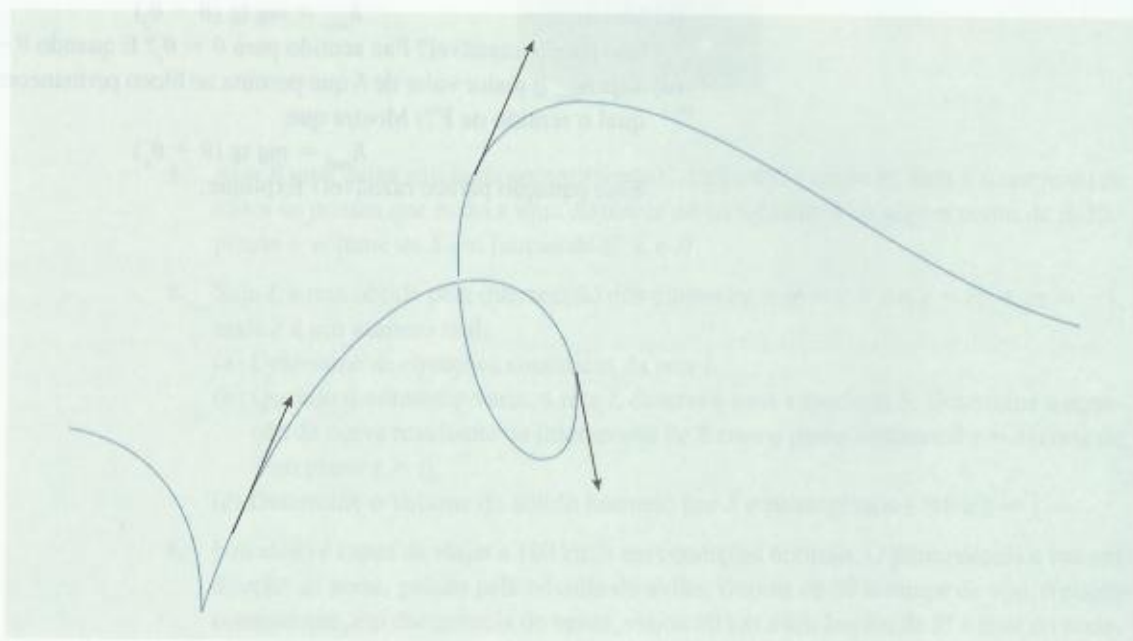


## FUNÇÕES VETORIAIS



Os vetores tangentes mostram a direção para a qual uma curva espacial se dirige em qualquer ponto.

As funções que usamos até agora foram funções a valores reais. Agora estudaremos funções cujos valores são vetores, pois estas funções são necessárias para descrever curvas e superfícies no espaço. Usaremos funções a valores vetoriais também para descrever o movimento de objetos no espaço. Em particular, nós as usaremos para deduzir as leis de Kepler para o movimento planetário.

### 13.1 FUNÇÕES VETORIAIS E CURVAS ESPACIAIS

Em geral, uma função é uma regra que associa a cada elemento de seu domínio um elemento de sua imagem. Uma **função vetorial**, ou **função a valores vetoriais**, é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. Em particular, estamos interessados nas funções  $\mathbf{r}$  cujos valores são vetores tridimensionais. Isso significa que, para todo número  $t$  no domínio de  $\mathbf{r}$ , existe um único vetor de  $V_3$ , denotado por  $\mathbf{r}(t)$ . Se  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $h(t)$  são as componentes do vetor  $\mathbf{r}(t)$ , então  $f$ ,  $g$  e  $h$  são funções a valores reais chamadas **funções componentes** de  $\mathbf{r}$  e escrevemos

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Como na maioria das aplicações a variável independente é o tempo, utilizaremos a letra  $t$  para indicá-la.

**EXEMPLO 1** Se

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^3, \ln(3-t), \sqrt{t} \rangle$$

então, as funções componentes são

$$f(t) = t^3 \quad g(t) = \ln(3-t) \quad h(t) = \sqrt{t}$$

Pela convenção usual, o domínio de  $\mathbf{r}$  é constituído por todos os valores de  $t$  para os quais a expressão  $\mathbf{r}(t)$  está definida. As expressões  $t^3$ ,  $\ln(3-t)$  e  $\sqrt{t}$  estão todas definidas para  $3-t > 0$  e  $t \geq 0$ . Portanto, o domínio de  $\mathbf{r}$  é o intervalo  $[0, 3)$ .  $\square$

O **limite** de uma função vetorial  $\mathbf{r}$  é definido tomando-se os limites de suas funções componentes como a seguir.

■ Se  $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ , essa definição equivale a dizer que o comprimento, a direção e o sentido do vetor  $\mathbf{r}(t)$  se aproximam do comprimento, da direção e do sentido do vetor  $\mathbf{L}$ .

**I** Se  $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ , então

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right\rangle$$

desde que os limites das funções componentes existam.

Da mesma forma, poderíamos escrever a definição usando os  $\varepsilon$ - $\delta$  (ver o Exercício 45). Os limites de funções vetoriais obedecem às mesmas regras que os limites de funções reais (ver o Exercício 43).

**EXEMPLO 2** Determine  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t)$ , onde  $\mathbf{r}(t) = (1+t^3)\mathbf{i} + te^{-t}\mathbf{j} + \frac{\sin t}{t}\mathbf{k}$ .

**SOLUÇÃO** De acordo com a Definição 1, o limite de  $\mathbf{r}$  é o vetor cujas componentes são os limites das funções componentes de  $\mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t) &= \left[ \lim_{t \rightarrow 0} (1+t^3) \right] \mathbf{i} + \left[ \lim_{t \rightarrow 0} te^{-t} \right] \mathbf{j} + \left[ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \right] \mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} + \mathbf{k} \end{aligned} \quad \text{(pela Equação 3.3.2)} \quad \square$$

Uma função vetorial  $\mathbf{r}$  é **contínua em  $a$**  se

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

Em vista da Definição 1, vemos que  $\mathbf{r}$  é contínua em  $a$  se e somente se suas funções componentes  $f$ ,  $g$  e  $h$  são contínuas em  $a$ .



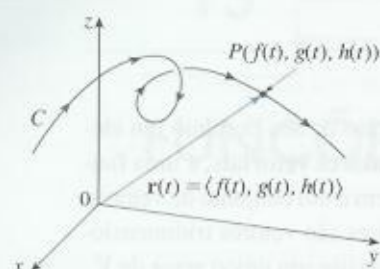


FIGURA 1

$C$  é traçada pelo movimento da ponta do vetor de posição  $\mathbf{r}(t)$

As curvas espaciais e as funções vetoriais contínuas estão intimamente relacionadas. Suponha que  $f$ ,  $g$  e  $h$  sejam funções reais contínuas em um intervalo  $I$ . Então, o conjunto  $C$  de todos os pontos  $(x, y, z)$  no espaço para os quais

$$\boxed{2} \quad x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t)$$

e  $t$  varia no intervalo  $I$  é chamado **curva espacial**. As equações em (2) são denominadas **equações paramétricas de  $C$**  e  $t$  é conhecido como **parâmetro**. Podemos pensar em  $C$  como tendo sido traçada pelo movimento de uma partícula cuja posição no instante  $t$  é  $(f(t), g(t), h(t))$ . Se consideramos a função vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ , então  $\mathbf{r}(t)$  é o vetor posição do ponto  $P(f(t), g(t), h(t))$  sobre  $C$ . Assim, qualquer função vetorial  $\mathbf{r}$  define uma curva espacial  $C$  que é traçada pela ponta do vetor em movimento  $\mathbf{r}(t)$ , como mostrado na Figura 1.

**EXEMPLO 3** Descreva a curva definida pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t \rangle$$

**SOLUÇÃO** As equações paramétricas correspondentes são

$$x = 1 + t \quad y = 2 + 5t \quad z = -1 + 6t$$

que reconhecemos, a partir da Equação 12.5.2, como as equações paramétricas de uma reta passando pelo ponto  $(1, 2, -1)$  e paralela ao vetor  $\langle 1, 5, 6 \rangle$ . Outro modo de perceber isso é observar que a função pode ser escrita como  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ , onde  $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 2, -1 \rangle$  e  $\mathbf{v} = \langle 1, 5, 6 \rangle$  e esta é a equação vetorial da reta dada pela Equação 12.5.1.  $\square$

Curvas planas também podem ser representadas utilizando-se notação vetorial. Por exemplo, a curva dada pelas equações paramétricas  $x = t^2 - 2t$  e  $y = t + 1$  (veja o Exemplo 1, na Seção 10.1) pode ser descrita pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 2t, t + 1 \rangle = (t^2 - 2t)\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j}$$

onde  $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$  e  $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ .

**EXEMPLO 4** Esboce a curva cuja equação vetorial é dada por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

**SOLUÇÃO** As equações paramétricas para essa curva são

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = t$$

Como  $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ , a curva precisa pertencer ao cilindro circular  $x^2 + y^2 = 1$ . O ponto  $(x, y, z)$  está diretamente acima do ponto  $(x, y, 0)$ , que se move no sentido anti-horário em torno da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  no plano  $xy$  (veja o Exemplo 2, na Seção 10.1). Como  $z = t$ , a curva gira para cima ao redor do cilindro quando  $t$  aumenta. A curva, mostrada na Figura 2, é chamada **hélice**.  $\square$

A forma de saca-rolha da hélice circular do Exemplo 4 é a mesma das molas. Elas também aparecem no modelo do DNA (ácido desoxirribonucleico, material genético de células vivas). Em 1953, James Watson e Francis Crick mostraram que a estrutura da molécula de DNA é de duas hélices circulares paralelas interligadas, como na Figura 3.

Nos Exemplos 3 e 4 demos as equações vetoriais das curvas e pedimos uma descrição geométrica ou esboço delas. Nos dois exemplos a seguir, daremos uma descrição geométrica da curva e pediremos para encontrar equações paramétricas para ela.

**EXEMPLO 5** Determine uma equação vetorial e as equações paramétricas para o segmento de reta ligando o ponto  $P(1, 3, -2)$  ao ponto  $Q(2, -1, 3)$ .

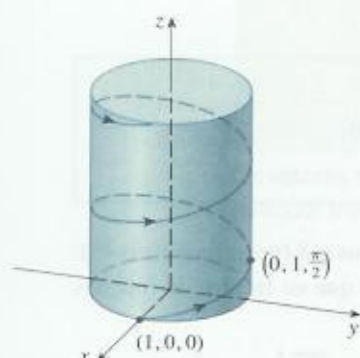


FIGURA 2



FIGURA 3

■ A Figura 4 mostra o segmento de reta  $PQ$  do Exemplo 5.

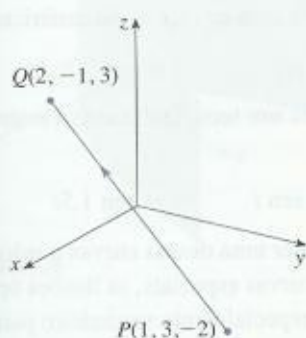


FIGURA 4

**SOLUÇÃO** Na Seção 12.5 encontramos uma equação vetorial para o segmento de reta que une a extremidade do vetor  $\mathbf{r}_0$  à extremidade do vetor  $\mathbf{r}_1$ :

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

(Veja a Equação 12.5.4.) Aqui, tomamos  $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 3, -2 \rangle$  e  $\mathbf{r}_1 = \langle 2, -1, 3 \rangle$  para obter uma equação para o segmento de reta de  $P$  a  $Q$ :

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\langle 1, 3, -2 \rangle + t\langle 2, -1, 3 \rangle \quad 0 \leq t \leq 1$$

ou 
$$\mathbf{r}(t) = \langle 1+t, 3-4t, -2+5t \rangle \quad 0 \leq t \leq 1$$

As equações paramétricas correspondentes são:

$$x = 1+t \quad y = 3-4t \quad z = -2+5t \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \square$$

**EXEMPLO 6** Determine uma equação vetorial que represente a curva obtida pela intersecção do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  com o plano  $y + z = 2$ .

**SOLUÇÃO** A Figura 5 mostra como o plano intercepta o cilindro, e a Figura 6 mostra a curva de intersecção  $C$ , que é uma elipse.

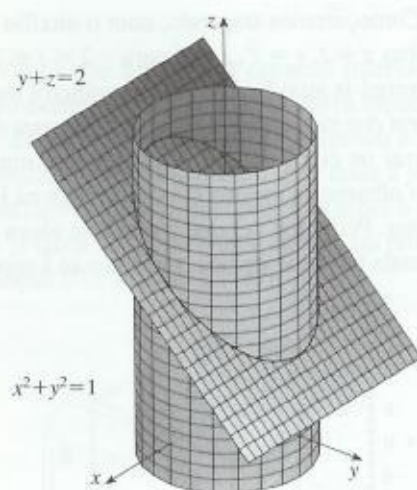


FIGURA 5

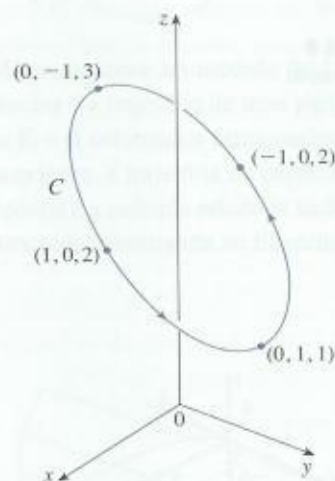


FIGURA 6

A projeção de  $C$  sobre o plano  $xy$  é a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ . Assim, sabemos do Exemplo 2, na Seção 10.1, que podemos escrever

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Da equação do plano, temos

$$z = 2 - y = 2 - \sin t$$

Deste modo, podemos escrever as equações paramétricas para  $C$ , como

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = 2 - \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

A equação vetorial correspondente é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + (2 - \sin t) \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Essa equação é chamada *parametrização* da curva  $C$ . As setas na Figura 6 indicam o sentido em que a curva  $C$  é percorrida quando o valor do parâmetro  $t$  cresce.  $\square$



## UTILIZANDO COMPUTADORES PARA TRAÇAR CURVAS ESPACIAIS

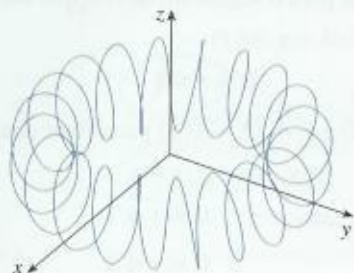


FIGURA 7  
Espiral toroidal

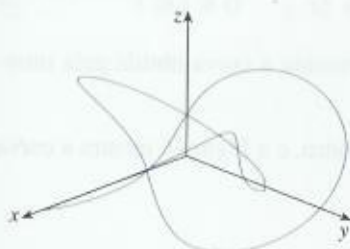


FIGURA 8  
Nó de trevo

As curvas espaciais são inerentemente mais difíceis de desenhar que as curvas planas. Para uma representação mais precisa precisamos utilizar a tecnologia. Por exemplo, a Figura 7 mostra o gráfico gerado por computador da curva com equações paramétricas

$$x = (4 + \sin 20t) \cos t \quad y = (4 + \sin 20t) \sin t \quad z = \cos 20t$$

Essa curva é denominada **espiral toroidal**, pois está sobre um toro. Outra curva interessante, o **nó de trevo ou trifólio**, com equações

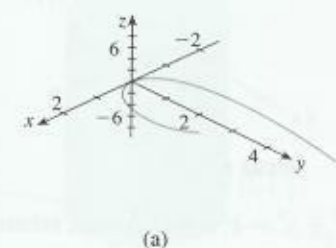
$$x = (2 + \cos 1,5t) \cos t \quad y = (2 + \cos 1,5t) \sin t \quad z = \sin 1,5t$$

está ilustrada na Figura 8. Seria muito difícil traçar qualquer uma dessas curvas à mão.

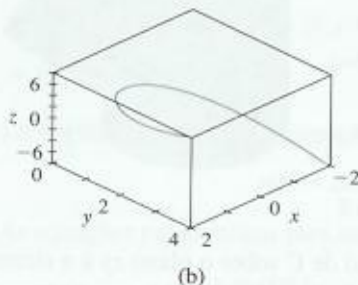
Mesmo com o auxílio de computador no desenho de curvas espaciais, as ilusões ópticas tornam difícil entender a forma real da curva. (Isso é especialmente verdadeiro para a Figura 8. Veja o Exercício 44.) O próximo exemplo mostra como lidar com este problema.

**EXEMPLO 7** Utilize um computador para traçar a curva com equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ . Essa curva é chamada **cúbica retorcida**.

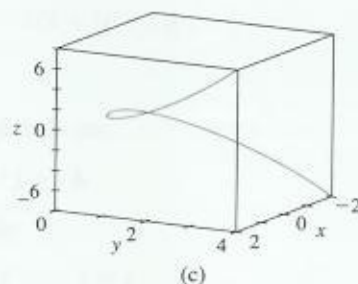
**SOLUÇÃO** Começaremos traçando, com o auxílio do computador, a curva com equações paramétricas  $x = t, y = t^2, z = t^3$  para  $-2 \leq t \leq 2$ . O resultado é apresentado na Figura 9(a), mas enxergá-la através desse único gráfico é muito difícil, em virtude da natureza da curva. A maioria dos programas de computador para desenhar em três dimensões permite, em vez de utilizar os eixos coordenados, colocar uma caixa envolvendo a curva ou superfície. Quando olhamos a mesma curva na caixa na Figura 9(b), conseguimos visualizar melhor sua forma. Podemos ver que a curva se eleva do canto inferior da caixa para o canto superior mais próximo de nós, torcendo-se à medida que sobe.



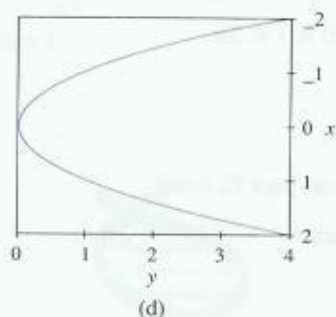
(a)



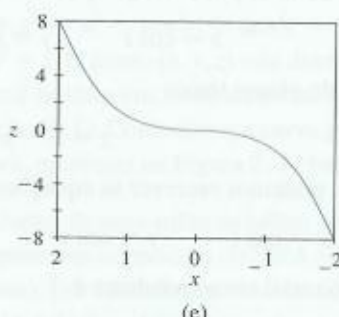
(b)



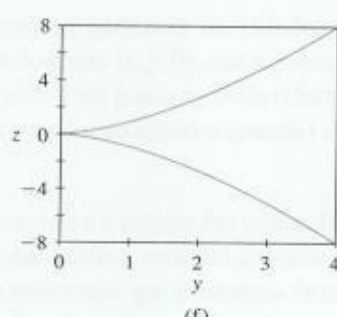
(c)



(d)



(e)



(f)

FIGURA 9  
Vistas da cúbica retorcida

Temos uma ideia melhor da curva quando a observamos de diversos ângulos. A parte (c) apresenta o resultado da rotação da caixa para fornecer outro ponto de vista. As partes (d), (e) e (f) mostram o que vemos quando olhamos diretamente através de uma face da caixa. Em particular, a parte (d) mostra a vista de cima da caixa. A curva obtida é a projeção da curva no plano  $xy$ , a parábola  $y = x^2$ . A parte (e) exibe a projeção no plano  $xz$ , a curva cúbica  $z = x^3$ . Fica claro por que essa curva é chamada cúbica retorcida. □

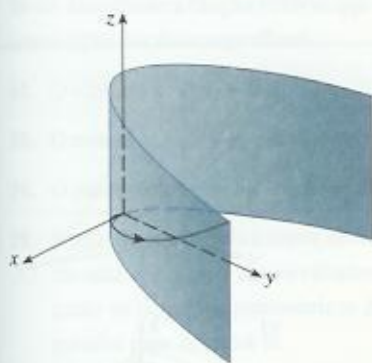
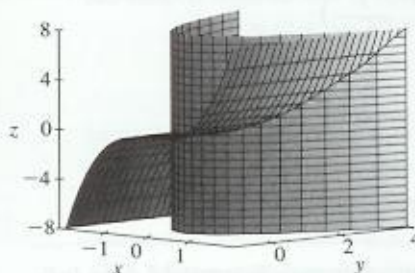


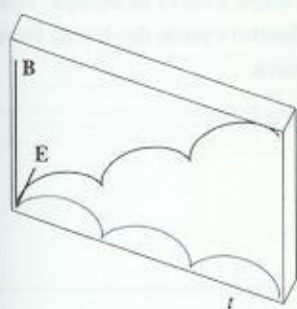
FIGURA 10

FIGURA 11

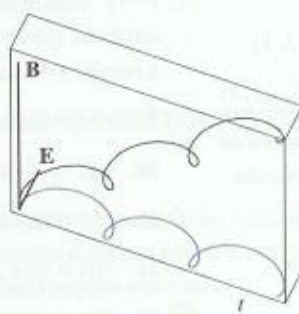
■ Alguns sistemas de computação algébrica nos proporcionam uma figura bem mais clara de uma curva espacial envolvendo-a em um tubo. Esse recurso nos permite ver se uma parte de uma curva passa pela frente ou por trás de outra parte dessa curva. Por exemplo, a Figura 13 mostra a curva da Figura 12(b), obtida como resultado do comando `tubeplot` no Maple.



Vimos que uma curva espacial interessante, a hélice, aparece no modelo do DNA. Outro exemplo notável de uma curva espacial nas ciências é a trajetória de uma partícula com carga positiva nos campos elétrico e magnético  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  orientados ortogonalmente. Dependendo da velocidade inicial dada à partícula na origem, a trajetória da partícula ou é uma curva espacial, cuja projeção sobre o plano horizontal é a cicloide estudada na Seção 10.1 [Figura 12(a)] ou é uma curva cuja projeção é a trocoide investigada no Exercício 40 da Seção 10.1 [Figura 12(b)].



$$(a) \mathbf{r}(t) = \langle t - \sin t, 1 - \cos t, t \rangle$$



$$(b) \mathbf{r}(t) = \langle t - \frac{3}{2} \sin t, 1 - \frac{3}{2} \cos t, t \rangle$$

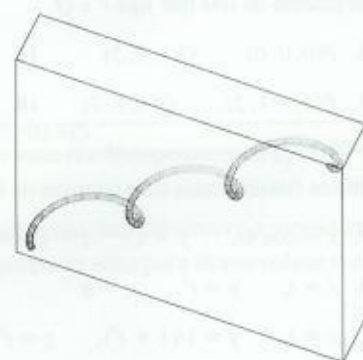


FIGURA 13

FIGURA 12

Movimento de partícula carregada em campos elétrico e magnético orientados ortogonalmente

Para mais detalhes relativos à física envolvida e animações das trajetórias das partículas, veja os seguintes endereços na web:

- [www.phy.ntnu.edu.tw/java/emField/emField.html](http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/emField/emField.html)
- [www.physics.ucla.edu/plasma-exp/Beam/](http://www.physics.ucla.edu/plasma-exp/Beam/)



## 13.1 EXERCÍCIOS

1-2 Determine o domínio das funções vetoriais.

1.  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t} \rangle$

2.  $\mathbf{r}(t) = \frac{t-2}{t+2} \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \ln(9-t^2) \mathbf{k}$

3-6 Calcule os limites.

3.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \langle \cos t, \sin t, t \ln t \rangle$

4.  $\lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{e^t - 1}{t}, \frac{\sqrt{1+t} - 1}{t}, \frac{3}{t+1} \right\rangle$

5.  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( e^{-3t} \mathbf{i} + \frac{t^2}{\sin^2 t} \mathbf{j} + \cos 2t \mathbf{k} \right)$

6.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \arctg t, e^{-2t}, \frac{\ln t}{t} \right\rangle$

7-14 Esboce o gráfico da curva cuja equação vetorial é dada. Indique com setas a direção na qual o parâmetro cresce.

7.  $\mathbf{r}(t) = \langle \sin t, t \rangle$

8.  $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2 \rangle$

9.  $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos 2t, \sin 2t \rangle$

10.  $\mathbf{r}(t) = \langle 1+t, 3t, -t \rangle$

11.  $\mathbf{r}(t) = \langle \sin t, 3, \cos t \rangle$

12.  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k}$

13.  $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j} + t^6 \mathbf{k}$

14.  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + \sin t \mathbf{k}$

15-18 Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga  $P$  e  $Q$ .

15.  $P(0, 0, 0), \quad Q(1, 2, 3)$

16.  $P(1, 0, 1), \quad Q(2, 3, 1)$

17.  $P(1, -1, 2), \quad Q(4, 1, 7)$

18.  $P(-2, 4, 0), \quad Q(6, -1, 2)$

19-24 Faça uma correspondência entre as equações paramétricas e os gráficos (identificados com números de I-VI). Justifique sua escolha.

19.  $x = \cos 4t, \quad y = t, \quad z = \sin 4t$

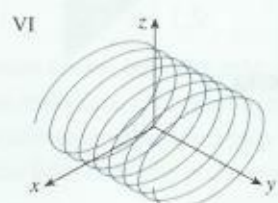
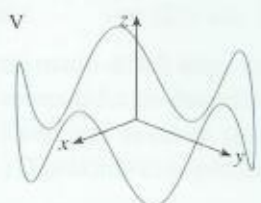
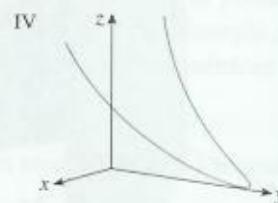
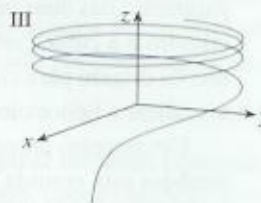
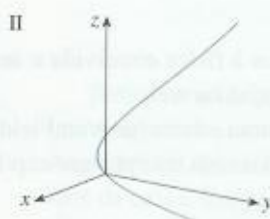
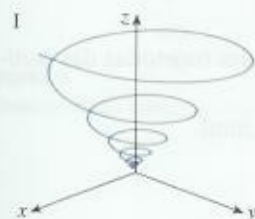
20.  $x = t, \quad y = t^2, \quad z = e^{-t}$

21.  $x = t, \quad y = 1/(1+t^2), \quad z = t^2$

22.  $x = e^{-t} \cos 10t, \quad y = e^{-t} \sin 10t, \quad z = e^{-t}$

23.  $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \sin 5t$

24.  $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \ln t$

25. Mostre que a curva com equações paramétricas  $x = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$ ,  $z = t$  está no cone  $z^2 = x^2 + y^2$ , e use esse fato para esboçar a curva.26. Mostre que a curva com equações paramétricas  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$ ,  $z = \sin^2 t$  é a curva de interseção das superfícies  $z = x^2$  e  $x^2 + y^2 = 1$ . Use esse fato para esboçar a curva.27. Em quais pontos a curva  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + (2t - t^2) \mathbf{k}$  intercepta o parabolóide  $z = x^2 + y^2$ ?28. Em quais pontos a hélice  $\mathbf{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, t \rangle$  intercepta a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ ?

29-32 Utilize um computador para traçar a curva da equação vetorial dada. Escolha o domínio do parâmetro e ponto de vista de forma a revelar a verdadeira natureza da curva.

29.  $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t \sin 2t, \sin t \sin 2t, \cos 2t \rangle$

30.  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \ln t, t \rangle$

31.  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t \sin t, t \cos t \rangle$

32.  $\mathbf{r}(t) = \langle t, e^t, \cos t \rangle$

33. Trace a curva com equações paramétricas  $x = (1 + \cos 16t) \cos t$ ,  $y = (1 + \cos 16t) \sin t$ ,  $z = 1 + \cos 16t$ . Explique a aparência da curva, mostrando que ela está em um cone.34. Trace a curva com equações paramétricas  $x = \sqrt{1 - 0,25 \cos^2 10t} \cos t$ ,  $y = \sqrt{1 - 0,25 \cos^2 10t} \sin t$ ,  $z = 0,5 \cos 10t$ . Explique a aparência da curva, mostrando que ela está em uma esfera.35. Mostre que a curva com equações paramétricas  $x = t^2$ ,  $y = 1 - 3t$ ,  $z = 1 + t^3$  passa pelos pontos  $(1, 4, 0)$  e  $(9, -8, 28)$ , mas não passa pelo ponto  $(4, 7, -6)$ .

36-38. Determine a função vetorial que representa a curva obtida pela intersecção das duas superfícies.

36. O cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  e a superfície  $z = xy$

37. O cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  e o plano  $z = 1 + y$

38. O parabolóide  $z = 4x^2 + y^2$  e o cilindro parabólico  $y = x^2$

39. Tente esboçar à mão a curva obtida pela intersecção do cilindro circular  $x^2 + y^2 = 4$  com o cilindro parabólico  $z = x^2$ . Determine então as equações paramétricas dessa curva e utilize um computador para desenhá-la.

40. Tente esboçar à mão a intersecção do cilindro parabólico  $y = x^2$  com a metade superior do elipsoide  $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$ . Escreva então as equações paramétricas para a curva e utilize um computador para traçá-la.

41. Se dois objetos viajam pelo espaço ao longo de duas curvas diferentes, é sempre importante saber se eles vão colidir. (Um míssil vai atingir seu alvo móvel? Duas aeronaves vão colidir?) As curvas podem se interceptar, mas precisamos saber se os objetos estarão na mesma posição *no mesmo instante*. Suponha que as trajetórias de duas partículas sejam dadas pelas seguintes funções vetoriais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t^2, 7t - 12, t^3 \rangle \quad \mathbf{r}_2(t) = \langle 4t - 3, t^2, 5t - 6 \rangle$$

para  $t \geq 0$ . As partículas colidem?

42. Duas partículas se movem ao longo das curvas espaciais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \quad \mathbf{r}_2(t) = \langle 1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t \rangle$$

As partículas colidem? Suas trajetórias se interceptam?

43. Suponha que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sejam funções vetoriais que possuem limites quando  $t \rightarrow a$  e seja  $c$  uma constante. Demonstre as seguintes propriedades de limites.

$$(a) \lim_{t \rightarrow a} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{u}(t) + \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{v}(t)$$

$$(b) \lim_{t \rightarrow a} c\mathbf{u}(t) = c \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{u}(t)$$

$$(c) \lim_{t \rightarrow a} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{u}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{v}(t)$$

$$(d) \lim_{t \rightarrow a} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{u}(t) \times \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{v}(t)$$

44. A visão do nó de trevo apresentada na Figura 8 é correta, mas não muito reveladora. Use as equações paramétricas

$$x = (2 + \cos 1.5t) \cos t$$

$$y = (2 + \cos 1.5t) \sin t$$

$$z = \sin 1.5t$$

para esboçar à mão a curva vista de cima, deixando pequenas falhas para indicar os pontos onde a curva se sobrepõe. Comece mostrando que sua projeção sobre o plano  $xy$  tem coordenadas polares  $r = 2 + \cos 1.5t$  e  $\theta = t$ , de forma que  $r$  varia entre 1 e 3. Mostre então que  $z$  tem um valor máximo e um mínimo quando a projeção está entre  $r = 1$  e  $r = 3$ .

Quando você terminar o esboço à mão livre, utilize um computador para traçar a curva com o observador vendo de cima e compare-a ao seu desenho. Trace a curva sob outros pontos de vista. Você alcançará melhor resultado se traçar um tubo de raio 0,2 em torno da curva. (Utilize o comando `tubeplot` no Maple.)

45. Mostre que  $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$  se e somente se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um número  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } 0 < |t - a| < \delta \quad \text{então} \quad |\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}| < \varepsilon$$

## 13.2

## DERIVADAS E INTEGRAIS DE FUNÇÕES VETORIAIS

Mais adiante neste capítulo, utilizaremos as funções vetoriais para descrever o movimento dos planetas e outros objetos no espaço. Vamos nos preparar aqui para desenvolver o cálculo com funções vetoriais.

### DERIVADAS

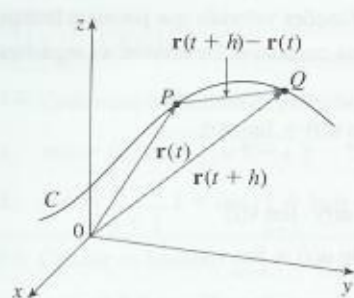
A **derivada**  $\mathbf{r}'$  de uma função vetorial  $\mathbf{r}$  é definida do mesmo modo como foi feito para as funções a valores reais:

[1]

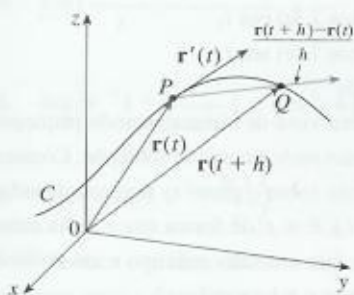
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

se este limite existir. O significado geométrico dessa definição está representado na Figura 1. Se os pontos  $P$  e  $Q$  têm vetores posição  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{r}(t+h)$ , então  $\overrightarrow{PQ}$  representa o vetor  $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ , que pode ser visto como um vetor secante. Se  $h > 0$ , o múltiplo por escalar  $(1/h)(\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t))$  tem a mesma direção e sentido que  $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ . Quando





(a) O vetor secante



(b) O vetor tangente

FIGURA 1

$h \rightarrow 0$ , parece que esse vetor se aproxima de um vetor que está sobre a reta tangente. Por essa razão o vetor  $\mathbf{r}'(t)$  é chamado **vetor tangente** à curva definida por  $\mathbf{r}$  no ponto  $P$ , desde que exista  $\mathbf{r}'(t)$  e  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ . A **reta tangente** a  $C$  em  $P$  é definida como a reta que passa por  $P$  e é paralela ao vetor  $\mathbf{r}'(t)$ . Teremos ocasião de considerar o **vetor tangente unitário**, dado por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

O teorema seguinte fornece um método conveniente para calcular a derivada de uma função vetorial  $\mathbf{r}$  por derivação de cada componente de  $\mathbf{r}$ .

**2 TEOREMA** Se  $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ , onde  $f, g$  e  $h$  são funções diferenciáveis, então

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$

DEMONSTRAÇÃO

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\langle f(t + \Delta t), g(t + \Delta t), h(t + \Delta t) \rangle - \langle f(t), g(t), h(t) \rangle]$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle$$

$$= \left\langle \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle$$

$$= \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

□

#### EXEMPLO 1

(a) Determine a derivada de  $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\mathbf{i} + te^{-t}\mathbf{j} + \sin 2t\mathbf{k}$ .

(b) Encontre o vetor tangente unitário no ponto onde  $t = 0$ .

SOLUÇÃO

(a) De acordo com o Teorema 2, derivando cada componente de  $\mathbf{r}$ , obtemos:

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{i} + (1 - t)e^{-t}\mathbf{j} + 2\cos 2t\mathbf{k}$$

(b) Como  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$  e  $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ , o vetor tangente unitário no ponto  $(1, 0, 0)$  é

$$\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$$

□

**EXEMPLO 2** Para a curva  $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j}$ , determine  $\mathbf{r}'(t)$  e desenhe o vetor posição  $\mathbf{r}(1)$  e o vetor tangente  $\mathbf{r}'(1)$ .

SOLUÇÃO Temos

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{i} - \mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}'(1) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

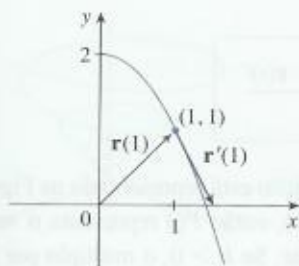


FIGURA 2

A curva é plana, e a eliminação do parâmetro das equações  $x = \sqrt{t}$ ,  $y = 2 - t$  nos dá  $y = 2 - x^2$ ,  $x \geq 0$ . Na Figura 2, desenhamos o vetor posição  $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$  começando na origem e o vetor tangente  $\mathbf{r}'(1)$ , começando no ponto correspondente  $(1, 1)$ .  $\square$

**EXEMPLO 3** Determine as equações paramétricas para a reta tangente à hélice com equações paramétricas

$$x = 2 \cos t \quad y = \sin t \quad z = t$$

no ponto  $(0, 1, \pi/2)$ .

**SOLUÇÃO** A equação vetorial da hélice é  $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, \sin t, t \rangle$  de modo que

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -2 \sin t, \cos t, 1 \rangle$$

O valor do parâmetro correspondente ao ponto  $(0, 1, \pi/2)$  é  $t = \pi/2$ , e o vetor tangente é  $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -2, 0, 1 \rangle$ . A reta tangente passa por  $(0, 1, \pi/2)$  e é paralela ao vetor  $\langle -2, 0, 1 \rangle$ , então, pela Equação 12.5.2, suas equações paramétricas são

$$x = -2t \quad y = 1 \quad z = \frac{\pi}{2} + t \quad \square$$

■ A hélice e a reta tangente do Exemplo 3 estão mostradas na Figura 3.

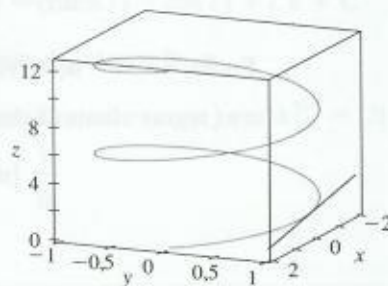


FIGURA 3

■ Na Seção 13.4 veremos como  $\mathbf{r}'(t)$  e  $\mathbf{r}''(t)$  podem ser interpretados como os vetores velocidade e aceleração de uma partícula se movendo pelo espaço com vetor posição  $\mathbf{r}(t)$  no instante  $t$ .

Do mesmo modo que para as funções reais, a **segunda derivada** da função vetorial  $\mathbf{r}$  é a derivada de  $\mathbf{r}'$ , ou seja,  $\mathbf{r}'' = (\mathbf{r}')'$ . Por exemplo, a segunda derivada da função do Exemplo 3 é

$$\mathbf{r}''(t) = \langle -2 \cos t, -\sin t, 0 \rangle$$

## REGRAS DE DERIVAÇÃO

O próximo teorema mostra que as fórmulas de derivação para funções reais têm suas equivalentes para as funções vetoriais.

**3 TEOREMA** Suponha que  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sejam funções vetoriais diferenciáveis,  $c$ , um escalar e  $f$ , uma função real. Então,

$$1. \quad \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$$

$$2. \quad \frac{d}{dt} [c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$$

$$3. \quad \frac{d}{dt} [f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$$



$$4. \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$$

$$5. \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

$$6. \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t)) \quad (\text{Regra da Cadeia})$$

Este teorema pode ser demonstrado usando-se diretamente a Definição 1 ou empregando-se o Teorema 2 e as fórmulas de derivação correspondentes para as funções a valores reais. A demonstração da Fórmula 4 está a seguir; as demonstrações restantes são deixadas como exercícios.

DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA 4 Seja

$$\mathbf{u}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle \quad \mathbf{v}(t) = \langle g_1(t), g_2(t), g_3(t) \rangle$$

$$\text{Então,} \quad \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t) = \sum_{i=1}^3 f_i(t)g_i(t)$$

e as regras usuais de derivação do produto fornecem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 f_i(t)g_i(t) = \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} [f_i(t)g_i(t)] \\ &= \sum_{i=1}^3 [f_i'(t)g_i(t) + f_i(t)g_i'(t)] \\ &= \sum_{i=1}^3 f_i'(t)g_i(t) + \sum_{i=1}^3 f_i(t)g_i'(t) \\ &= \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) \quad \square \end{aligned}$$

**EXEMPLO 4** Mostre que, se  $|\mathbf{r}(t)| = c$  (uma constante), então  $\mathbf{r}'(t)$  é ortogonal a  $\mathbf{r}(t)$  para todo  $t$ .

**SOLUÇÃO** Como

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$$

e  $c^2$  é uma constante, da Fórmula 4 do Teorema 3 vem

$$0 = \frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t)$$

Então,  $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$ , o que implica que  $\mathbf{r}'(t)$  é ortogonal a  $\mathbf{r}(t)$ .

Geometricamente, esse resultado indica que, se a curva está em uma esfera com o centro na origem, então o vetor tangente  $\mathbf{r}'(t)$  é sempre perpendicular ao vetor posição  $\mathbf{r}(t)$ .  $\square$

## INTEGRAIS

A **integral definida** de uma função vetorial contínua  $\mathbf{r}(t)$  pode ser definida da mesma forma que para a função real, exceto que a integral resulta em um vetor. Mas podemos expressar a integral de  $\mathbf{r}$  como a integral de suas funções componentes  $f$ ,  $g$  e  $h$  como segue. (Utilizamos a notação do Capítulo 5, no Volume I.)

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{r}(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}(t_i^*) \Delta t \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \sum_{i=1}^n f(t_i^*) \Delta t \right) \mathbf{i} + \left( \sum_{i=1}^n g(t_i^*) \Delta t \right) \mathbf{j} + \left( \sum_{i=1}^n h(t_i^*) \Delta t \right) \mathbf{k} \right] \end{aligned}$$

então,

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left( \int_a^b f(t) dt \right) \mathbf{i} + \left( \int_a^b g(t) dt \right) \mathbf{j} + \left( \int_a^b h(t) dt \right) \mathbf{k}$$

Isso mostra que podemos calcular a integral da função vetorial integrando cada componente dela.

Podemos estender o Teorema Fundamental do Cálculo para as funções vetoriais contínuas como segue:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{R}(t) \Big|_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

onde  $\mathbf{R}$  é uma primitiva de  $\mathbf{r}$ , ou seja,  $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$ . Usaremos a notação  $\int \mathbf{r}(t) dt$  para as integrais indefinidas (primitivas).

**EXEMPLO 5** Se  $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$ , então

$$\begin{aligned} \int \mathbf{r}(t) dt &= \left( \int 2 \cos t dt \right) \mathbf{i} + \left( \int \sin t dt \right) \mathbf{j} + \left( \int 2t dt \right) \mathbf{k} \\ &= 2 \sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k} + \mathbf{C} \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{C}$  é um vetor constante de integração, e

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t) dt = [2 \sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}]_0^{\pi/2} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{\pi^2}{4} \mathbf{k} \quad \square$$

## 13.2 EXERCÍCIOS

1. A figura mostra uma curva  $C$  dada pela função vetorial  $\mathbf{r}(t)$ .

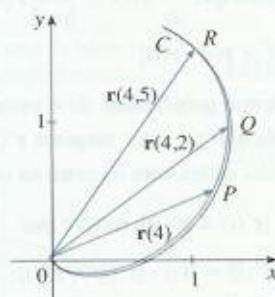
(a) Desenhe os vetores  $\mathbf{r}(4,5) - \mathbf{r}(4)$  e  $\mathbf{r}(4,2) - \mathbf{r}(4)$ .

(b) Esboce os vetores

$$\frac{\mathbf{r}(4,5) - \mathbf{r}(4)}{0,5} \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{r}(4,2) - \mathbf{r}(4)}{0,2}$$

(c) Escreva a expressão para  $\mathbf{r}'(4)$  e para seu vetor tangente unitário  $\mathbf{T}(4)$ .

(d) Desenhe o vetor  $\mathbf{T}(4)$ .



2. (a) Faça um esboço grande da curva descrita pela função vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t \rangle$ ,  $0 \leq t \leq 2$ , e desenhe os vetores  $\mathbf{r}(1)$ ,  $\mathbf{r}(1,1)$  e  $\mathbf{r}(1,1) - \mathbf{r}(1)$ .

(b) Desenhe o vetor  $\mathbf{r}'(1)$  começando em  $(1,1)$  e o compare com o vetor

$$\frac{\mathbf{r}(1,1) - \mathbf{r}(1)}{0,1}$$

Explique por que esses vetores estão tão próximos um do outro tanto em módulo quanto em direção e sentido.

3-8

(a) Esboce o gráfico da curva plana com a equação vetorial dada.

(b) Determine  $\mathbf{r}'(t)$ .

(c) Esboce o vetor posição  $\mathbf{r}(t)$  e o vetor tangente  $\mathbf{r}'(t)$  para o valor dado de  $t$ .

3.  $\mathbf{r}(t) = \langle t - 2, t^2 + 1 \rangle$ ,  $t = -1$

4.  $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, \sqrt{t} \rangle$ ,  $t = 1$

5.  $\mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j}$ ,  $t = \pi/4$

6.  $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j}$ ,  $t = 0$

7.  $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{3t} \mathbf{j}$ ,  $t = 0$

8.  $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t) \mathbf{i} + (2 + \sin t) \mathbf{j}$ ,  $t = \pi/6$

9-16 Determine a derivada da função vetorial.

9.  $\mathbf{r}(t) = \langle t \sin t, t^2, t \cos 2t \rangle$

10.  $\mathbf{r}(t) = \langle \lg t, \sec t, 1/t^2 \rangle$

11.  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + e^{4t} \mathbf{k}$

12.  $\mathbf{r}(t) = \sin^{-1} t \mathbf{i} + \sqrt{1 - t^2} \mathbf{j} + \mathbf{k}$

13.  $\mathbf{r}(t) = e^{t^2} \mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln(1 + 3t) \mathbf{k}$



14.  $\mathbf{r}(t) = at \cos 3t \mathbf{i} + b \sin^3 t \mathbf{j} + c \cos^3 t \mathbf{k}$

15.  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t \mathbf{b} + t^2 \mathbf{c}$

16.  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + t \mathbf{c})$

17-20. Determine o vetor tangente unitário  $\mathbf{T}(t)$  no ponto com valor de parâmetro  $t$  dado.

17.  $\mathbf{r}(t) = \langle 6t^5, 4t^3, 2t \rangle, \quad t = 1$

18.  $\mathbf{r}(t) = 4\sqrt{t} \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \quad t = 1$

19.  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + 3t \mathbf{j} + 2 \sin 2t \mathbf{k}, \quad t = 0$

20.  $\mathbf{r}(t) = 2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + \tan t \mathbf{k}, \quad t = \pi/4$

21. Se  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ , encontre  $\mathbf{r}'(t)$ ,  $\mathbf{T}(1)$ ,  $\mathbf{r}''(t)$  e  $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$ .

22. Se  $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t} \rangle$ , determine  $\mathbf{T}(0)$ ,  $\mathbf{r}''(0)$  e  $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$ .

23-26. Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.

23.  $x = t^5, \quad y = t^4, \quad z = t^3; \quad (1, 1, 1)$

24.  $x = t^2 - 1, \quad y = t^2 + 1, \quad z = t + 1; \quad (-1, 1, 1)$

25.  $x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t, \quad z = e^{-t}; \quad (1, 0, 1)$

26.  $x = \ln t, \quad y = 2\sqrt{t}, \quad z = t^2; \quad (0, 2, 1)$

27-29. Encontre as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado. Ilustre traçando o gráfico da curva e da reta tangente em uma mesma tela.

27.  $x = t, \quad y = e^{-t}, \quad z = 2t - t^2; \quad (0, 1, 0)$

28.  $x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad z = 4 \cos 2t; \quad (\sqrt{3}, 1, 2)$

29.  $x = t \cos t, \quad y = t, \quad z = t \sin t; \quad (-\pi, \pi, 0)$

30. (a) Determine o ponto de intersecção das retas tangentes à curva  $\mathbf{r}(t) = \langle \sin \pi t, 2 \sin \pi t, \cos \pi t \rangle$  nos pontos  $t = 0$  e  $t = 0.5$ .

(b) Ilustre traçando o gráfico da curva e ambas as tangentes.

31. As curvas  $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$  e  $\mathbf{r}_2(t) = \langle \sin t, \sin 2t, t \rangle$  se interceptam na origem. Determine o ângulo de intersecção destas com precisão de um grau.

32. Em que ponto as curvas  $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 1 - t, 3 + t^2 \rangle$  e  $\mathbf{r}_2(s) = \langle 3 - s, s - 2, s^2 \rangle$  se interceptam? Encontre o ângulo entre elas no ponto de intersecção, com precisão de um grau.

33-38. Calcule a integral.

33.  $\int_0^1 (16t^5 \mathbf{i} - 9t^2 \mathbf{j} + 25t^4 \mathbf{k}) dt$

34.  $\int_0^1 \left( \frac{4}{1+t^2} \mathbf{j} + \frac{2t}{1+t^2} \mathbf{k} \right) dt$

35.  $\int_0^{\pi/2} (3 \sin^2 t \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \cos^2 t \mathbf{j} + 2 \sin t \cos t \mathbf{k}) dt$

36.  $\int_1^2 (t^2 \mathbf{i} + t\sqrt{t-1} \mathbf{j} + t \sin \pi t \mathbf{k}) dt$

37.  $\int (e^t \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + \ln t \mathbf{k}) dt$

38.  $\int (\cos \pi t \mathbf{i} + \sin \pi t \mathbf{j} + t \mathbf{k}) dt$

39. Encontre  $\mathbf{r}(t)$  se  $\mathbf{r}'(t) = 2t \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + \sqrt{t} \mathbf{k}$  e  $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ .

40. Encontre  $\mathbf{r}(t)$  se  $\mathbf{r}'(t) = t \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + te^t \mathbf{k}$  e  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

41. Demonstre a Fórmula 1 do Teorema 3.

42. Demonstre a Fórmula 3 do Teorema 3.

43. Demonstre a Fórmula 5 do Teorema 3.

44. Demonstre a Fórmula 6 do Teorema 3.

45. Se  $\mathbf{u}(t) = \langle \sin t, \cos t, t \rangle$  e  $\mathbf{v}(t) = \langle t, \cos t, \sin t \rangle$ , use a Fórmula 4 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$$

46. Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são as funções vetoriais no Exercício 45, use a Fórmula 5 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]$$

47. Mostre que se  $\mathbf{r}$  é uma função vetorial tal que exista  $\mathbf{r}''$ , então

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

48. Determine uma expressão para  $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}(t))]$ .

49. Se  $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$ , mostre que  $\frac{d}{dt} |\mathbf{r}(t)| = \frac{1}{|\mathbf{r}(t)|} \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$ .

[Sugestão:  $|\mathbf{r}(t)|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$ ]

50. Se uma curva tem a propriedade de o vetor posição  $\mathbf{r}(t)$  estar sempre perpendicular ao vetor tangente  $\mathbf{r}'(t)$ , mostre que essa curva está em uma esfera com o centro na origem.

51. Se  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$ , mostre que

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$$

## 13.3

## COMPRIMENTO DE ARCO E CURVATURA

Na Seção 10.2 definimos o comprimento de uma curva plana com equações paramétricas  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , como o limite do comprimento das poligonais inscritas e, para o caso no qual  $f'$  e  $g'$  são contínuas, chegamos à seguinte fórmula:

$$(1) \quad L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

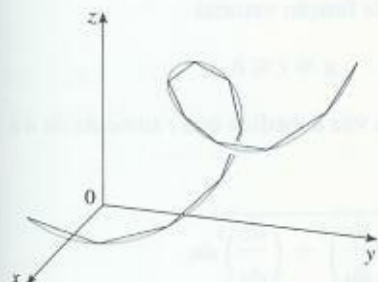


FIGURA 1

O comprimento de uma curva espacial é o limite dos comprimentos das poligonais inscritas

O comprimento de uma curva espacial é definido exatamente da mesma forma (veja a Figura 1). Suponha que a curva tenha equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ ,  $a \leq t \leq b$ , ou, o que é equivalente, equações paramétricas  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ ,  $z = h(t)$ , onde  $f'$ ,  $g'$  e  $h'$  são funções contínuas. Se a curva é percorrida exatamente uma vez à medida que  $t$  cresce, é possível mostrar que

$$(2) \quad L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt \\ = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Observe que os comprimentos dos arcos de curva dados pelas Fórmulas (1) e (2) podem ser escritos de forma mais compacta:

$$(3) \quad L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt$$

porque, para as curvas planas  $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ ,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

enquanto que para as curvas espaciais  $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ ,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$$

■ A Figura 2 mostra o arco de hélice cujo comprimento é calculado no Exemplo 1.

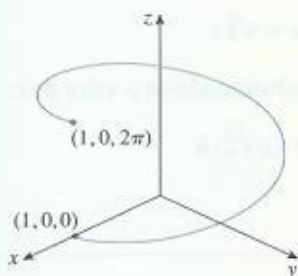


FIGURA 2

**EXEMPLO 1** Calcule o comprimento do arco da hélice circular de equação  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$  do ponto  $(1, 0, 0)$  até o ponto  $(1, 0, 2\pi)$ .

**SOLUÇÃO** Como  $\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}$ , temos

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

O arco de  $(1, 0, 0)$  até  $(1, 0, 2\pi)$  é descrito quando o parâmetro percorre o intervalo  $0 \leq t \leq 2\pi$ ; assim, da Fórmula 3, temos

$$L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi \quad \square$$

Uma única curva  $C$  pode ser representada por mais de uma função vetorial. Por exemplo, a cúbica retorcida

$$(4) \quad \mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \quad 1 \leq t \leq 2$$



poderia ser representada também pela função

$$\boxed{5} \quad \mathbf{r}_2(u) = \langle e^u, e^{2u}, e^{3u} \rangle \quad 0 \leq u \leq \ln 2$$

onde a relação entre os parâmetros  $t$  e  $u$  é dada por  $t = e^u$ . Dizemos que as Equações 4 e 5 são **parametrizações** da curva  $C$ . Se fôssemos usar a Equação 3 para calcular o comprimento de  $C$ , obteríamos o mesmo resultado obtido usando-se as Equações 4 ou 5. Em geral, pode ser mostrado que, quando a Equação 3 é utilizada para calcular o comprimento de uma curva lisa por partes, o comprimento do arco é independente da parametrização empregada.

Suponhamos agora que  $C$  seja uma curva dada pela função vetorial

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad a \leq t \leq b$$

em que  $\mathbf{r}'$  é contínua e  $C$  é percorrida exatamente uma vez à medida que  $t$  aumenta de  $a$  a  $b$ . Definimos sua função comprimento de arco por

$$\boxed{6} \quad s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)| du = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} du$$

Então,  $s(t)$  é o comprimento da parte de  $C$  entre  $\mathbf{r}(a)$  e  $\mathbf{r}(t)$ . (Veja a Figura 3.) Se derivarmos os dois lados da Equação 6 usando a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo, obteremos

$$\boxed{7} \quad \frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$$

É frequentemente útil **parametrizar uma curva em relação ao comprimento do arco**, pois o comprimento de arco aparece naturalmente a partir da forma da curva e não depende do sistema de coordenadas utilizado. Se uma curva  $\mathbf{r}(t)$  já está dada em termos de um parâmetro  $t$  e  $s(t)$  é a função comprimento de arco dada pela Equação 6, podemos ser capazes de escrever  $t$  como uma função de  $s$ :  $t = t(s)$ . A curva pode ser então reparametrizada em termos de  $s$  substituindo-se o parâmetro  $t$ :  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$ . Assim, se  $s = 3$ , por exemplo,  $\mathbf{r}(t(3))$  é a posição do ponto que está a três unidades de comprimento do início da curva.

**EXEMPLO 2** Reparametrize a hélice circular  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$ , utilizando o comprimento de arco medido a partir de  $(1, 0, 0)$  na direção de crescimento de  $t$ .

**SOLUÇÃO** O ponto inicial  $(1, 0, 0)$  corresponde ao valor do parâmetro  $t = 0$ . Do Exemplo 1, temos

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

e, assim,

$$s = s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)| du = \int_0^t \sqrt{2} du = \sqrt{2} t$$

Portanto,  $t = s/\sqrt{2}$ , e a reparametrização pedida é obtida substituindo-se o valor de  $t$ :

$$\mathbf{r}(t(s)) = \cos(s/\sqrt{2}) \mathbf{i} + \sin(s/\sqrt{2}) \mathbf{j} + (s/\sqrt{2}) \mathbf{k} \quad \square$$

## CURVATURA

Uma parametrização  $\mathbf{r}(t)$  é dita **lisa** em um intervalo  $I$  se  $\mathbf{r}'$  for contínua e  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$  em  $I$ . Uma curva é dita **lisa** se tiver uma parametrização lisa. Uma curva lisa não tem quebras abruptas ou cúspides; quando seu vetor tangente gira, ele o faz continuamente.

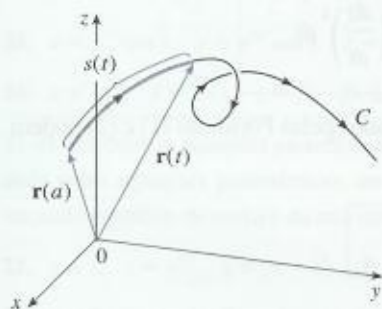
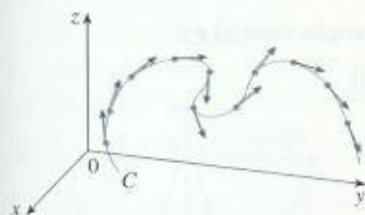


FIGURA 3



**FIGURA 4**  
Vetor tangente unitário em pontos igualmente espaçados de  $C$

Se  $C$  for uma curva lisa definida por uma função vetorial  $\mathbf{r}$ , lembre-se de que o vetor tangente unitário  $\mathbf{T}(t)$  será dado por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

e indica a direção da curva. Da Figura 4, podemos ver que  $\mathbf{T}(t)$  muda de direção muito devagar quando a curva  $C$  é razoavelmente reta, mas muda de direção mais rapidamente quando a curva  $C$  se dobra ou retorce mais acentuadamente.

A curvatura de  $C$  em um dado ponto é a medida de quão rapidamente a curva muda de direção no ponto. Especificamente, definimos a curvatura como o módulo da taxa de variação do vetor tangente unitário com relação ao comprimento do arco. (Utilizamos o comprimento de arco, pois assim a curvatura independe da parametrização.)

**8 DEFINIÇÃO** A curvatura de uma curva é

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|$$

onde  $\mathbf{T}$  é o vetor tangente unitário.

A curvatura é mais simples de calcular se expressa em termos do parâmetro  $t$  em vez de  $s$ . Assim, usamos a Regra da Cadeia (Teorema 13.2.3, Fórmula 6) para escrever

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad \text{e} \quad \kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} \right|$$

Mas, da Equação 7,  $ds/dt = |\mathbf{r}'(t)|$ , e então

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

**EXEMPLO 3** Mostre que a curvatura de um círculo de raio  $a$  é  $1/a$ .

**SOLUÇÃO** Podemos tomar o círculo com centro na origem e parametrizado por

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$$

Assim,  $\mathbf{r}'(t) = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j}$  e  $|\mathbf{r}'(t)| = a$

portanto,  $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$

e  $\mathbf{T}'(t) = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}$

Isso nos dá  $|\mathbf{T}'(t)| = 1$ ; então, usando a Equação 9, temos

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{a}$$

O resultado do Exemplo 3 mostra que pequenos círculos têm uma grande curvatura, enquanto grandes círculos têm uma pequena curvatura, como nossa intuição indica. Podemos ver diretamente da definição que a curvatura de uma reta é sempre 0, pois o vetor tangente é constante.

Embora a Fórmula 9 possa ser utilizada em qualquer caso para calcular a curvatura, em geral é mais conveniente aplicar a fórmula dada pelo teorema a seguir:



**10 TEOREMA** A curvatura de uma curva dada pela função vetorial  $\mathbf{r}$  é

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

**DEMONSTRAÇÃO** Como  $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$  e  $|\mathbf{r}'| = ds/dt$ , temos

$$\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'| \mathbf{T} = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}$$

e, pela Regra do Produto (Teorema 13.2.3, Fórmula 3), temos

$$\mathbf{r}'' = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} \mathbf{T}'$$

Usando o fato de que  $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$  (veja o Exemplo 2 da Seção 12.4), temos

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 (\mathbf{T} \times \mathbf{T}')$$

Agora  $|\mathbf{T}(t)| = 1$  para todo  $t$ , e então  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}'$  são ortogonais pelo Exemplo 4 da Seção 13.2. Portanto, pelo Teorema 12.4.6,

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 |\mathbf{T} \times \mathbf{T}'| = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 |\mathbf{T}| |\mathbf{T}'| = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 |\mathbf{T}'|$$

Então,

$$|\mathbf{T}'| = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{(ds/dt)^2} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^2}$$

e

$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} \quad \square$$

**EXEMPLO 4** Determine a curvatura da cúbica retorcida  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$  em um ponto genérico e em  $(0, 0, 0)$ .

**SOLUÇÃO** Calculemos inicialmente os ingredientes necessários:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle \quad \mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2 \mathbf{i} - 6t \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

Então, aplicando o Teorema 10 temos

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}$$

Na origem, onde  $t = 0$ , a curvatura é  $\kappa(0) = 2$ . □

Para o caso especial da curva plana com a equação  $y = f(x)$ , escolhemos  $x$  como parâmetro e escrevemos  $\mathbf{r}(x) = x \mathbf{i} + f(x) \mathbf{j}$ . Então,  $\mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x) \mathbf{j}$  e  $\mathbf{r}''(x) = f''(x) \mathbf{j}$ . Como  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$  e  $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$ , temos  $\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x) \mathbf{k}$ . Temos também  $|\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ , e então, pelo Teorema 10:

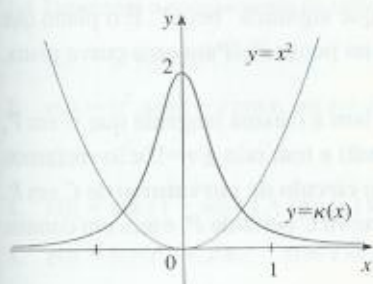


FIGURA 5  
A parábola  $y = x^2$  e sua função curvatura

■ Podemos pensar no vetor normal como indicador da direção para a qual a curva está se virando em cada ponto.

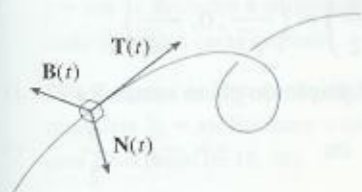


FIGURA 6

■ A Figura 7 ilustra o Exemplo 6 mostrando os vetores  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{B}$  em dois pontos da hélice circular. Em geral, os vetores  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{B}$ , começando nos vários pontos da curva, formam um conjunto de vetores ortogonais, denominados referencial **TNB**, que se move ao longo da curva quando  $t$  varia. Esse referencial **TNB** tem um papel importante em um ramo da matemática chamado geometria diferencial e em suas aplicações em movimento de naves espaciais.

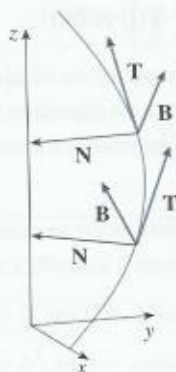


FIGURA 7

11

$$\kappa(t) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

**EXEMPLO 5** Determine a curvatura da parábola  $y = x^2$  nos pontos  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(2, 4)$ .

**SOLUÇÃO** Como  $y' = 2x$  e  $y'' = 2$ , a Fórmula 11 nos dá

$$\kappa(t) = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

A curvatura em  $(0, 0)$  é  $\kappa(0) = 2$ . Em  $(1, 1)$  é  $\kappa(1) = 2/5^{3/2} \approx 0,18$ . Em  $(2, 4)$  é  $\kappa(2) = 2/17^{3/2} \approx 0,03$ . Observe, a partir da expressão de  $\kappa(x)$  ou do gráfico de  $\kappa$  na Figura 5, que  $\kappa(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Isso corresponde a dizer que a parábola parece se tornar cada vez mais achatada quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . □

## VETORES NORMAL E BINORMAL

Em um ponto dado de uma curva lisa  $\mathbf{r}(t)$  existem muitos vetores que são ortogonais ao vetor tangente unitário  $\mathbf{T}(t)$ . Escolhemos um observando que, como  $|\mathbf{T}(t)| = 1$  para todo  $t$ , temos  $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0$  pelo Exemplo 4 da Seção 13.2, de modo que  $\mathbf{T}'(t)$  é ortogonal a  $\mathbf{T}(t)$ . Observe, no entanto, que  $\mathbf{T}'(t)$  pode não ser um vetor unitário. Mas, se  $\mathbf{r}'$  também for lisa, podemos definir o **vetor normal principal unitário**  $\mathbf{N}(t)$  (ou simplesmente **normal unitário**) como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$

O vetor  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$ , denominado **vetor binormal**, é perpendicular a  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{N}$  e também é unitário (veja a Figura 6).

**EXEMPLO 6** Determine os vetores normal e binormal da hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

**SOLUÇÃO** Vamos, inicialmente, calcular os ingredientes necessários para o cálculo do vetor normal unitário:

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}) \quad |\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} = \langle -\cos t, -\sin t, 0 \rangle$$

Isso mostra que o vetor normal em um ponto da hélice circular é horizontal e aponta em direção ao eixo  $z$ . O vetor binormal é

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \sin t, -\cos t, 1 \rangle \quad \square$$



O plano determinado pelos vetores normal e binormal  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{B}$  em um ponto  $P$  sobre a curva  $C$  é chamado **plano normal** de  $C$  em  $P$ . Ele consiste em todas as retas que são ortogonais ao vetor tangente  $\mathbf{T}$ . O plano determinado por  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{N}$  é denominado **plano osculador** de  $C$  em  $P$ . O nome vem do latim *osculum*, que significa “beijo”. É o plano que mais se aproxima de conter a parte da curva próxima ao ponto  $P$ . (Para uma curva plana, o plano osculador é aquele que contém a curva.)

O círculo que está no plano osculador de  $C$  em  $P$ , tem a mesma tangente que  $C$  em  $P$ , fica do lado côncavo de  $C$  (na direção em que  $\mathbf{N}$  aponta) e tem raio  $\rho = 1/\kappa$  (o recíproco da curvatura) é conhecido como **círculo osculador** (ou **círculo da curvatura**) de  $C$  em  $P$ . É o círculo que melhor descreve o comportamento da curva  $C$  perto de  $P$ ; e tem em comum com a curva a tangente, a normal e a curvatura em  $P$ .

■ A Figura 8 mostra a hélice e o plano osculador do Exemplo 7.

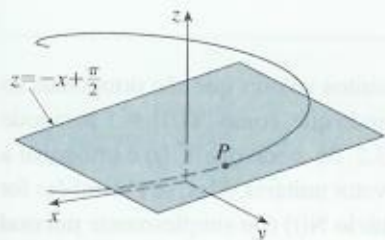


FIGURA 8

**EXEMPLO 7** Determine as equações do plano normal e do plano osculador da hélice circular do Exemplo 6 no ponto  $P(0, 1, \pi/2)$ .

**SOLUÇÃO** O plano normal em  $P$  tem vetor normal  $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -1, 0, 1 \rangle$ , portanto sua equação é

$$-1(x - 0) + 0(y - 1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad z = x + \frac{\pi}{2}$$

O plano osculador em  $P$  contém os vetores  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{N}$ , e assim seu vetor normal é  $\mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{B}$ . Do Exemplo 6, temos

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \sin t, -\cos t, 1 \rangle \quad \mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

Um vetor normal mais simples é  $\langle 1, 0, 1 \rangle$ , então uma equação do plano osculador é

$$1(x - 0) + 0(y - 1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad z = -x + \frac{\pi}{2} \quad \square$$

**EXEMPLO 8** Determine e desenhe o círculo osculador da parábola  $y = x^2$  na origem.

**SOLUÇÃO** Do Exemplo 5, a curvatura da parábola na origem é  $\kappa(0) = 2$ . Dessa forma, o raio do círculo osculador é  $1/\kappa = \frac{1}{2}$  e seu centro é  $(0, \frac{1}{2})$ . Sua equação é, portanto,

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Para o gráfico da Figura 9 usamos as equações paramétricas do círculo:

$$x = \frac{1}{2} \cos t \quad y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin t \quad \square$$

Resumimos aqui as fórmulas para os vetores tangente unitário, normal unitário e binormal e para a curvatura.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

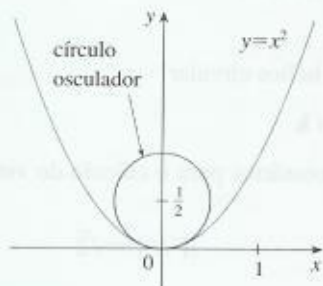


FIGURA 9

## 13.3 EXERCÍCIOS

1-6 Determine o comprimento da curva dada.

1.  $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \sin t, 5t, 2 \cos t \rangle, \quad -10 \leq t \leq 10$

2.  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sin t - t \cos t, \cos t + t \sin t \rangle, \quad 0 \leq t \leq \pi$

3.  $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

4.  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \ln \cos t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/4$

5.  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

6.  $\mathbf{r}(t) = 12t \mathbf{i} + 8t^{3/2} \mathbf{j} + 3t^2 \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

7-9 Encontre o comprimento da curva com precisão de quatro casas decimais. (Use sua calculadora para aproximar a integral.)

7.  $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{t}, t, t^2 \rangle, \quad 1 \leq t \leq 4$

8.  $\mathbf{r}(t) = \langle t, \ln t, t \ln t \rangle, \quad 1 \leq t \leq 2$

9.  $\mathbf{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, \tan t \rangle, \quad 0 \leq t \leq \pi/4$

10. Trace a curva com equações paramétricas  $x = \sin t, y = \sin 2t, z = \sin 3t$ . Encontre o comprimento total desta curva com precisão de quatro casas decimais.11. Seja  $C$  a curva de intersecção do cilindro parabólico  $x^2 = 2y$  e da superfície  $3z = xy$ . Encontre o comprimento exato de  $C$  da origem até o ponto  $(6, 18, 36)$ .12. Encontre, com precisão de quatro casas decimais, o comprimento da curva de intersecção do cilindro  $4x^2 + y^2 = 4$  e do plano  $x + y + z = 2$ .13-14 Reparametrize a curva com relação ao comprimento de arco medido a partir do ponto onde  $t = 0$  na direção crescente de  $t$ .

13.  $\mathbf{r}(t) = 2t \mathbf{i} + (1 - 3t) \mathbf{j} + (5 + 4t) \mathbf{k}$

14.  $\mathbf{r}(t) = e^{2t} \cos 2t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + e^{2t} \sin 2t \mathbf{k}$

15. Suponha que você comece no ponto  $(0, 0, 3)$  e se mova 5 unidades ao longo da curva  $x = 3 \sin t, y = 4t, z = 3 \cos t$  na direção positiva. Onde você está agora?

16. Reparametrize a curva

$$\mathbf{r}(t) = \left( \frac{2}{t^2 + 1} - 1 \right) \mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1} \mathbf{j}$$

em relação ao comprimento do arco medido a partir do ponto  $(1, 0)$  na direção crescente de  $t$ . Expresse a reparametrização em sua forma mais simples. O que você pode concluir sobre a curva?

17-20

(a) Determine os vetores tangente e normal unitários  $\mathbf{T}(t)$  e  $\mathbf{N}(t)$ .

(b) Utilize a Fórmula 9 para encontrar a curvatura.

17.  $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \sin t, 5t, 2 \cos t \rangle$

18.  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sin t - t \cos t, \cos t + t \sin t \rangle, \quad t > 0$

19.  $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1}{3} t^3, t^2, 2t \right\rangle$

20.  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 2t, \ln t \rangle$

21-23 Utilize o Teorema 10 para encontrar a curvatura.

21.  $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t \mathbf{k}$

22.  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + (1 + t^2) \mathbf{k}$

23.  $\mathbf{r}(t) = 3t \mathbf{i} + 4 \sin t \mathbf{j} + 4 \cos t \mathbf{k}$

24. Determine a curvatura de  $\mathbf{r}(t) = \langle e^t \cos t, e^t \sin t, t \rangle$  no ponto  $(1, 0, 0)$ .25. Encontre a curvatura de  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$  no ponto  $(1, 1, 1)$ .

26. Trace o gráfico da curva com equações paramétricas

$$x = t, \quad y = 4t^{3/2}, \quad z = -t^2$$

e calcule a curvatura no ponto  $(1, 4, -1)$ .

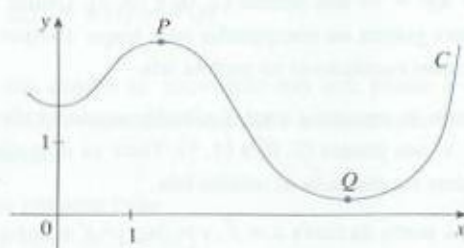
27-29 Use a Fórmula 11 para encontrar a curvatura.

27.  $y = 2x - x^2$       28.  $y = \cos x$       29.  $y = 4x^{3/2}$

30-31 Em que ponto a curva tem curvatura máxima? O que acontece com a curvatura quando  $x \rightarrow \infty$ ?

30.  $y = \ln x$       31.  $y = e^x$

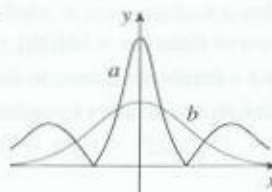
32. Determine a equação de uma parábola que tenha curvatura 4 na origem.

33. (a) A curvatura da curva  $C$  mostrada na figura é maior em  $P$  ou em  $Q$ ? Explique.(b) Estime a curvatura em  $P$  e  $Q$  desenhando o círculo osculador nesses pontos.34-35 Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para traçar na mesma tela a curva e sua função curvatura  $\kappa(x)$ . Esse é o gráfico que você esperava?

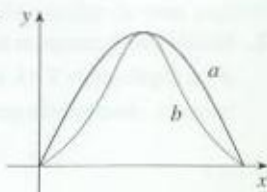
34.  $y = x^4 - 2x^2$       35.  $y = x^{-2}$

36-37 Dois gráficos,  $a$  e  $b$ , são mostrados. Um é a curva  $y = f(x)$  e o outro é o gráfico da sua função curvatura  $y = \kappa(x)$ . Identifique cada uma e justifique suas escolhas.

36.



37.





- SCA** 38. (a) Faça o gráfico da curva  $\mathbf{r}(t) = \langle \sin 3t, \sin 2t, \sin 3t \rangle$ . Em quantos pontos da curva tem-se a impressão de que a curvatura possui um máximo local ou absoluto?

(b) Use um SCA para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Esse gráfico confirma sua conclusão na parte (a)?

- SCA** 39. O gráfico de  $\mathbf{r}(t) = \langle t - \frac{3}{2} \sin t, 1 - \frac{3}{2} \cos t, t \rangle$  é ilustrado na Figura 12(b), na Seção 13.1. Onde você acha que a curvatura é maior? Use um SCA para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Para quais valores de  $t$  a curvatura é maior?

40. Use o Teorema 10 para mostrar que a curvatura da curva plana parametrizada  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ , é

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

onde os pontos indicam as derivadas em relação a  $t$ .

- 41-42 Use a fórmula do Exercício 40 para calcular a curvatura.

41.  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$

42.  $x = 1 + t^3$ ,  $y = t + t^2$

- 43-44 Encontre os vetores  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{B}$  no ponto indicado.

43.  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \frac{2}{3}t^3, t \rangle$ ,  $(1, \frac{2}{3}, 1)$

44.  $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, \ln \cos t \rangle$ ,  $(1, 0, 0)$

- 45-46 Determine as equações dos planos normal e osculador da curva no ponto indicado.

45.  $x = 2 \sin 3t$ ,  $y = t$ ,  $z = 2 \cos 3t$ ;  $(0, \pi, -2)$

46.  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$ ;  $(1, 1, 1)$

- CA** 47. Determine as equações para o círculo osculador da elipse  $9x^2 + 4y^2 = 36$  nos pontos  $(2, 0)$  e  $(0, 3)$ . Utilize uma calculadora gráfica ou computador para traçar a elipse e ambos os círculos osculadores na mesma tela.

- CA** 48. Encontre as equações para o círculo osculador da parábola  $y = \frac{1}{2}x^2$  nos pontos  $(0, 0)$  e  $(1, \frac{1}{2})$ . Trace os dois círculos osculadores e a parábola na mesma tela.

49. Em que ponto da curva  $x = t^3$ ,  $y = 3t$ ,  $z = t^4$  o plano normal é paralelo ao plano  $6x + 6y - 8z = 1$ ?

- SCA** 50. Existe um ponto da curva do Exercício 49 onde o plano osculador é paralelo ao plano  $x + y + z = 1$ ? (*Observação:* Você precisará de um SCA para derivar, simplificar e calcular um produto vetorial.)

51. Mostre que a curvatura  $\kappa$  está relacionada com os vetores tangente e normal pela equação

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$

52. Mostre que a curvatura de uma curva plana é  $\kappa = |d\phi/ds|$ , onde  $\phi$  é o ângulo entre  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{i}$ , isto é,  $\phi$  é o ângulo de inclinação da reta tangente. (Isso mostra que a definição de curvatura é consistente

com a definição dada para curvas planas no Exercício 69 da Seção 10.2.)

53. (a) Mostre que  $d\mathbf{B}/ds$  é perpendicular a  $\mathbf{B}$ .  
 (b) Mostre que  $d\mathbf{B}/ds$  é perpendicular a  $\mathbf{T}$ .  
 (c) Deduza das partes (a) e (b) que  $d\mathbf{B}/ds = -\tau(s)\mathbf{N}$  para algum número  $\tau(s)$  chamado **torção** da curva. (A torção mede quanto a curva é retorcida.)  
 (d) Mostre que para uma curva plana a torção é  $\tau(s) = 0$ .

54. As fórmulas seguintes, chamadas **fórmulas de Frenet-Serret**, são de fundamental importância em geometria diferencial:

1.  $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$

2.  $d\mathbf{N}/ds = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$

3.  $d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$

(A Fórmula 1 vem do Exercício 51, e a Fórmula 3, do Exercício 53.) Use o fato de que  $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$  para deduzir a Fórmula 2 a partir das Fórmulas 1 e 3.

55. Utilize as fórmulas de Frenet-Serret para demonstrar cada um dos seguintes itens. (Aqui as linhas indicam derivadas com relação a  $t$ . Comece como na demonstração do Teorema 10.)

(a)  $\mathbf{r}'' = s''\mathbf{T} + \kappa(s')^2\mathbf{N}$  (b)  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \kappa(s')^3\mathbf{B}$

(c)  $\mathbf{r}''' = [s''' - \kappa^2(s')^3]\mathbf{T} + [3\kappa s's'' + \kappa'(s')^2]\mathbf{N} + \kappa\tau(s')^3\mathbf{B}$

(d)  $\tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}$

56. Mostre que a hélice circular  $\mathbf{r}(t) = \langle a \cos t, a \sin t, bt \rangle$ , onde  $a$  e  $b$  são as constantes positivas, tem curvatura e torção constantes. [Use o resultado do Exercício 55(d).]

57. Utilize a fórmula do Exercício 55(d) para calcular a torção da curva  $\mathbf{r}(t) = \langle t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3 \rangle$ .

58. Determine a curvatura e a torção da curva  $x = \sinh t$ ,  $y = \cosh t$ ,  $z = t$  no ponto  $(0, 1, 0)$ .

59. A molécula de DNA tem a forma de duas hélices circulares (veja a Figura 3 na Seção 13.1). O raio de cada uma das hélices é de cerca de 10 ângströms ( $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$ ). Cada hélice, em uma volta completa, sobe  $34 \text{ \AA}$ , e existem cerca de  $2,9 \times 10^8$  voltas completas em uma molécula. Estime o comprimento de cada hélice circular.

60. Consideremos o problema de projetar uma linha férrea de modo a fazer transições lisas entre as seções de trilhos retos. Um trilho existente ao longo da parte negativa do eixo  $x$  precisa ser ligado a um trilho que corre ao longo da reta  $y = 1$  para  $x \geq 1$ .

(a) Determine um polinômio  $P = P(x)$  de grau 5 tal que a função  $F$  definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ P(x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

seja contínua e tenha derivada e curvatura contínuas.

- (b) Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o gráfico de  $F$ .

## 13.4

## MOVIMENTO NO ESPAÇO: VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

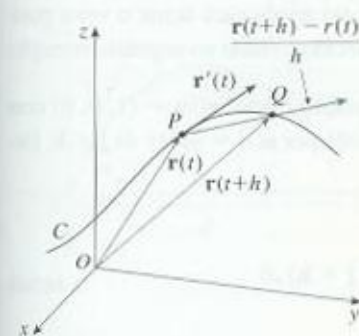


FIGURA 1

Nesta seção, mostraremos como as ideias dos vetores tangente e normal, assim como as de curvatura, podem ser usadas na física para estudar o movimento de objetos, sua velocidade e sua aceleração, quando estão se movendo ao longo de uma curva espacial. Em particular, seguiremos os passos de Newton, usando seu método para deduzir a Primeira Lei de Kepler para o movimento planetário.

Suponha que uma partícula se mova no espaço de forma que seu vetor posição no instante  $t$  seja  $\mathbf{r}(t)$ . Observe da Figura 1 que, para pequenos valores de  $h$ , o vetor

$$(1) \quad \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

se aproxima da direção de movimento da partícula que se move ao longo da curva  $\mathbf{r}(t)$ . Seu módulo mede o tamanho do vetor deslocamento por unidade de tempo. O vetor (1) fornece a velocidade média no intervalo de tempo de comprimento  $h$  e seu limite é o **vetor velocidade**  $\mathbf{v}(t)$  no instante  $t$ :

$$(2) \quad \mathbf{v}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \mathbf{r}'(t)$$

Portanto, o vetor velocidade é também o vetor tangente e tem a direção da reta tangente à curva.

A **velocidade escalar** da partícula no instante  $t$  é o módulo do vetor velocidade, ou seja,  $|\mathbf{v}(t)|$ . Isso é apropriado, pois, de (2) e da Equação 13.3.7, temos

$$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \frac{ds}{dt} = \text{taxa de variação da distância com relação ao tempo}$$

Como no caso de movimento unidimensional, a **aceleração** da partícula é definida como a derivada da velocidade:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$$

**EXEMPLO 1** O vetor posição de um objeto se movendo em um plano é dado por  $\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}$ . Determine a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração do objeto no instante  $t = 1$  e ilustre geometricamente.

**SOLUÇÃO** A velocidade e a aceleração no instante  $t$  são

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 3t^2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 6t \mathbf{i} + 2 \mathbf{j}$$

e a velocidade escalar é

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$$

Quando  $t = 1$ , temos

$$\mathbf{v}(1) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \mathbf{a}(1) = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad |\mathbf{v}(1)| = \sqrt{13}$$

Os vetores velocidade e aceleração estão mostrados na Figura 2. □

**EXEMPLO 2** Determine a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar de uma partícula com vetor posição  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, e^t, te^t \rangle$ .

**SOLUÇÃO**

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle 2t, e^t, (1+t)e^t \rangle$$

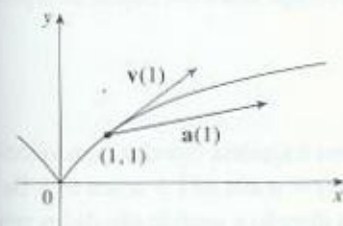


FIGURA 2



■ A Figura 3 mostra a trajetória da partícula do Exemplo 2 com vetores velocidade e aceleração quando  $t = 1$ .

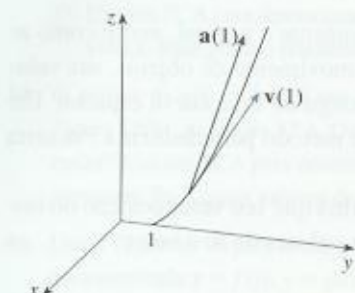


FIGURA 3

■ A expressão para  $\mathbf{r}(t)$  que obtivemos no Exemplo 3 foi usada para traçar a trajetória da partícula na Figura 4 para  $0 \leq t \leq 3$ .

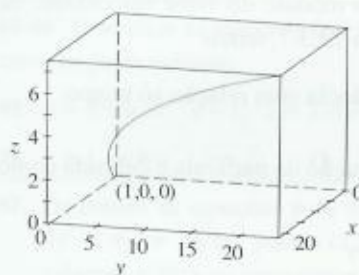


FIGURA 4

■ A velocidade angular do objeto em movimento com posição  $P$  é  $\omega = d\theta/dt$ , onde  $\theta$  é o ângulo mostrado na Figura 5.

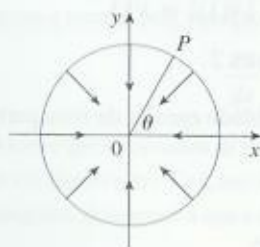


FIGURA 5

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \langle 2, e^t, (2+t)e^t \rangle$$

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 + e^{2t} + (1+t)^2 e^{2t}}$$

□

A integração de vetores introduzida na Seção 13.2 pode ser usada para achar o vetor posição quando os vetores velocidade ou aceleração são conhecidos, como no seguinte exemplo.

**EXEMPLO 3** Uma partícula se move a partir de uma posição inicial  $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$  com velocidade inicial  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Sua aceleração é dada por  $\mathbf{a}(t) = 4t\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Determine sua velocidade e posição no instante  $t$ .

**SOLUÇÃO** Como  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$ , temos

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t) dt = \int (4t\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + \mathbf{k}) dt$$

$$= 2t^2\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

Para determinar o valor do vetor constante  $\mathbf{C}$ , usaremos o fato de que  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ . A equação anterior nos dá  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{C}$ , assim  $\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$  e

$$\mathbf{v}(t) = 2t^2\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k} + \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$= (2t^2 + 1)\mathbf{i} + (3t^2 - 1)\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}$$

Como  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ , temos

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t) dt$$

$$= \int [(2t^2 + 1)\mathbf{i} + (3t^2 - 1)\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}] dt$$

$$= \left(\frac{2}{3}t^3 + t\right)\mathbf{i} + (t^3 - t)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{k} + \mathbf{D}$$

Tomando  $t = 0$ , achamos que  $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$ . Então,

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 + t + 1\right)\mathbf{i} + (t^3 - t)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{k}$$

□

Em geral, por integração vetorial podemos recuperar a velocidade quando a aceleração for conhecida e a posição quando a velocidade for conhecida:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(u) du \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(u) du$$

Se a força que age sobre a partícula é conhecida, então a aceleração pode ser determinada a partir da **Segunda Lei de Newton para o Movimento**. A versão vetorial dessa lei nos diz que, se em qualquer instante de tempo  $t$ , uma força  $\mathbf{F}(t)$  age sobre um objeto de  $m$  produzindo uma aceleração  $\mathbf{a}(t)$ , então

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

**EXEMPLO 4** Um objeto de massa  $m$  que se move em uma trajetória circular com velocidade angular constante  $\omega$  tem vetor posição dado por  $\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j}$ . Determine a força que age sobre o objeto e mostre que sua direção e sentido são dados pela reta que passa pela origem, apontando em direção à origem.

**SOLUÇÃO** Para encontrar a força, precisamos primeiro saber a aceleração:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -a\omega \sin \omega t \mathbf{i} + a\omega \cos \omega t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = -a\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - a\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j}$$

Portanto, pela Segunda Lei de Newton, temos a força

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t) = -m\omega^2(a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j})$$

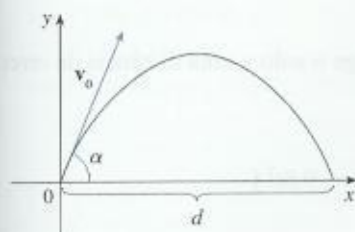


FIGURA 6

Observe que  $\mathbf{F}(t) = -m\omega^2 \mathbf{r}(t)$ . Isso mostra que a força age na direção oposta ao vetor radial  $\mathbf{r}(t)$  e, portanto, aponta para a origem (veja a Figura 5). Essa força é chamada *força centrípeta*.  $\square$

**EXEMPLO 5** Um projétil é disparado com ângulo de elevação  $\alpha$  e velocidade inicial  $\mathbf{v}_0$  (veja a Figura 6). Assumindo que a resistência do ar seja desprezível e que a única força externa seja devida à gravidade, determine a função posição  $\mathbf{r}(t)$  do projétil. Para qual valor de  $\alpha$  obtemos maior alcance (distância horizontal percorrida)?

**SOLUÇÃO** Fixamos os eixos coordenados de forma que a origem coincida com o ponto inicial da trajetória do projétil. Como a força devida à gravidade age para baixo, temos

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -mg \mathbf{j}$$

onde  $g = |\mathbf{a}| \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ . Então,

$$\mathbf{a} = -g \mathbf{j}$$

Como  $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}$ , temos

$$\mathbf{v}(t) = -gt \mathbf{j} + \mathbf{C}$$

onde  $\mathbf{C} = \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ . Portanto,

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) = -gt \mathbf{j} + \mathbf{v}_0$$

Integrando novamente, obtemos

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{D}$$

Mas  $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ , e então o vetor de posição do projétil é dado por

$$\boxed{3} \quad \mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \mathbf{j} + t\mathbf{v}_0$$

Se escrevermos  $|\mathbf{v}_0| = v_0$  (a velocidade escalar inicial do projétil), então

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + v_0 \sin \alpha \mathbf{j}$$

e a Equação 3 se torna

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \alpha)t \mathbf{i} + \left[(v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right] \mathbf{j}$$

As equações paramétricas da trajetória são

$$\boxed{4} \quad x = (v_0 \cos \alpha)t \quad y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

■ Se você eliminar  $t$  na Equação 4, verá que  $y$  é uma função quadrática de  $x$ . Logo, a trajetória da partícula é uma parábola.

A distância horizontal  $d$  é dada pelo valor de  $x$  quando  $y = 0$ . Impondo  $y = 0$ , obtemos  $t = 0$  ou  $t = (2v_0 \sin \alpha)/g$ . O último valor de  $t$  fornece

$$d = x = (v_0 \cos \alpha) \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 (2 \sin \alpha \cos \alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Claramente,  $d$  tem valor máximo quando  $\sin 2\alpha = 1$ , ou seja, quando,  $\alpha = \pi/4$ .  $\square$

**EXEMPLO 6** Um projétil é lançado com velocidade de disparo de 150 m/s e ângulo de elevação de  $45^\circ$  de um ponto 10 m acima do nível do solo. Onde o projétil vai atingir o solo e com que velocidade escalar?

**SOLUÇÃO** Se tomarmos a origem no nível do solo, então a posição inicial do projétil é  $(0, 10)$  e, portanto, precisamos adequar a Equação 4 adicionando 10 na expressão para  $y$ . Como  $v_0 = 150 \text{ m/s}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ , e  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , temos

$$x = 150 \cos(\pi/4)t = 75\sqrt{2}t$$

$$y = 10 + 150 \sin(\pi/4)t - \frac{1}{2}(9,8)t^2 = 10 + 75\sqrt{2}t - 4,9t^2$$



O impacto ocorrerá quando  $y = 0$ , isto é, quando  $4,9t^2 - 75\sqrt{2}t - 10 = 0$ . Resolvendo essa equação quadrática (e usando somente o valor positivo de  $t$ ), temos

$$t = \frac{75\sqrt{2} + \sqrt{11 \cdot 250 + 196}}{9,8} \approx 21,74$$

Então  $x \approx 75\sqrt{2}(21,74) \approx 2\,306$ , assim o projétil atinge o solo a uma distância de cerca de 2 306 m.

A velocidade do projétil é

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 75\sqrt{2}\mathbf{i} + (75\sqrt{2} - 9,8t)\mathbf{j}$$

Portanto, sua velocidade escalar no impacto é

$$|\mathbf{v}(21,74)| = \sqrt{(75\sqrt{2})^2 + (75\sqrt{2} - 9,8 \cdot 21,74)^2} \approx 151 \text{ m/s}$$

### COMPONENTES TANGENCIAL E NORMAL DA ACELERAÇÃO

Quando estudamos o movimento de uma partícula, é frequentemente útil decompor a aceleração em duas componentes, uma na direção da tangente e outra na direção da normal. Se escrevemos  $v = |\mathbf{v}|$  para a velocidade escalar da partícula, então

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

e, assim,

$$\mathbf{v} = v\mathbf{T}$$

Se derivarmos ambos os lados em relação a  $t$ , obteremos

$$\boxed{5} \quad \mathbf{a} = \mathbf{v}' = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}'$$

Se usarmos a expressão da curvatura dada pela Equação 13.3.9, temos

$$\boxed{6} \quad \kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{T}'|}{v} \quad \text{de modo que} \quad |\mathbf{T}'| = \kappa v$$

O vetor normal unitário foi definido na seção anterior como  $\mathbf{N} = \mathbf{T}'/|\mathbf{T}'|$ , portanto de (6) vem

$$\mathbf{T}' = |\mathbf{T}'|\mathbf{N} = \kappa v\mathbf{N}$$

e a Equação 5 se torna

$$\boxed{7} \quad \mathbf{a} = v'\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}$$

Escrevendo  $a_T$  e  $a_N$  para as componentes tangencial e normal da aceleração, temos

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$$

onde

$$\boxed{8} \quad a_T = v' \quad \text{e} \quad a_N = \kappa v^2$$

Essa conclusão está ilustrada na Figura 7.

Vamos olhar agora o que a Fórmula 7 nos diz. A primeira coisa a observar é que o vetor binormal  $\mathbf{B}$  não aparece. Independentemente de como o objeto se move no espaço, sua aceleração sempre está nos planos de  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{N}$  (o plano osculador). (Lembre-se de que  $\mathbf{T}$  fornece a direção e sentido do movimento e  $\mathbf{N}$  aponta a direção em que a curva está entortando.) Em seguida, observamos que a componente tangencial da aceleração é  $v'$ , a taxa de variação da

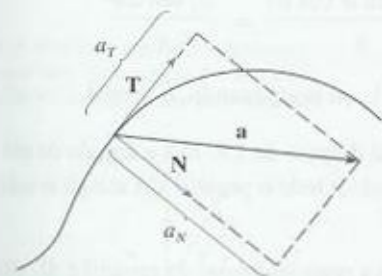


FIGURA 7

velocidade escalar, e a componente normal da aceleração é  $\kappa v^2$ , a curvatura vezes o quadrado da velocidade escalar. Isso explica o que acontece com um passageiro em um carro — uma virada brusca em uma rua pode ser vista como um valor grande de curvatura, de forma que a componente da aceleração perpendicular ao movimento é grande e o passageiro é jogado contra a porta do carro. A alta velocidade em uma curva tem o mesmo efeito: de fato, se dobrarmos nossa velocidade escalar,  $a_N$  será aumentada por um fator de 4.

Apesar de termos uma expressão para as componentes tangencial e normal da aceleração na Equação 8, é desejável obter expressões que dependam somente de  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  e  $\mathbf{r}''$ . Com essa finalidade, tomamos o produto escalar de  $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$  com  $\mathbf{a}$ , como dada na Equação 7:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} &= v\mathbf{T} \cdot (v'\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}) \\ &= vv'\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + \kappa v^3\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} \\ &= vv' \quad (\text{pois } \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1 \text{ e } \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0)\end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{9} \quad a_T = v' = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{v} = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Usando a fórmula da curvatura dada pelo Teorema 13.3.10, temos

$$\boxed{10} \quad a_N = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} |\mathbf{r}'(t)|^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

**EXEMPLO 7** Uma partícula se move com função posição  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^2, t^3 \rangle$ . Determine as componentes tangencial e normal da aceleração.

**SOLUÇÃO**

$$\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = 2t \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + 3t^2 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6t \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{8t^2 + 9t^4}$$

Portanto, da Equação 9 vem que a componente tangencial é

$$a_T = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{8t + 18t^3}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$

Como

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t & 2t & 3t^2 \\ 2 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2 \mathbf{i} - 6t^2 \mathbf{j}$$

da Equação 10 obtemos a componente normal

$$a_N = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{6\sqrt{2} t^2}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}} \quad \square$$

## LEIS DE KEPLER PARA O MOVIMENTO PLANETÁRIO

Descreveremos agora um dos principais feitos do cálculo mostrando como o material deste capítulo pode ser usado para demonstrar as leis de Kepler para o movimento planetário. Depois de 20 anos estudando as observações do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe, o astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630) formulou as seguintes três leis:



## LEIS DE KEPLER

1. Um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica, com o Sol em um dos focos.
2. O segmento de reta que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
3. O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do eixo maior de sua órbita.

Em seu livro *Principia Mathematica*, de 1687, sir Isaac Newton mostrou que as três leis de Kepler podem ser obtidas como consequências de outras duas leis de sua autoria, a Segunda Lei do Movimento e a Lei da Gravitação Universal. A seguir, demonstraremos a Primeira Lei de Kepler. As demais ficam como exercício (com sugestões).

Como a força gravitacional do Sol sobre um planeta é muito maior que as forças exercidas por outros corpos celestes, podemos ignorar todos os outros corpos do Universo, exceto o Sol e um planeta girando em torno dele. Usaremos um sistema de coordenadas com origem no Sol e seja  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  o vetor posição do planeta. (Poderíamos igualmente considerar o vetor posição da Lua ou de um satélite girando em torno da Terra, ou um cometa movendo-se em torno de uma estrela.) O vetor velocidade é  $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$  e o vetor aceleração é  $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$ . Utilizaremos as seguintes leis de Newton:

Segunda Lei do Movimento:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Lei da Gravitação:

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r} = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{u}$$

onde  $\mathbf{F}$  é a força da gravidade sobre o planeta,  $m$  e  $M$  são as massas do planeta e do Sol,  $G$  é a constante gravitacional,  $r = |\mathbf{r}|$ , e  $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$  é o vetor unitário na direção de  $\mathbf{r}$ .

Mostraremos inicialmente que o planeta se move em um plano. Igualando a expressão para  $\mathbf{F}$  nas duas leis de Newton, chegamos a

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}$$

e, portanto,  $\mathbf{a}$  é paralelo a  $\mathbf{r}$ . Segue que  $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Usando a Fórmula 5 do Teorema 13.2.3, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{r}' \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}' \\ &= \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$$

onde  $\mathbf{h}$  é um vetor constante. (Podemos supor que  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ ; ou seja,  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$  não são paralelos.) Isso significa que o vetor  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  é perpendicular a  $\mathbf{h}$  para todos os valores de  $t$ , portanto o planeta está sempre em um plano que passa pela origem e é perpendicular a  $\mathbf{h}$ . Dessa forma, a órbita do planeta é uma curva plana.

Para demonstrar a Primeira Lei de Kepler, vamos reescrever o vetor  $\mathbf{h}$  como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}' = r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u})' \\ &= r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u}' + r'\mathbf{u}) = r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}') + rr'(\mathbf{u} \times \mathbf{u}) \\ &= r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}') \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{h} &= \frac{-GM}{r^2} \mathbf{u} \times (r^2 \mathbf{u} \times \mathbf{u}') = -GM \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}') \\ &= -GM[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}'] \quad (\text{pelo Teorema 12.4.8, Propriedade 6}) \end{aligned}$$

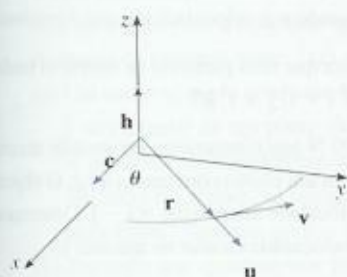


FIGURA 8

Mas  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = 1$  e, como  $|\mathbf{u}(t)| = 1$ , segue do Exemplo 4 da Seção 13.2 que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$ . Portanto,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM \mathbf{u}'$$

e, então,

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{h})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM \mathbf{u}'$$

Integrando ambos os lados da equação, obtemos

11

$$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = GM \mathbf{u} + \mathbf{c}$$

onde  $\mathbf{c}$  é um vetor constante.

Neste ponto é conveniente escolher os eixos coordenados de forma que o vetor da base canônica  $\mathbf{k}$  aponte na direção do vetor  $\mathbf{h}$ . O planeta se move assim no plano  $xy$ . Como  $\mathbf{v} \times \mathbf{h}$  e  $\mathbf{u}$  são perpendiculares a  $\mathbf{h}$ , a Equação 11 mostra que  $\mathbf{c}$  pertence ao plano  $xy$ . Isso significa que podemos escolher os eixos  $x$  e  $y$  de forma que o vetor  $\mathbf{i}$  esteja na direção de  $\mathbf{c}$ , como mostrado na Figura 8.

Se  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{r}$ , então  $(r, \theta)$  são as coordenadas polares do planeta. Da Equação 11, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) &= \mathbf{r} \cdot (GM \mathbf{u} + \mathbf{c}) = GM \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c} \\ &= GM r \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + |\mathbf{r}| |\mathbf{c}| \cos \theta = GM r + rc \cos \theta \end{aligned}$$

onde  $c = |\mathbf{c}|$ . Então,

$$r = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{GM + c \cos \theta} = \frac{1}{GM} \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{1 + e \cos \theta}$$

onde  $e = c/(GM)$ . Mas

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = |\mathbf{h}|^2 = h^2$$

onde  $h = |\mathbf{h}|$ . Desse modo,

$$r = \frac{h^2/(GM)}{1 + e \cos \theta} = \frac{eh^2/c}{1 + e \cos \theta}$$

Escrevendo  $d = h^2/c$ , obtemos a equação

12

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

Comparando com o Teorema 10.6.6, vemos que a Equação 12 é aquela da forma polar da seção cônica com foco na origem e excentricidade  $e$ . Sabemos que a órbita de um planeta é uma curva fechada e, portanto, precisa ser uma elipse.

Isso completa a dedução da Primeira Lei de Kepler. Guiaremos você na dedução da Segunda e da Terceira Lei no Projeto Aplicado na página 807. As demonstrações dessas três leis mostram que o método deste capítulo fornece uma ferramenta poderosa na descrição de leis da natureza.

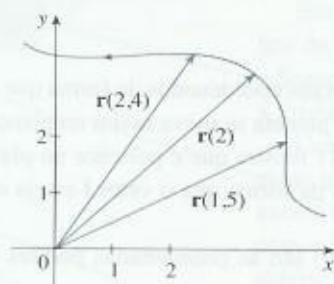
### 13.4 EXERCÍCIOS

1. A tabela fornece coordenadas de uma partícula movendo-se no espaço ao longo de uma curva lisa.
  - (a) Determine a velocidade média nos intervalos de tempo  $[0; 1]$ ,  $[0.5; 1]$ ,  $[1; 2]$  e  $[1; 1.5]$ .
  - (b) Estime a velocidade e a velocidade escalar da partícula no instante  $t = 1$ .

$t$	$x$	$y$	$z$
0	2,7	9,8	3,7
0,5	3,5	7,2	3,3
1,0	4,5	6,0	3,0
1,5	5,9	6,4	2,8
2,0	7,3	7,8	2,7



2. A figura mostra a trajetória de uma partícula que se move com vetor posição  $\mathbf{r}(t)$  no instante  $t$ .
- Desenhe um vetor que represente a velocidade média da partícula no intervalo de tempo  $2 \leq t \leq 2,4$ .
  - Desenhe um vetor que represente a velocidade média da partícula no intervalo de tempo  $1,5 \leq t \leq 2$ .
  - Escreva uma expressão para o vetor velocidade  $\mathbf{v}(2)$ .
  - Desenhe uma aproximação do vetor  $\mathbf{v}(2)$  e estime a velocidade escalar da partícula em  $t = 2$ .



3-8 Determine a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar da partícula cuja função posição é dada. Esboce a trajetória da partícula e desenhe os vetores velocidade e aceleração para os valores de  $t$  especificados.

- $\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 1, t \rangle, \quad t = 1$
- $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{t}, 1 - t \rangle, \quad t = 1$
- $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j}, \quad t = \pi/3$
- $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{2t} \mathbf{j}, \quad t = 0$
- $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}, \quad t = 1$
- $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + \sin t \mathbf{k}, \quad t = 0$

9-14 Determine os vetores velocidade e aceleração e a velocidade escalar da partícula cuja função posição é dada.

- $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$
- $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 3t, 2 \sin t \rangle$
- $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2} t \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + \ln t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = e^t (\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k})$
- $\mathbf{r}(t) = t \sin t \mathbf{i} + t \cos t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$

15-16 Determine os vetores velocidade e posição de uma partícula, dadas a sua aceleração, velocidade e posição iniciais.

- $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i} + 2 \mathbf{j}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$
- $\mathbf{a}(t) = 2 \mathbf{i} + 6t \mathbf{j} + 12t^2 \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

17-18

- Determine o vetor posição de uma partícula, dada a sua aceleração, e suas velocidade e posição iniciais.
- Utilize o computador para traçar a trajetória percorrida pela partícula.

- $\mathbf{a}(t) = 2t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \cos 2t \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$
- $\mathbf{a}(t) = t \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

- A função posição de uma partícula é dada por  $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 5t, t^2 - 16t \rangle$ . Quando sua velocidade escalar é mínima?
- Qual a força necessária para que uma partícula de massa  $m$  tenha a função posição  $\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$ ?
- Uma força com módulo 20 N age diretamente no sentido ascendente a partir do plano  $xy$  em um objeto com massa 4 kg. O objeto começa na origem com velocidade inicial  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ . Determine sua função posição e sua velocidade escalar no instante  $t$ .
- Mostre que, se uma partícula se move com velocidade escalar constante, então os vetores velocidade e aceleração são ortogonais.
- Um projétil é disparado com uma velocidade escalar inicial de 500 m/s e ângulo de elevação de  $30^\circ$ . Determine (a) o alcance do projétil, (b) a altura máxima atingida e (c) a velocidade escalar no impacto.
- Repita o Exercício 23, considerando agora o projétil disparado de uma posição 200 m acima do solo.
- Uma bola é atirada em um ângulo de elevação de  $45^\circ$  em relação ao solo. Se a bola cai no solo a uma distância de 90 m, qual a velocidade escalar inicial da bola?
- Uma arma é disparada com ângulo de elevação de  $30^\circ$ . Qual a velocidade de disparo se o máximo de altura que a bala atinge são 500 m?
- A velocidade de disparo de uma arma é 150 m/s. Determine dois ângulos de elevação que podem ser utilizados para atingir um alvo que está a 800 m de distância.
- No beisebol, um bateador rebate uma bola, que está 3 pés acima do chão, em direção à parte central da cerca do campo, que tem 10 pés de altura e dista 400 pés da base do lançamento. A bola deixa o bastão com uma velocidade escalar de 115 pés e com ângulo de  $50^\circ$  acima da horizontal. Foi *home run*? (Em outras palavras, a bola passou por cima da cerca?)
- Uma cidade medieval tem a forma de um quadrado e é protegida por muralhas com comprimento de 500 m e altura de 15 m. Você é o comandante de um exército atacante e o mais próximo que pode chegar da muralha é 100 m. Seu plano é incendiar a cidade arremessando com catapultas rochas aquecidas sobre a muralha (com velocidade escalar inicial de 80 m/s). Em que intervalo de ângulos você deve dizer a seus homens para armar a catapulta? (Suponha que a trajetória das rochas seja perpendicular à muralha.)
- Uma bola com massa 0,8 kg é arremessada ao ar em direção ao sul com velocidade escalar de 30 m/s e ângulo de  $30^\circ$  com o solo. Um vento do oeste aplica uma força constante de 4 N à bola na direção leste. Onde a bola cai e com que velocidade escalar?
- A água, descendo por um trecho reto de um rio, em geral escoia mais rapidamente no meio e a velocidade escalar diminui para quase zero nas margens. Considere um trecho longo de rio escoando para o norte com as margens paralelas distando 40 m uma da outra. Se a velocidade escalar máxima da água é de



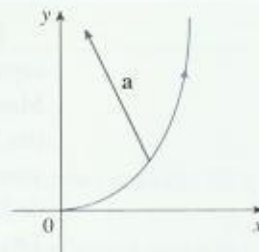
3 m/s, podemos usar uma função quadrática como modelo básico para encontrar a taxa com que escoar a água  $x$  unidades de distância da margem oeste:  $f(x) = \frac{3}{400}x(40 - x)$ .

- (a) Um barco se move com uma velocidade escalar constante de 5 m/s a partir de um ponto de  $A$  na margem oeste enquanto se mantém direcionado perpendicularmente à margem. A que distância rio abaixo, na margem oposta, o barco vai atingir a terra firme? Faça um gráfico da trajetória do barco.
- (b) Suponha que quiséssemos pilotar o barco a fim de atracar em um ponto  $B$ , diretamente oposto ao  $A$ , na margem leste. Se mantivermos a velocidade escalar constante de 5 m/s e uma direção constante, determine o ângulo no qual o barco deve ser conduzido. Depois, faça o gráfico do caminho real que o barco segue. Essa trajetória parece realista?
32. Outro modelo razoável para a velocidade escalar da água do rio no Exercício 31 é a função senoidal:  $f(x) = 3 \sin(\pi x/40)$ . Se o piloto do barco quiser atravessar o rio de  $A$  até  $B$  com direção constante e velocidade escalar constante de 5 m/s, determine o ângulo no qual o barco deve seguir.

33-38 Determine as componentes tangencial e normal do vetor aceleração.

33.  $\mathbf{r}(t) = (3t - t^3)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$
34.  $\mathbf{r}(t) = (1 + t)\mathbf{i} + (t^2 - 2t)\mathbf{j}$
35.  $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
36.  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$
37.  $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$
38.  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \cos^2 t\mathbf{j} + \sin^2 t\mathbf{k}$

39. O módulo do vetor aceleração  $a$  é  $10 \text{ cm/s}^2$ . Use a figura para estimar as componentes tangencial e normal de  $a$ .



40. Se uma partícula com massa  $m$  se move com vetor posição  $\mathbf{r}(t)$ , então seu **momento angular** é definido como  $\mathbf{L}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$  e seu **torque** é definido como  $\boldsymbol{\tau}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t)$ . Mostre que  $\mathbf{L}'(t) = \boldsymbol{\tau}(t)$ . Deduza que, se  $\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{0}$  para todo  $t$ , então  $\mathbf{L}(t)$  é constante. (Esta é a *lei de conservação do momento angular*.)

41. A função posição de uma nave espacial é

$$\mathbf{r}(t) = (3 + t)\mathbf{i} + (2 + \ln t)\mathbf{j} + \left(7 - \frac{4}{t^2 + 1}\right)\mathbf{k}$$

e as coordenadas de uma estação espacial são  $(6, 4, 9)$ . O capitão quer que a nave ataque na estação espacial. Quando os motores da nave devem ser desligados?

42. Um foguete que queima o combustível carregado dentro de si enquanto se move no espaço tem, no instante  $t$ , velocidade  $\mathbf{v}(t)$  e massa  $m(t)$ . Se os gases provenientes da combustão escapam a uma velocidade de  $\mathbf{v}_e$  relativamente ao foguete, deduz-se da Segunda Lei de Newton do movimento que

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \mathbf{v}_e$$

- (a) Mostre que  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) - \ln \frac{m(0)}{m(t)} \mathbf{v}_e$ .

- (b) Para que, em linha reta, o foguete acelere do repouso para o dobro da velocidade escalar de escape de seus gases de combustão, que fração de sua massa inicial o foguete deverá queimar como combustível?

## PROJETO APLICADO

### LEIS DE KEPLER

Johannes Kepler enunciou três leis sobre o movimento planetário, baseando-se em uma grande quantidade de dados relativos à posição dos planetas em diferentes instantes de tempo.

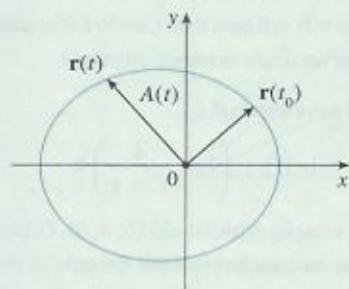
#### LEIS DE KEPLER

1. Um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica com o Sol em um dos focos.
2. O segmento de reta que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
3. O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do eixo maior de sua órbita.



Kepler formulou essas leis, pois elas se ajustavam aos dados astronômicos. Ele não foi capaz de perceber por que elas valiam nem como se relacionavam umas com as outras. Mas *sir* Isaac Newton, em seu *Principia Mathematica*, de 1687, mostrou como deduzir as três leis de Kepler de duas leis de sua autoria, a Segunda Lei do Movimento e a Lei da Gravitação Universal. Na Seção 13.4 demonstramos a Primeira Lei de Kepler usando o cálculo de funções vetoriais. Neste projeto, guiaremos você pela demonstração da Segunda e da Terceira Leis de Kepler e exploraremos suas consequências.

1. Utilize os seguintes passos para demonstrar a Segunda Lei de Kepler. A notação será a mesma que foi empregada na demonstração da Primeira Lei na Seção 13.4. Em particular, use coordenadas polares de modo que  $\mathbf{r} = (r \cos \theta) \mathbf{i} + (r \sin \theta) \mathbf{j}$ .



(a) Mostre que  $\mathbf{h} = r^2 \frac{d\theta}{dt} \mathbf{k}$ .

(b) Deduza que  $r^2 \frac{d\theta}{dt} = h$ .

- (c) Se  $A = A(t)$  é a área varrida pelo vetor radical  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  no intervalo de tempo  $[t_0, t]$  como na figura, mostre que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

- (d) Deduza que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} h = \text{constante}$$

Essa equação mostra que a taxa na qual  $A$  é percorrida é constante e demonstra a Segunda Lei de Kepler.

2. Seja  $T$  o período de um planeta em torno do Sol; ou seja,  $T$  é o tempo necessário para o planeta dar uma volta completa em torno do Sol, em sua órbita elíptica. Suponha que os comprimentos dos eixos maior e menor da elipse sejam  $2b$  e  $2a$ .

- (a) Use a parte (d) do Problema 1 para mostrar que  $T = 2\pi ab/h$ .

(b) Mostre que  $\frac{h^2}{GM} = ed = \frac{b^2}{a}$ .

(c) Use as partes (a) e (b) para mostrar que  $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$ .

Isso demonstra a Terceira Lei de Kepler. [Observe que a constante de proporcionalidade  $4\pi^2/(GM)$  independe do planeta.]

3. O período da Terra girando em torno do Sol é de aproximadamente 365,25 dias. Utilize esse fato e a Terceira Lei de Kepler para determinar o eixo maior da órbita terrestre. Você precisará do valor da massa do Sol,  $M = 1,99 \times 10^{30}$  kg, e da constante gravitacional,  $G = 6,67 \times 10^{-11}$  N·m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.
4. É possível colocar um satélite em órbita em torno da Terra de modo que ele permaneça fixo em uma posição localizada sobre o equador. Calcule a altitude necessária para esse satélite. A massa da Terra é  $5,98 \times 10^{24}$  kg, seu raio é  $6,37 \times 10^6$  m. (Essa órbita é chamada Órbita Geossíncrona de Clarke, em homenagem a Arthur C. Clarke, quem primeiro propôs a ideia, em 1945. O primeiro satélite com essas características, *Syncom II*, foi lançado em julho de 1963.)

## 13 REVISÃO

## VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

- O que é uma função vetorial? Como calcular sua derivada e sua integral?
- Qual a relação entre funções vetoriais e curvas espaciais?
- Como achar o vetor tangente a uma curva lisa em um ponto? Como achar a reta tangente? Como determinar o vetor tangente unitário?
- Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são funções vetoriais diferenciáveis,  $c$  é um escalar e  $f$  é uma função real, escreva as regras para derivar as seguintes funções vetoriais:
  - $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$
  - $c\mathbf{u}(t)$
  - $f(t)\mathbf{u}(t)$
  - $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$
  - $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$
  - $\mathbf{u}(f(t))$
- Como achar o comprimento de uma curva espacial dada pela função vetorial  $\mathbf{r}(t)$ ?
- Qual a definição de curvatura?
  - Escreva a fórmula para curvatura em função de  $\mathbf{r}'(t)$  e  $\mathbf{T}'(t)$ .
  - Escreva a fórmula para curvatura em função de  $\mathbf{r}'(t)$  e  $\mathbf{r}''(t)$ .
  - Escreva a fórmula para curvatura de uma curva plana com equação  $y = f(x)$ .
- Escreva as fórmulas para os vetores normal e binormal de uma curva lisa espacial  $\mathbf{r}(t)$ .
  - O que é o plano normal de uma curva em um ponto? E o plano osculador? O que é o círculo osculador?
- Como determinar a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração de uma partícula que se move ao longo de uma curva espacial?
  - Escreva a aceleração em termos de suas componentes tangencial e normal.
- Quais são as leis de Kepler?

## TESTES VERDADEIRO-FALSO

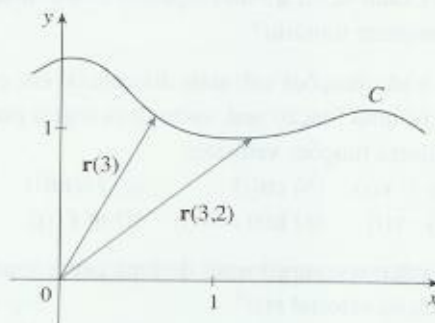
Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

- A curva com equação vetorial  $\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{i} + 2t^3 \mathbf{j} + 3t^3 \mathbf{k}$  é uma reta.
- A derivada da função vetorial é obtida derivando cada componente da função.
- Se  $\mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{v}(t)$  são funções vetoriais diferenciáveis, então
 
$$\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}'(t)$$
- Se  $\mathbf{r}(t)$  é uma função vetorial diferenciável, então
 
$$\frac{d}{dt} |\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$$
- Se  $\mathbf{T}(t)$  é o vetor tangente unitário de uma curva lisa, então a curvatura é  $\kappa = |d\mathbf{T}/dt|$ .
- O vetor binormal é dado por  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{T}(t)$ .
- Suponha que  $f$  seja duas vezes continuamente diferenciável. Em um ponto de inflexão da curva  $y = f(x)$ , a curvatura é 0.
- Se  $\kappa = 0$  para todo  $t$ , a curva é uma reta.
- Se  $|\mathbf{r}(t)| = 1$  para todo  $t$ , então  $|\mathbf{r}'(t)|$  é uma constante.
- Se  $|\mathbf{r}(t)| = 1$  para todo  $t$ , então  $\mathbf{r}'(t)$  é ortogonal a  $\mathbf{r}(t)$  para todo  $t$ .
- O círculo osculador de uma curva  $C$  em um ponto tem o mesmo vetor tangente, vetor normal e curvatura que  $C$  naquele ponto.
- As parametrizações diferentes de uma mesma curva resultam em vetores tangentes idênticos em um mesmo ponto da curva.



## EXERCÍCIOS

1. (a) Esboce a curva com função vetorial  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \cos \pi t \mathbf{j} + \sin \pi t \mathbf{k} \quad t \geq 0$   
(b) Determine  $\mathbf{r}'(t)$  e  $\mathbf{r}''(t)$ .
2. Seja  $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{2-t}, (e^t - 1)/t, \ln(t+1) \rangle$ .  
(a) Determine o domínio de  $\mathbf{r}$ .  
(b) Determine  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t)$ .  
(c) Determine  $\mathbf{r}'(t)$ .
3. Determine a função vetorial que representa a curva obtida pela intersecção do cilindro  $x^2 + y^2 = 16$  com o plano  $x + z = 5$ .
4. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva  $x = 2 \sin t, y = 2 \sin 2t, z = 2 \sin 3t$  no ponto  $(1, \sqrt{3}, 2)$ . Desenhe a curva e a tangente em uma mesma tela.
5. Se  $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t \cos \pi t \mathbf{j} + \sin \pi t \mathbf{k}$ , calcule  $\int_0^1 \mathbf{r}(t) dt$ .
6. Seja  $C$  a curva com equações  $x = 2 - t^3, y = 2t - 1, z = \ln t$ . Determine (a) o ponto de intersecção de  $C$  com o plano  $xz$ , (b) as equações paramétricas da reta tangente em  $(1, 1, 0)$  e (c) uma equação para o plano normal a  $C$  em  $(1, 1, 0)$ .
7. Utilize a Regra de Simpson com  $n = 6$  para estimar o comprimento do arco da curva com equação  $x = t^2, y = t^3, z = t^4, 0 \leq t \leq 3$ .
8. Determine o comprimento da curva  $\mathbf{r}(t) = \langle 2t^{3/2}, \cos 2t, \sin 2t \rangle, 0 \leq t \leq 1$ .
9. A hélice  $\mathbf{r}_1(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$  intercepta a curva  $\mathbf{r}_2(t) = (1+t) \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$  no ponto  $(1, 0, 0)$ . Determine o ângulo de intersecção dessas curvas.
10. Reparametrize a curva  $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \cos t \mathbf{k}$  em relação ao comprimento do arco de curva medido a partir do ponto  $(1, 0, 1)$  na direção crescente de  $t$ .
11. Para a curva dada por  $\mathbf{r}(t) = \langle \frac{1}{3} t^3, \frac{1}{2} t^2, t \rangle$ , determine (a) o vetor tangente unitário, (b) o vetor normal unitário e (c) a curvatura.
12. Determine a curvatura da elipse  $x = 3 \cos t, y = 4 \sin t$  nos pontos  $(3, 0)$  e  $(0, 4)$ .
13. Encontre a curvatura da curva  $y = x^4$  no ponto  $(1, 1)$ .
14. Determine uma equação do círculo osculador da curva  $y = x^4 - x^2$  na origem. Faça o gráfico da curva e do círculo osculador.
15. Determine uma equação do plano osculador da curva  $x = \sin 2t, y = t, z = \cos 2t$  no ponto  $(0, \pi, 1)$ .
16. A figura mostra a curva  $C$  traçada por uma partícula com vetor posição  $\mathbf{r}(t)$  no instante  $t$ .  
(a) Desenhe o vetor que representa a velocidade média da partícula no intervalo de tempo  $3 \leq t \leq 3,2$ .  
(b) Escreva a expressão para a velocidade  $\mathbf{v}(3)$ .  
(c) Escreva uma expressão para o vetor tangente unitário  $\mathbf{T}(3)$  e desenhe-o.



17. Uma partícula se move com função posição  $\mathbf{r}(t) = t \ln t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$ . Determine a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração da partícula.
18. Uma partícula começa sua trajetória na origem com velocidade inicial  $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ . Sua aceleração é  $\mathbf{a}(t) = 6t \mathbf{i} + 12t^2 \mathbf{j} - 6t \mathbf{k}$ . Determine sua função posição.
19. Um atleta arremessa um disco em um ângulo de  $45^\circ$  em relação à horizontal com velocidade escalar inicial de 13 m/s. Ela deixa sua mão a 2 m acima do chão.  
(a) Onde está o disco 2 segundos depois?  
(b) Qual a altura máxima que o disco atinge?  
(c) Onde o disco atinge o chão?
20. Determine as componentes tangencial e normal do vetor aceleração de uma partícula que se move com vetor posição  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$ .
21. Um disco de raio 1 está girando no sentido anti-horário com uma velocidade angular constante  $\omega$ . Uma partícula inicia no centro do disco e se move em direção às bordas em uma direção radial fixa de forma que sua posição no instante  $t, t \geq 0$ , é dada por  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{R}(t)$ , onde  $\mathbf{R}(t) = \cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}$   
(a) Mostre que a velocidade  $\mathbf{v}$  da partícula é  $\mathbf{v} = \cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j} + t \mathbf{v}_d$  onde  $\mathbf{v}_d = \mathbf{R}'(t)$  é a velocidade do ponto na borda do disco.  
(b) Mostre que a aceleração  $\mathbf{a}$  da partícula é  $\mathbf{a} = 2 \mathbf{v}_d + t \mathbf{a}_d$

onde  $\mathbf{a}_d = \mathbf{R}''(t)$  é a aceleração na borda do disco. O termo extra  $2\mathbf{v}_d$  é chamado *aceleração de Coriolis*; ele é o resultado da interação entre a rotação do disco e o movimento da partícula. Podemos obter uma demonstração física dessa aceleração andando em direção à borda de um carrossel.

- (c) Determine a aceleração de Coriolis de uma partícula que se move em um disco rodando segundo a equação

$$\mathbf{r}(t) = e^{-t} \cos \omega t \mathbf{i} + e^{-t} \sin \omega t \mathbf{j}$$

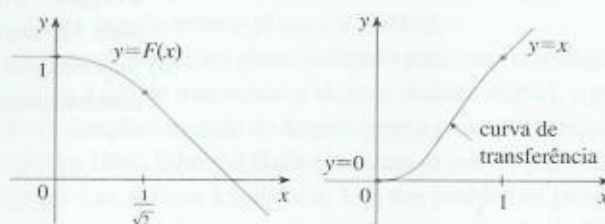
22. No projeto das *curvas de transferência*, usadas para ligar trechos retos dos trilhos de uma linha férrea, é importante entender que a aceleração do trem deve ser contínua de modo que a força de reação exercida pelo trem no trilho seja também contínua. Por causa das fórmulas obtidas na Seção 13.4 para as componentes da aceleração, este só será o caso se a curvatura variar de modo contínuo.

- (a) Um candidato lógico à curva de transferência para juntar dois trilhos existentes dados por  $y = 1$  para  $x \leq 0$  e  $y = \sqrt{2} - x$  para  $x \geq 1/\sqrt{2}$  poderia ser a função  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $0 < x < 1/\sqrt{2}$ , cujo gráfico é o arco de círculo mostrado na figura. À primeira vista, parece razoável. Mostre que a função

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{se } 0 < x < 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - x & \text{se } x \geq 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

é contínua e tem derivada contínua, mas não tem curvatura contínua. Assim,  $f$  não é uma curva de transferência adequada.

- (b) Determine um polinômio de quinto grau para servir de curva de transferência entre os dois segmentos de reta:  $y = 0$  para  $x \leq 0$  e  $y = x$  para  $x \geq 1$ . Poderíamos utilizar um polinômio de quarto grau? Use uma calculadora gráfica ou computador para esboçar o gráfico da função “conectada” e verifique que ele se assemelha ao da figura.





## PROBLEMAS QUENTES

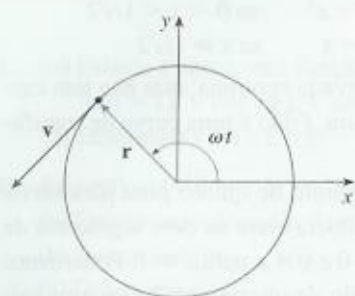


FIGURA PARA O PROBLEMA 1

1. Uma partícula  $P$  move-se com velocidade angular constante  $\omega$  em torno de um círculo com centro na origem e raio  $R$ . A partícula é dita estar em *movimento circular uniforme*. Suponha que o movimento seja no sentido anti-horário e que a partícula esteja no ponto  $(R, 0)$  quando  $t = 0$ . O vetor posição no instante  $t \geq 0$  é  $\mathbf{r}(t) = R \cos \omega t \mathbf{i} + R \sin \omega t \mathbf{j}$ .

- (a) Determine o vetor velocidade  $\mathbf{v}$  e mostre que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$ . Conclua que  $\mathbf{v}$  é tangente ao círculo e tem sentido igual ao do movimento.  
(b) Mostre que a velocidade escalar  $|\mathbf{v}|$  da partícula é a constante  $\omega R$ . O período  $T$  da partícula é o tempo necessário para que a partícula complete uma volta. Conclua que

$$T = \frac{2\pi R}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\pi}{\omega}$$

- (c) Encontre o vetor aceleração  $\mathbf{a}$ . Mostre que ele é proporcional a  $\mathbf{r}$  e que aponta para a origem. Uma aceleração com essa propriedade é chamada *aceleração centrípeta*. Mostre que o módulo do vetor aceleração é  $|\mathbf{a}| = R\omega^2$ .  
(d) Suponha que a partícula tenha massa  $m$ . Mostre que o módulo da força  $\mathbf{F}$  que é necessária para produzir esse movimento, denominada *força centrípeta*, é

$$|\mathbf{F}| = \frac{m|\mathbf{v}|^2}{R}$$

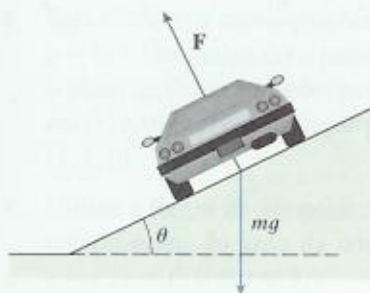


FIGURA PARA O PROBLEMA 2

2. Uma curva circular de raio  $R$  em uma autoestrada é inclinada em um ângulo de  $\theta$  de modo que um carro possa passar pela curva sem derrapar quando não existe atrito entre a estrada e os pneus. A perda de atrito ocorre, por exemplo, se a estrada está coberta com uma fina camada de água ou de gelo. A velocidade escalar nominal  $v_R$  associada a uma curva é a velocidade escalar máxima que o carro pode atingir sem derrapar. Suponha que um carro de massa  $m$  esteja transpondo a curva com a velocidade escalar nominal  $v_R$ . Duas forças estarão agindo sobre o carro: a força vertical,  $mg$ , devido ao peso do carro, e uma força  $\mathbf{F}$  exercida pela estrada, perpendicular a ela (veja a figura).

A componente vertical de  $\mathbf{F}$  equilibra o peso do carro, de forma que  $|\mathbf{F}| \cos \theta = mg$ . A componente horizontal de  $\mathbf{F}$  produz uma força centrípeta no carro de forma que, pela Segunda Lei de Newton e pela parte (d) do Problema 1,

$$|\mathbf{F}| = \sin \theta \frac{mv_R^2}{R}$$

- (a) Mostre que  $v_R^2 = Rg \tan \theta$ .  
(b) Determine a velocidade escalar nominal associada a uma curva circular de raio 120 m que é inclinada em um ângulo de  $12^\circ$ .  
(c) Suponha que os engenheiros projetistas queiram manter a inclinação em  $12^\circ$ , mas desejem aumentar a velocidade escalar nominal em 50%. Nesse caso, qual deve ser o raio da curva?

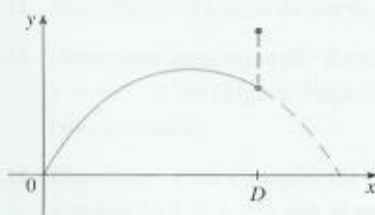
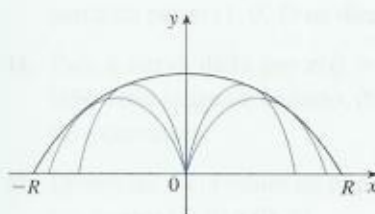


FIGURA PARA O PROBLEMA 3

3. Um projétil é disparado da origem com um ângulo de elevação  $\alpha$  e velocidade escalar inicial  $v_0$ . Supondo que a resistência do ar seja desprezível e que a única força que age sobre o projétil seja a gravidade,  $g$ , foi mostrado no Exemplo 5 da Seção 13.4 que o vetor posição do projétil é

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \alpha)t \mathbf{i} + [(v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2] \mathbf{j}$$

Também foi mostrado que o alcance máximo do projétil ocorre quando  $\alpha = 45^\circ$  e, nesse caso, o alcance é  $R = v_0^2/g$ .

- (a) Qual é o ângulo no qual o projétil deve ser disparado para atingir a altura máxima e qual é essa altura?  
(b) Fixe uma velocidade escalar inicial  $v_0$  e considere a parábola  $x^2 + 2Ry - R^2 = 0$ , cujo gráfico é exposto na figura. Mostre que o projétil pode atingir qualquer alvo



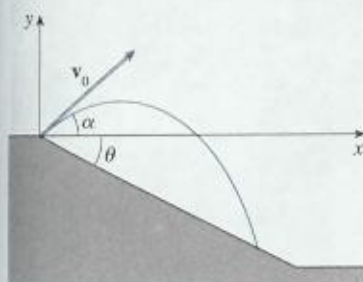


FIGURA PARA O PROBLEMA 4



FIGURA PARA O PROBLEMA 5

dentro ou na fronteira da região limitada pela parábola e pelo eixo  $x$ , e que o projétil não pode atingir nenhum alvo fora dessa região.

- (c) Suponha que o lançador do projétil tenha um ângulo de elevação  $\alpha$  quando mirando um alvo que esteja suspenso a uma altura  $h$  diretamente acima de um ponto  $D$  unidades à frente. O alvo é solto no instante em que o projétil é lançado. Mostre que o projétil sempre atinge o alvo, independentemente da velocidade  $v_0$ , desde que o projétil não atinja o solo "antes" de  $D$ .

4. (a) Um projétil é disparado a partir da origem em direção a um plano inclinado para baixo em um ângulo  $\theta$  com a horizontal. O ângulo de elevação do lançador e a velocidade escalar inicial do projétil são respectivamente  $\alpha$  e  $v_0$ . Encontre o vetor posição do projétil e as equações paramétricas da trajetória do projétil como funções do tempo  $t$ . (Despreze a resistência do ar.)  
 (b) Mostre que o ângulo  $\alpha$  de elevação que vai maximizar o alcance do projétil no plano inclinado é a metade do ângulo entre o plano e a vertical.  
 (c) Suponha que o projétil seja lançado sobre um plano inclinado para cima cujo ângulo de inclinação é  $\theta$ . Mostre que, a fim de maximizar o alcance (ladeira acima), o projétil deverá ser disparado em direção à metade do ângulo entre o plano e a vertical.  
 (d) Em um artigo apresentado em 1686, Edmond Halley resumiu as leis da gravitação e do movimento de projéteis e as aplicou à artilharia. Um dos problemas propostos por ele envolvia disparar um projétil para atingir um alvo a uma distância  $R$  em um plano inclinado para cima. Mostre que o ângulo no qual o projétil deve ser disparado para atingir o alvo, mas usando a menor quantidade de energia, é o mesmo que o ângulo da parte (c). (Use o fato de que a energia necessária para disparar o projétil é proporcional ao quadrado da velocidade inicial, assim, minimizar a energia equivale a minimizar a velocidade inicial.)

5. Uma bola rola de uma mesa com uma velocidade escalar de  $0,5 \text{ m/s}$ . A mesa tem  $1,2 \text{ m}$  de altura.  
 (a) Determine o ponto no qual a bola atinge o solo e encontre sua velocidade escalar no instante do impacto.  
 (b) Encontre o ângulo  $\theta$  entre a trajetória da bola e a reta vertical que passa pelo ponto de impacto (veja a figura).  
 (c) Suponha que a bola repique no solo no mesmo ângulo com o qual ela o atinge, mas que perca 20% de sua velocidade escalar em virtude da energia absorvida no impacto. Onde a bola atinge o chão no segundo repique?

6. Determine a curvatura da curva com equações paramétricas

$$x = \int_0^t \sin\left(\frac{1}{2} \pi \theta^2\right) d\theta \quad y = \int_0^t \cos\left(\frac{1}{2} \pi \theta^2\right) d\theta$$

7. Se um projétil é disparado com ângulo de elevação  $\alpha$  e velocidade escalar inicial  $v$ , as equações paramétricas de sua trajetória são

$$x = (v \cos \alpha)t \quad y = (v \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

(Veja o Exemplo 5 na Seção 13.4.) Sabemos que o alcance (distância horizontal percorrida) é maximizado quando  $\alpha = 45^\circ$ . Qual valor de  $\alpha$  maximiza a distância total percorrida pelo projétil? (Dê sua resposta com precisão de um grau.)

8. Um cabo tem raio  $r$  e comprimento  $L$  e está enrolado, sem sobreposição, em um carretel de raio  $R$ . Qual é o menor comprimento ao longo do carretel que é coberto pelo cabo?