GABARITO - TAREFA 7 – NOTA N3 – TURMA F - 02/2021

Questão 1 (9 pontos): Dadas as integrais abaixo, identifique qual é a integral imediata (pode ser resolvida por substituição simples – formulário) e qual é a integral que deve ser resolvida utilizando a técnica de integração por partes. Em cada uma delas indique a substituição apropriada e calcule a integral.

$a) \int x\cos(5x)dx \rightarrow$ integral por partes

Escolhemos $u = 5x \Rightarrow du = 5dx$

$$dv = \cos(5x)dx \Rightarrow v = \int dv = \frac{1}{5}\int 5\cos(5x)dx \Rightarrow v = \frac{1}{5}sen\,(5x)$$

Aplicamos a fórmula da integral por partes $\int udv = u.v - \int vdu$

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos(5x)dx}_{dv} = \frac{1}{5}\underbrace{x}_{u}\underbrace{(sen(5x))}_{v} - \frac{1}{5}\int 5\,\underbrace{sen(5x)}_{v}\,\underbrace{dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{5}\mathrm{x.\,sen}(5\mathrm{x}) + \frac{1}{25}\cos(5\mathrm{x}) + \mathrm{C}$$

$b) \int x\cos(5x^2)dx \rightarrow$ integral imediata por substituição $\int \cos(u)du$

Escolhemos $u = 5x^2 \Rightarrow du = 10xdx$

$$\frac{1}{10}\int 10x\cos(5x^2)dx = \frac{1}{10}sen(5x^2) + C$$

Questão 2 – 5 (8 pontos cada): Dadas as integrais abaixo, identifique qual a técnica a ser usada em cada integral (completar quadrados, integral racional por frações parciais ou divisão de polinômios, integral irracional por substituição) e calcule cada integral.

$$2) \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$$

Como temos um polinômio de grau 2 no denominador com raízes imaginárias(não reais) temos que completar quadrados

$$\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} + 5 = \mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} + 1 - 1 + 5 = (\mathrm{x} + 1)^2 + 4$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \int \frac{du}{(u)^2 + a^2} = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{(x+1)}{2}\right) + C$$

$$3) \int \frac{(x-9)}{x^2 - x - 2}dx = \int \frac{(x-9)}{(x-2)(x+1)}dx$$

O denominador pode ser decomposto em dois polinômios de grau 1
Integral de função racional, usamos a decomposição em frações parciais

$$\frac{(x-9)}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)}$$

$x - 9 = A(x+1) + B(x-2)$

$x - 9 = Ax + A + Bx - 2B$ *fazendo a igualdade de polinômios*
$A + B = 1 \rightarrow A = 1 - B$
$A - 2B = -9 \rightarrow 1 - B - 2B = -9 \rightarrow B = {}^{10}/_{3} \quad e\ A = {}^{-7}/_{3}$

$$\int \frac{(x-9)}{(x-2)(x+1)}dx = \int \frac{A}{(x-2)}dx + \int \frac{B}{(x+1)}dx = -\frac{7}{3}\int \frac{1}{(x-2)}dx + \frac{10}{3}\int \frac{1}{(x+1)}dx$$

$$= -\frac{7}{3}ln(x-2) + \frac{10}{3}ln(x+1) + C$$

4) $\displaystyle\int \frac{x-1}{3x^3+6x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x(x^2+2)}dx$

Integral de função racional, usamos a decomposição em frações parciais

$$\frac{x-1}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} = \frac{A(x^2+2) + (Bx+C)x}{x(x^2+2)}$$

$x - 1 = Ax^2 + 2A + Bx^2 + Cx$ *fazendo a igualdade de polinômios*

$A + B = 0 \rightarrow A = -B$
$C = 1$
$2A = -1 \rightarrow A = -{}^{1}/_{2} \quad \rightarrow B = {}^{1}/_{2} \quad e \quad C = 1$

$$\frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x(x^2+2)}dx = \frac{1}{3}\left(\int \frac{A}{x}dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+2}dx\right) = -\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} + \int \frac{1/6\,x + 1/3}{x^2+2}dx$$

$$= -\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{6}\int \frac{x}{x^2+2}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+2}dx = -\frac{1}{6}ln(x) + \frac{1}{12}ln(x^2+2) + \frac{1}{3\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

5) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+1}dx$ integral de função irracional

$$\int \frac{x^{1/4}}{x^{1/2}+1}dx$$

Neste caso, fazemos a seguinte substituição: $x = y^n,\ onde\ \ n = m.m.c.(4,2)$
$x = y^4,\ portanto\ dx = 4y^3dy\ \ \rightarrow y = x^{1/4}$

$$\int \frac{(y^4)^{1/4}}{(y^4)^{1/2}+1}4y^3\text{dy} = 4\int \frac{y.y^3dy}{y^2+1} = 4\int \frac{y^4dy}{y^2+1}$$

A integral resultante da substituição é uma integral racional onde $grau\,P(x) > grau\,G(x)$, então fazemos a divisão $\frac{4y^4}{y^2+1}$

$$\frac{4y^4}{y^2+1} = 4y^2 - 4 + \frac{4}{y^2+1}$$

$$4\int \frac{y^4 dy}{y^2+1} = \int \left(4y^2 - 4 + \frac{4}{y^2+1}\right) dy = \frac{4y^3}{3} - 4y + 4arctg(y)\ + C$$

$$\int \frac{x^{1/4}}{x^{1/2}+1} dx = \frac{4x^{3/4}}{3} - 4x^{1/4} + 4arctg(x^{1/4})\ + C$$

Questão 6 (9 pontos): Explique como você resolveria cada uma das integrais (não precisa resolver, apenas identificar e explicar qual a técnica a ser usada).

$a)\int \frac{x}{x^2+2} dx$ é uma integral $\int \frac{du}{u}$, onde fazemos a substituição $u = x^2 + 2\ e\ du = 2xdx$

$b)\ \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx$ é uma integral $\int u^n du$, onde fazemos a substituição $u = x^2 + 2\,, du = 2xdx\ e\ n = -1/2$

$c)\int \frac{1}{x^2+2} dx$ integral imediata $\int \frac{du}{u^2+a^2}$, onde $u = x\,,\ \ du = dx\ e\ a = \sqrt{2}$

$d)\int \frac{x^2}{x^2+2} dx$, integral de função racional, sendo o grau do numerador igual ao grau do denominador, dividimos os polinômios.

Uma ótima tarefa!!