Continuidade de Funções de uma Variável Real

Cristiana Andrade Poffal

Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

19 de Fevereiro de 2025

Continuidade

Uma função $f(x)$ é contínua em $x = a$ (ponto de acumulação do domínio de f) se:

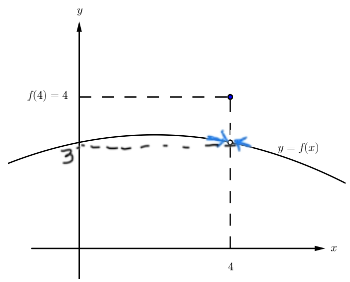
a) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, ou seja, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$;
b) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Caso contrário, $f(x)$ é descontínua no ponto a pertencente ao domínio de $f(x)$.

Exemplo: Observe os gráficos das funções na Figura 1.

a) Determine em quais delas é possível discutir a continuidade em $x = 4$.

b) Nas funções em que é possível discutir a continuidade em $x = 4$, determine quais são contínuas em $x = 4$.

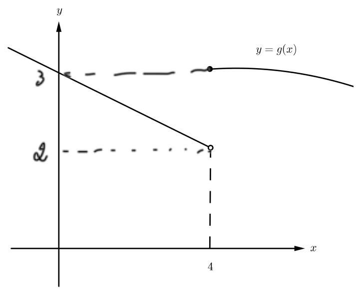


$\exists \lim_{x \to 4} f(x)$

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 3$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 3$

Logo, f não é contínua em $x = 4$. $\Leftarrow$ $\boxed{f(4) = 4 \neq \lim_{x \to 4} f(x)}$

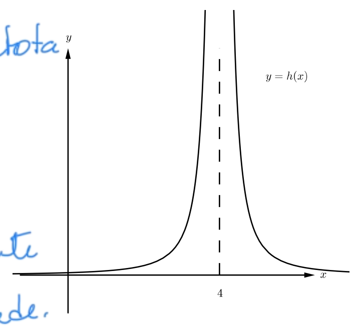


$$\lim_{x \to 4^+} g(x) = 3$$

$$\lim_{x \to 4^-} g(x) = 2$$

$$\nexists \lim_{x \to 4} g(x)$$

Logo, $g(x)$ é descontínua em $x = 4$.

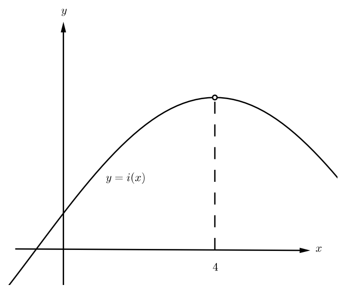


$X = 4$ é assíntota vertical de $h(x)$

$x = 4 \notin D(f)$

Não se discute a continuidade.

$\nexists\, i(4) \rightarrow$ não discute a continuidade em $x = 4$, pois $x = 4 \notin D(f)$.



Exemplo: Determine se cada $f(x)$ é contínua em seu domínio.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ 4, & x = 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}, & x \neq 3 \\ x+2, & x = 3 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ 4, & x = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3} f = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$$

$$= \frac{0}{0}$$ Forma indeterminada

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}$$

$$= \lim_{x\to 3} x+3$$

$$= 3+3 = 6$$

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = 4 \\ \boxed{\lim_{x\to 3} f = 6} \end{array}\right\} \neq$$

↳ f é descontínua em $x = 3$

- $x = 3 \in D(f)$
- $f(3) = 5$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}, & x \neq 3 \\ x + 2, & x = 3 \end{cases}$$

- calcular $\lim_{x \to 3} f$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$$

$$= \frac{3^2 - 3 - 6}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

Forma Indet.

Fatorar

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+2)}{\cancel{x-3}} = \lim_{x \to 3} x + 2 = 5$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Continuidade unilateral

$\therefore \lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$, logo f é contínua em $x = 3$.

Definição:
Uma função $f(x)$ tem continuidade unilateral à direita de um ponto a se $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Da mesma forma, uma função $f(x)$ tem continuidade unilateral à esquerda de um ponto a se $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Exemplo: Sendo $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, verifique se $f(x)$ tem continuidade unilateral:

a) à direita de $x = -3$;
b) à esquerda de $x = 3$;
c) à direita de $x = 3$;
d) à esquerda de $x = -3$.