Derivadas de Funções de uma Variável Real

Cristiana Andrade Poffal

Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

May 21, 2025

Derivadas de Funções Reais de Uma Variável

A derivada envolve a variação ou a mudança no comportamento de vários fenômenos. Para melhor compreender a definição de derivada, abordam-se três problemas do Cálculo que envolvem variação e movimento:

A) O problema da reta tangente: sejam $f : D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real e $x_0 \in D(f)$, como obter a equação da reta tangente ao gráfico de f que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$?
B) O problema da velocidade e da aceleração: seja $s : D(s) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real que descreve o deslocamento de um objeto no plano e $t_0 \in D(s)$, como determinar a velocidade e a aceleração do objeto em $t = t_0$?
C) O problema de máximos e mínimos: seja $f : D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real qualquer. Como encontrar os pontos extremos do gráfico de f?

Definição da Derivada

Seja $f : D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real.

Definição: A derivada de f no ponto de abscissa $x = x_0$ é definida como o número

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \tag{1}$$

supondo que o limite exista. Quando o limite (1) existir, diz-se que a função é derivável em $x = x_0$.

Notações para a derivada:
Algumas das notações mais usuais para a derivada são:

Notação “linha”(Joseph Lagrange): $f'(x)$, y'.

Notação de Leibniz: $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$, $\dfrac{d}{dx}[f(x)]$.

Notação de operador: $D_x[y]$.

Notação de Newton: $\dot{y}$.

Para indicar o valor de uma derivada em um determinado ponto $x = x_0$, utilizam-se as notações

$$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{d}{dx}[f(x)]\right|_{x=x_0}.$$

1º) Calcular $f'(x)$ 2º) Aplicar $x = x_0$ na $f'(x)$.

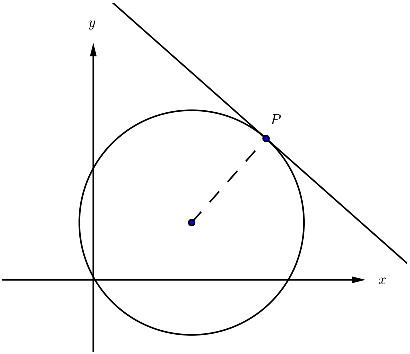
Exemplo: Calcule $f'(2)$ p/ $f(x) = x^2$.

1) $f'(x) = 2x$

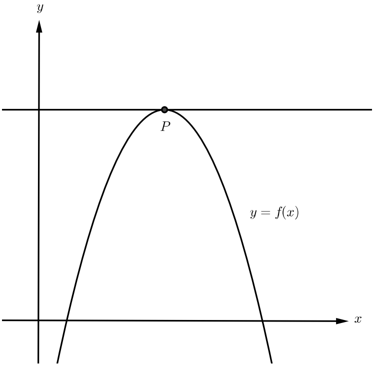
2) $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$

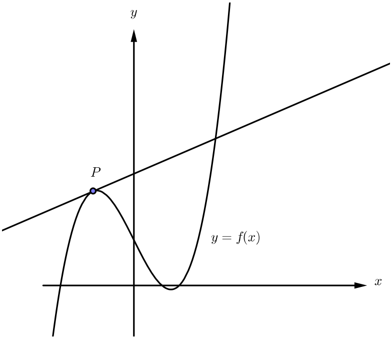
O Problema da Reta Tangente

Reta tangente a uma circunferência

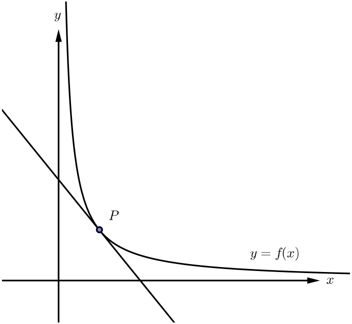


Para uma curva qualquer esta caracterização é mais difícil.





y
P
$y = f(x)$
x


y
P
y = f(x)
x

O problema em determinar a reta tangente em um ponto P consiste, basicamente, na determinação da inclinação (ou declividade) da reta procurada. Esta inclinação pode ser aproximada utilizando-se uma reta que passa pelo ponto de tangência e por outro ponto pertencente à curva. Tal reta é chamada de reta secante.

Sejam P e Q dois pontos pertencentes ao gráfico da função $f(x)$. Fazendo Q aproximar-se de P.

Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos da curva $y = f(x)$, então a declividade da reta secante que passa por estes dois pontos é escrita como:

$$m_{\text{sec}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

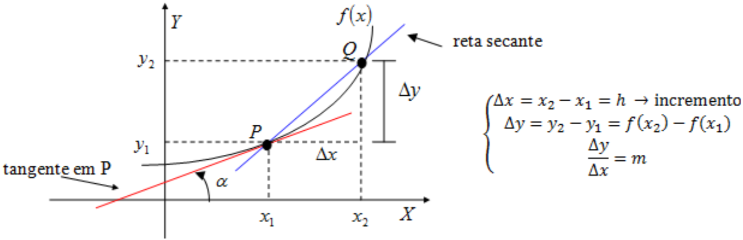


Figure: Cálculo da declividade.

Outras notações podem ser utilizadas para representar a declividade da reta secante, a saber:

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x},$$

onde $\Delta x = x_2 - x_1$. Ou,

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}. \tag{2}$$

Note que $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ representa a inclinação da reta secante (que intercepta a curva nos pontos P e Q como mostra a Figura 1). Se Δx é muito pequeno, isto é, $\Delta x \to 0$, então o ponto Q tende para o ponto P e a inclinação da reta secante PQ, tende a inclinação m_{tg} da reta tangente a função f no ponto P.

$$\boxed{m_{tg} = f'(x_0).}$$

Importante: A equação de uma reta não vertical que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ com coeficiente angular m pode ser escrita como:

$$y - f(x_0) = m(x - x_0). \tag{3}$$

A equação geral da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \tag{4}$$

onde $f'(x_0)$ é dito coeficiente angular da reta tangente m_{tg}.

Inclinação = coeficiente angular (taxa de variação)

Exemplo: Sendo $f(x) = x^3$, calcule a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $f(x)$ no $\underbrace{\text{ponto de abscissa 2}}_{x_0}$.

$f(x) = x^3$

1) $f'(x) = 3x^2$

2) $m = f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12 \to \boxed{m = 12}$

Eq. da reta tangente?

Usamos $y - y_0 = m(x - x_0)$

$x_0 = 2$

$y_0 = f(2) = 2^3 = 8$

$m = 12$

$$y - 8 = 12(x - 2)$$

$$y = 12x - 24 + 8 \rightarrow \boxed{y = 12x - 16}$$

Exemplo: Determine a eq. da reta tangente à $y = x^3 + 2x$ no pto de abscissa 1.

Sol:

Eq. reta: $y - y_0 = m(x - x_0)$

?

$x_0 = 1$

$y_0 = f(1) = 1^3 + 2.1 = 3$

$m = f'(1)$ $\rightarrow$ 1. $f'(x) = (x^3)' + (2x)' = 3x^2 + 2$

2. $f'(1) = 3.1^2 + 2 = 5 \rightarrow \boxed{f'(1) = 5 = m}$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 3 = 5(x - 1) \Rightarrow y = 5x - 5 + 3$$

$$\boxed{y = 5x - 2} \rightarrow \text{eq da reta tgte}$$