Equações Diferenciais Ordinárias

Prof. Darci Luiz Savicki

Imef-Furg

Conteúdo

- Introdução
- Método de Euler
- Método de Runge-Kutta

Introdução

- EDO (Eq. Diferencial Ordinária) vs. EDP (Eq. Diferencial Parcial)
  - A diferença se refere ao número de variáveis <u>independentes</u> envolvidas.

EDO		EDP	
$\frac{d^2y}{dt^2} = y$	$\mathrm{y}(t)$	$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 1$	$f(x, y)$

Introdução (cont.)

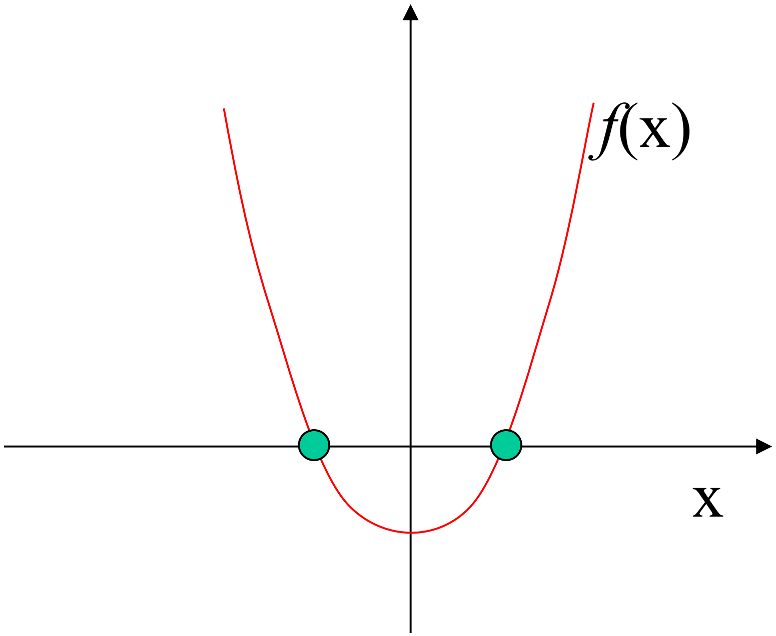
- Solução de uma Equação algébrica

- Solução de uma Equação:

$$f(x) = x^2 - 1 = 0$$

Solução: $x = \pm 1 \Leftrightarrow f(\pm 1) = 0$

- Geometricamente,



Solução de uma EDO

Requer condições iniciais para a solução

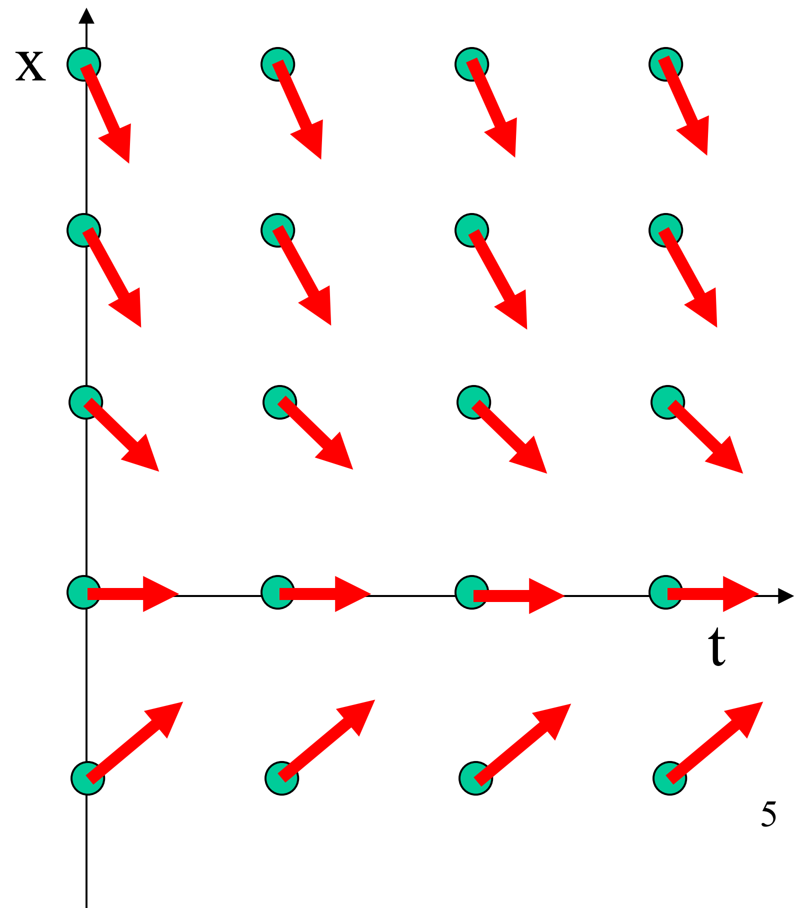
$$\frac{dx}{dt} = -x$$

Solução:

$$x = c \cdot e^{-t} \Leftrightarrow \left(c \cdot e^{-t}\right)' = -c \cdot e^{-t}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Isto é,} \\ \quad x = e^{-t}, x = -2e^{-t}, \cdots \\ \quad \text{são soluções válidas.} \end{array}\right]$$

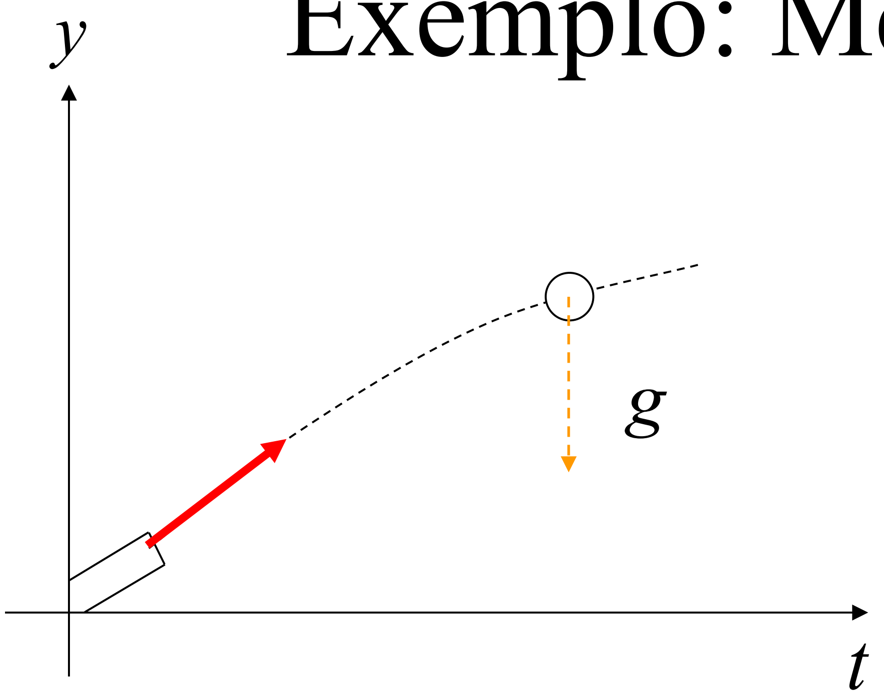
Geometricamente:



Introdução (cont)

- *Ordem* de uma EDO
  - A ordem da *mais alta* derivada da equação
- EDO de ordem "*n*" requer "*n*" condições para especificar a solução.
  - PVI (Problema de Valor Inicial): Todas as condições são especificadas no início.
  - PVC (Problema de Valor de Contorno): Todas as condições são especificadas nas fronteiras.

PVI vs. PVC
Exemplo: Método do Tiro



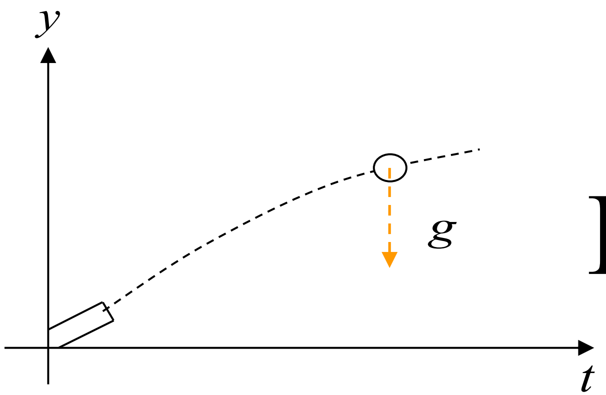
$$y = f(t)$$

$$\ddot{y} = -g \quad (\text{seja } g = 10)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -10$$

$$\frac{dy}{dt} = -10t + c_1 \qquad (1)$$

$$y = -5t^2 + c_1 t + c_2 \qquad (2)$$



PVI vs. PVC

PVI:

$$y(t=0)=0$$

$$\dot{y}(t=0)=5$$

$$c_2=0$$

$$c_1=5$$

$$\Rightarrow y(t)=-5t^2+5t$$

PVC:

$$y(t=0)=0$$

$$y(t=10)=100$$

$$y(0)=c_2=0$$

$$y(10)=-500+10c_1=100 \Rightarrow c_1=60$$

$$\Rightarrow y=-5t^2+60t$$

EDO no WolframAlpha

https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/differential-equations/

$$\frac{dy}{dx} = -y, y(0) = 2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = \sin t, x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$$

https://www.wolframalpha.com/input/?i=y%27+%2B+y+%3D+0

https://www.wolframalpha.com/input/?i=x%27%27+%2B+x%27%2Bx+%3D+sin%28x%29

EDO Linear

- Linearidade:
  - Não envolve o produto ou funções não lineares de y e de suas derivadas
- EDO linear de ordem *n*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x)$$

Foco desta apresentação

- Resolver um PVI de ordem *n numericamente*.
- Por exemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -x,$$

com a seguinte condição inicial $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Achar $y(x),\ x > 0$

EDO (PVI)

- EDO de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \;\; y(x = 0) = y_0$$

- E se não for de primeira ordem?

"Toda EDO de ordem *n*, pode ser convertida em um sistema de *n* EDOs de primeira ordem" , através do seguinte procedimento:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x)$$

$$y_1(x) \equiv y(x)$$

$$y_2(x) \equiv \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$y_3(x) \equiv \frac{dy_2}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) \equiv \frac{dy_{n-1}}{dx} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ &\frac{dy_2}{dx} = y_3 \\ &\vdots \\ &\frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n \\ &\frac{dy_n}{dx} = \frac{-a_{n-1}(x)y_n - \cdots - a_1(x)y_2 - a_0(x)y_1 + b(x)}{a_n(x)} \end{aligned}\right.$$

Exemplo

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} = 5x$$

Seja $\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx} \\ y_3 = \frac{dy_2}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \dfrac{dy_3}{dx} + 2y_3 - x^2y_2 = 5x \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \end{cases}$

Seja $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ -2y_3 + x^2y_2 + 5x \end{pmatrix}$

Fim da Introdução

Método de Euler

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \Delta x \to 0, \frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{dy}{dx}$$

$$\Delta y \approx f(x, y)\Delta x$$

$$y(x + \Delta x) - y(x) \equiv \Delta y \approx f(x, y)\Delta x$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x + \Delta x) \approx y(x) + f(x, y)\Delta x}$$

Este é o método de Euler

Exemplo

$$\frac{dy}{dx} = -y, y(0) = 1$$

Sol. Exata:

$$y = e^{-x}$$

x	y
0	1
0,1	0,904837
0,2	0,818731
0,3	0,740818

$f(x,y) = -y, f(0,1) = -1$

Escolhemos $\Delta x = 0.1$

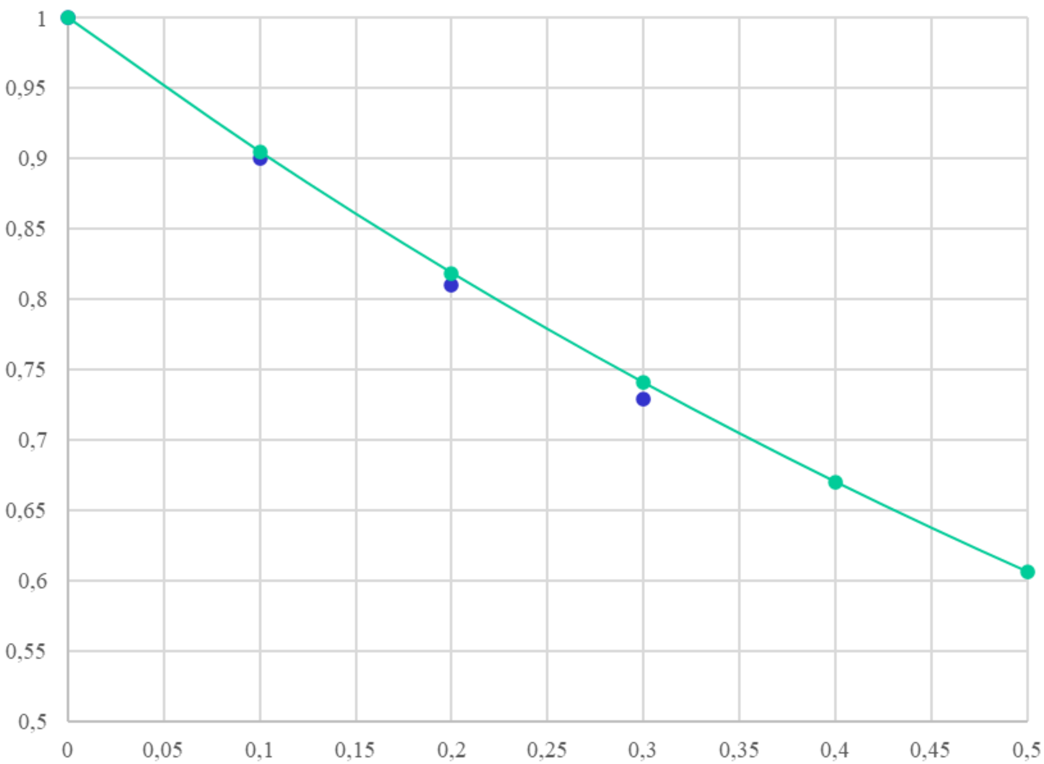
$y(0.1) = y(0) + (-1) \cdot 0.1 = 1 - 0.1 = 0.9$

$y(0.2) = y(0.1) + (-0.9) \cdot 0.1 = 0.9 - 0.09 = 0.81$

$y(0.3) = y(0.2) + (-0.81) \cdot 0.1 = 0.81 - 0.081 = 0.729$

$\vdots$

Exemplo (cont.)



Solução exata:

$$\frac{dy}{y} = -dx$$

$$\ln y = -x + c$$

$$y = c'e^{-x} \qquad y(0) = c' = 1$$

$$\Rightarrow y = e^{-x}$$

Análise do Erro (Interpretação Geométrica)

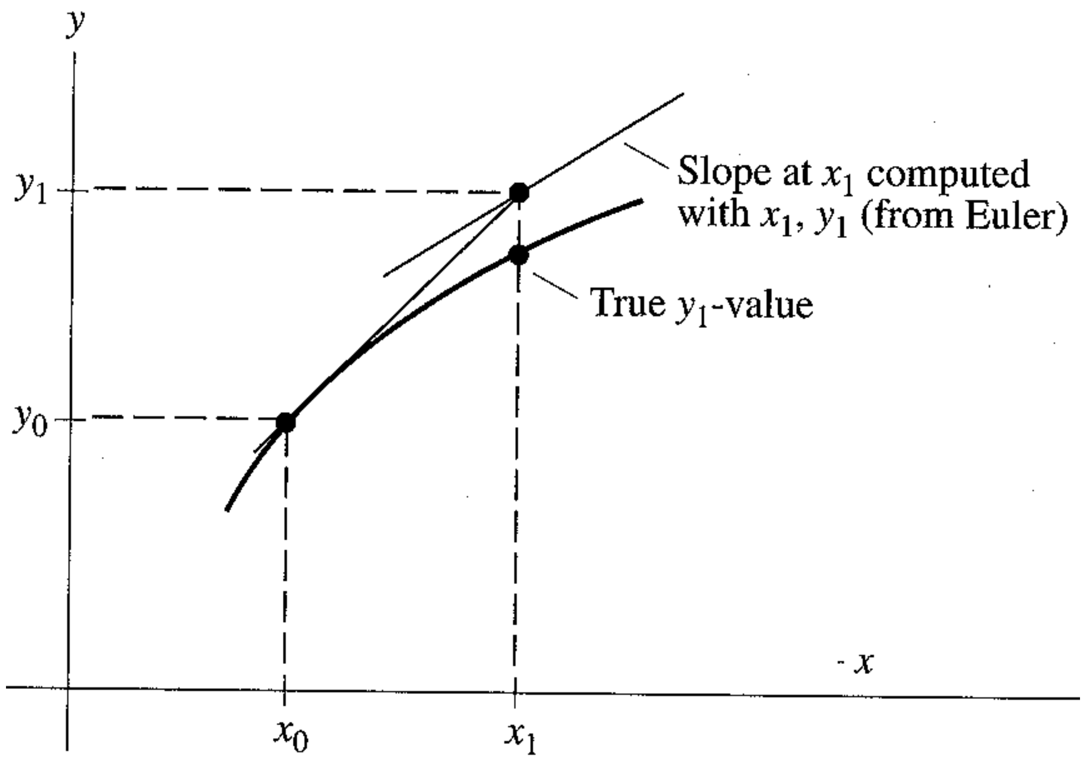
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$\Delta y \approx f(x, y)\Delta x$$

$$y_1 - y_0 \equiv \Delta y \approx f(x_0, y_0)\Delta x$$

$$\Rightarrow y_1 \approx y_0 + \boxed{f(x_0, y_0)}\Delta x$$

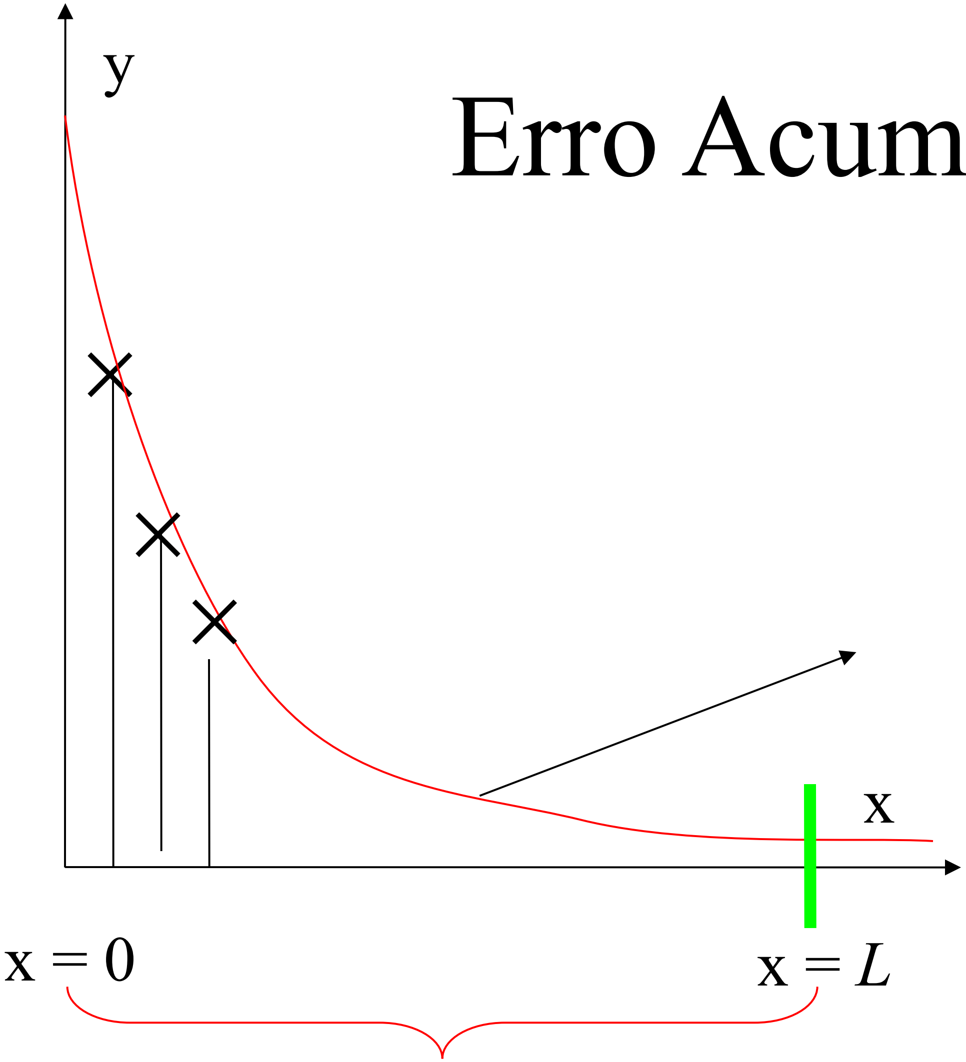


Análise do Erro (Via Série de Taylor)

$$y(x+\Delta x) = y(x) + y'(x)\Delta x + y''(x)\frac{\Delta x^2}{2} + y'''(x)\frac{\Delta x^3}{6} + \cdots$$

$$= \underbrace{y(x) + f(x,y)\Delta x}_{\text{Euler}} + \underbrace{\frac{d}{dx} f(x,y)\frac{\Delta x^2}{2}}_{\text{Erro de truncamento: da ordem } O(\Delta x^2)} + \cdots$$

Erro Acumulado



OBS:
$\Delta x \downarrow$ Erro $\downarrow$
Tempo computacional $\uparrow$

Número de passos = $L/\Delta x$
Erro acumulado = $(L/\Delta x) \times O(\Delta x^2) = L\,\Delta x = O(\Delta x)$

Métodos de Runge-Kutta

Métodos de Runge-Kutta

$$y_{i+1} = y_i + \Phi(x_i, y_i, h)h$$

onde

$$y_i \equiv y(x_i), \quad y_{i+1} \equiv y(x_i + h)$$

$$\Phi(x_i, y_i, h): \quad \text{funcão de incremento}$$

$$\text{(estima a inclinação, de } i \text{ até } i+1\text{)}$$

Métodos de Runge-Kutta (cont.)

$$\Phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n$$

$a's$: constantes

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$$

$$\vdots$$

$$k_n = f(x_i + p_ih, y_i + q_{n-1,1}k_1n + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}n)$$

p_i, q_{ij} : constantes

$\Rightarrow$ Constantes (a_i, p_i, q_{ij}) são escolhidas com base na expansão em Série de Taylor

Expansão em Série de Taylor

$$y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + \boxed{\tfrac{d}{dx} y'(x_i)} \tfrac{h^2}{2} + O(h^3)$$

$$= y(x_i) + f(x_i, y_i)h + \boxed{\left[\tfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_i + \tfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_i f_i \right]} \tfrac{h^2}{2} + O(h^3)$$

$$= y_i + f_i h + \left[\tfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_i + \tfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_i f_i \right] \tfrac{h^2}{2} + O(h^3)$$

$$\frac{d}{dx} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f$$

$$y(x_i+h) = y_i + f_i h + [\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_i + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_i f_i]\frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

RK de 1ª Ordem

$$n = 1$$

$$\Phi = a_1 k_1 = a_1 f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + a_1 f(x_i, y_i) h$$

Compare com expanção em Série de Taylor

$$a_1 = 1$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h$$ Método de Euler

$$y(x_i+h) = y_i + f_i h + [\tfrac{\partial f}{\partial x}\big|_i + \tfrac{\partial f}{\partial y}\big|_i f_i]\tfrac{h^2}{2} + O(h^3)$$

RK de 2ª Ordem

$n = 2 \quad \Phi = a_1 k_1 + a_2 k_2$

$$k_1 = f(x_1, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2) h$$

$f_i h: \quad a_1 + a_2 = 1$

$\frac{\partial f}{\partial x} h^2: \quad a_2 p_1 = 1/2$

$\frac{\partial f}{\partial y} f_i h^2: \quad a_2 q_{11} = 1/2$

Expandindo k_2 :

$$k_2 = f(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_i (p_1 h) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_i (q_{11} k_1 h) + O(h^2)$$

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 h + a_2 [f_i + \tfrac{\partial f}{\partial x} p_1 h + \tfrac{\partial f}{\partial y} q_{11} k_1 h] h + O(h^3)$$

$$= y_i + a_1 f_i h + a_2 f_i h + a_2 \tfrac{\partial f}{\partial x} p_1 h^2 + a_2 \tfrac{\partial f}{\partial y} q_{11} f_i h^2 + O(h^3)$$

RK de 2ª Ordem(cont.)

$$\left.\begin{array}{ll} f_i h: & a_1 + a_2 = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} h^2: & a_2 p_1 = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} f_i h^2: & a_2 q_{11} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{3 equações} \\ \text{4 incógnitas} \end{array}$$

$$a_2 = 1 \Rightarrow a_1 = 0,\ p_1 = \frac{1}{2}, q_{11} = \frac{1}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

$$= y_i + k_2 h \ = y_i + f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)h$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i + \tfrac{1}{2} h, y_i + \tfrac{1}{2} f(x_i, y_i))h$$

$$\boxed{\begin{array}{l} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h, y_i + f_i h) \\ \\ y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{2}(k_1 + k_2)h \end{array}}$$

RK de 4ª Ordem

- É a versão mais utilizada.

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

onde

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_2 h)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3 h)$$

RK de 4ª Ordem (interpretação Geométrica)

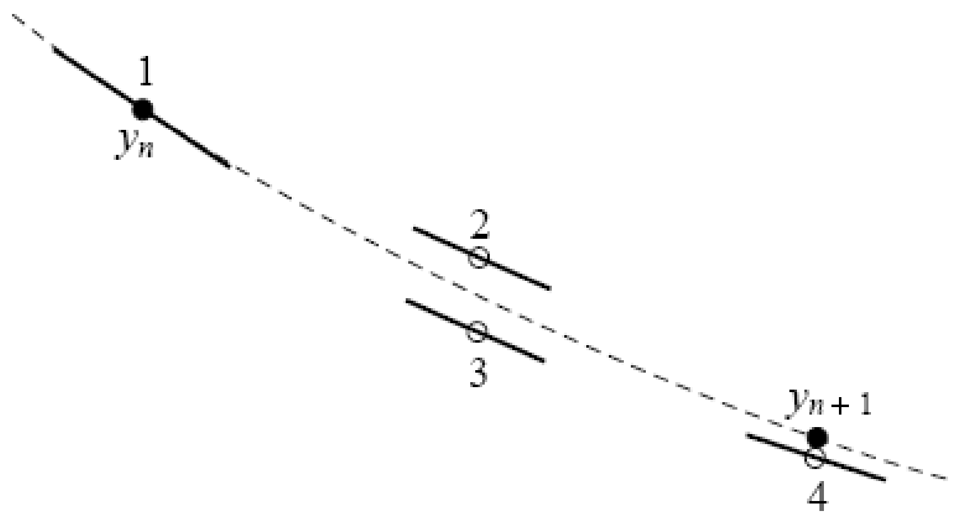


Figure 16.1.3. Fourth-order Runge-Kutta method. In each step the derivative is evaluated four times: once at the initial point, twice at trial midpoints, and once at a trial endpoint. From these derivatives the final function value (shown as a filled dot) is calculated. (See text for details.)

Programação em Octave / Matlab

- Veja no livro “Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas”, de Amos Gilat.

Método de Euler

Funções necessárias

```
function[x,y]=edoEULER(EDO,a,b,h,yINI)
x(1)=a;
y(1)=yINI;
N=(b-a)/h;
for i = 1:N
x(i+1)=x(i)+h;
y(i+1)=y(i)+feval(EDO,x(i),y(i))*h;
end
endfunction
```

```
function dydx=EDO_exemplo(x,y)
dydx=-1.2*y+7*exp(-0.3*x);
endfunction
```

Roteiro (script)

```
clear all
a=0;
b=2.5;
h=0.1;
yINI=3;
[x,y]=edoEULER('EDO_exemplo',a,b,h,yINI) ;
plot(x,y,'-r')
xlabel('x');
ylabel('y')
```

Método de RK4

Funções necessárias

```
function [x,y]=edoRK4(EDO,a,b,h,yIni)
x(1)=a; y(1)=yIni
n=(b-a)/h;
for i=1:n
x(i+1)=x(i)+h;
K1 = feval(EDO,x(i),y(i));
xhalf = x(i)+h/2;
yK1= y(i)+K1*h/2;
K2=feval(EDO,xhalf,yK1);
yK2=y(i)+K2*h/2;
K3=feval(EDO,xhalf,yK2);
yK3=y(i)+K3*h;
K4=feval(EDO,x(i+1),yK3);
y(i+1)=y(i)+(K1+2*K2+2*K3+K4)*h/6;
end
end
```

```
function dydx=EDO_exemplo(x,y)
dydx=-1.2*y+7*exp(-0.3*x);
endfunction
```

Roteiro (script)

```
clear all
a=0;
b=2.5;
h=0.1;
yINI=3;
[x,y]=edoRK4('EDO_exemplo',a,b,h,yINI) ;
plot(x,y,'-r')
xlabel('x');
ylabel('y')
```