

# CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

PROF<sup>a</sup>. DENISE MARIA VARELLA MARTINEZ

## INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

$$\int f(x)dx = ?$$

$$\int f(u)du = ?$$

# INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO OU MUDANÇA DE VARIÁVEL

Algumas vezes, não temos a integral imediata de uma dada função. Entretanto, é possível substituir a variável da função a ser integrada, de modo a obtermos uma integral imediata. Essa técnica é análoga à regra da cadeia para derivação.

Suponha que tenhamos uma função  $g(x)$  e outra  $f$ , tal que  $f(g(x))$  esteja definida. Vamos calcular uma integral do tipo  $\int f(g(x))g'(x)dx$ , logo

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \quad (1).$$

Fazendo  $u = g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x)dx$ , e substituindo na equação (1), vem:

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

Se  $u = x$ , então  $du = dx$  e a integral é dita imediata!

Por exemplo, podemos facilmente determinar que  $\int x^7 dx = \frac{1}{8}x^8 + C$  aplicando a regra da potência, mas suponha que estejamos interessados em calcular

$$\int (3x + 5)^7 dx$$

Poderíamos expandir o integrando,  $(3x + 5)^7$ , e integrar termo a termo, mas o trabalho seria enorme. Em vez disso podemos fazer uma mudança de variável, fazendo:

$u = (3x + 5)$  de modo que  $du = 3dx$  ou  $dx = \frac{1}{3}du$ . Substituindo esses resultados na integral dada, obtemos:

$\int (3x + 5)^7 dx = \int u^7 \left(\frac{1}{3}du\right)$ , aplicamos a regra da potência e obtemos

$$\int (3x + 5)^7 dx = \int u^7 \left(\frac{1}{3}du\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8}u^8\right) + C = \frac{1}{24}u^8 + C = \frac{1}{24}(3x + 7)^8 + C$$

Podemos verificar o cálculo derivando a expressão:  $\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{24}(3x + 7)^8 + C \right] = \frac{8}{24}(3x + 7)^7(3) = (3x + 7)^7$

O que mostra que  $\frac{1}{24}(3x + 7)^8$  é a primitiva ou antiderivada de  $(3x + 7)^7$ .

$$6. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1, \quad \text{onde } u = u(x) \text{ e } du = u'(x)dx$$

**Exemplo 1.**  $\int (x^2 + 1)^2 x dx = ?$  neste caso, podemos fazer a seguinte substituição:

$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x dx, n = 2$ , e obtemos

$$\int (x^2 + 1)^2 x dx = \int u^2 \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \frac{(u)^{2+1}}{(2+1)} + C = \frac{1}{6} u^3 + C = \frac{(x^2 + 1)^3}{6} + C$$

Utilizando a mesma substituição precisamos multiplicar e dividir a integral por 2 para obtermos a diferencial  $du$  da função  $u$ , assim

$$\frac{1}{2} \int \underbrace{(x^2 + 1)^2}_u \underbrace{2x dx}_{du} = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^{2+1}}{(2+1)} = \frac{(x^2 + 1)^3}{6} + C = \frac{u^3}{6} + C$$

Dica: devemos escolher  $u$ , convenientemente, de tal forma que  $du = u' dx$  seja parte do integrando. Geralmente  $u$  é a função mais “complexa”.

Exemplo 2.  $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$ , reescrevendo a integral, vem  $\int \frac{(1+\ln x)^{1/2}}{x} dx$ .

Substituição:  $u = (1 + \ln x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$  ,  $n = 1/2$  , então temos uma integral  
 $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ .

$$\begin{aligned} \text{Assim, } \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx &= \\ &= \frac{(1 + \ln x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1} + C = \frac{(1 + \ln x)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2(1 + \ln x)^{3/2}}{3} + C \end{aligned}$$

Exemplo 3.  $\int \frac{x dx}{\sqrt[5]{x^2-1}}$ , reescrevendo a integral, vem  $\int (x^2-1)^{-\frac{1}{5}} x dx$

Substituição:  $u = (x^2 - 1) \Rightarrow du = 2x dx$ ,  $n = -1/5$ , então temos uma integral  $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ .

$$\int (x^2 - 1)^{-\frac{1}{5}} x dx = \frac{1}{2} \int (x^2 - 1)^{-\frac{1}{5}} 2x dx =$$

$$\int u^{-1/5} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \frac{(x^2 - 1)^{-4/5}}{-4/5} + C = -\frac{5(x^2 - 1)^{-4/5}}{8} + C$$

Exemplo 4.  $\int \frac{\cos(3x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(3x) + 2}} dx$

Substituição:  $u = (\operatorname{sen}(3x) + 2) \Rightarrow du = 3 \cos(3x) dx$ ,  $n = -1/2$ , então temos uma integral  $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ .

$$\int \frac{\cos(3x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(3x) + 2}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3 \cos(3x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(3x) + 2}} dx = \frac{1}{3} \frac{(\operatorname{sen}(3x) + 2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2} + 1} + C =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(\operatorname{sen}(3x) + 2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{sen}(3x) + 2)} + C$$

Exemplo 5.  $\int \frac{\text{sen}(2x)}{\sqrt{\text{sen}^2(x) + 1}} dx$

Substituição:  $u = \text{sen}^2(x) + 1 \Rightarrow du = 2\text{sen}(x)\cos(x) dx$ ,  $n = -1/2$ , então temos uma integral  $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ . Sabe-se que  $2\text{sen}(x)\cos(x) = \text{sen}(2x)$

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{sen}(2x)}{\sqrt{\text{sen}^2(x) + 1}} dx &= \int \underbrace{(\text{sen}^2(x) + 1)}_u^{-1/2} \underbrace{\text{sen}(2x) dx}_{du} = \\ &= \frac{(\text{sen}^2(x) + 1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2} + 1} + C = 2\sqrt{\text{sen}^2(x) + 1} + C \end{aligned}$$

Exemplo 6.  $\int \frac{\ln^2(x)}{x} dx$

Substituição:  $u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$ ,  $n = 2$ , então temos uma integral  $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ .

$$\int \frac{\ln^2(x)}{x} dx = \frac{(\ln(x))^{2+1}}{2+1} + C = \frac{(\ln(x))^3}{3} + C$$

Exemplo 7.  $\int x\sqrt{x^2 + 1} dx$

Substituição:  $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx$ ,  $n = 1/2$ , então temos uma integral  $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ .

$$\int x\sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int 2x\sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}{3} + C =$$

$$7. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, u > 0, \quad \text{onde } u = u(x) \text{ e } du = u'(x)dx$$

**Exemplo 8:**  $\int \frac{x \, dx}{x^2 + 1}$

fazendo  $u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2x dx$ , assim, para obtermos o du (diferencial da função u), precisamos multiplicar e dividir a integral por 2,

$$\int \frac{x \, dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x \, dx}{x^2 + 1} = \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|x| + C.$$

**Exemplo 9:**  $\int \frac{\cos(x) \, dx}{\sin(x) + 10}$

fazemos a seguinte substituição  $u = \sin(x) + 10 \Rightarrow du = \cos(x)dx$

$$\int \frac{\cos(x) \, dx}{\sin(x) + 10} = \int \frac{du}{u} = \ln(\sin(x) + 10) + C.$$

$$8. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1, \quad \text{onde } u = u(x) \text{ e } du = u'(x)dx$$

Exemplo 10:  $\int x^2 2^{2x^3} dx$

fazemos a seguinte substituição  $u = 2x^3 \Rightarrow du = 6x^2 dx$  e, para completar o  $du$ , multiplicamos e dividimos a integral por 6 e obtemos uma integral  $\int a^u du$

$$\int x^2 2^{2x^3} dx = \frac{1}{6} \int 6x^2 2^{2x^3} dx = \frac{2^{x^3}}{6 \ln 2} + C$$

Exemplo 11:  $\int 6^{2x} dx$

fazendo  $u = 2x \Rightarrow du = 2x dx$  e, para completar o  $du$ , multiplicamos e dividimos a integral por 2, assim

$$\int 6^{2x} dx = \frac{1}{2} \int 6^{2x} 2 dx = \frac{6^{2x}}{\ln 6} + C$$

$$9. \int e^u du = e^u + C$$

Exemplo 12:  $\int e^{2x+3} dx$

fazemos a seguinte substituição  $u = 2x + 3 \Rightarrow du = 2dx$  e, para completar o  $du$ , multiplicamos e dividimos a integral por 2, assim

$$\int e^{2x+3} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x+3} 2 dx = \frac{e^{2x+3}}{2} + C.$$

Exemplo 13.  $\int e^{x^3} x^2 dx$ , fazemos a substituição  $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$ , como temos no integrando  $x^2$ , simplesmente multiplicamos por 3 e dividimos por 3 o integrando. Agora, podemos calcular:

$$\int e^{x^3} x^2 dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} 3x^2 dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

**Exemplo 14.**  $\int x^3 e^{x^4+2} dx = ?$ , fazemos a substituição  $u = x^4 + 2 \Rightarrow du = 4x^3 dx$ , como temos no integrando  $x^3$ , simplesmente multiplicamos por 4 e dividimos por 4 o integrando. Agora, podemos calcular:

$$\int e^{x^4+2} x^3 dx = \int e^u \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int e^{x^4+2} 4x^3 dx = \frac{1}{4} e^{x^4+2} + C$$

**Exemplo 15:**  $\int \frac{e^{\arctg(x)}}{1+x^2} dx =$

fazemos a substituição  $u = \arctg(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$ , a integral está na forma  $\int e^u du = e^u + C$

$$\int \frac{e^{\arctg(x)}}{1+x^2} dx = e^{\arctg(x)} + C$$

$$10. \int \cos(u) du = \text{sen}(u) + C$$

**Exemplo 16.**  $\int e^x \cos(2e^x) dx$ , fazemos a substituição  $u = 2e^x \Rightarrow du = 2e^x dx$ , então temos  $\int \cos(u) du$ . Assim,

$$\int e^x \cos(2e^x) dx = \frac{1}{2} \int \cos(\underbrace{2e^x}_u) \underbrace{2e^x dx}_{du} = \frac{\text{sen}(2e^x)}{2} + C$$

$$11. \int \text{sen}(u) du = -\cos(u) + C$$

**Exemplo 17.**  $\int \text{sen}(x^2) 2x dx$ , fazemos a substituição  $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$ , Então temos  $\int \text{sen}(u) du$ . Assim,

$$\int \text{sen} \underbrace{x^2}_u \underbrace{2x dx}_{du} = -\cos(x^2) + C$$

$$12. \int \operatorname{tg} u \, du = -\ln(\cos(u)) + C = \ln(\sec(u)) + C$$

**Exemplo 18:**  $\int \operatorname{tg}(\ln x) \frac{dx}{x}$ , fazemos a substituição  $u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$ , então

$$\int \operatorname{tg} \underbrace{(\ln x)}_u \underbrace{\frac{dx}{x}}_{du} = -\ln(\cos(\ln x)) + C$$

$$13. \int \cotg(u) \, du = \ln(\operatorname{sen}(u)) + C = -\ln(\operatorname{cossec}(u)) + C$$

**Exemplo 19:**  $\int \cot g(5x) \, dx$ , fazemos a substituição  $u = 5x \Rightarrow du = 5dx$ , então

$$\int \cot g(5x) \, dx = \frac{1}{5} \int \cot g \underbrace{(5x)}_u \underbrace{5dx}_{du} = \frac{1}{5} \ln(\operatorname{sen}(5x)) + C$$

$$14. \int \sec u \, du = \ln(\sec(u) + \operatorname{tg}(u)) + C$$

**Exemplo 20:**  $\int \frac{x^3 dx}{\cos(x^4)}$ , sabendo que  $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$  fazemos a substituição  $u = x^4 \Rightarrow du = 4x^3 dx$ , então

$$\int \frac{x^3 dx}{\cos(x^4)} = \int \sec(x^4) x^3 dx = \frac{1}{4} \int \sec(\underbrace{x^4}_u) \underbrace{4x^3 dx}_{du} = \frac{1}{4} \ln(\sec(x^4) + \operatorname{tg}(x^4)) + C$$

$$15. \int \operatorname{cosec}(u) \, du = \ln(\operatorname{cosec}(u) - \operatorname{cotg}(u)) + C$$

**Exemplo 21:**  $\int \operatorname{cosec}\left(\frac{x}{3}\right) dx$ , fazemos a substituição  $u = \frac{x}{3} \Rightarrow du = \frac{1}{3} dx$ , então

$$\int \operatorname{cosec}\left(\frac{x}{3}\right) dx = 3 \int \operatorname{cosec}\left(\underbrace{\frac{x}{3}}_u\right) \underbrace{\frac{1}{3} dx}_{du} = 3 \ln\left(\operatorname{cosec}\left(\frac{x}{3}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{3}\right)\right) + C$$

$$16. \int \sec^2(u) du = \operatorname{tg}(u) + C$$

Exemplo 22:  $\int e^{2x} \sec^2(e^{2x}) dx$

fazemos a substituição  $u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} dx$ , então

$$\int e^{2x} \sec^2(e^{2x}) dx = \frac{1}{2} \int \sec^2(\underbrace{e^{2x}}_u) \underbrace{2e^{2x} dx}_{du} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(e^{2x}) + C$$

$$17. \int \operatorname{cosec}^2(u) du = -\cot g(u) + C$$

**Exemplo 23:**  $\int [1 - \operatorname{cosec}(x)]^2 dx$

$$\int [1 - \operatorname{cosec}(x)]^2 dx = \int (1 - 2\operatorname{cosec}(x) + \operatorname{cosec}^2(x)) dx = \int dx - 2 \int \operatorname{cosec}(x) dx + \int \operatorname{cosec}^2(x) dx$$

As integrais são imediatas, pois  $u = x$  e  $du = dx$ , usando a tabela:

$$\int dx - 2 \int \operatorname{cosec}(x) dx + \int \operatorname{cosec}^2(x) dx = x - 2 \ln(\operatorname{cosec}(x) - \cot g(x)) - \cot g(x) + C$$

$$18. \int \sec(u) \operatorname{tg}(u) \, du = \sec(u) + C$$

**Exemplo 24:**  $\int \sec(e^{3x}) \operatorname{tg}(e^{3x}) e^{3x} dx$  fazemos a substituição  $u = e^{3x} \Rightarrow du = 3e^{3x} dx$ , então

$$\int \sec(e^{3x}) \operatorname{tg}(e^{3x}) e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int \sec(\underbrace{e^{3x}}_u) \operatorname{tg}(\underbrace{e^{3x}}_u) \underbrace{3e^{3x} dx}_{du} = \frac{1}{3} \sec(e^{3x}) + C$$

$$19. \int \operatorname{cosec}(u) \cot g(u) \, du = -\operatorname{cosec}(u) + C$$

**Exemplo 25:**  $\int \sec(e^{3x}) \operatorname{tg}(e^{3x}) e^{3x} dx$

fazemos a substituição  $u = e^{3x} \Rightarrow du = 3e^{3x} dx$ , então  $\int \sec(u) \operatorname{tg}(u) du = \sec(u) + C$

$$\int \sec(e^{3x}) \operatorname{tg}(e^{3x}) e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int \underbrace{\sec(e^{3x})}_u \underbrace{\operatorname{tg}(e^{3x})}_u \underbrace{3e^{3x} dx}_{du} = \frac{1}{3} \sec(e^{3x}) + C$$

**Exemplo 26:**  $\int \operatorname{cosec}(2x) \cot g(2x) dx$

fazemos a substituição  $u = 2x \Rightarrow du = 2dx$ , então  $\int \operatorname{cosec}(u) \cot g(u) du = -\operatorname{cosec}(u) + C$

$$\int \operatorname{cosec}(2x) \cot g(2x) dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{\operatorname{cosec}(2x)}_u \underbrace{\cot g(2x)}_u \underbrace{2dx}_{du} = -\frac{1}{2} \operatorname{cosec}(2x) + C$$

Seja  $u = u(x)$  e  $du = u'(x)dx$

$$20. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen\left(\frac{u}{a}\right) + C, a^2 > u^2, a \neq 0$$

$$21. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctg\left(\frac{u}{a}\right) + C, a \neq 0$$

$$22. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + C, u^2 > a^2, a \neq 0, u \neq 0$$

$$23. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{u - a}{u + a}\right) + C, u^2 > a^2, a \neq 0$$

$$24. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left( \frac{a+u}{a-u} \right) + C, \quad a^2 > u^2, a \neq 0$$

$$25. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left( u + \sqrt{u^2 + a^2} \right) + C$$

$$26. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left( u + \sqrt{u^2 - a^2} \right) + C$$

$$27. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2} u \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsen \left( \frac{u}{a} \right) + C$$

$$28. \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \ln \left( u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right) + C, u^2 > a^2 \text{ em } \int \sqrt{u^2 - a^2} du$$

Exemplo 27:  $\int \frac{2-x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$

$$\begin{aligned} \int \frac{2-x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 2 \int \frac{\frac{dx}{\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}}}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int \frac{\frac{dx}{\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}}}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-1}{2} \int \underbrace{(1-x^2)^{-1/2}}_u \underbrace{-2x dx}_{du} \\ &= 2 \arcsen(x) + 1/2 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1/2} + C = 2 \arcsen(x) + \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

$$6. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$20. \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsen\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

Exemplo 28:  $\int \frac{x-1}{x^2+25} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2+25} dx &= \int \frac{\frac{xdx}{\frac{du}{u}}}{x^2+25} - \int \frac{\frac{dx}{\frac{du}{a^2+u^2}}}{x^2+25} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+25} dx - \int \frac{1}{x^2+25} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+25) - \frac{1}{5} \arctg\left(\frac{x}{5}\right) + C \end{aligned}$$

$$7. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$21. \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \arctg\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

Exemplo 29:  $\int \frac{1}{x\sqrt{36x^2 - 25}} dx$

$$u = 6x, a = 5, du = 6dx$$

$$22. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left( \frac{u}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{36x^2 - 25}} dx = \int \frac{6.1}{\underbrace{6x}_u \sqrt{\underbrace{36x^2 - 25}_{u^2 - a^2}}} dx = \frac{1}{5} \operatorname{arcsec} \left( \frac{6x}{5} \right) + C$$

Exemplo 30:  $\int \frac{1}{16x^2 - 1} dx$

$$u = 4x \rightarrow du = 4dx, a = 1$$

$$23. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left( \frac{u - a}{u + a} \right) + C$$

$$\int \frac{1}{16x^2 - 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4.1}{16x^2 - 1} dx = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4x - 1}{4x + 1} \right) + C \right) = \frac{1}{8} \ln \left( \frac{4x - 1}{4x + 1} \right) + C$$

Exemplo 31:  $\int \frac{1}{1-6x^2} dx$

$$\int \frac{1}{1-6x^2} dx \rightarrow u = \sqrt{6}x, a = 1, du = \sqrt{6}dx$$

$$24. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left( \frac{a+u}{a-u} \right) + C$$

$$\int \frac{1}{1-6x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{\sqrt{6}}{1-6x^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left( \frac{1+\sqrt{6}x}{1-\sqrt{6}x} \right) + C = \frac{\sqrt{6}}{12} \ln \left( \frac{1+\sqrt{6}x}{1-\sqrt{6}x} \right) + C$$

Exemplo 32:  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2x^2 + b^2}} dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2x^2 + b^2}} dx \rightarrow u = ax, a = b, du = adx$$

$$25. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left( u + \sqrt{u^2 + a^2} \right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2x^2 + b^2}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{a}{\sqrt{a^2x^2 + b^2}} dx = \frac{1}{a} \ln \left( ax + \sqrt{a^2x^2 + b^2} \right) + C$$

Exemplo 33:  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - 2}}$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - 2}} \rightarrow u = x^2, a = \sqrt{2}, du = 2x dx$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - 2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{\sqrt{x^4 - 2}} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{x^4 - 2}) + C$$

$$26. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C$$

Exemplo 34:  $\int \sqrt{16 - 4x^2} dx$

$$\int \sqrt{16 - 4x^2} dx \rightarrow u = 2x, a = 4, du = 2dx$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{16 - 4x^2} dx &= \frac{1}{2} \left( \frac{2x}{2} \sqrt{16 - 4x^2} + \frac{16}{2} \arcsen\left(\frac{2x}{4}\right) + C \right) \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{16 - 4x^2} + 4 \arcsen\left(\frac{x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

$$27 \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2} u \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsen\left(\frac{u}{a}\right) + C$$