entre duas iterações**

$$EA^{(k)} = \max \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon$$

  - **Erro relativo máximo entre duas iterações**

$$ER^{(k)} = \frac{\max \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|}{\max \left| x_i^{(k)} \right|} < \varepsilon$$

Método de Gauss-Seidel

- **Método de Gauss-Seidel – Exemplo 2**
  - **Resolver:**

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \quad com \quad ER \leq 10^{-2}.\ Use\ \vec{x}^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Seidel

- **Método de Gauss-Seidel – Exemplo 2**
  - **Quadro de resultados do processo iterativo**

x_1	$ER^k_{x_1}$	x_2	$ER^k_{x_2}$	x_3	$ER^k_{x_3}$	ER^k
-1	-	0	-	1	-	-
0,8	2,25	0,65	1	-0,725	2,379	2,379
1,015	0,212	0,92	0,293	-0,967	0,250	0,293
1,009	0,006	0,985	0,066	-0,997	0,030	0,066
1,002	0,007	0,998	0,0013	-1	0,003	0,0013

$x_1 = 1{,}002 \quad x_2 = 0{,}998 \quad x_3 = -1$

Método de Gauss-Seidel

- **Método de Gauss-Seidel – Exemplo 2**
  - **Verificação (substituição no sistema)**

$x = 1{,}002 \quad y = 0{,}998 \quad z = -1$

$$5.(1{,}002) + 1.(0{,}998) + 1.(-1) = 5{,}008 \cong 5 \quad \text{OK}$$
$$3.(1{,}002) + 4.(0{,}998) + 1.(-1) = 5{,}998 \cong 6 \quad \text{OK}$$
$$3.(1{,}002) + 3.(0{,}998) + 6.(-1) = 0 \quad \text{OK}$$

Método de Gauss-Seidel

- **Critérios de Convergência**
  - **Processo iterativo ⇨ Convergência para a solução exata não garantida para qualquer sistema.**
  - **Necessidade de determinação de certas condições que devem ser satisfeitas por um SEL para a garantia da convergência do método.**
  - **Critérios de determinação das condições de convergência**
    - **Critério das Linhas**

Método de Gauss-Seidel

- ## Critério das Linhas
  - **Segundo este critério, um determinado sistema irá convergir pelo método de Gauss-Seidel, se:**

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \text{ para } i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Considerações Finais

- Embora não altere a solução do SEL, a ordem de aparecimento das equações pode alterar sua convergência pelo método da Gauss-Seidel.
  - Exemplo 6: Seja o SEL:
$$\begin{aligned} -4 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 &= 19 \\ 5 \cdot x_1 + \ 3 \cdot x_2 &= 15 \end{aligned}$$
  - Observa-se que na ordem atual de aparecimento das equações, o SEL não satisfaz o Critério das Linhas (verificar!!!); logo, sua convergência não é garantida.
  - A inversão da ordem das duas equações do SEL fará com que o Critério das Linhas seja satisfeito e sua convergência pelo método de Gauss-Seidel garantida (verificar também!!!).

$$\begin{aligned} 5 \cdot x_1 + \ 3 \cdot x_2 &= 15 \\ -4 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 &= 19 \end{aligned}$$

Programa em matlab

```
function [x] = gseidel_01(A,b,x,maxit,tol)
[n m] = size(A)
for k=1:maxit
    x0=x; %armazenamos vetor x para poder calcular o erro...
    for i=1:n
        s=0;
        for j=1:n
            if (j~=i), s= s + A(i,j)*x(j); end;
        end
            x(i)=(b(i)-s)/A(i,i);
    end
        if(norm(x-x0,2)<=tol)  % %norma 2: max(abs(x-x0))
        fprintf('O metodo de gauss-seidel convergiu com %3i iteracoes\n',k)
            return;
        elseif k==maxit
            disp('O metodo de gauss-seidel não convergiu');
            return
        end
    x0= x; %passa o vetor x para o vetor x0
    disp([k  x']); %Mostra os resultados das iterações...
end
```

Bibliografia

- Ruggiero, M. A. Gomes & Lopes, V. L. da R. *Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais*. MAKRON Books, 1996, 2ª ed.
- Asano, C. H. & Colli, E. *Cálculo Numérico: Fundamentos e Aplicações*. Departamento de Matemática Aplicada – IME/USP, 2007.
- Sanches, I. J. & Furlan, D. C. *Métodos Numéricos*. DI/UFPR, 2006.
- Paulino, C. D. & Soares, C. Erros e Propagação de Erros, *Notas de aula*, SE/ DM/ IST [Online] *http://www.math.ist.utl.pt/stat/pe/qeb/semestre_1_2004-2005/PE_erros.pdf* [Último acesso 07 de Junho de 2007].