2.2 Um exemplo de aplicação

Vamos examinar o problema de determinação da deflexão transversal de um cabo tracionado apoiado em uma fundação de constante elástica k submetido a uma carga transversal f, atuando na direção normal ao cabo (figura 2.3). A força de tração é dada por T e sua componente transversal F.

Procedendo ao equilíbrio de esforços na direção y, temos:

$$F(x) + f(x)dx - kw(x)dx - (F(x) + dF) = 0$$

Desprezando termos de segunda ordem,

$$\frac{d}{dx}\big(F(x)\big) + k(x)w(x) = f(x)$$

com a rigidez do suporte dada em unidades de dimensão F/L.

Da figura 2.3, a relação geométrica entre F e T pode ser obtida:
F(x)=T(x) sen θ

Para θ pequeno, $\operatorname{sen}\theta \cong tg\theta = \frac{-dw}{dx}$, resultando em

$$F(x) = -T(x)\frac{dw(x)}{dx}$$

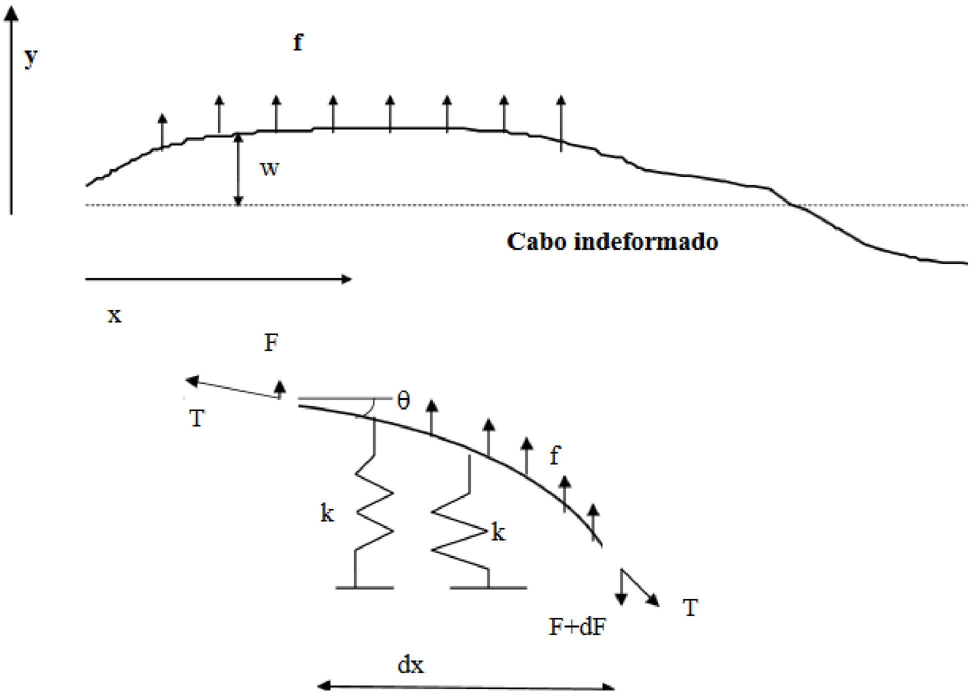

Figura 2.3- Deflexão de um cabo elástico

Substituindo esta relação na equação de equilíbrio, obtêm-se a equação diferencial para o problema:

$$-\frac{d}{dx}\left(T(x)\frac{dw(x)}{dx}\right)+k(x)w(x)=f(x)$$

As condições de contorno podem ser de dois tipos: essenciais (variável principal do problema, a deflexão w, especificada em pontos do contorno) ou naturais (valor da tração F conhecido no contorno).

Tomemos um vão de 10 m, f=50N/m e T=3500N, sem molas (k(x)=0). Podemos agora definir um modelo discreto para o problema, definindo alguns pontos nos quais se pretende obter uma resposta aproximada. Dividindo o vão inicial em 5 segmentos de 2 m, temos o modelo conforme o esquema da Figura 2.4.

Agora, aproximando $\frac{d^2w}{dx^2}$ por diferenças centrais, teremos:

$$\left(\frac{w_{i-1}-2w_i+w_{i+1}}{h^2}\right)=-\frac{f}{T}$$, com h o espaçamento entre nós.

$$\frac{w_{i-1}-2w_i+w_{i+1}}{4}=-\frac{-(-50)}{3500}$$

$$w_{i-1}-2w_i+w_{i+1}=\frac{2}{35}$$

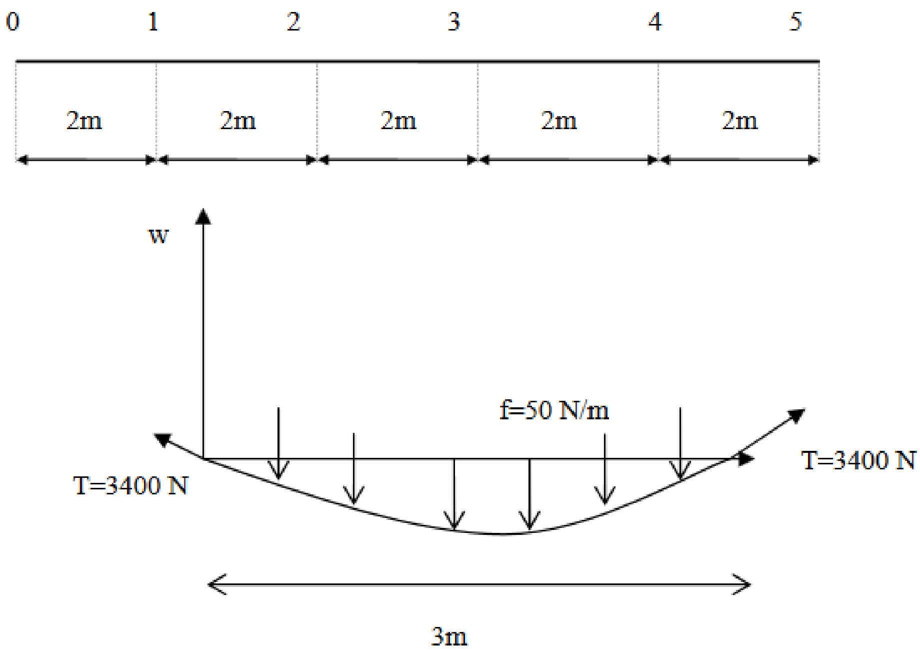

Figura 2.4- Modelo discreto e descrição do problema

Assim, para o nó 1 (i=1),

$$w_o - 2w_1 + w_2 = {}^{2}\!/_{35}$$

Para i=2, $w_1 - 2w_2 + w_3 = {}^{2}\!/_{35}$

Para i=3, $w_2 - 2w_3 + w_4 = {}^{2}\!/_{35}$

Para i=4, $w_3 - 2w_3 + w_4 = {}^{2}\!/_{35}$

Como $w_0 = w_5 = 0$ (condições de contorno), teremos:

$$\begin{aligned}
-2w_1 + w_2 \qquad\qquad &= 2/35 \\
w_1 - 2w_2 + w_3 \qquad &= 2/35 \\
w_2 - 2w_3 + w_4 &= 2/35 \\
w_3 - 2w_4 &= 2/35
\end{aligned}$$

Observe que o modelo agora inclui como incógnitas (variáveis discretas) os deslocamentos em apenas 4 pontos (ou *nós*) , e não mais em toda a reta. Resolvendo o sistema de equações, obtêm-se:

$w_1 = -4/35$
$w_2 = -6/35$
$w_3 = -6/35$
$w_4 = -4/35$

De forma semelhante, pode-se resolver problemas em 2 ou 3 dimensões (veja, p. e., [Zienkiewicz e Morgan, 84].

Na seqüência, pode-se determinar, a partir dos deslocamentos encontrados, o valor da força no cabo, dada por $F(x) = -T(x)\dfrac{dw(x)}{dx}$, aproximando-a por diferenças finitas centrais. Para determinar as forças, recorre-se uma segunda vez a uma aproximação, e logo a qualidade dos resultados obtidos pode ser pior que para os valores de deslocamentos.

$F_i = -T\,\dfrac{(w_{i+1} - w_{i-1})}{2h}$, de onde

$F_1 = -3T/70$
$F_2 = -T/70$
$F_3 = T/70$
$F_4 = 3T/70$

2.3 **Exercício proposto**

A equação para uma viga em apoio elástico é $EI\, {d^4 w}/{dx^4} + k(x)w(x) = f(x)$, com f(x) a carga distribuída aplicada, k a constante de mola do apoio e w a deflexão. Sabendo-se que, por diferenças centrais, $\frac{d^4 w}{dx^4} \approx \left(\frac{w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}}{h^4} \right)$, e considerando que EI=10k, carga f(x)=1 kN/m, determine os deslocamentos em função de EI para uma viga de comprimento unitário (1m) engastada nos dois extremos, para h=1/3 m e para h=1/6 m. Compare os resultados.

2.4 **Bibliografia**

Zienkiewicz, O. C. e Morgan, K. “Finite Elements and Approximation”, John Wiley and Sons, EUA, 1984.

Reddy, J. N. “An Introduction to the Finite Element Method”, McGraw-Hill Book Company, EUA, 1984.