Derivadas de Funções de uma Variável Real
Funções Trigonométricas Inversas

Cristiana Andrade Poffal

Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

June 11, 2025

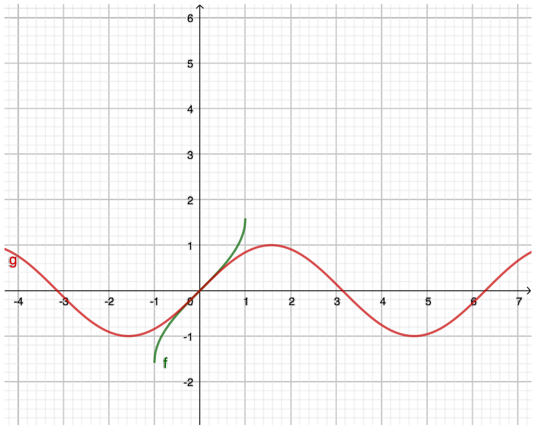
Funções Trigonométricas Inversas

Função $y = \operatorname{arcsen}(x)$

A função inversa do seno $y = \operatorname{sen}(x)$ denotada por $x = \operatorname{sen}^{-1}(y)$ ou $x = \operatorname{arcsen}(y)$ está definida como a inversa da função seno restrita ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

g: sen(x)

f: arcsen(x)

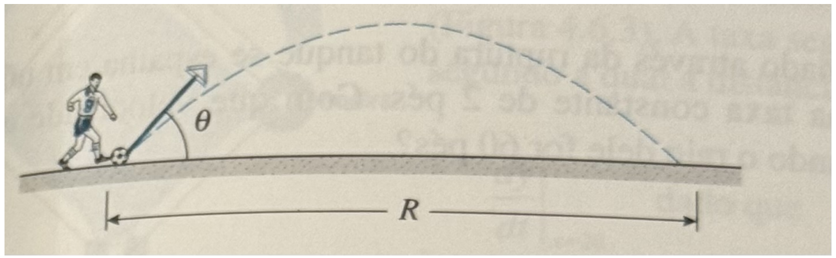


Exemplo de aplicação

Um jogador de futebol chuta uma bola com uma velocidade inicial de 14m/s em um ângulo θ com o plano horizontal. A bola cai no chão a uma distância de 18m depois do chute. Se a resistência do ar for desprezada, então a bola terá uma trajetória parabólica e o alcance horizontal R será dado por:

$$R = \frac{v^2}{g}\operatorname{sen}(2\theta),$$

em que v é a velocidade inicial da bola e g é a aceleração da gravidade. Usando $g = 9,8\text{m}/s^2$, aproxime um valor de θ segundo o qual a bola poderia ter sido chutada.



$$R = \frac{v^2}{g} \operatorname{sen}(2\theta)$$

$R = 18$ $\quad v = 14$

θ ? $\quad g = 9{,}8$

$$\operatorname{sen}(2\theta) = \frac{R \cdot g}{v^2} \rightarrow \operatorname{sen}(2\theta) = \frac{18 \cdot 9{,}8}{(14)^2}$$

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 0{,}9$$

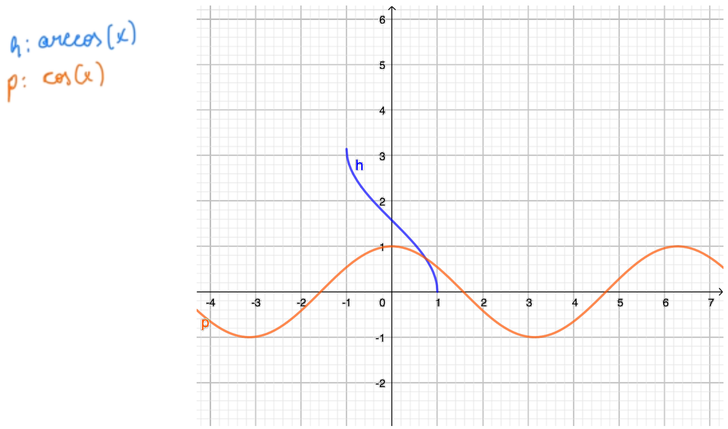
$$2\theta = \operatorname{arcsen}(0{,}9)$$

$$\theta = \frac{\operatorname{arcsen}(0{,}9)}{2}$$

$$\boxed{\theta = 32{,}07^\circ}$$

Função $y = \text{arccos}(x)$

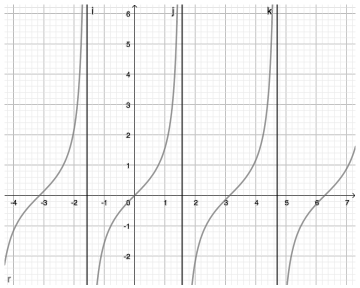
A função inversa do cosseno $y = \cos(x)$ denotada por $x = \cos^{-1}(y)$ ou $x = \text{arccos}(y)$ está definida como a inversa da função cosseno restrita ao intervalo $[0, \pi]$.



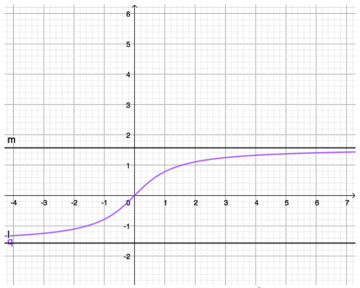
$tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$

Função $y = \mathrm{arctg}(x)$

A função inversa da tangente $y = \mathrm{tg}(x)$ denotada por $x = \mathrm{tg}^{-1}(y)$ ou $x = \mathrm{arctg}(y)$ está definida como a inversa da função tangente restrita ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



$y = tg(x)$



$y = arctg(x)$

Derivadas de Funções Trigonométricas Inversas

Derivada da função arco seno

Seja $u = f(x)$. Aplicando a regra da cadeia, a derivada da função arco seno é:

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arcsen}(u)\right] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx},\ |u| < 1.$$

Em particular, se $u = x$ tem-se

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arcsen}(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1.$$

$y = \operatorname{arcsen}(x)$

$\boxed{\operatorname{sen}(y) = x}$ $(*)$

Obs: $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$

$\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$

Derivar $(*)$ implicitamente em relação a x, isto é, considerar que y depende de x:

$$\cos(y) \cdot y' = 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{y' = \frac{1}{\cos(y)}}$$

Da trigonometria: $\cos^2(y) + \operatorname{sen}^2(y) = 1$

$$\cos^2(y) = 1 - \operatorname{sen}^2(y)$$

$$\cos(y) = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(y)}$$

$\cos(y) > 0$

$$\cos(y) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(y)}$$

Como $\operatorname{sen}(y) = x$, então $\cos(y) = \sqrt{1 - x^2}$

Logo,

$$\boxed{\frac{d\,\text{arcsen}(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Exemplo: Calcule a derivada de $y = \mathrm{arcsen}(x^3 + 3x^2)$.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3+3x^2)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^3+3x^2)$$

Regra da cadeia

$$\boxed{y' = \frac{3x^2+6x}{\sqrt{1-(x^3+3x^2)^2}}}$$

Derivada da função arco cosseno

Seja $u = f(x)$. Então, aplicando a regra da cadeia tem-se para a derivada da função arco cosseno:

$$\frac{d}{dx}\left[\arccos(u)\right] = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}, |u| < 1.$$

Derivada da função arco tangente

Seja $u = f(x)$. Então, aplicando a regra da cadeia, a derivada da função arco tangente é definida por:

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{arctg}(u)\right] = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Em particular, se $u = x$ tem-se

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{arctg}(x)\right] = \frac{1}{1+x^2}.$$

$y = \operatorname{arctg}(x) \rightarrow \boxed{x = tg(y)} \quad (*)$

Derivando $(*)$ implicitamente em relação a x:

$$1 = sec^2(y) \cdot y' \rightarrow \boxed{y' = \frac{1}{sec^2(y)}} \quad (**)$$

Da trigonometria: $cos^2(y) + sen^2(y) = 1 \qquad : cos^2(y)$

$$\frac{cos^2(y)}{cos^2(y)} + \frac{sen^2(y)}{cos^2(y)} = \frac{1}{cos^2(y)}$$

$$\boxed{1 + tg^2(y) = sec^2(y)} \quad (***)$$

Substituindo (**) em (* *): $y' = \dfrac{1}{1+\underbrace{tg^2(y)}}$ (****)

Substituindo (*) em (****): $\boxed{y' = \dfrac{1}{1+x^2}}$

Exemplo: Derive, em relação a x:

- a) $y = \ln(\mathrm{arctg}(x))$
- b) $y = e^{\arccos(x)}$

a) $y = \ln(\operatorname{arctg}(x))$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg}(x)} \cdot [\operatorname{arctg}(x)]'$$ Regra da Cadeia

$$= \frac{1}{\operatorname{arctg}(x)} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg}(x)}}$$

b) $y = e^{\text{arccos}(x)}$

$$y' = e^{\text{arccos}(x)} \cdot [\text{arccos}(x)]'$$

$$= e^{\text{arccos}(x)} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right]$$

$$\boxed{y' = -\frac{e^{\text{arccos}(x)}}{\sqrt{1-x^2}}}$$

c) $y = \ln\left(\sqrt{\operatorname{arcsen}(x^3+8x)}\right)$

$$y = \ln\left(\operatorname{arcsen}(x^3+8x)\right)^{1/2}$$

$$y = \frac{1}{2}\ln\left[\operatorname{arcsen}(x^3+8x)\right]$$

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{arcsen}(x^3+8x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(x^3+8x)^2}}\cdot(3x^2+8)$$

$$\boxed{y' = \frac{3x^2+8}{2\sqrt{1-(x^3+8x)^2}\,\operatorname{arcsen}(x^3+8x)}}$$