Limites de Funções de uma Variável Real

Cristiana Andrade Poffal

Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

February 18, 2025

Limites Especiais

p.46

$\frac{0}{0} \to$ Forma Indeterminada

Observe os limites:

$\frac{0}{0}$ a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}$

$\frac{0}{0}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{4x} = \frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

∞^0 c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^{1/x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\cdot x} = \lim\limits_{x\to 0} e = e$

∞^0 d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2^x)^{2/x} = \lim\limits_{x\to +\infty} 2^{x\cdot\frac{2}{x}} = 2^2 = 4$

$\frac{\infty}{\infty}$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} 1 = 1$

$\frac{\infty}{\infty}$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2$

$\infty - \infty$ g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 0 = 0$

$\infty - \infty$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty} [x - (x+1)] = \lim\limits_{x\to +\infty} [x - x - 1] = \lim\limits_{x\to +\infty} -1 = -1$

Indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$

Função Racional

Em um limite de uma função racional do tipo $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, quando o denominador e o numerador forem ambos nulos em $x = a$:

1) fatoram-se o numerador e o denominador,

2) cancelam-se seus fatores comuns.

Assim, pode-se reduzir a fração à outra, onde o numerador e o denominador não sejam mais ambos nulos em $x = a$.

Se isso acontecer, obtém-se o limite por substituição na fração simplificada.

Exemplo: Calcule os limites:

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 - x}{x^2 - x}$

b) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$

c) $\lim_{x \to 7} \dfrac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 - x}{x^2 - x}$

Substituir x por zero $\rightarrow \dfrac{0^3 - 0}{0^2 - 0} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ Forma Indeterminada

Fatorar o numerador e o denominador:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\cdot(x^2-1)}{\cancel{x}(x-1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0^2-1}{0-1}$$

$$= \frac{-1}{-1} = 1$$

colocar o fator comum em evidência

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x}{x^2 - x} = 1}$$

Substituir x por 3:

$$\frac{3^2 - 2.3 - 3}{3^2 - 5.3 + 6} = \frac{9 - 6 - 3}{9 - 15 + 6} = \frac{0}{0}$$

Forma Indeterminada

b) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{}$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{array}\right\}$ raízes $\rightarrow$ $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$ $\nearrow 3$ $\searrow -1$

$x^2 - 2x - 3 = 1.(x-3)[x-(-1)] = (x-3)(x+1)$

c) $\lim_{x \to 7} \dfrac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

Função Irracional

Em uma função algébrica irracional, uma maneira de determinar o limite de uma função para qual a substituição direta leva a uma forma $\frac{0}{0}$ é usar a técnica de racionalização.

Essa técnica pode ser usada para racionalizar o denominador ou o numerador.

Outra forma alternativa consiste em realizar mudanças de variáveis adequadas que eliminem os termos de expoentes fracionários.

Exemplo: Resolva o limite: $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

Indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$

Se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ ou $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$, divide-se o numerador e o denominador pela **maior potência** de x que aparece **no denominador.**

Exemplo: Calcule os limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+4}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5}{x^3-3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-x^3+8}{x^3-x^2+1}$

Indeterminação do tipo $\infty - \infty$

Para resolver limites do tipo $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \infty - \infty$, utilizam-se artifícios algébricos para se obter indeterminações do tipo $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Exemplo: Resolva os limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [x(\sqrt{x^2 + 1} - x)]$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{3x^2 + x} - 2x)$

Indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$

Se $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0 \cdot \infty$, transforma-se o limite para que resulte em indeterminação $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, por meio de artifícios algébricos.

Exemplo: Calcule: $\lim_{x \to 0} [(1 - cos^2(x)) \cdot cosec(x)]$.