Derivadas de Funções de uma Variável Real
Funções Paramétricas

Cristiana Andrade Poffal

Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

June 11, 2025

Função na forma paramétrica

Em determinadas situações, ao invés de descrever uma curva expressando a ordenada de um ponto $P(x, y)$ dessa curva em função de x, é conveniente descrevê-la expressando ambas coordenadas em função de uma terceira variável t.
Se x e y são definidos como funções $x = f(t)$ e $y = g(t)$ para um intervalo de valores de t, então o conjunto de pontos $(x, y) = (f(t), g(t))$ definido por essas equações é uma curva parametrizada. As equações são chamadas de equações paramétricas da curva.
A variável t é um parâmetro para a curva e seu domínio I é o intervalo do parâmetro. Se I for um intervalo fechado, $a \leq t \leq b$, o ponto $(f(a), g(a))$ é o ponto inicial da curva e $(f(b), g(b))$ é o ponto final.
As equações paramétricas e o intervalo para o parâmetro de uma curva constituem a parametrização da curva.

Derivadas de funções na forma paramétrica

Uma curva parametrizada $x = f(t)$ e $y = g(t)$ será derivável em t se x e y forem deriváveis em t. Em um ponto de uma curva parametrizada derivável, onde y também é função derivável de x, as derivadas $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dx}$ estão relacionadas com a regra da cadeia: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$.

Se $\frac{dx}{dt} \neq 0$, segue que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Exemplo: Calcule $\frac{dy}{dx}$ para as funções escritas na forma paramétrica:

a) $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 9t^2 - 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x = e^t \cos(t) \\ y = e^t \mathrm{sen}(t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

$\frac{dy}{dx}$?

$\frac{dy}{dt} = 18t - 6$

$\frac{dx}{dt} = 3$

a) $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 9t^2 - 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{18t - 6}{3} = 6t - 2$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 6t - 2}$$

$$\frac{dy}{dx}\,?$$

b) $\begin{cases} x = e^t\cos(t) \\ y = e^t \mathrm{sen}(t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$

$$\frac{dy}{dt} = e^t(\mathrm{sen}(t))' + (e^t)'\mathrm{sen}(t)$$

$$= e^t\cos(t) + e^t\,\mathrm{sen}(t)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = e^t[\cos(t) + \mathrm{sen}(t)]}$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos(t))' + (e^t)'\cos(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -e^t\mathrm{sen}(t) + e^t\cos(t)$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = e^t[\cos(t) - \mathrm{sen}(t)]}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cancel{e^t}[\cos(t) + \operatorname{sen}(t)]}{\cancel{e^t}[\cos(t) - \operatorname{sen}(t)]} = \frac{\cos(t) + \operatorname{sen}(t)}{\cos(t) - \operatorname{sen}(t)}$$