UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA – IMEF
CÁLCULO III
2ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Determine o raio e o intervalo de convergência das seguintes séries de potências:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$, $R: R=1,\ I=(-1,1)$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$, $R: R=1,\ I=[-1,1)$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$, $R: R=5,\ I=(-8,2)$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n\,2^n}$, $R: R=2,\ I=(-4,0]$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$, $R: R=1,\ I=[-1,1]$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2x^n}{n!}$, $R: R=+\infty,\ I=(-\infty,+\infty)$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!x^n}{(n!)^2}$, $R: R=0,$ converge somente para $x=0$

2. Encontre a série de Maclaurin das funções abaixo e determine, em cada caso, o raio e o intervalo de convergência:

a) $f(x)=e^x$, $R: f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $R: R=+\infty,\ I=(-\infty,+\infty)$

b) $f(x)=\ln(10+x)$, $R: f(x)=\ln 10+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n10^n}$, $R: R=10,\ I=(-10,10]$

c) $f(x)=\frac{1}{4-x}$, $R: f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^{n+1}}$, $R: R=4,\ I=(-4,4)$

d) $f(x)=arctgx$, $R: f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $R: R=1,\ I=[-1,1]$

3. Utilizando as séries de Maclaurin do exercício anterior, determine uma série de potências que represente as seguintes funções:

a) $f(x)=x^2e^x$, $R: f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$, $R: R=+\infty,\ I=(-\infty,+\infty)$

b) $f(x)=xarctgx$, $R: f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1}$, $R: R=1,\ I=[-1,1]$

c) $f(x)=\dfrac{x^2}{4+x}$, $R: f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{n+2}}{4^{n+1}}$, $R: R=4$, $I=(-4,4)$

4. Usando as séries de Maclaurin de e^x, $senx$ e $\cos x$, mostre que $e^{ix}=\cos x+isenx$.

5. Sabendo que $sen2x=2senx\cos x$, use a série de Maclaurin de $senx$ para determinar a série de Maclaurin para a função $f(x)=senx\cos x$ e determine o raio e o intervalo de convergência desta série.
$R: f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R=+\infty$, $I=(-\infty,+\infty)$

6. Encontre a série de Maclaurin da função $f(x)=e^{-x^2}$ e utilize o polinômio de Maclaurin de grau 8, para calcular o valor aproximado da integral: $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.
$R: 0{,}7475$

7. Determine a soma das séries numéricas abaixo, associando-as com alguma série de Maclaurin:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$, $R: \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(\ln 2)^n}{n!}$, $R: \dfrac{1}{2}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{4n}}{n!}$, $R: e^{-16}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}$, $R: e^3-1$

8. Encontre a série de Taylor das funções abaixo e determine, em cada caso, o raio e o intervalo de convergência:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $a=2$, $R: f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-2)^n}{2^{n+1}}$, $R=2$, $I=(0,4)$

b) $f(x)=e^x$, $a=1$, $R: f(x)=e\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n!}$, $R=+\infty$, $I=(-\infty,+\infty)$

c) $f(x)=sen(\pi x)$, $a=\dfrac{1}{2}$, $R: f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\pi^{2n}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n}{(2n)!}$, $R=+\infty$, $I=(-\infty,+\infty)$

d) $f(x)=\ln x$, $a=1$, $R: f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$, $R=1$, $I=(0,2]$