0

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA – IMEF
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Estudamos as integrais definidas, com funções integrandos contínuas e intervalos de integração finitos. Agora vamos ampliar o conceito de integral definida, para incluir intervalos de integração infinitos e funções integrando com pontos de descontinuidade infinita no intervalo de integração. Vamos chamar estas integrais de ***integrais impróprias.***

Vamos considerar dois tipos de integrais impróprias:

- integrais impróprias de 1ª espécie, quando o intervalo de integração é infinito;

- integrais impróprias de 2ª espécie, quando a função integrando apresenta pontos de descontinuidade infinita no intervalo de integração.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DE 1ª ESPÉCIE

DEFINIÇÃO 1: Se a função $f(x)$ é contínua no intervalo $[a,+\infty)$, definimos a integral imprópria de $f(x)$ sobre este intervalo como sendo:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

No caso onde o limite existe, dizemos que a integral imprópria ***converge*** e o limite é definido como sendo o valor da integral. No caso contrário, dizemos que a integral imprópria ***diverge*** e não é atribuído nenhum valor a ela.

DEFINIÇÃO 2: Se a função $f(x)$ é contínua no intervalo $(-\infty,b]$, definimos a integral imprópria de $f(x)$ sobre este intervalo como sendo:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

No caso onde o limite existe, dizemos que a integral imprópria ***converge*** e o limite é definido como sendo o valor da integral. No caso contrário, dizemos que a integral imprópria ***diverge*** e não é atribuído nenhum valor a ela.

DEFINIÇÃO 3: Se a função $f(x)$ é contínua no intervalo $(-\infty,+\infty)$, definimos a integral imprópria de $f(x)$ sobre este intervalo como sendo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx =$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx,$$

No caso onde os limites existem, dizemos que a integral imprópria ***converge*** e no caso contrário, dizemos que a integral imprópria ***diverge***.

Exemplos:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Solução:

A função $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ é contínua no intervalo $(-\infty,+\infty)$, então de acordo com a definição 3 temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} =$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\left[arctgx\right]_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\left[arctgx\right]_0^b =$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\underbrace{arctg0}_{0} - arctga\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(arctgb - \underbrace{arctg0}_{0}\right) =$$
$$-\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Observe que a função integrando $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ é não-negativa no intervalo $(-\infty,+\infty)$, então a integral imprópria converge representa a área da região considerada na figura 1.

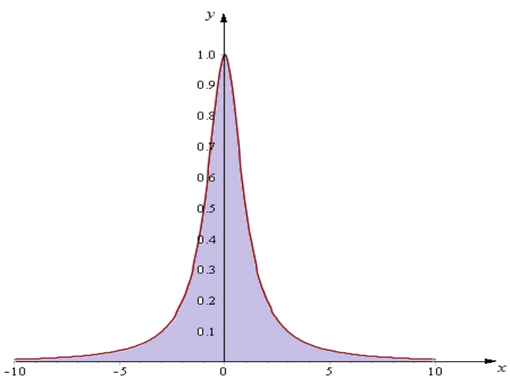


Figura 1

2. $\int_{-\infty}^{1} (1-x)e^{x}\, dx$

Solução:

Primeiro vamos resolver a integral por partes, considerando $u = 1 - x \Rightarrow du = -dx$ e $dv = e^{x}dx \Rightarrow v = e^{x}$, daí obtemos:

$$\int (1-x)e^{x}\, dx = (1-x)e^{x} - \int e^{x} \cdot (-1)dx = (1-x)e^{x} + \int e^{x} \cdot dx =$$

$$= (1-x)e^{x} + e^{x} = (2-x)e^{x} + C$$

A função $f(x) = (1-x)e^{x}$ é contínua no intervalo $(-\infty, 1)$, assim temos:

$$\int_{-\infty}^{1} (1-x)e^{x}\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{1} (1-x)e^{x}\, dx = \lim_{a \to -\infty} \left[(2-x)e^{x}\right]_{a}^{1} =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[e - (2-a)e^{a}\right] = e \quad - \quad \underbrace{\lim_{a \to -\infty} \frac{2-a}{e^{-a}}}_{\frac{\infty}{\infty}\,(regra\ de\ L'Hospital)} \quad =$$

$$= e - \underbrace{\lim_{a \to -\infty} \frac{1}{e^{-a}}}_{0} = e$$

Observe que a função integrando $f(x) = (1-x)e^{x}$ é não-negativa no intervalo $(-\infty, 1]$, então a integral imprópria converge e representa a área da região considerada na figura 2.

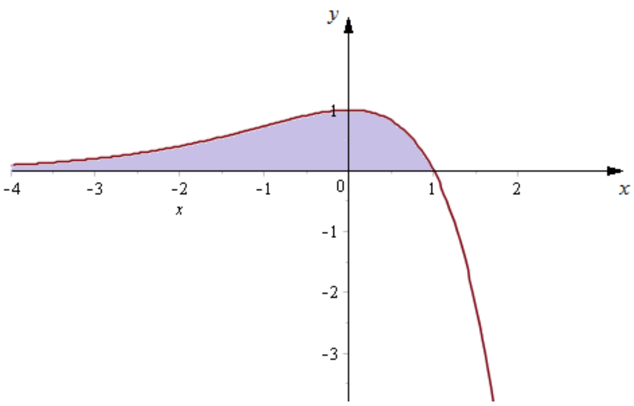


Figura 2

3. $\int_{0}^{+\infty} \frac{x\, dx}{1+x^{2}}$

Solução:

A função $f(x) = \dfrac{x}{1+x^{2}}$ é contínua no intervalo $[0, +\infty)$, então temos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^b =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\left(1+b^2\right) - \underbrace{\ln 1}_{0}\right] = +\infty$$

Então a integral imprópria diverge, sendo assim a área da região representada na figura 3 é infinita.

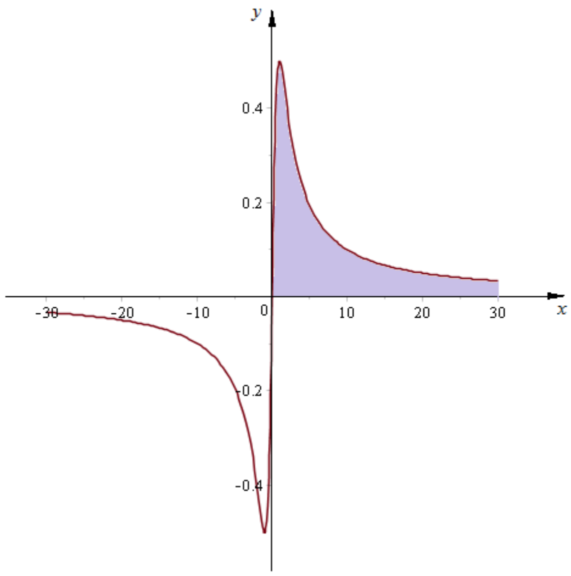


Figura 3

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DE 2ª ESPÉCIE

DEFINIÇÃO 4: Se a função $f(x)$ é contínua no intervalo $[a,b)$ e possui uma descontinuidade infinita no ponto *b*, definimos a integral imprópria de $f(x)$ sobre o intervalo $[a,b]$ como sendo:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\int_a^{b-h} f(x)dx,$$

No caso onde o limite existe, dizemos que a integral imprópria ***converge*** e o limite é definido como sendo o valor da integral. No caso contrário, dizemos que a integral imprópria ***diverge*** e não é atribuído nenhum valor a ela.

DEFINIÇÃO 5: Se a função $f(x)$ é contínua no intervalo $(a,b]$ e possui uma descontinuidade infinita no ponto *a*, definimos a integral imprópria de $f(x)$ sobre o intervalo $[a,b]$ como sendo:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\int_{a+h}^{b} f(x)dx,$$

No caso onde o limite existe, dizemos que a integral imprópria ***converge*** e o limite é definido como sendo o valor da integral. No caso contrário, dizemos que a integral imprópria ***diverge*** e não é atribuído nenhum valor a ela.

DEFINIÇÃO 6: Se a função $f(x)$ é contínua nos intervalos $[a,c)$ e $(c,b]$, mas possui uma descontinuidade infinita no ponto *c*, sendo $c \in (a,b)$, definimos a integral imprópria de $f(x)$ sobre o intervalo $[a,b]$ como sendo:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$
$$= \lim_{h\to 0}\int_a^{c-h} f(x)dx + \lim_{r\to 0}\int_{c+r}^b f(x)dx,$$

No caso onde os limites existem, dizemos que a integral imprópria ***converge*** e no caso contrário, dizemos que a integral imprópria ***diverge***.

Exemplos: Resolver as seguintes integrais impróprias:

1. $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

Solução:

A função $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ é contínua nos intervalos $[0,1)$ e $(1,2]$, apresenta descontinuidade infinita em $x=1$, $1 \in (0,2)$, então temos:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\int_0^{1-h} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{r\to 0}\int_{1+r}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\int_0^{1-h} (x-1)^{-2}dx + \lim_{r\to 0}\int_{1+r}^2 (x-1)^{-2}dx =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_0^{1-h} + \lim_{r\to 0}\left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_{1+r}^2 =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^{1-h} + \lim_{r\to 0}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_{1+r}^2 =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[-\frac{1}{1-h-1} - \left(-\frac{1}{0-1}\right)\right] + \lim_{r\to 0}\left[-\frac{1}{2-1} - \left(-\frac{1}{1+r-1}\right)\right] =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h} - 1\right] + \lim_{r\to 0}\left[-1 + \frac{1}{r}\right] = +\infty$$

Portanto a integral imprópria diverge, logo a área representada na figura 4 é infinita.

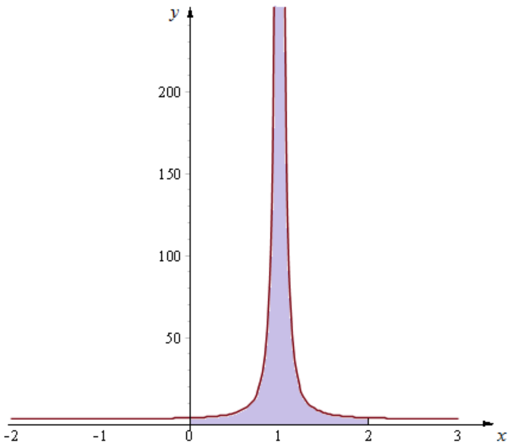


Figura 4

2. $\int_0^1 \ln x \, dx$

Solução:

A função $f(x) = \ln x$ é contínua no intervalo $(0,1]$ e apresenta descontinuidade infinita à direita de $x = 0$, então:

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{h \to 0} \int_{0+h}^1 \ln x \, dx$$

Primeiro vamos resolver a integral por partes, considerando $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$ e $dv = dx \Rightarrow v = x$, daí obtemos:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Obtemos então:

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{h \to 0} \int_{0+h}^1 \ln x \, dx = \lim_{h \to 0} \left[x \ln x - x \right]_h^1 =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\underbrace{1 \ln 1}_{0} - 1 - (h \ln h - h) \right] = -1 - \underbrace{\lim_{h \to 0} h \ln h}_{0 \cdot \infty} =$$

$$= -1 - \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\ln h}{h^{-1}}}_{\frac{\infty}{\infty} (L'Hospital)} = -1 - \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{h}}{-h^{-2}} =$$

$$= -1 + \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = -1 + \lim_{h \to 0} h = -1$$

Portanto a integral imprópria converge.

Observe que $f(x)=\ln x$ é negativa no intervalo $(0,1)$, portanto a área da região representada na figura 5 é dada por: $-\int_0^1 \ln x\,dx = 1 u.a.$

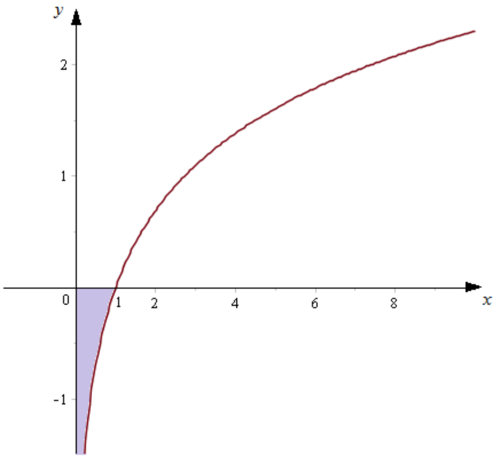


Figura 5

3. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Solução:

A função $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ é contínua no intervalo $[0,2)$ e apresenta descontinuidade infinita à esquerda de $x=2$, então:

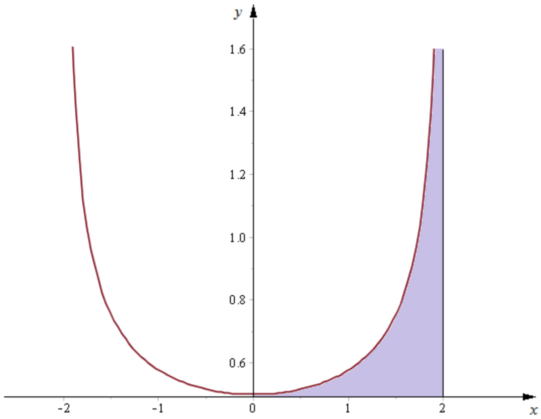
$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{h\to 0}\int_0^{2-h} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{h\to 0}\left[arcsen\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{2-h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[arcsen\left(\frac{2-h}{2}\right) - \underbrace{arcsen\,0}_{0}\right] =$$

$$= arcsen 1 = \frac{\pi}{2}$$

Portanto a integral imprópria converge.

Observe que $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ é não negativa no intervalo $[0,2)$, logo a área da região representada na figura 6 é igual a $\frac{\pi}{2} u.a.$


y
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
-2
-1
0
1
2
x