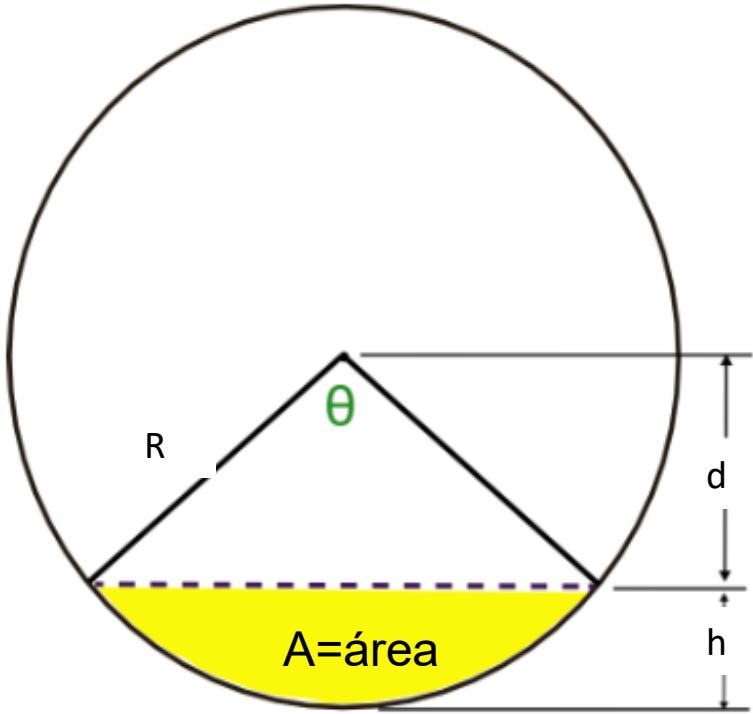


Raízes de equações não lineares: Problema-exemplo

Objetivos

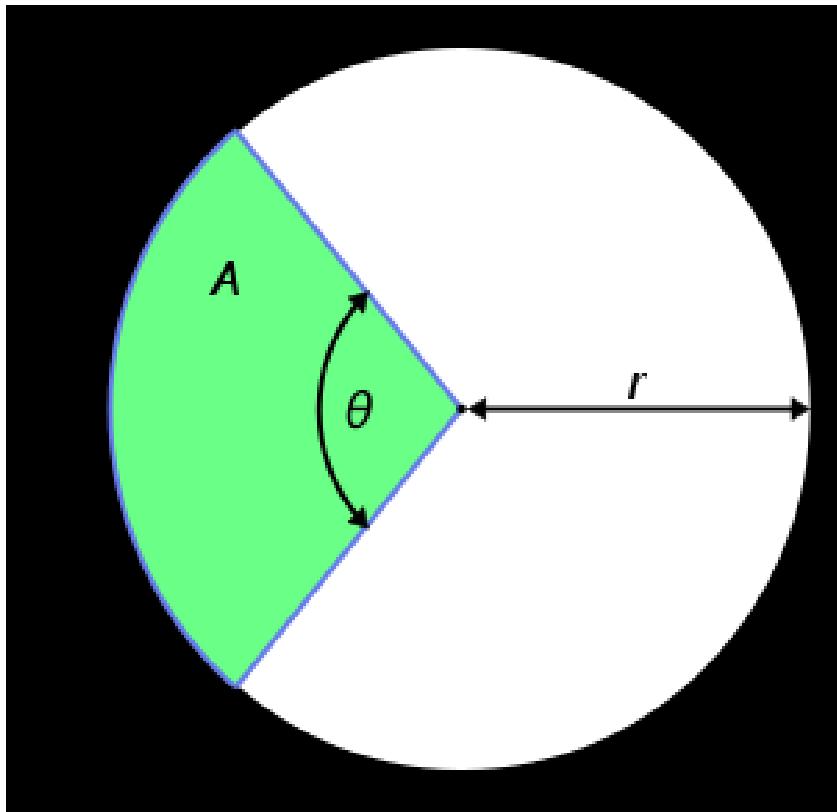
1. Deduzir $A = f(r, \theta)$
2. Dados A e r , achar θ
3. Dados θ e r , achar A



Dedução da fórmula

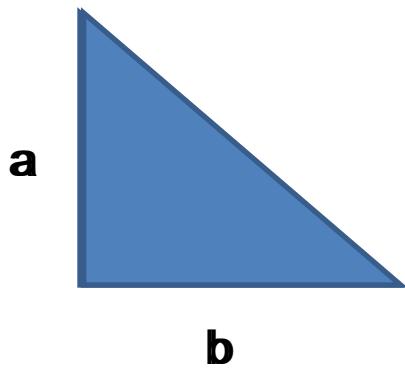
1. A equação da área do setor circular (sc) é bem conhecida:

$$A_{sc} = f(r, \theta)$$



$$A_{sc} = \frac{r^2 \theta}{2}$$

2. A equação da área do triângulo retângulo (tr) também já é bem conhecida

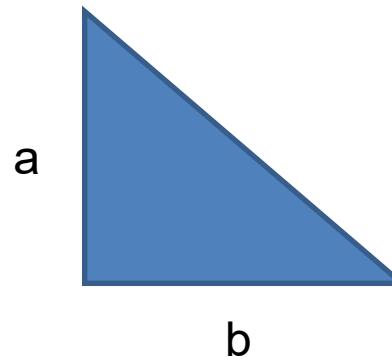
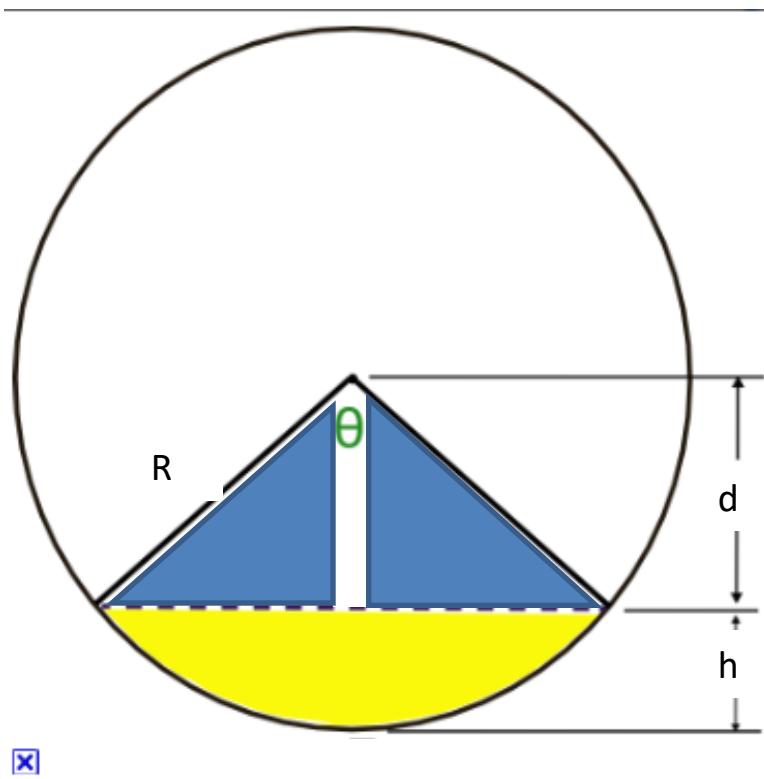


$$A_{tr} = f(b, h)$$

$$A_{tr} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Como expressar a área do triangulo pintada em amarelo, em função do raio e do ângulo?

Como expressar $A = f(r, \theta)$?



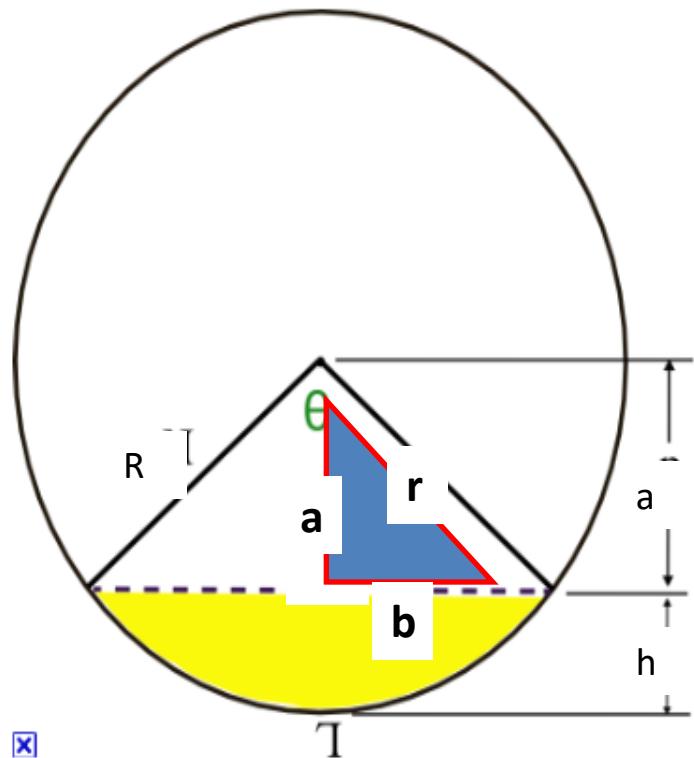
Área do triangulo em função do valor dos catetos é conhecida:

$$A_{tr} = \frac{b \cdot a}{2}$$

Área do triângulo retângulo

Achar $A_{tr} = f(r, \theta)$

Vamos expressar a e b em função de r e theta.



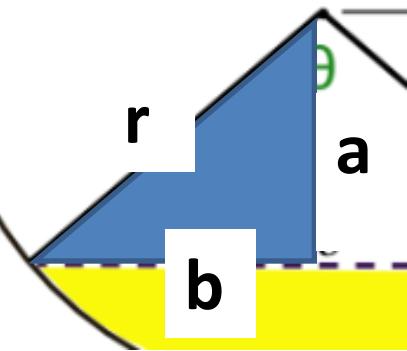
$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}, \quad \alpha = \theta / 2$$

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Área do triângulo



$$b = r \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right); \quad a = r \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

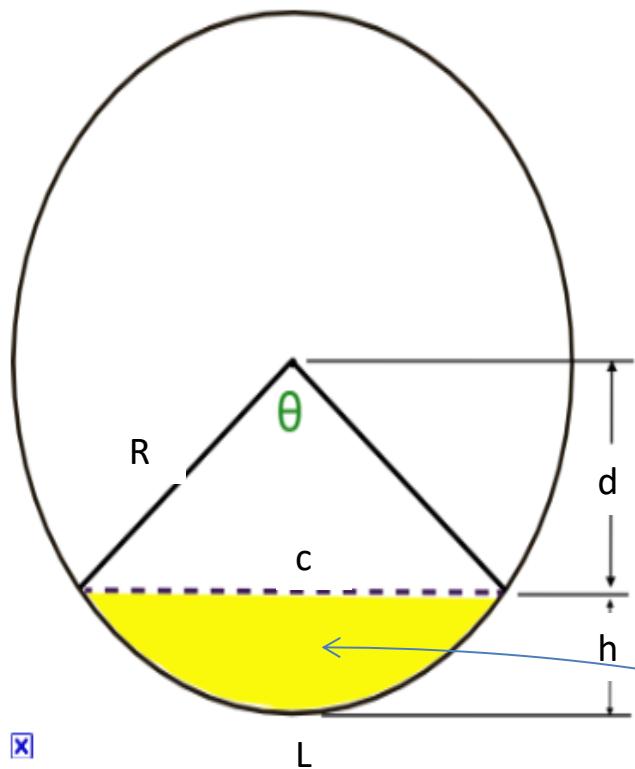
São 2 triângulos!!!

$$\cancel{A = 2 \cdot \left(\frac{b \cdot a}{2} \right)} \rightarrow A = b \cdot a \rightarrow A = r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Usando $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$, simplificamos para

$$A_{tr} = r^2 \frac{\sin(\theta)}{2}$$

Em resumo: Área da região em amarelo é:



$$A_{sc} = \frac{r^2\theta}{2}$$

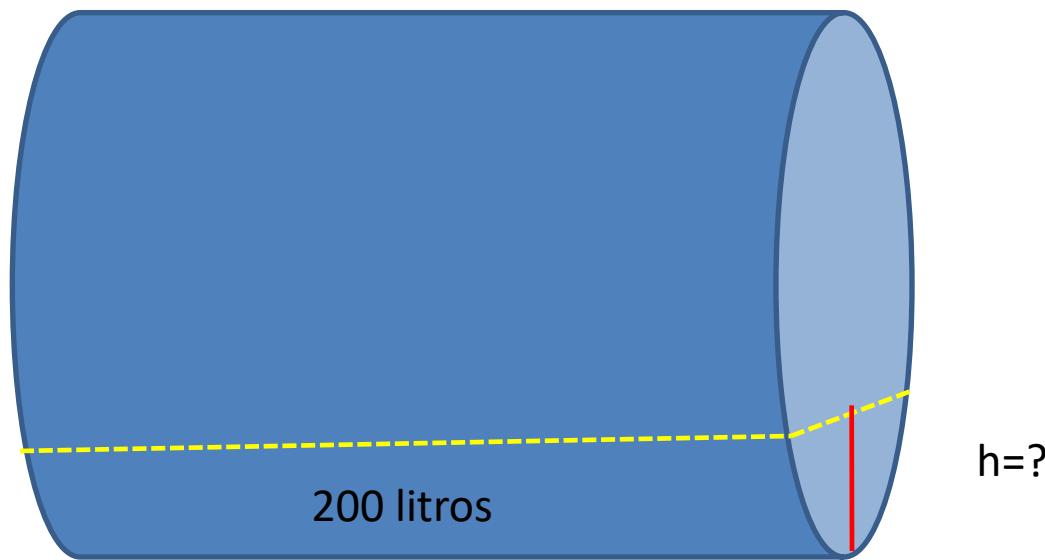
$$A_{tr} = r^2 \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{2}$$

$$A = \frac{r^2\theta}{2} - r^2 \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{2} \rightarrow$$

$$A = \frac{r^2}{2} (\theta - \operatorname{sen}(\theta))$$

Aplicação:

1. Em tanque cilíndrico, com 1m de comprimento e raio de 0,5m foram colocados 200 litros ($0,2\text{ m}^3$) de liquido. Descubra qual a altura da camada liquido que se forma na base do tanque.



Passos da solução

Valor da área:

$$A = V / z \quad \longrightarrow \quad A = 0,2m^3 / 1m = 0,2m^2$$

Equação da área em função do ângulo :

$$A = \frac{r^2}{2}(\theta - \sin(\theta)) \quad \longrightarrow \quad 0,2 = \frac{0,5^2}{2}(\theta - \sin(\theta))$$
$$\theta - \sin(\theta) - 1,6 = 0$$

Equação da área em amarelo na figura do slide anterior

Passos da solução

$$\theta - \operatorname{sen}(\theta) - 1,6 = 0$$

Recorde que “ θ ” é o ângulo.

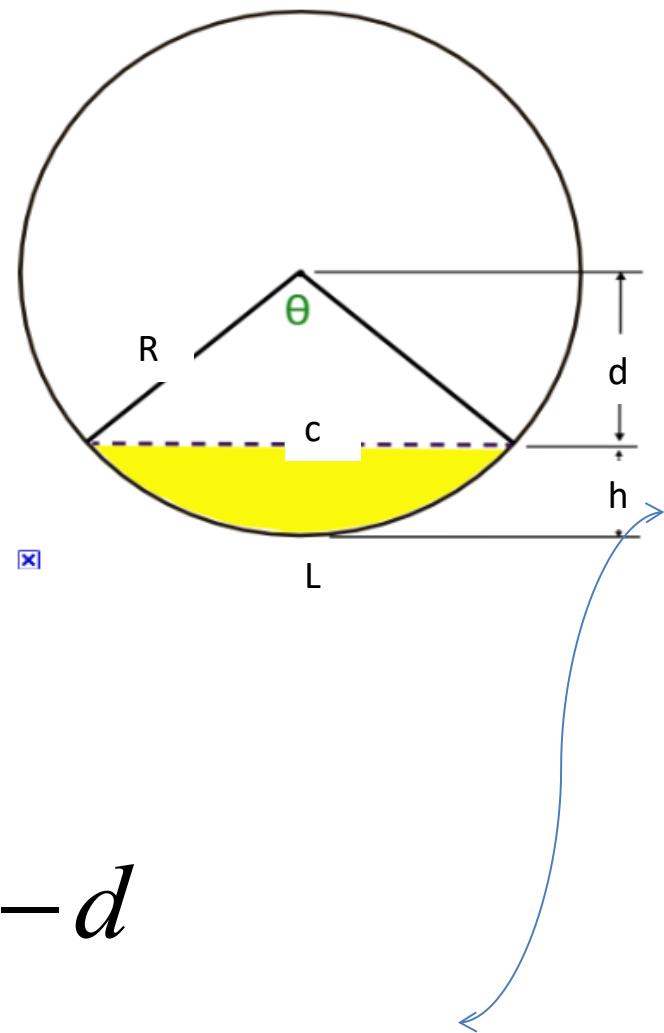
Resolvendo esta equação numericamente, obtemos $\theta = 2.32726\dots$

Agora achar a altura “ h ” é fácil. Primeiro calculamos o cateto adjacente “ d ” e depois a altura “ h ” é o raio R menos o valor do cateto d :

$$d = R \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \rightarrow h = R - d$$

$$d = 0,5 \cdot \cos\left(\frac{2.32726}{2}\right) = 0,198$$

$$h = 0,5 - 0,198 = 0,302m$$



Comentários finais

- No calculo anterior, perceba que a única dificuldade que existe nos cálculos é a solução da equação

$$\theta - \operatorname{sen}(\theta) - 1,6 = 0$$

- Para resolver esta equação utilizamos métodos numéricos, que dão uma solução numérica, que é exata até a precisão desejada (tantas casas decimais quanto desejarmos).

Exercícios

- 1) Em tanque cilíndrico, com 2m de comprimento e raio de 0,5m foram colocados 200 litros ($0,2\text{ m}^3$) de liquido. Descubra qual a altura da camada liquido que se forma na base do tanque.

Exercícios

- 2) Em tanque cilíndrico, com 5m de comprimento e raio de 1,0m foram colocados 2000 litros (2 m^3) de liquido. Descubra qual a altura da camada liquido que se forma na base do tanque.
-