INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

FURG

IMEF

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

PROFª. DENISE MARIA VARELLA MARTINEZ

EXERCÍCIOS

RESOLVIDOS

1. Calcule $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} xe^x dx$$

Integramos por partes com $u = x, dv = e^x dx$, de modo que $du = dx \; e \; v = e^x$

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} xe^x dx = \lim_{a\to-\infty} \left[(xe^x)_a^0 - \int_{a}^{0} e^x dx \right]$$

$$= \lim_{a\to-\infty} [-ae^a - (e^x)_a^0] = \lim_{a\to-\infty} [-ae^a - (1 - e^a)]$$

$e^a \to 0 \; quando \; a \to -\infty$

$$= \lim_{a\to-\infty} [-ae^a - 1 + e^a]$$

Pela Regra de L' Hospital temos $\lim_{a\to-\infty} [-ae^a] = \lim_{a\to-\infty} \frac{-a}{e^{-a}} = \lim_{a\to-\infty} \frac{-1}{-e^{-a}} = \lim_{a\to-\infty} e^a = 0$

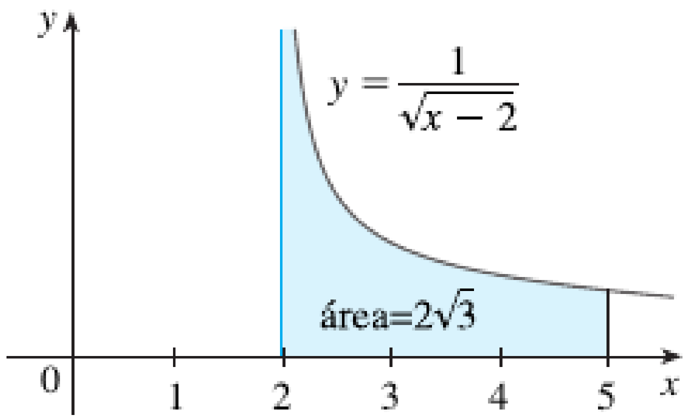
Portanto $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{a\to-\infty} [-ae^a - (1 - e^a)] = 0 - 1 + 0 = -1$

A integral converge

2. Calcule $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$

$x-2>0 \qquad Df=(2,+\infty),$ a função $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ tem assíntota vertical em $x=2$

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx = \lim_{a\to 2^+}\int_a^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx = \lim_{h\to 0}\int_{2+h}^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx =$$



$$=\lim_{h\to 0}\int_{2+h}^5 (x-2)^{-1/2}dx = \lim_{h\to 0}\left[2\sqrt{x-2}\right]_{2+h}^5$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(2\sqrt{5-2}-2\sqrt{2+h-2}\right)=2\sqrt{3}$$

A integral $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$ converge e tem área = $2\sqrt{3}$

3. Determine se as integrais convergem ou divergem.

$a) \int_0^{\pi/2} secx \ dx$

Como $\sec x = \dfrac{1}{cosx} \to \sec\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)} \to \infty$

$$\int_0^{\pi/2} secx \ dx = \lim_{h\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-h} secx\, dx \quad = \lim_{h\to 0} (\ln(secx + tgx)_0^{\frac{\pi}{2}-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \ln(\underbrace{\sec\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}_{\infty} + \underbrace{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}_{\infty} - \underbrace{\sec(0)}_{1} - \underbrace{\mathrm{tg}(0)}_{0}) = +\infty$$

A integral diverge

$b)\ \int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$ $\qquad Df = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$

Vamos calcular a integral indefinida $\int \frac{dx}{(4-x)^2} = -\int -\underbrace{(4-x)}_{u}{}^{-2}\, dx = -\frac{(4-x)^{-1}}{-1} = \frac{1}{(4-x)}$

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{(4-x)}\right)_{a}^{2} = \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(4-a)}\right) = \frac{1}{2}$$

A integral converge para 1/2

$c)\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$

Aparentemente a integral é definida, mas só aparentemente, pois a função $f(x) = \frac{1}{x-1}$ tem assíntota vertical em x =1, logo apresenta descontinuidade em $x = 1$ e a integral é imprópria.
$Df = R - \{1\}$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{h \to o}\left[\int_{1+h}^2 \frac{dx}{x-1}\right]$$

$$= \lim_{h \to o}\left[(\ln(x-1)_{1+h}^2\right]$$

$$= \lim_{h \to o}\left[\ln(2-1) - \ln(1+h-1)\right]$$

$$= \lim_{h \to o}\left[\underbrace{\ln(1)}_{0} - \underbrace{\ln(h)}_{-\infty}\right] = +\infty$$

Assim podemos dizer a integral diverge

4. Determine a área sob a curva $y=\frac{lnx}{x^2}$ no intervalo de $[1,+\infty)$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{lnx}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{lnx}{x^2}dx$$

Vamos resolver o limite. Se for finito, será a área sob a curva. Antes vamos calcular a integral $\int\frac{lnx}{x^2}dx$ (integração por partes)

$$\int\frac{lnx}{x^2}dx\Rightarrow\int udv=uv-\int vdu\Rightarrow u=lnx, dv=\frac{dx}{x^2}\to du=\frac{dx}{x}, v=\int\frac{dx}{x^2}=-1/x$$

$$\int\frac{lnx}{x^2}dx=-\frac{lnx}{x}-\int\frac{-1}{x}\frac{dx}{x}=-\frac{lnx}{x}+\int x^{-2}\,dx=-\frac{lnx}{x}-\frac{1}{x}$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{lnx}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{lnx}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{lnx}{x}-\frac{1}{x}\right)_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{lnb}{\underbrace{b}_{\frac{\infty}{\infty}}}-\underbrace{\frac{1}{b}}_{zero}+\underbrace{ln1/1}_{zero}+\frac{1}{1}\right)=$$

$$=1+\overbrace{\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{lnb}{\underbrace{b}_{\frac{\infty}{\infty}}}\right)}^{aplica\ L\acute{}Hospital}=1+\lim_{b\to+\infty}-\frac{\frac{1}{b}}{1}=1+0=1$$

A integral imprópria converge e a área tem valor finito 1

¨5. Com quais valores de p a integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge?

Vimos no exemplo 3 que a $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$, logo divergente, ou seja a área sob a curva é infinita.

Assim, para $p = 1$ a integral é divergente, vamos, então, analisar para $\mathrm{p} \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1^{1-p}}{1-p} -\right] = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} -\right] =$$

Se $p > 1$, então $1 - p < 0$ e $b^{1-p} \to 0$ $quando$ $b \to +\infty$ e a $integral$ é $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = 0 - \frac{1}{p-1}$

Se $p < 1$, então $1 - p > 0$ e $b^{1-p} \to +\infty$ $quando$ $b \to +\infty$

Assim a integral converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

6. Uma transformada é uma fórmula que converte ou "transforma" uma função em outra. As transformadas são usadas em aplicações para converter um problema difícil em um mais fácil, cuja solução pode ser usada para resolver o problema original difícil. É muito utilizada na Engenharia Mecânica, Elétrica, de Automação, da Computação e nas demais. A transformada de Laplace de uma função $f\ (t)$, que desempenha um papel importante no estudo das equações diferenciais, é definida por

$$\mathcal{L}\{f(f)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^{\mathrm{b}} e^{st} f(t)dt,$$

$$se\ existir\ o\ limite, ou\ seja, se\ a\ integral\ imprópria\ convergir$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{t^2\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot t^2 dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b t^2 e^{-st} dt = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{b^2}{s} e^{-sb} - \frac{2b}{s^2} e^{-sb} - \frac{2}{s^3} e^{-sb} + \frac{2}{s^3} \right)$$

Se $s < 0$, temos $\lim_{b \to +\infty} \left[e^{-sb} \left(-\frac{b^2}{s} - \frac{2b}{s^2} - \frac{2}{s^3} \right) + \frac{2}{s^3} \right] = +\infty$ e a integral imprópria diverge.

Se $s > 0$, temos $\lim_{b \to +\infty} \left[e^{-sb} \left(-\frac{b^2}{s} - \frac{2b}{s^2} - \frac{2}{s^3} \right) + \frac{2}{s^3} \right] = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^3} \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b^2 s^2 + 2bs + 2}{e^{sb}} \right) = \frac{2}{s^3}$

portanto a integral imprópria converge

EXERCÍCIOS

PROPOSTOS

I) Diga se a integral é definida ou imprópria e explique como chegou à conclusão.

$a) \int_{1}^{5} \frac{dx}{x - 3}$

$b) \int_{1}^{5} \frac{dx}{x + 3}$

$c) \int_{1}^{+\infty} e^{-x} \, dx$

$d) \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x - 1}}$

$e) \int_{0}^{2} \frac{dx}{2x - 1}$

$f) \int_{0}^{1} \frac{dx}{2x + 1}$

$g) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{senx}{1 + x^2} dx$

$h) \int_{1}^{2} \ln(x - 1) \mathrm{dx}$

Respostas: são integrais impróprias a); c); d); e) g); h)

II.) Resolva as integrais

1) $\int_{4}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = 1$

2) $\int_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4 + 1} = \frac{\pi}{4}$

3) $\int_{0}^{4} \frac{8}{\sqrt{16 - x^2}} dx = 4\pi$

4) $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{x}}{\sqrt{x-1}} dx = \frac{8}{3}$

5) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = ln\ (2)$

6) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x-1)^2} = +\infty$

III.) Usando a definição de transformada de Laplace, mostre que:

$a)\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, s > 0$

$\mathrm{b})\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}, s > 2$