Interpolação polinomial

Formas de fazer a interpolação

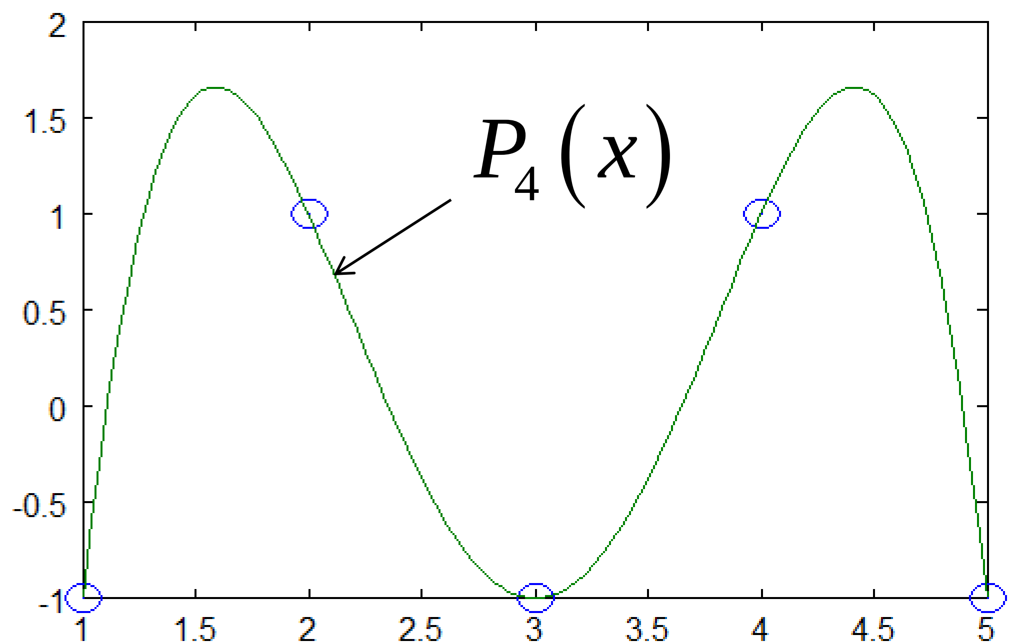
1) Resolvendo um sistema linear

1. Interpolação resolvendo um sistema linear

- Problema: Dado um conjunto de “n” pontos {x, y}, determinar o polinômio de grau “n-1” que **passa por todos os pontos** do conjunto {x, y}.

Exemplo: 5 pontos

x	y
1	-1
2	1
3	-1
4	1
5	-1



Como obtemos a equação do polinômio $P_n(x)$?

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
...	...
x_n	y_n

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases}
(x_0, y_0) & \rightarrow \quad y_1 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n {x_0}^n \\
(x_1, y_1) & \rightarrow \quad y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n {x_1}^n \\
(x_2, y_2) & \rightarrow \quad y_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n {x_2}^n \\
\vdots & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
(x_n, y_n) & \rightarrow \quad y_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n {x_n}^n
\end{cases}$$

Veja que a substituição dos n+1 pontos dá origem a Sistema de "n" equações cuja solução fornece os coeficientes "ai" do polinomio interpolador.

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Interpolação: Resolvendo um sistema linear

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Na forma usual de um sistema linear

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Cálculo de um polinômio: Forma usual

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

```
function y=polinomio_usual(a,x)
na=length(a);
nx=length(x);
for k=1:nx
    s=0;xi=x(k);
    for i=1:na
        s=s+a(i)*xi^(i-1);
    end
    y(k)=s;
end
plot(x,y)
```

Obs: O vetor a deve ser escrito respeitando a convenção abaixo:

$$\vec{a} = [\ a_0 \quad a_1 \quad \ldots \quad a_{n-1} \quad a_n\ ]$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\vec{a} = \left[a(1) \quad a(2) \quad \ldots \quad a(n) \quad a(n+1)\right]$$

Programas em octave/matlab

```
function a =interp_via_sistema(x,y)

n=length(x);
for i=1:n
    for j=1:n
        A(i,j)=x(i)^(j-1);     %montai
    end                        %usandı
end
b=y'; %transpomos y,usando o apostrı
      %para que b seja vetor coluna

[A1,b1]=eli_gauss(A,b);
a = retrosub(A1,b1);
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}$$

```
function y=calcula_poli_usual(a,x)
  %função calculo polinomio pelo esc
  nx=length(x)
  na=length(a)
  for k=1:nx
    xi=x(k);
    s=0;
    for i=1:na
       s=s+a(i)*xi^(i-1);
    end
    y(k)=s;
    end

endfunction
```

Tendo os coeficientes, podemos calcular o polinômio para outros valores de "x" no intervalo $[x_0, x_n]$.

Roteiro para resolver o sistema usando o método da eliminação gaussiana

```
%roteiro interpolação

x=[0 1 2 ];
y=[-1 1 -1];

a =interp_via_sistema(x,y);

dx=0.1;
xi=x(1):dx:x(end);

yi=calcula_poli_usual(a,xi);

plot(x,y,'ko', xi,yi,'r')
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('pontos','polinomio')
```

Aqui devemos digitar os dados para interpolar!!!

Aqui chamamos a função que retorna os coeficientes do polinômio. Dentro desta função usa-se eliminação gaussiana e pivoteamento!!!

Aqui calculamos o polinômio com mais pontos, para gerar um curva suave. Usamos dx=0.1, neste exemplo!!!

Aqui geramos o gráfico do polinômio e dos pontos originais!!!

Roteiro para resolver o sistema usando o método da eliminação gaussiana

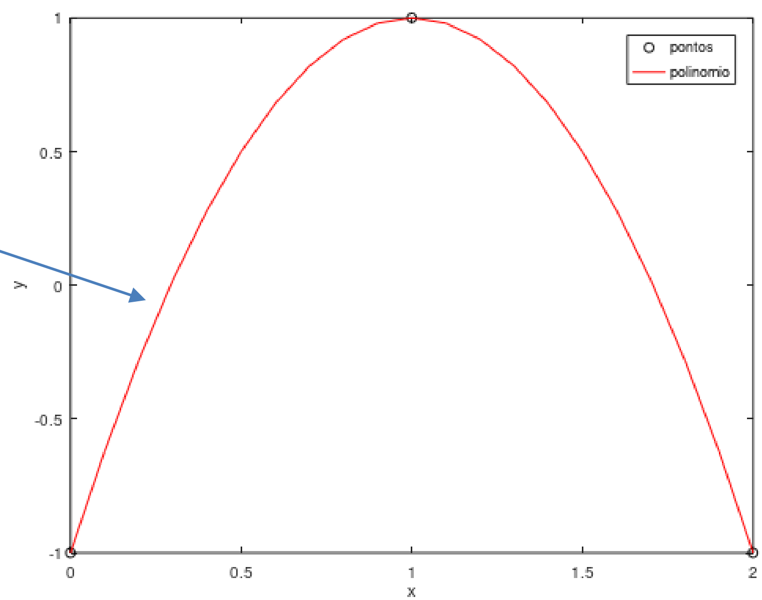
```
a =

  -1
   4
  -2

O polinomio interpolador Ã©:
P(x)=a0+a1*x+a2*x^2 + ... +an*x^n
para os pontos fornecidos, os coeficientes do polinomio interpolador sÃ£o
a(0)=   -1
a(1)=    4
a(2)=   -2
```

$$P_2(x) = -1 + 4x - 2x^2$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$



Tarefa

- Nesta semana, os programas serão disponibilizados em formato “.m” (ver arquivo .rar)
- A tarefa consiste em utilizar estes programas para gerar os polinômios interpoladores para os conjuntos de dados no slide seguinte.

Tarefa

- Gere o gráfico do polinômio interpolador para os pontos dados abaixo. Para cada conjunto de pontos, escreva a expressão matemática do polinômio interpolador correspondente aos pontos dados.
- a) $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \; ; \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; ;$
- b) $x = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \end{bmatrix} \; ; \quad y = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \; ;$
- c) $x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \; ; \quad y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \; ;$