CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

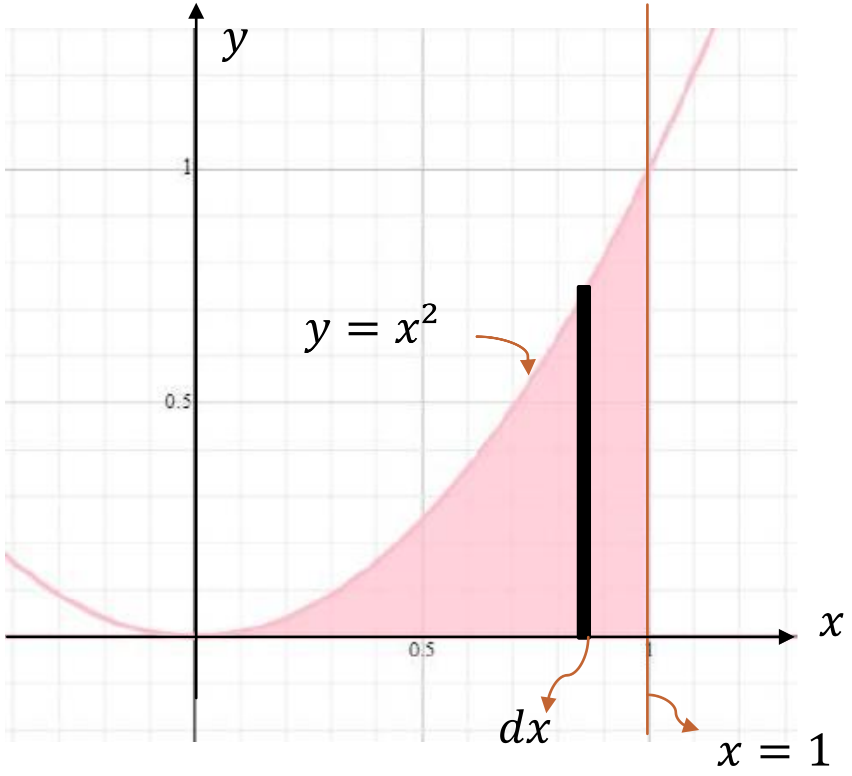
PROFª. DENISE MARIA VARELLA MARTINEZ

IMEF INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

FURG

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcular, por integração, a área da região limitada entre as curvas $y = x^2, x = 1, x = 0 \; e \; y = 0$.



Na figura, a altura da área é limitada superiormente pela função $y = x^2$ e inferiormente pelo eixo dos $x \; (y = 0)$, representada por $altura = y_{maior} - y_{menor}$.

Se considerarmos que o nosso elemento de área é dx, podemos somar todos os dx de 0 a 1 e teremos a base da área representada pela integral $\int_0^1 dx$.

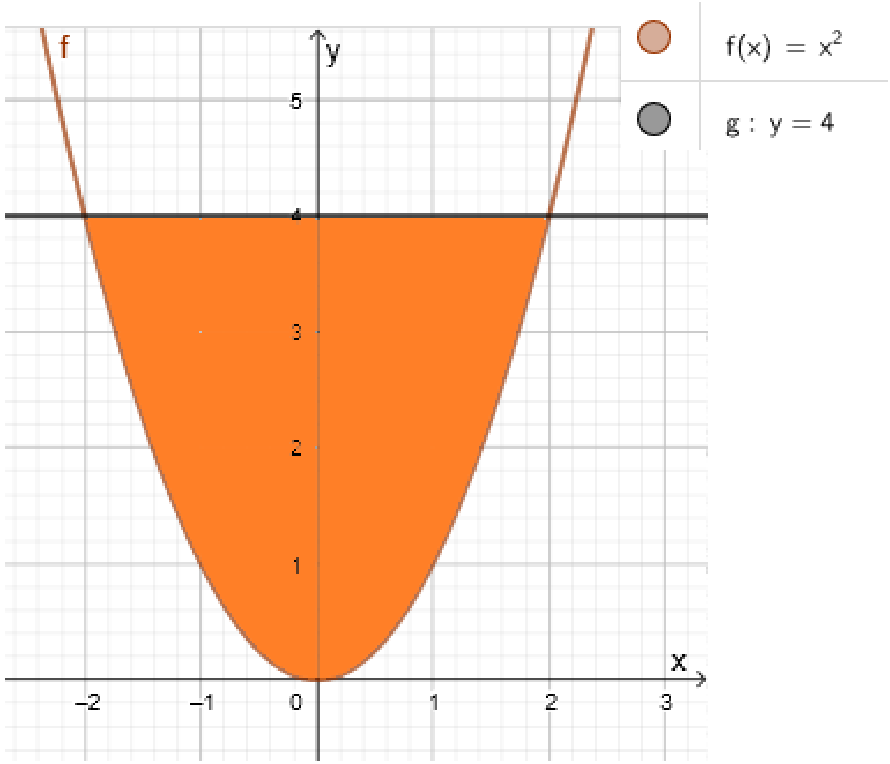
Assim, $A = base \; x \; altura$ será dada por

$$A = \int_0^1 (altura)dx = \int_0^1 (y_{maior} - y_{menor})dx = \int_0^1 (x^2 - 0)dx.$$

Aplicando o TFC, vem:

$$A = \int_0^1 (x^2 - 0)dx = \int_0^1 (x^2)dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} \; u.a.$$

2. Calcular, por integração, a área limitada pelo eixo y, a reta $y = 4$ e a parábola $y = x^2$, no intervalo de [0, 2].

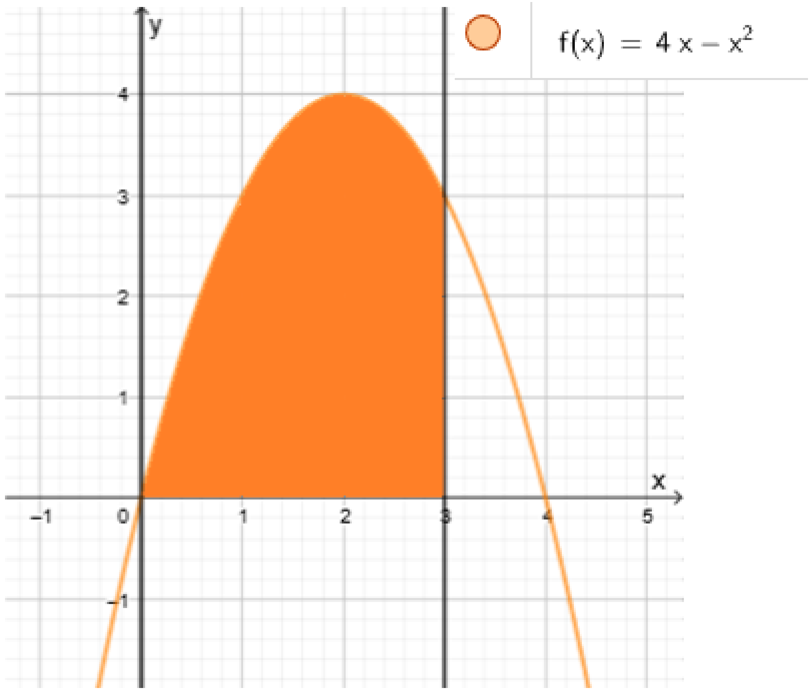


A área da região sombreada está limitada acima por $y = 4$, abaixo por $y = x^2$, à esquerda pelo eixo y($x = 0$). A reta $y = 4$ e o ramo direito da parábola se interceptam em $x = 2$,ou seja no ponto $(2,4)$, então a área é representada por:

$$A = \int_0^2 (4 - x^2)dx = \int_0^2 4dx - \int_0^2 x^2 dx =$$

$$A = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{16}{3}\text{u.a}$$

3 Calcular, por integração, a área limitada pela parábola $y = 4x - x^2$, por $x = 0$ e $x = 3$.



A área da região sombreada está limitada acima por $y = 4x - x^2$, abaixo por $y = 0$, à direita pela reta $x = 3$. A parábola intercepta o eixo x em $x = 0$, então a área é representada por:

$$A = \int_0^3 ((4x - x^2) - 0)dx = = 4\int_0^3 xdx - \int_0^3 x^2dx =$$

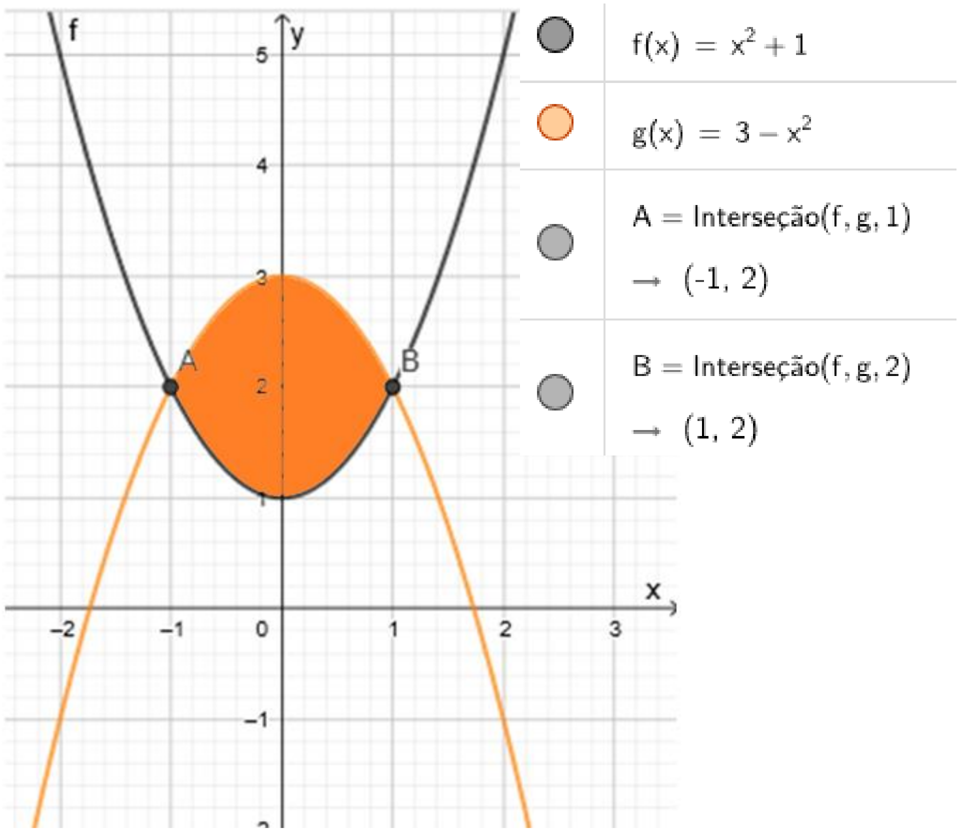
$$A = \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^3 - \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^3 = 4\left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - \left(\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$A = \frac{36}{2} - \frac{27}{3} = 18 - 9 = 9u.a.$$

4. Calcular, por integração, a área da região limitada pelas curvas $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 3 - x^2$.

Primeiro vamos calcular os pontos de intersecção das curvas

$$x^2 + 1 = 3 - x^2 \rightarrow 2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$



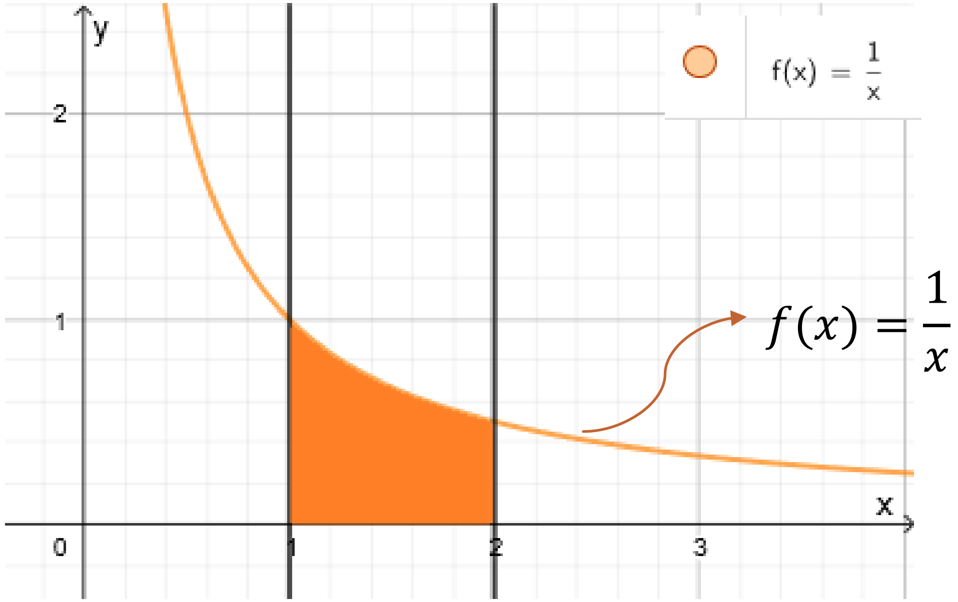
$$\text{A} = \int_{-1}^{1}\Big((3 - x^2) - (x^2 + 1)\Big)dx = \int_{-1}^{1}(3 - x^2 - x^2 - 1)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 2dx - 2\int_{-1}^{1} x^2 dx = (2x)_{-1}^{1} - \left(2\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{1}$$

$$= (2(1) - 2(-1)) - \left(\frac{2(1)^3}{3} - \frac{2(-1)^3}{3}\right) = 2 + 2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}$$

$$= 4 - \frac{4}{3} = \frac{12 - 4}{3} = \frac{8}{3}u.a.$$

5. Calcular, por integração, a área limitada por $y = 1/x,\ \ x = 2,\ \ x = 1\ e\ y = 0.$

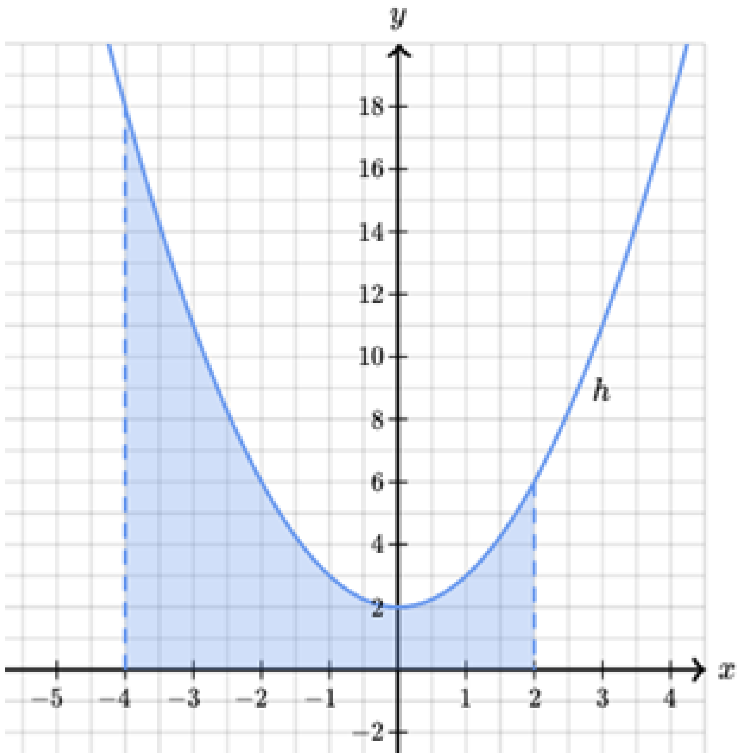


A área da região sombreada está limitada acima por $y = \frac{1}{x}$, abaixo por $y = 0$, à esquerda pela reta $x = 1$ e à direita pela reta $x = 2$, então a área é representada por:

$$\boldsymbol{A} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - 0\right) dx = \int_1^2 \frac{dx}{x} = (ln\, x)_1^2 =$$

$$A = ln(2) - ln(1) = ln\, 2\, u.a$$

6. Calcular, por integração, a área da região sombreada limitada superiormente pelo gráfico da função $h(x) = x^2 + 2$, pelas retas $x = -4$ (à $esquerda$) e $x = 2$(à $direita$) e inferiormente pelo eixo x.



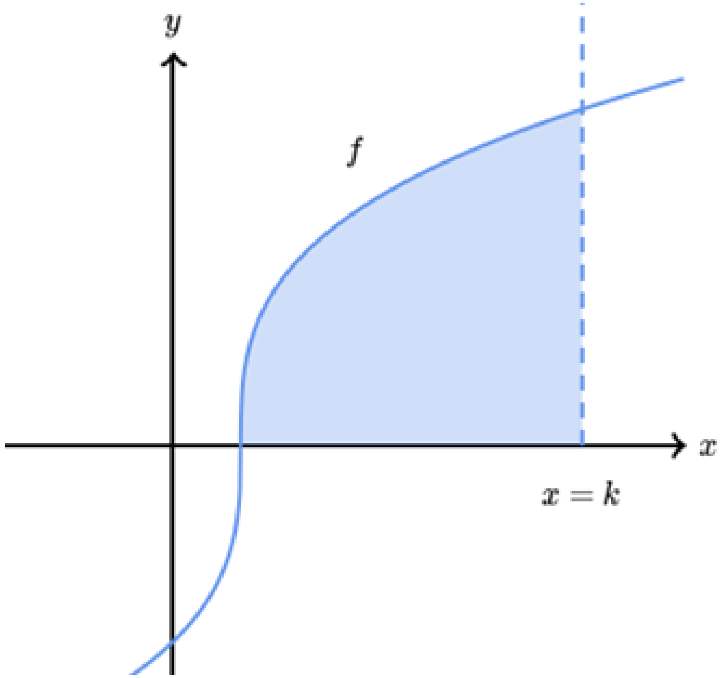
A área da região sombreada está limitada acima por $y = x^2 + 1$, abaixo pelo eixo x, à esquerda pela reta $x = -4$ e à direita pela reta $x = 2$, então a área é representada por:

$$A = \int_{-4}^{2} [(x^2 + 1) - 0]\, dx = \int_{-4}^{2} (x^2 + 1) dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-4}^{2} = \left[\frac{2^3}{3} + (2)\right] - \left[\frac{(-4)^3}{3} + (-4)\right] =$$

$$A = \left[\frac{8}{3} + (2)\right] - \left[\frac{-64}{3} - 4\right] = \frac{14}{3} + \frac{76}{3} = \frac{90}{3} = 30\, u.a.$$

7. A área da região sombreada é limitada pelo gráfico da função $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, pela reta $x = k$ e pelo eixo x. Se a região tem uma área de 12, qual o valor exato de k?



Antes de montar a integral que representa a área sombreada temos que determinar a intersecção da curva com o eixo x.

$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, fazendo $y = 0 \rightarrow \sqrt[3]{x-1} = 0, logo\ x - 1 = 0\ e\ x = 1$

Vamos montar a integral que representa a área. O elemento de área dx vai de $x = 1\ a\ x = k$

$$A = \int_1^k \left[\sqrt[3]{x-1} - 0\right] dx = 12 \Rightarrow A = \left[\frac{(x-1)^{4/3}}{4/3}\right]_1^k = 12$$

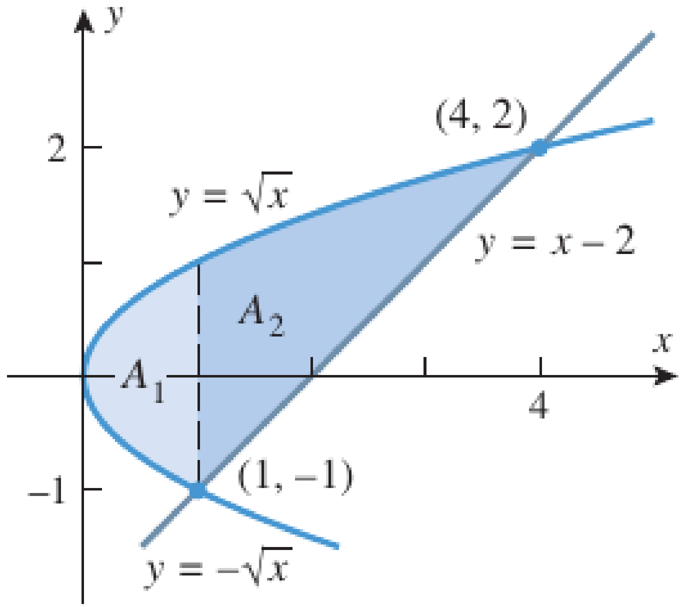
$$\left[\frac{3\sqrt[3]{(x-1)^4}}{4}\right]_1^k = \left[\frac{3(k-1)^{4/3}}{4} - \frac{3(1-1)^{4/3}}{4}\right] = 12$$

$$\frac{3(k-1)^{4/3}}{4} = 12 \Rightarrow (k-1)^{4/3} = \frac{48}{3} \Rightarrow (k-1)^{4/3} = 16$$

$$(k-1) = 16^{3/4} \Rightarrow (k-1) = (2^4)^{3/4}$$

$$(k-1) = 8 \Rightarrow k = 9$$

8. Calcular, por integração, a área da região englobada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$ e $y = x - 2$



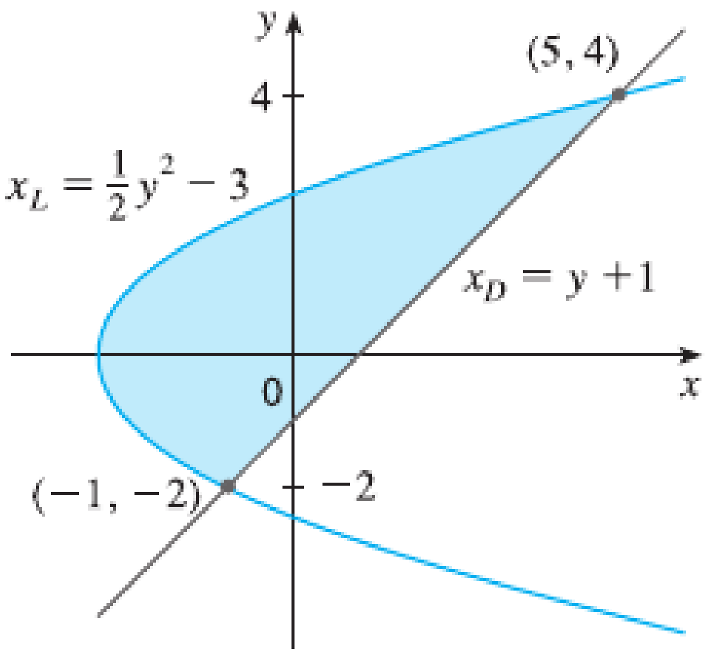
$$A_1 = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]\, dx = 2\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = 2\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_1^4 [\sqrt{x} - (x-2)]\, dx = \int_1^4 (\sqrt{x} - x + 2)\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_1^4 = \left(\frac{16}{3} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{19}{6}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{9}{2}$$

9. Encontre, usando integração, a área limitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$.



$$A = \int_{-2}^{4} (x_D - x_E)\, dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left[(y + 1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y\Bigg]_{-2}^{4}$$

$$= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18$$

10. Calcule a integral definida;

$$\int_1^9 \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx\Big]_1^9 = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_1^9 = \frac{2}{3}(27-1) = \frac{52}{3}$$

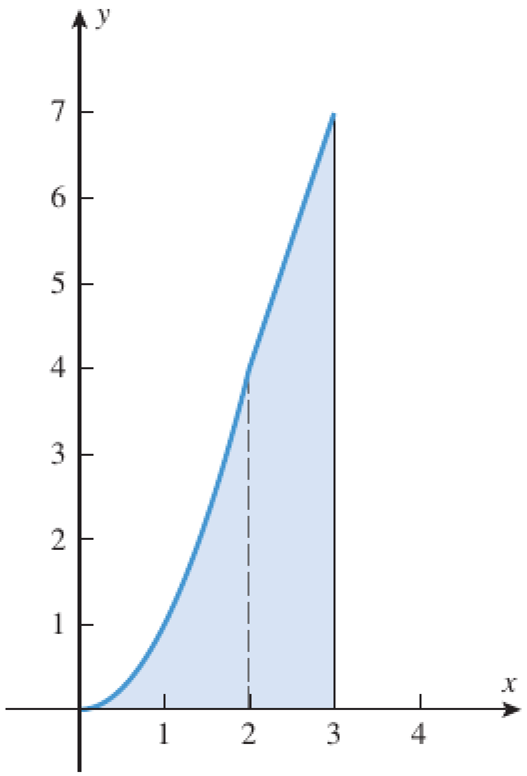
$$\int_4^9 x^2\sqrt{x}\,dx = \int_4^9 x^{5/2}\,dx = \frac{2}{7}x^{7/2}\Big]_4^9 = \frac{2}{7}(2187-128) = \frac{4118}{7} = 588\frac{2}{7}$$

$$\int_0^{\pi/3} \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x\Big]_0^{\pi/3} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{tg} 0 = \sqrt{3} - 0 = \sqrt{3}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{arc sen } x\Big]_{-1/2}^{1/2} = \text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right) - \text{arc sen}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\int_0^{\ln 3} 5e^x\,dx = 5e^x\Big]_0^{\ln 3} = 5[e^{\ln 3} - e^0] = 5[3-1] = 10$$

11. Calcule $\int_0^3 f(x)\,dx$ se $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3x - 2, & x \geq 2 \end{cases}$



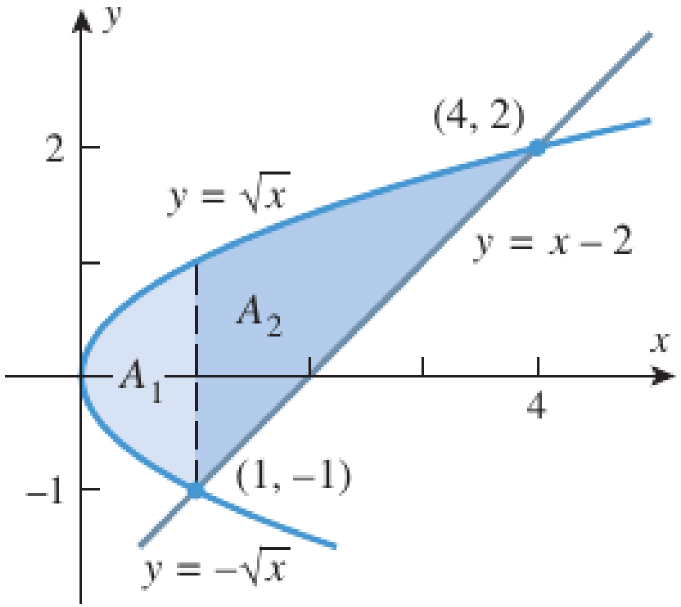
$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^3 (3x - 2)\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\bigg]_0^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - 2x\right]_2^3 = \left(\frac{8}{3} - 0\right) + \left(\frac{15}{2} - 2\right) = \frac{49}{6}$$

EXERCÍCIOS

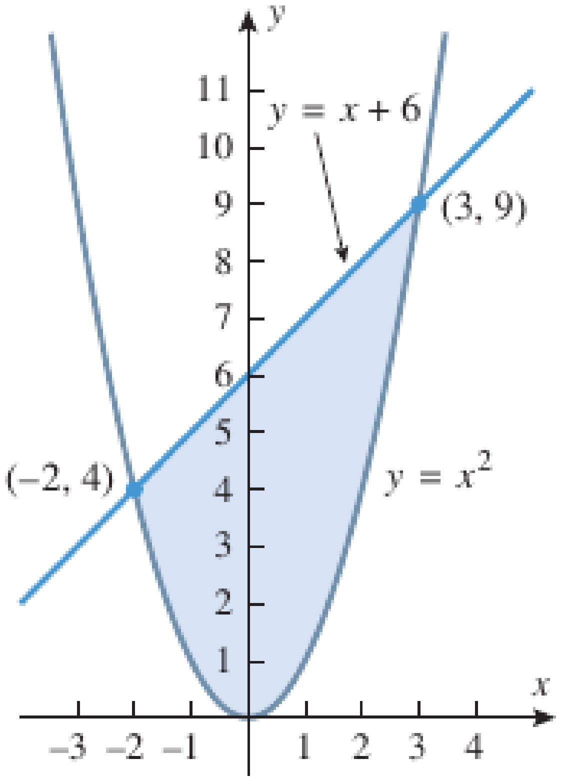
PROPOSTOS

1. Resolva o exercício resolvido 8 utilizando o elemento de área dy

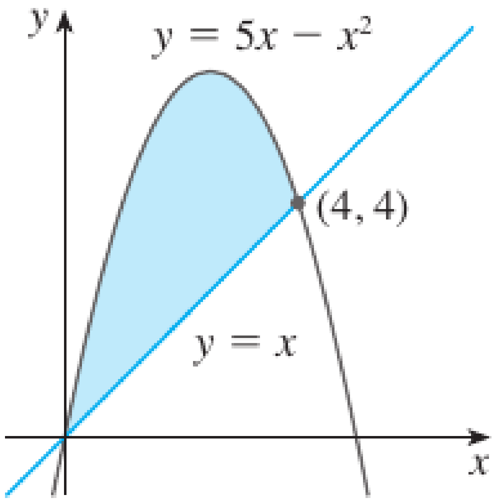


2. Encontre a área limitada pela parábola $y = x^2$ e a reta $y = x + 6$

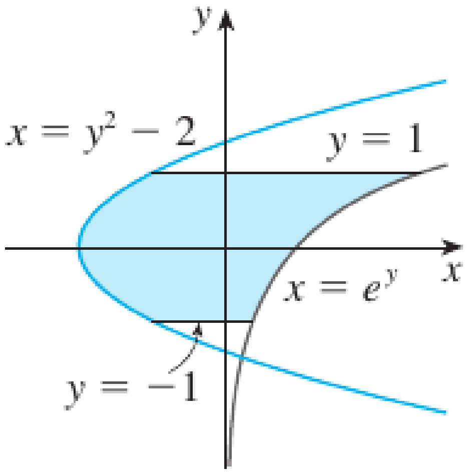
Resposta. $A = \frac{125}{6}$



3. Calcule a área da região sombreada:



(a) $Resposta\ \ A = \frac{32}{3}$



(b) $Resposta\ \ A = e - \frac{1}{e} + \frac{10}{3}$

4. Calcule a integral definida:.

$$a) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)\, dx = \pi + 2$$

$$b) \int_{0}^{16} \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x} + 1}\, d\,\mathrm{x} = \frac{32}{3} - 8 + 4 \operatorname{arc\,tg}(2)$$

$$c) \int_{2}^{3} \frac{dx}{(x-1)\,(x+2)} = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{8}{5}\right)$$

$$d) \int_{1}^{4} \left(x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right) d\,\mathrm{x} = 23$$

$$e) \int_{0}^{2} (2x - 3x^2 + x^3)dx = 0$$

$$f) \int_{1}^{2} \ln(x) dx = 2 \ln(2) - 1$$

$$g) \int_{1}^{2} \frac{dx}{2x - 1} = \frac{ln\ 3}{2}$$