

# CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

PROF<sup>a</sup>. DENISE MARIA VARELLA MARTINEZ

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = ?$$

## INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

### EXEMPLOS

$$\int_a^b f(x)dx = ? \quad a \notin Df$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = ?$$

1. Quais das integrais abaixo são integrais impróprias e quais são integrais definidas? Explique e as resolva.

a)  $\int_1^2 \frac{dx}{x^5}$

b)  $\int_0^2 \frac{dx}{x^5}$

c)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$

d)  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^5}$

e)  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^5}$

- Antes de fazer a análise, vamos determinar:

- O domínio da função  $f(x) = \frac{1}{x^5} \rightarrow Df = R - \{0\}$

- A integral indefinida  $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$

a)  $\int_1^2 \frac{dx}{x^5}$

É uma **integral definida**, pois  $f(x)$  está definida no intervalo fechado  $[1,2]$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^5} = \left( -\frac{1}{4x^4} \right)_1^2 = \left( -\frac{1}{4(2)^4} - \left( -\frac{1}{4(1)^4} \right) \right) = \left( -\frac{1}{64} + \frac{1}{4} \right) = \left( \frac{-1 + 16}{64} \right) = \frac{15}{64}$$



b)  $\int_0^2 \frac{dx}{x^5}$       Integral imprópria  
de 2<sup>a</sup> espécie

É uma **integral imprópria**, pois  $f(x)$  apresenta descontinuidade infinita em  $x = 0$  ( $\notin Df$ ).

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^5} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{0+h}^2 \frac{dx}{x^5} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{4x^4} \right)_{0+h}^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{4(2)^4} + \frac{1}{4(0+h)^4} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{64} + \frac{1}{4(h)^4} \right) = +\infty$$

Integral diverge

c)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$       Integral imprópria  
de 1<sup>a</sup> espécie

É uma **integral imprópria**, pois apresenta limite infinito de integração, intervalo de integração  $[1, +\infty)$ .

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^5} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{4x^4} \right)_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\underbrace{\left( \frac{1}{4(b)^4} \right)}_{zero} + \frac{1}{4(1)^4} \right) = \frac{1}{4}$$

Integral converge





d)  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^5}$  Integral imprópria de 1<sup>a</sup> espécie

É uma **integral imprópria**, pois apresenta limite infinito de integração, intervalo de integração  $(-\infty, -1]$ .

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^5} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} \frac{dx}{x^5} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{4x^4} \right)_a^{-1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{4(-1)^4} + \underbrace{\frac{1}{4(a)^4}}_{\text{zero}} \right) = -\frac{1}{4} \quad \text{Integral converge}$$

e)  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^5}$  Integral imprópria de 2<sup>a</sup> espécie

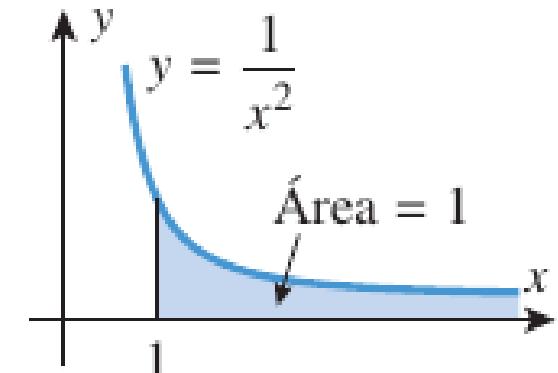
É uma **integral imprópria**, pois a função integrando apresenta descontinuidade em  $x = 0$ .

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^5} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-1}^{0-h} \frac{dx}{x^5} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{4x^4} \right)_{-1}^{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\underbrace{\left( \frac{1}{4(-h)^4} \right)}_{\text{infinito}} + \frac{1}{4(-1)^4} \right) = -\infty \quad \text{Integral diverge}$$

## 2. Calcule o valor da integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{x} \right)_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{b} + 1 \right) = 1 \quad \text{A integral converge para 1}$$

Podemos dizer que a área abaixo da curva é igual a 1, a partir de  $x = 1$ .

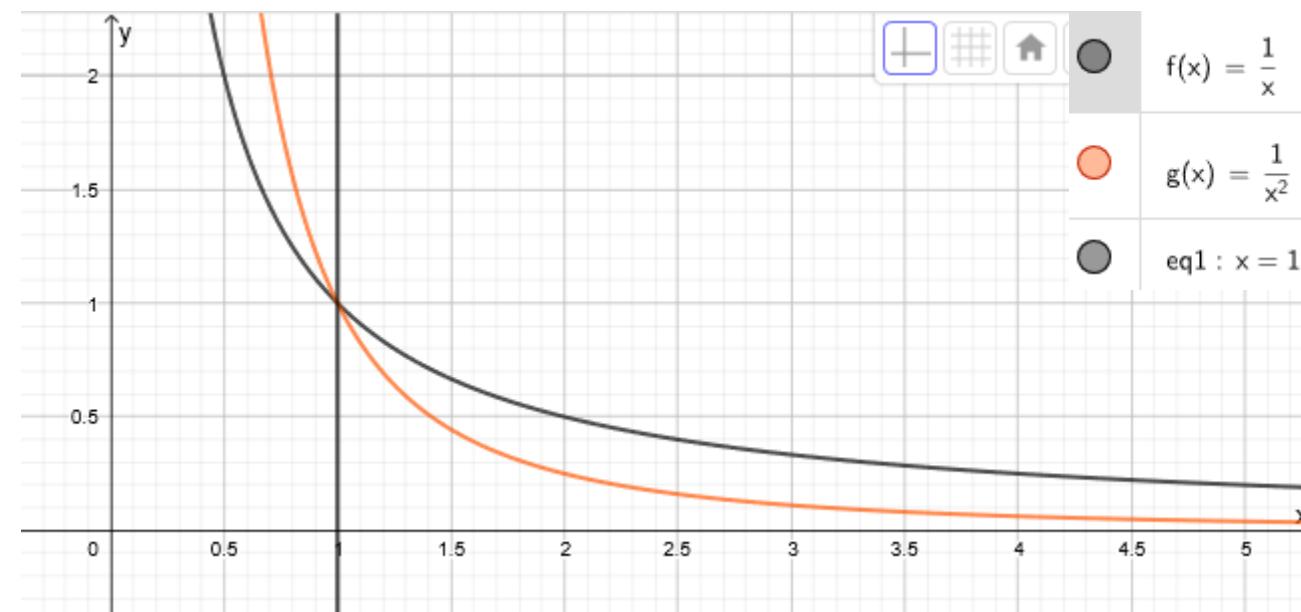


## 3. Calcule o valor da integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln|x|)_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{\ln b}_{+\infty} - \underbrace{\ln 1}_{\text{zero}} \right) = +\infty \quad \text{A integral diverge}$$

Os exemplos 2 e 3 nos mostram que, a integral imprópria  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  converge, enquanto  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  diverge. Em termos geométricos, isso significa que a área sob a curva  $y = \frac{1}{x^2}$  à direita de  $x = 1$  é finita, enquanto a área sob a curva  $y = \frac{1}{x}$  à direita de  $x = 1$  é infinita.

A razão para a diferença é que, quando  $x$  tende a mais infinito,  $\frac{1}{x^2}$  tende a zero mais depressa que  $\frac{1}{x}$ , como mostra a figura.

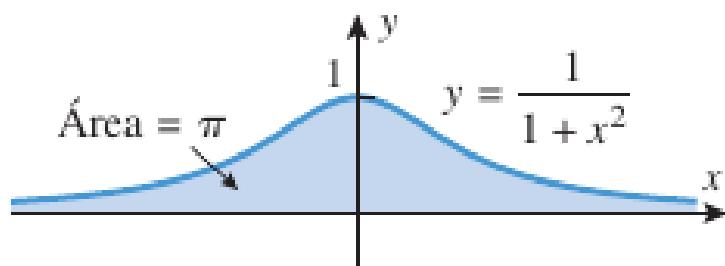


4. Mostre que a integral imprópria  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$  converge para  $\pi$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} =$$

Integral imprópria  
de 1ª espécie

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg x)_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg x)_0^b = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg a) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 0) =$$



$$= \left( 0 - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) + \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctg \left( \frac{u}{a} \right) + C, a \neq 0$$

5. Calcule  $\int_0^1 \ln(x)dx$        $Df = (0, +\infty)$

Integral imprópria  
de 2<sup>a</sup> espécie

$$\int_0^1 \ln(x)dx = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{0+h}^1 \ln x dx = \lim_{h \rightarrow 0} (x \ln x - x) \Big|_{0+h}^1$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \underbrace{1 \ln 1}_0 - 1 \right) - (h \ln h - h)$$

$$= -1 - \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} h \ln h}_{0 \cdot \infty} = -1 - \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln h}{h^{-1}}}_{\infty \infty} \text{ L'Hospital}$$

$$= -1 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h}}{-h^{-2}} = -1 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = -1 + \lim_{h \rightarrow 0} h = -1, \text{ converge}$$

*integral por partes*  $\int u dv = u \cdot v - \int v du$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx, \quad dv = dx$$

$$\Rightarrow v = \int dx \Rightarrow v = x$$

$$\int \underbrace{\ln x}_u \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x \ln(x)}_v - \int \underbrace{x \frac{dx}{x}}_v \underbrace{\frac{x}{du}}_u = x \ln(x) - x + C$$

6. Determine se as integrais convergem ou divergem

a)  $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$        $Df = (-3,3); \quad 9 - x^2 > 0$       Integral imprópria de 2<sup>a</sup> espécie

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{3-h} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \arcsen \frac{x}{3} \right)_0^{3-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \arcsen \left( \frac{3-h}{3} \right) - \underbrace{\arcsen \left( \frac{0}{3} \right)}_0 \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen \left( \frac{u}{a} \right) + C, \quad a^2 > u^2, \quad a \neq 0$$

A integral imprópria converge para  $\frac{\pi}{2}$

$$b) \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$Df = R - \{1\}$$

Integral imprópria  
de 2ª espécie

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}}_{\substack{\text{integral imprópria} \\ \text{com integrando} \\ \text{descontínuo}}} + \underbrace{\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}}_{\substack{\text{integral imprópria} \\ \text{com integrando} \\ \text{descontínuo}}}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \int_0^{1-h} \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_{1+h}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \left( -\frac{1}{x-1} \right)_0^{1-h} + \left( -\frac{1}{x-1} \right)_{1+h}^2 \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \left( -\frac{1}{1-h-1} + \frac{1}{0-1} \right) + \left( -\frac{1}{2-1} + \frac{1}{1+h-1} \right) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \left( -\frac{1}{-h} + \frac{1}{-1} \right) + \left( -\frac{1}{1} + \frac{1}{h} \right) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{1}{h} - 1 \right) + \left( -1 + \frac{1}{h} \right) \right] = +\infty \end{aligned}$$

Vamos resolver a integral indefinida

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int (x-1)^{-2} dx = \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x-1}$$

$\underbrace{u}_{du=dx}$

A integral imprópria diverge