GABARITO TAREFA 7 – NOTA N3 – TURMA G - 02/2021

Questão 1: (10 pontos) Dadas as integrais abaixo, identifique qual é a integral imediata (pode ser resolvida por substituição simples – formulário) e qual é a integral que deve ser resolvida utilizando a técnica de integração por partes. Em cada uma delas indique a substituição apropriada e calcule a integral.

$a) \int ln(2x)dx \quad \rightarrow$ integral por partes

Escolhemos $u = ln(2x) \Rightarrow du = \frac{2dx}{2x} = \frac{dx}{x}$

$$dv = dx \Rightarrow v = \int dv = \int dx = x \Rightarrow v = x$$

Aplicamos a fórmula da integral por partes $\int udv = u.v - \int vdu$

$$\int \underbrace{ln(2x)}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = xln(2x) - \int \frac{xdx}{x}$$

$$= xln(2x) - x + C$$

$b) \int \frac{ln(2x)}{x} dx \rightarrow$ integral imediata por substituição $\int u^n du$

Escolhemos $u = ln(2x) \Rightarrow du = \frac{2dx}{2x} \quad n = 1$

$$\int \frac{ln(2x)}{x} dx = \frac{[ln(2x)]^2}{2}$$

Questão 2 – 5 (10 pontos cada): Dadas as integrais abaixo, identifique qual a técnica a ser usada em cada integral (completar quadrados, integral racional por frações parciais ou divisão de polinômios, integral irracional por substituição) e calcule cada integral.

$$2) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x} + 1} dx$$

integral de função irracional

$$\int \frac{x^{1/2}}{x^{1/4} + 1} dx$$

Neste caso, fazemos a seguinte substituição: $x = y^n, \ onde \quad n = m.m.c.(4,2)$
$x = y^4, \ portanto \ dx = 4y^3dy \ \rightarrow y = x^{1/4}$

$$\int \frac{(y^4)^{1/2}}{(y^4)^{1/4}+1} 4y^3 \mathrm{dy} = 4\int \frac{y^2 . y^3 dy}{y+1} = 4\int \frac{y^5 dy}{y+1}$$

A integral resultante da substituição é uma integral racional onde $grau\, P(x) > grau\, G(x)$, então fazemos a divisão $\frac{4y^5}{y+1}$

$$\frac{4y^5}{y+1} = 4y^4 - 4y^3 + 4y^2 - 4y + 4 - \frac{4}{y+1}$$

$$4\int \frac{y^5 dy}{y+1} = \int \left(4y^4 - 4y^3 + 4y^2 - 4y + 4 - \frac{4}{y+1}\right) dy$$
$$= \frac{4y^5}{5} - y^4 + \frac{4y^3}{3} - 2y^2 + 4y - 4ln(y+1) \ + C$$

$$\int \frac{x^{1/2}}{x^{1/4}+1} dx = \frac{4x^{5/4}}{5} - x + \frac{4x^{3/4}}{3} - 2x^{1/2} + 4x^{1/4} - 4ln(x^{1/4}+1) \ + C$$

3) $\int \frac{x-1}{x^3+x^2} dx$

Integral de função racional, usamos a decomposição em frações parciais

$$\frac{(x-1)}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

$$x - 1 = A(x+1) + Bx(x+1) + Cx^2$$

$x - 1 = Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx^2$ *fazendo a igualdade de polinômios*

$B + C = 0 \rightarrow B = -C$
$A = -1$
$A + B = 1 \rightarrow -1 + B = 1 \rightarrow B = 2; \quad A = -1 \ e \ \ C = -2$

$$\int \frac{(x-1)}{x^2(x+1)} dx = \int \frac{A}{x^2} dx + \int \frac{B}{x} dx + \int \frac{C}{x+1} dx = -\int x^{-2} dx + 2\int \frac{1}{x} dx - 2\int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \frac{1}{x} + 2ln(x) - 2ln(x+1) + C$$

4) $\int \frac{x-2}{x(x^2-x-6)} dx$

Integral de função racional, usamos a decomposição em frações parciais

$$\frac{(x-2)}{x(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+2}$$

$x-2=A(x^2-x-6)+Bx(x+2)+Cx(x-3)$

$x-2=Ax^2-Ax-6A+Bx^2+2Bx+Cx^2-3Cx$ *fazendo a igualdade de polinômios*

$A+B+C=0 \qquad \rightarrow B+C=-1/3$
$\mathrm{A}+2\mathrm{B}-3\mathrm{C}=1 \qquad \rightarrow 2B-3C=1+1/3 \qquad C=-2/5 \quad e \quad B=1/15$
$-6A=-2 \rightarrow A=1/3$

$$\int \frac{(x-2)}{x(x-3)(x+2)}dx=\int \frac{A}{x}dx+\int \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{x}-3}\mathrm{d}x+\int \frac{C}{x+2}dx$$
$$=\frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx+\frac{1}{15}\int \frac{1}{x-3}dx-\frac{2}{5}\int \frac{1}{x+2}dx$$
$$=\frac{1}{3}ln(x)+\frac{1}{15}ln(x-3)-\frac{2}{5}ln(x+2)+c$$

5) $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$

Como temos um polinômio de grau 2 no denominador com raízes imaginárias(não reais) temos que completar quadrados

$\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+10=\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+1-1+10=(\mathrm{x}+1)^2+9$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+10}=\int \frac{dx}{(x+1)^2+9}=\int \frac{du}{(u)^2+a^2}=\frac{1}{3}arctg\left(\frac{(x+1)}{3}\right)+C$$

Uma ótima tarefa!!