IMEF INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

FURG

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

PROFª. DENISE MARIA VARELLA MARTINEZ

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = ?$$

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = ?$$

$$\int_{a+h}^{b} f(x)dx = ?$$

Até o momento, estudamos integrais definidas como, por exemplo, a integral $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$ onde o domínio da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ é dado por $Df = R - \{0\}$ e o intervalo de integração é um intervalo fechado pertencente ao domínio da função.

Em resumo, na integral definida exigimos que a função seja contínua no intervalo de integração e que o intervalo de integração seja fechado. E quando isso não ocorre? Vamos analisar as integrais abaixo:

$$a) \int_{-\infty}^{2} \frac{1}{x^2}dx, \quad b) \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx, \quad c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx, \quad d) \int_{0}^{2} \frac{1}{x^2}dx,$$

As integrais a,b e c apresentam limites de integração infinitos (intervalo de integração não é fechado).

A função integrando da integral d) não é contínua no intervalo de integração, apresenta descontinuidade infinita em $x = 0$.

As integrais dos itens a,b,c e d são chamadas de INTEGRAIS IMPRÓPRIAS.

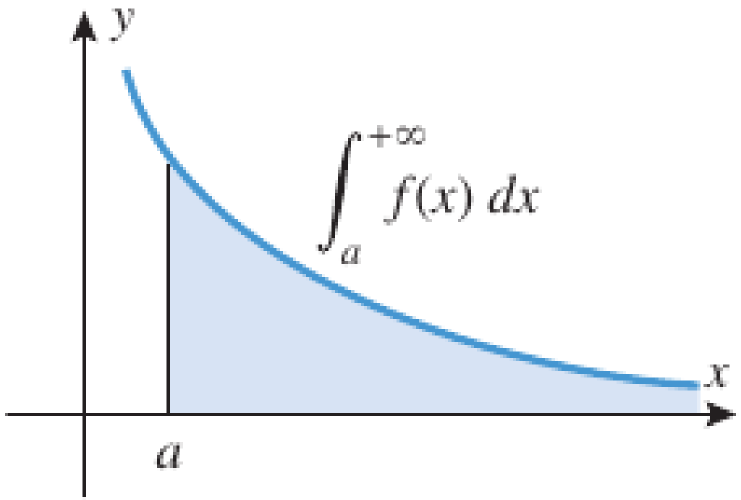
1. INTEGRAIS IMPRÓPRIAS COM LIMITES DE INTEGRAÇÃO INFINITOS (1ª ESPÉCIE):

a) Se a função $f(x)$ é contínua no intervalo $[a,+\infty)$, definimos a integral imprópria de $f(x)$ como sendo:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

b) Se a função $f(x)$ é contínua no intervalo $(-\infty,b]$, definimos a integral imprópria como sendo:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

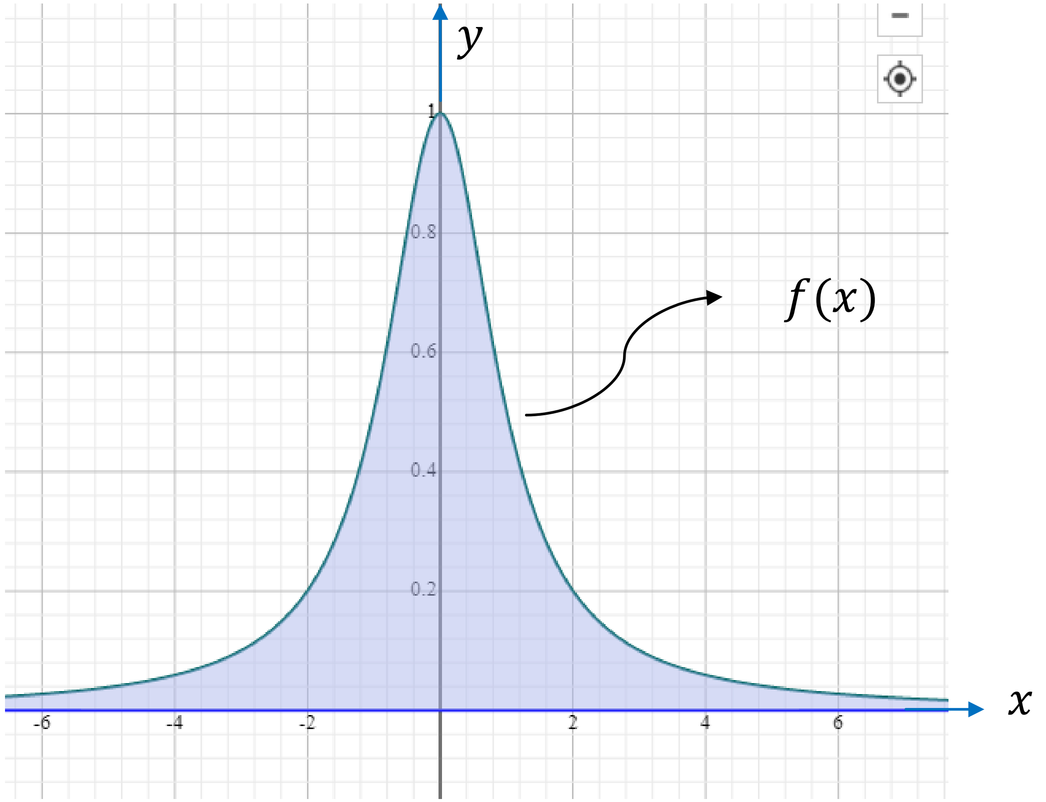


Se o limite existe dizemos que a integral imprópria CONVERGE.

Se o limite não existe dizemos que a integral imprópria DIVERGE.

c) Se $f(x)$ é contínua no intervalo $(-\infty,+\infty)$, definimos a integral imprópria como sendo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx$$

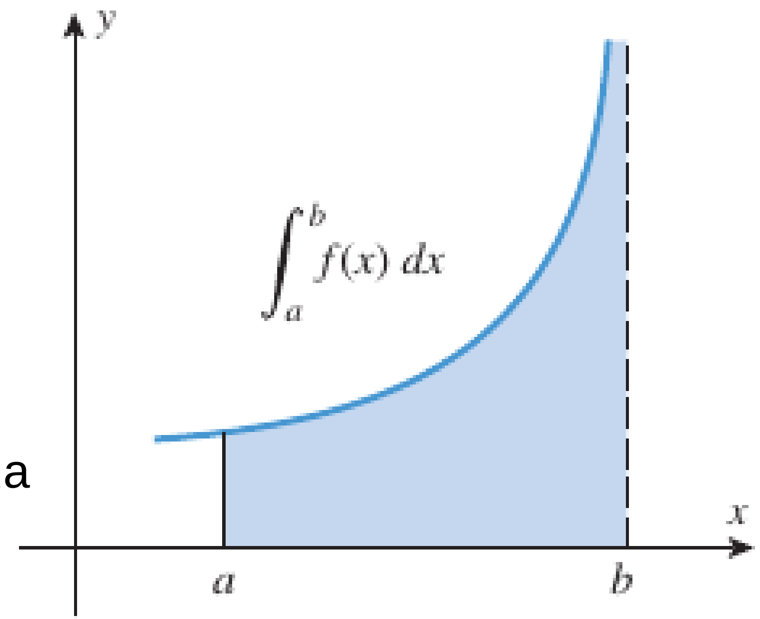


Se ambos os limites existirem dizemos que a integral imprópria CONVERGE, e no caso contrário dizemos que a integral imprópria DIVERGE.

2. INTEGRAIS IMPRÓPRIAS COM INTEGRANDOS DESCONTINUOS (2ª ESPÉCIE):

a) Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo $(\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ e possui uma descontinuidade infinita no ponto $x = a$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \to 0} \int_{a+h}^b f(x)dx,$$



b) Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b})$ e é descontínua no ponto $x = b$, então:

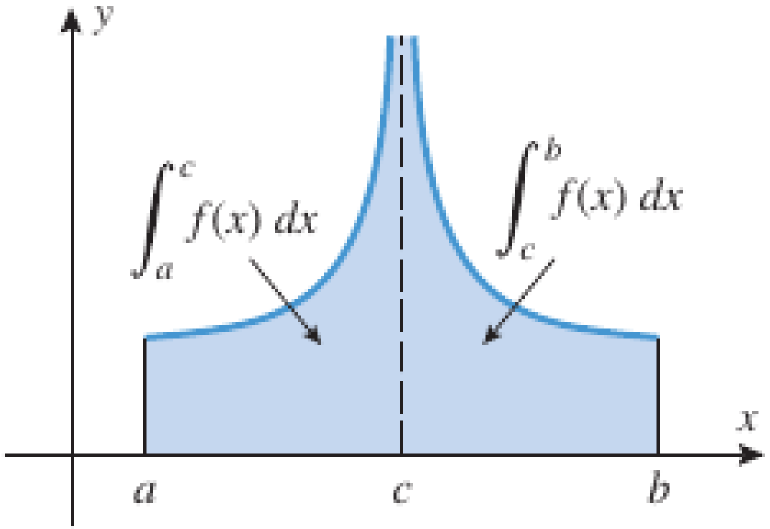
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \to 0} \int_a^{b-h} f(x)dx,$$

Se o limite existe dizemos que a integral imprópria CONVERGE.

Se o limite não existe dizemos que a integral imprópria DIVERGE.

c) Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{c})$ e $(c, b]$, sendo descontínua no ponto $x = c, \mathrm{a} < \mathrm{c} < \mathrm{b}$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} \int_a^{c-h} f(x)dx + \lim_{h\to 0} \int_{c+h}^b f(x)dx,$$



Se os limites existirem dizemos que a integral imprópria CONVERGE, e no caso contrário dizemos que a integral imprópria DIVERGE.