CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

IMEF INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

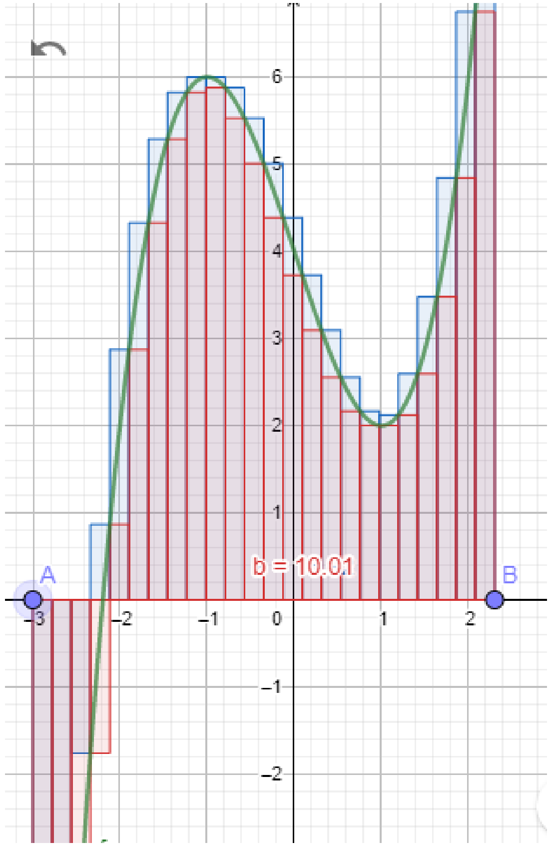
FURG

PROFª. DENISE MARIA VARELLA MARTINEZ

A INTEGRAL DEFINIDA

SOMA DE REIMANN, DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

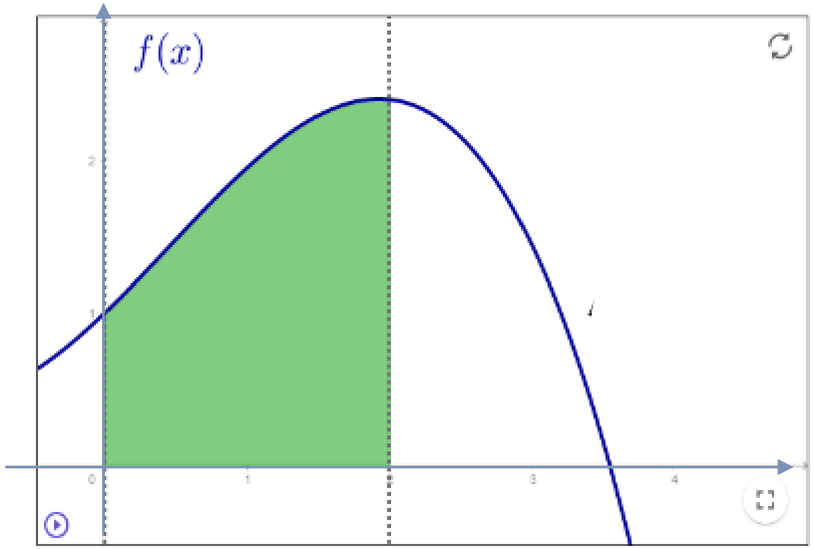
$$\int_a^b f(u)du = ?$$



Fonte: geogebra.org

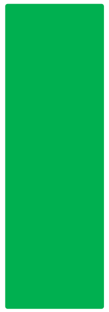
Área:

Consideremos agora o problema de definir a área da região plana, delimitada pelo gráfico de uma função contínua $f(x)$ e pelas retas $x = 0\ (eixo\ y),\ y = 0\ (eixo\ x)\ e\ x = 2$. A função está definida no intervalo [0,2], conforme mostra a figura.



Para definir a área de uma figura plana aproximamos a figura por polígonos cujas áreas podem ser calculadas pelos métodos da geometria elementar, ou seja,

Área de um retângulo = base x altura

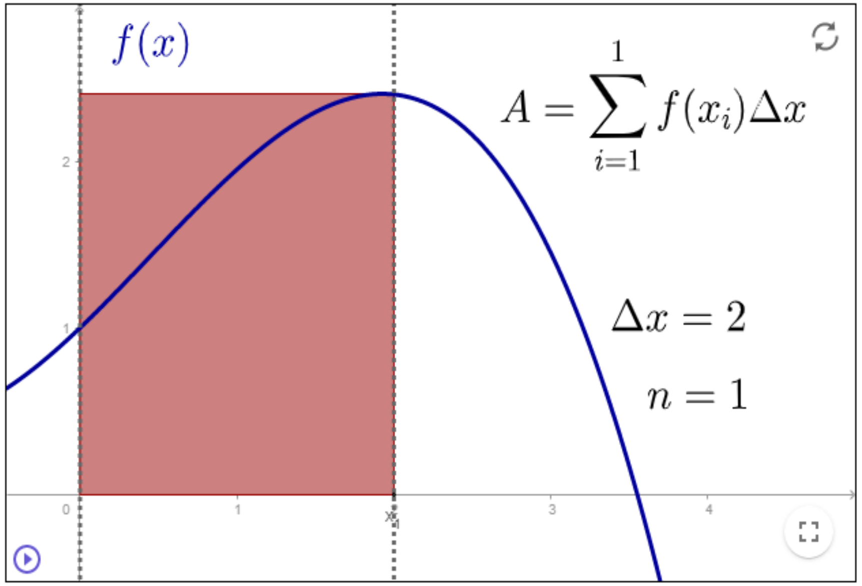


altura

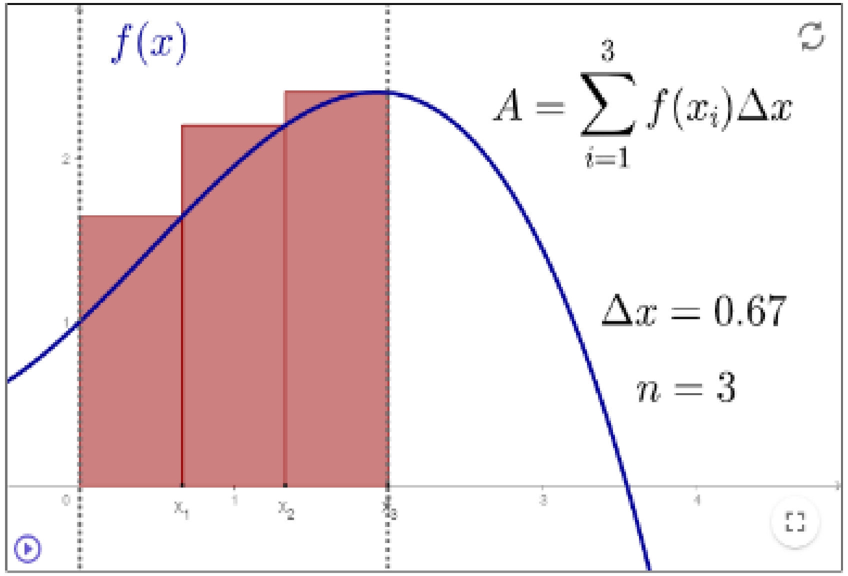
base

Assim, para determinar a área da região limitada pela curva, pelos eixos coordenados e pela reta $x = 2$, podemos dividir o intervalo [0,2] em n subintervalos, isto é, fazemos uma partição do intervalo [0,2], $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2$, chamado de partição do intervalo

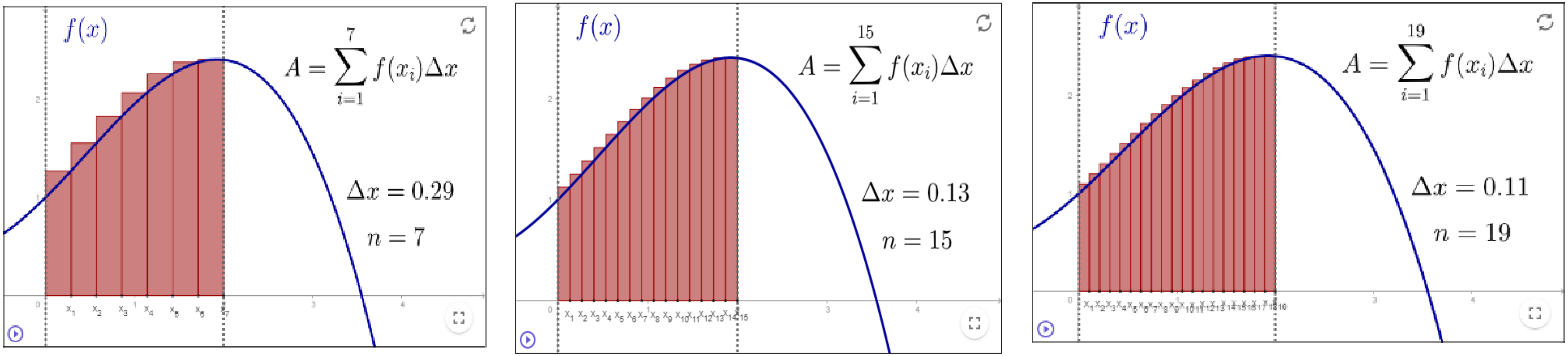
a)



b)



Podemos verificar na figura b) que os subintervalos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ representam a base de cada retângulo, sendo $i = 1,2.\dots n$. Cada retângulo tem uma altura correspondente ao valor de $f(x_i)$.



Observa-se, nas figuras, que à medida que n cresce e que cada $\Delta x_i, i = 1, \ldots . n$ torna-se muito pequeno, a soma das áreas retangulares aproxima-se do que intuitivamente entendemos como a área S.

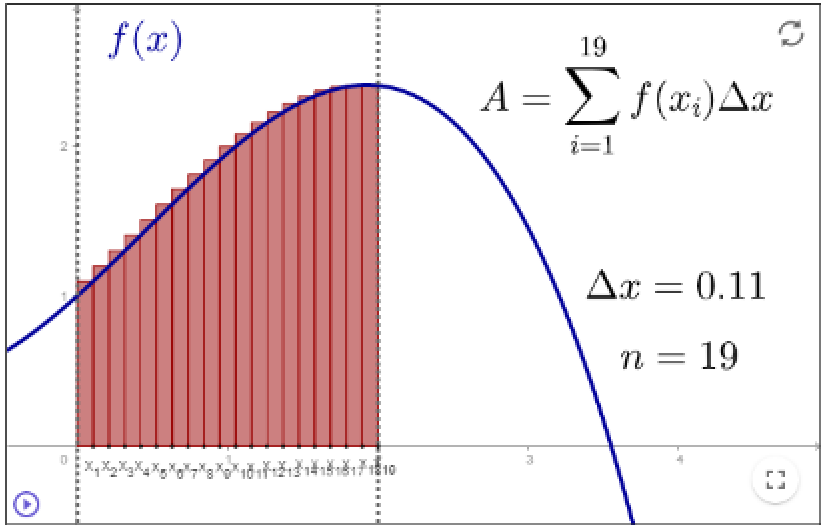
Desta forma a soma das áreas dos n retângulos é dada por

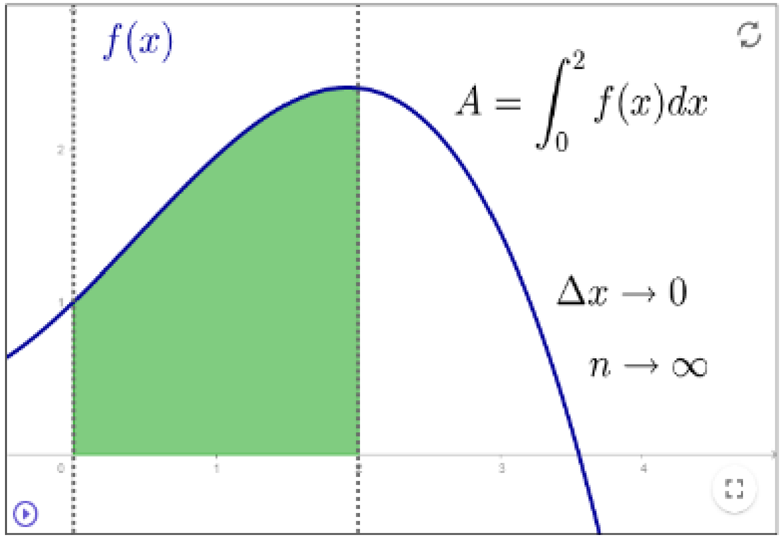
$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + f(x_3)\Delta x_3 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i .$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$ é chamada de **Soma de Riemann** da função $\boldsymbol{f(x)}$.

Podemos, assim, dizer que a área da região limitada pela função $f(x)$, pelos eixos coordenados e pela reta $x = 2$, no intervalo [0,2] é dada por

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_0^2 f(x)\,dx$$





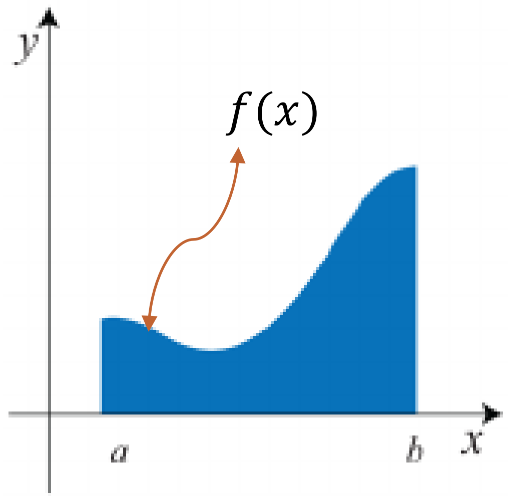
onde a integral $\int_0^2 f(x)\,dx$ é chamada **de integral definida**

Fonte das figuras: https://www.geogebra.org/m/TqjHVHky

INTEGRAL DEFINIDA

DEFINIÇÃO: Seja $f(x)$ uma função contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$, então a integral definida de $f(x)$ de a até b é dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i,$$



desde que o limite exista. Se a $\int_a^b f(x)\,dx$ *existe*, dizemos que $f(x)$ é integrável em [a,b].

Na integral definida, a é o limite inferior de integração e b o limite superior de integração.

PROPRIEDADES:

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções integráveis no intervalo fechado [a,b], então:

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, sendo k é um número real

2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

3. Se $a < c < b$ e a função $f(x)$ é integrável em $[a, c]\ e\ [c, b]$, então $f(x)$ é integrável em $[a, b]$: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

4. $\int_a^b k\ dx = k[b-a]$.