

A INTEGRAL DEFINIDA

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO



Fonte: geogebra.org



TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Você sabia que o Teorema Fundamental do Cálculo estabelece a conexão entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral? O primeiro surgiu a partir do problema de determinar a reta tangente a uma curva em um ponto, enquanto o segundo surgiu a partir do problema de encontrar a área de uma figura plana. Aparentemente, e só aparentemente, parece não existir ligação entre eles.



Isaac Barrow(1630-1677), professor de Newton em Cambridge, descobriu que os dois estão relacionados ao perceber que os processos de diferenciação e integração são processos inversos. Mas foram Newton (1643-1727) e Leibniz (1646 -1716), independentemente, que exploraram essa conexão e desenvolveram o Cálculo e, perceberam que o Teorema Fundamental do Cálculo permitia encontrar uma área de uma figura plana de forma fácil, sem usar a soma de retângulos.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO (TFC)

Se $f(x)$ é integrável em $[a, b]$ e, se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ neste intervalo, então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

1. Calcular $\int_0^2 xdx$.

Resolução: Sabemos que $F(x) = \int xdx = \frac{x^2}{2}$ é uma primitiva da função $f(x)$, pois $F'(x) = \frac{2x}{2} = x = f(x)$. Logo pelo Teorema Fundamental do Cálculo vem:

$$\int_0^2 xdx = F(x) = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = F(2) - F(0) = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2, \text{ portanto } \int_0^2 xdx = 2.$$

2. Calcular. $\int_{-1}^1 (x^2 + 1)dx$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx + \int_{-1}^1 dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^1 + (x)_{-1}^1 = \left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) + (1 - (-1)) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + (1 + 1) = \frac{2}{3} + 2 = \frac{2+6}{3} = \frac{8}{3}$$

3. Calcular $\int_{-2}^0 3y\sqrt{4-y^2} dy$

$$\int_{-2}^0 3y\sqrt{4-y^2} dy = \underbrace{\frac{3}{-2} \int_{-2}^0 \sqrt{\underbrace{4-y^2}_u} \underbrace{-2y}_{\frac{du}{dy}} dy}_{\int_{-2}^0 u^n du} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[(4-y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-2}^0 = -[(4-y^2)^{3/2}]_{-2}^0$$

$$= -(4 - 0^2)^{\frac{3}{2}} - (-(4 - (-2)^2))^{\frac{3}{2}} = -(4)^{\frac{3}{2}} + (0)^{\frac{3}{2}} = -(2^2)^{\frac{3}{2}} = -8$$



4. Calcular $\int_0^{\pi/2} \cos(t) dt$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(t) dt = (\text{sent})_0^{\pi/2} = \left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}(0) \right) = 1$$

5. Calcular $\int_1^2 \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$

fazendo $u = x^3 + 1 \Rightarrow du = 3x^2 dx$, obtemos uma integral da forma $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$, multiplicando e dividindo a integral por 3, obtemos o du

$$\int_1^2 \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{3x^2 dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} (\ln|x^3 + 1| + C)_1^2 = \frac{1}{3} ((\ln|2^3 + 1| + C) - (\ln|1^3 + 1| + C)) = \frac{1}{3} (\ln 9 - \ln 2)$$

6. Calcular $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 9}} dx$

Vamos aplicar a substituição $u = x^3 + 9 \Rightarrow du = 3x^2 dx$, então temos uma integral $\int u^n du$, onde $n = -1/2$, logo:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 9}} dx &= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (x^3 + 9)^{-1/2} 3x^2 dx = \left(\frac{1}{3} \frac{(x^3 + 9)^{1/2}}{1/2} \right)_{-1}^1 \\ &= \left(\frac{2(1^3 + 9)^{1/2}}{3} \right) - \left(\frac{2((-1)^3 + 9)^{1/2}}{3} \right) = \frac{2\sqrt{10}}{3} - \frac{2\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{10} - 4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$