- **Integração Numérica**

Integração Numérica

Integração Numérica: porque é importante?

- Em muitos problemas não temos expressões analíticas, mas apenas medições;
- Forma e dimensões de balizas ⇒ cálculo de deslocamento;
- Medições de velocidade ⇒ cálculo de distância;
- Não existe expressão analítica para a integral da maior parte das funções; veja, por exemplo, https://pt.wikipedia.org/wiki/Integral_n%C3%A3o_elementar
- Por vezes, mesmo existindo solução analítica, a solução numérica é mais fácil!

Integração Numérica

Aplicações

Calcular a distância "S" percorrida por um móvel, tendo por base apenas as medidas de velocidade do mesmo em determinados instantes de tempo.

t (s)	v (m/s)
0	0
1	1,3
2	2,4
3	3,3
4	2,1
5	2,9

$$v = \frac{dS}{dt} \rightarrow \int dS = \int v\,dt$$

$$S = \int v\,dt$$

Veja que não podemos calcular diretamente a integral, pois não temos a expressão (fórmula) de ***v(t)***. No entanto, como veremos, esta integral pode ser facilmente calculada usando integração numérica.

Integração Numérica

Aplicações $$I = \int e^{-x^2}\, dx$$

Wolfram

integrate exp(-x^2) dx from x=0 to 1

Extended Keyboard   Upload

Definite integral:

$$\int_0^1 \exp(-x^2)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, \mathrm{erf}(1) \approx 0.746824$$

Indefinite integral:

$$\int \exp(-x^2)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, \mathrm{erf}(x) + \text{constant}$$

Função erro

$$\begin{aligned}\mathrm{erf}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\, dt\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-t^2}\, dt.\end{aligned}$$

Neste exemplo mostramos que a função exp(-x^2) não tem uma integral elementar. A integral desta função é expressa em termos da ***erf(x)*** **(**função erro **)**, que por sua vez, remete novamente a integral de exp(-x^2) ...

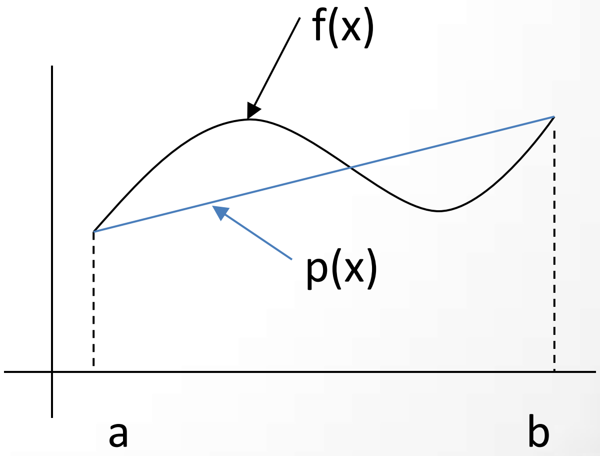
Integração Numérica

Integração Numérica: ideias base.

Em vez de integrar a função pretendida, vamos integrar uma função parecida que seja mais fácil de integrar.

Os polinômios são funções fáceis de integrar!

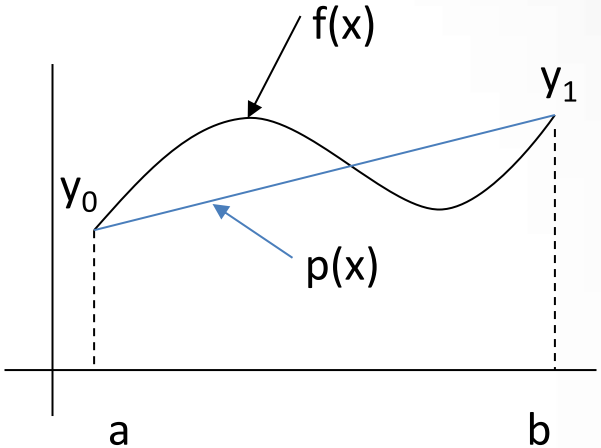
$$\int_a^b f(x) \approx \int_a^b p(x)$$



Integração Numérica

Integração Numérica: ideias base.

$$\int_a^b f(x) \approx \int_a^b p(x)$$



$$\int_a^b p(x)dx = \int_a^b \left[y_0\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right) + y_1\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\right] dx = \frac{b-a}{2}\left(y_0+y_1\right)$$

Verifique!!!

Equação da reta, usando polinômio de Lagrange.

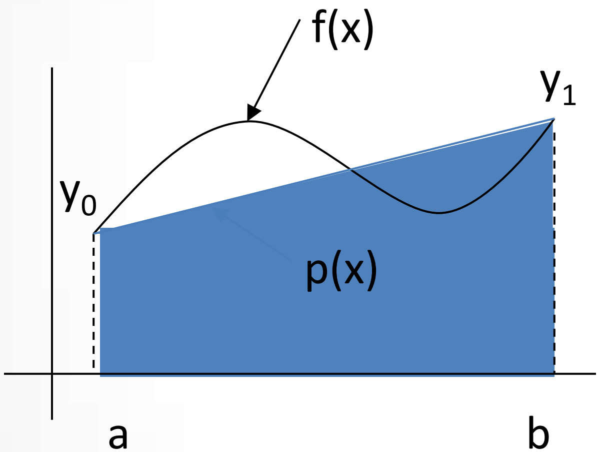
Integração Numérica

- Fórmulas :

  - Regra dos Trapézios;

  - Regra de Simpson 1/3 ;

Integração Numérica: Regra dos Trapézios



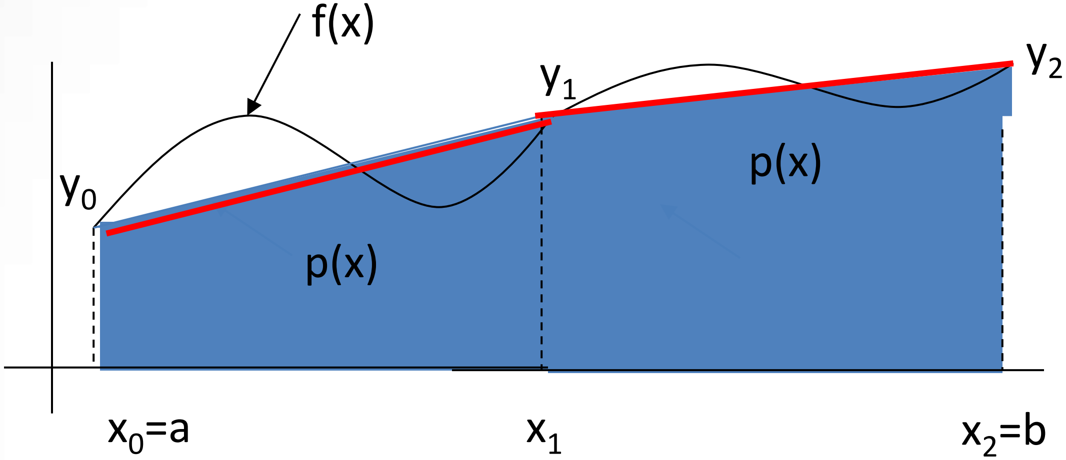
A região pintada em azul é um trapézio, cuja área é:

$$A = (y_0 + y_1)\frac{h}{2}$$

Repare que a base menor do trapézio é y0 e a base maior é y1 e que a altura do trapézio é h=b-a.

Integração Numérica: Regra dos Trapézios Composta

Regra dos trapézios **composta** : extensão para “n” segmentos



$$h = \frac{b-a}{n}$$

n=2
(2 segmentos)

$$A = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) = \frac{h}{2}(y_0 + y_2 + 2y_1)$$

Regra dos trapézios composta: para “n” segmentos, temos

$$A = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n) = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

Integração Numérica: Regra dos Trapézios Composta

Exemplo 1: Consideremos a tabela tempo x velocidade mostrada anteriormente. Vamos calcular

$$S = \int_{t=0}^{t=5} v\,dt$$

t (s)	v (m/s)	
0	0	y_0
1	1,3	y_1
2	2,4	y_2
3	3,3	y_3
4	2,1	y_4
5	2,9	y_5
6	3,1	y_6

Usando a regra dos trapézios composta (n=5, neste caso)

$$S = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right), \quad h = \frac{b-a}{n} \rightarrow h = \frac{6-0}{6} \rightarrow h = 1$$

$$S = \frac{1}{2}(y_0 + y_6 + 2\underbrace{(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)}))$$

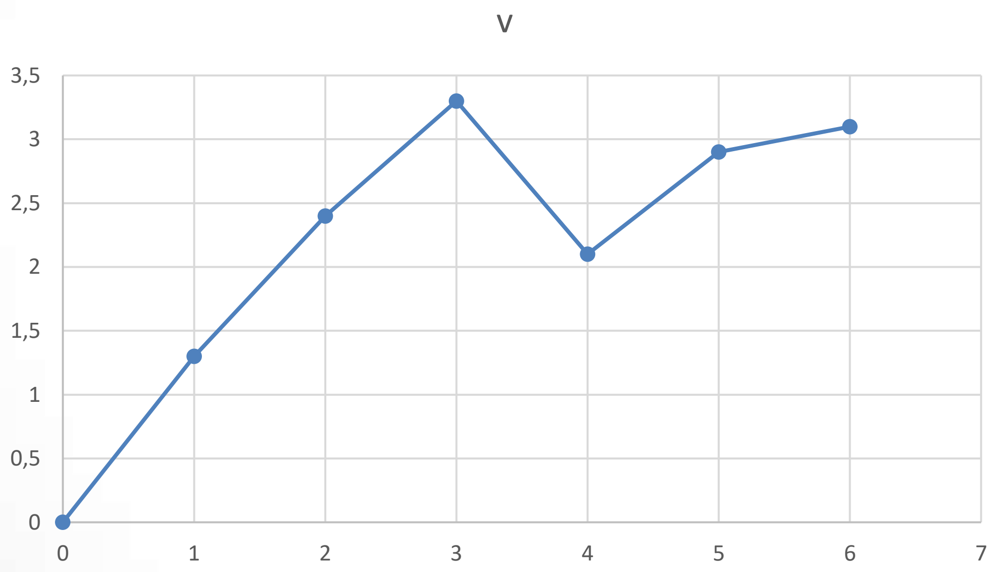
$$S = \frac{1}{2}(0 + 3,1 + 2(1,3 + 2,4 + 3,3 + 2,1 + 2,9))$$

$$S = 13,55\,m$$

Veja que nós resolvemos a integral, sem conhecer a expressão matemática da função v(t) !!!

Interpretação Geométrica

O Valor da integral corresponde a área abaixo da curva. Para o exemplo anterior, teríamos



Integração Numérica: Regra dos Trapézios Composta

Exemplo 2: Integre numericamente $\int_{x=0}^{x=1} e^{-x^2}\,dx$, usando n=10.

x	y	
0	e^{-0^2}	y_0
0,1	$e^{-0,1^2}$	y_1
0,2	$e^{-0,2^2}$	y_2
0,3	$e^{-0,3^2}$	y_3
0,4	$e^{-0,4^2}$	y_4
0,5	$e^{-0,5^2}$	y_5
0,6	$e^{-0,6^2}$	y_6
0,7	$e^{-0,7^2}$	y_7
0,8	$e^{-0,8^2}$	y_8
0,9	$e^{-0,9^2}$	y_9
1,0	e^{-1^2}	y_{10}

Solução: $h = \dfrac{b-a}{n} \rightarrow h = \dfrac{1-0}{10} \rightarrow h = 0,1$

Usando a regra dos trapézios composta (n=5, neste caso)

$$I_t = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

$$I_t = \frac{0,1}{2}\left(y_0 + y_{10} + 2\underbrace{(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9)}\right)$$

$$I_t = \frac{0,1}{2}\left(e^{-0^2} + e^{-1^2} + 2(e^{-0,1^2} + e^{-0,2^2} + e^{-0,3^2} + e^{-0,4^2} + e^{-0,5^2} + e^{-0,6^2} + e^{-0,7^2} + e^{-0,8^2} + e^{-0,9^2})\right)$$

$$\boxed{I_t = 0,746211\ldots}$$

Valor exato:

Definite integral:

$$\boxed{\int_0^1 \exp(-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(1) \approx 0.746824}$$

Integração Numérica: Regra dos Trapézios Composta

Exercicio 1: Integre numericamente $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$, usando n=10.

x	y	
0	$\cos(0^2)$	y_0
0,1	$\cos(0{,}1^2)$	y_1
0,2	$\cos(0{,}2^2)$	y_2
0,3	$\cos(0{,}3^2)$	y_3
0,4	$\cos(0{,}4^2)$	y_4
0,5	$\cos(0{,}5^2)$	y_5
0,6	$\cos(0{,}6^2)$	y_6
0,7	$\cos(0{,}7^2)$	y_7
0,8	$\cos(0{,}8^2)$	y_8
0,9	$\cos(0{,}9^2)$	y_9
1,0	$\cos(1^2)$	y_{10}

Solução: $h = \frac{b-a}{n} \rightarrow h = \frac{1-0}{10} \rightarrow h = 0{,}1$

Usando a regra dos trapézios composta (n=5, neste caso)

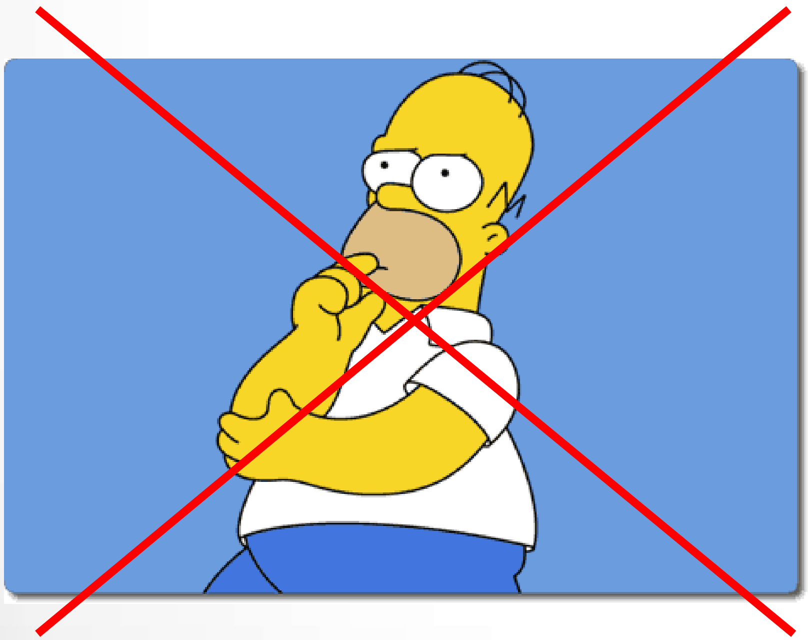
$$I_t = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

$$I_t = \frac{0{,}1}{2}(y_0 + y_{10} + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9))$$

$$\boxed{I_t = 0{,}903122...}$$

Verifique!!!

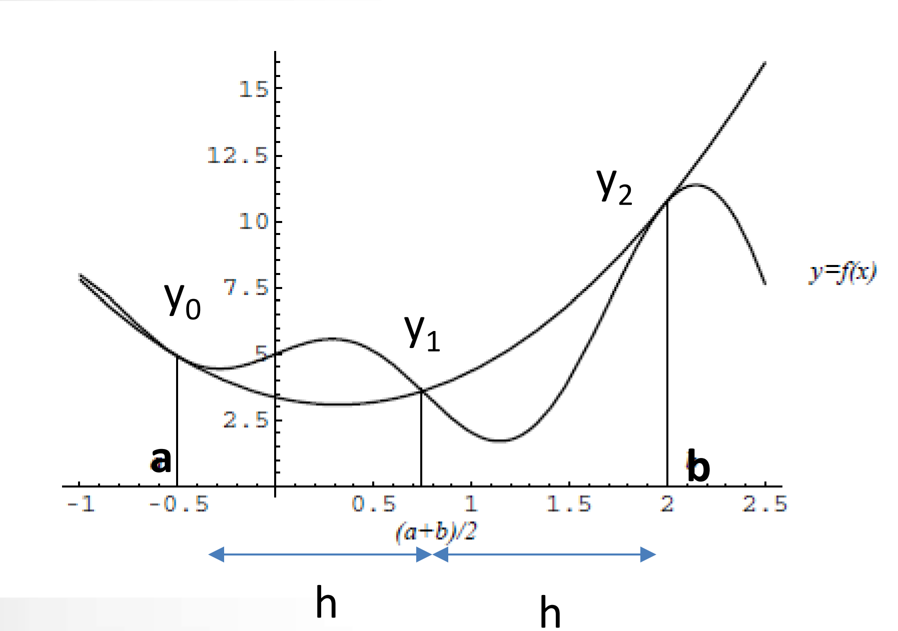
- **Regra de Simpson 1/3**



Thomas Simpson

(1710-1761)

Integração Numérica: Regra dos Simpson 1/3



$$h = \frac{b-a}{n}$$

n=2, nesta figura!

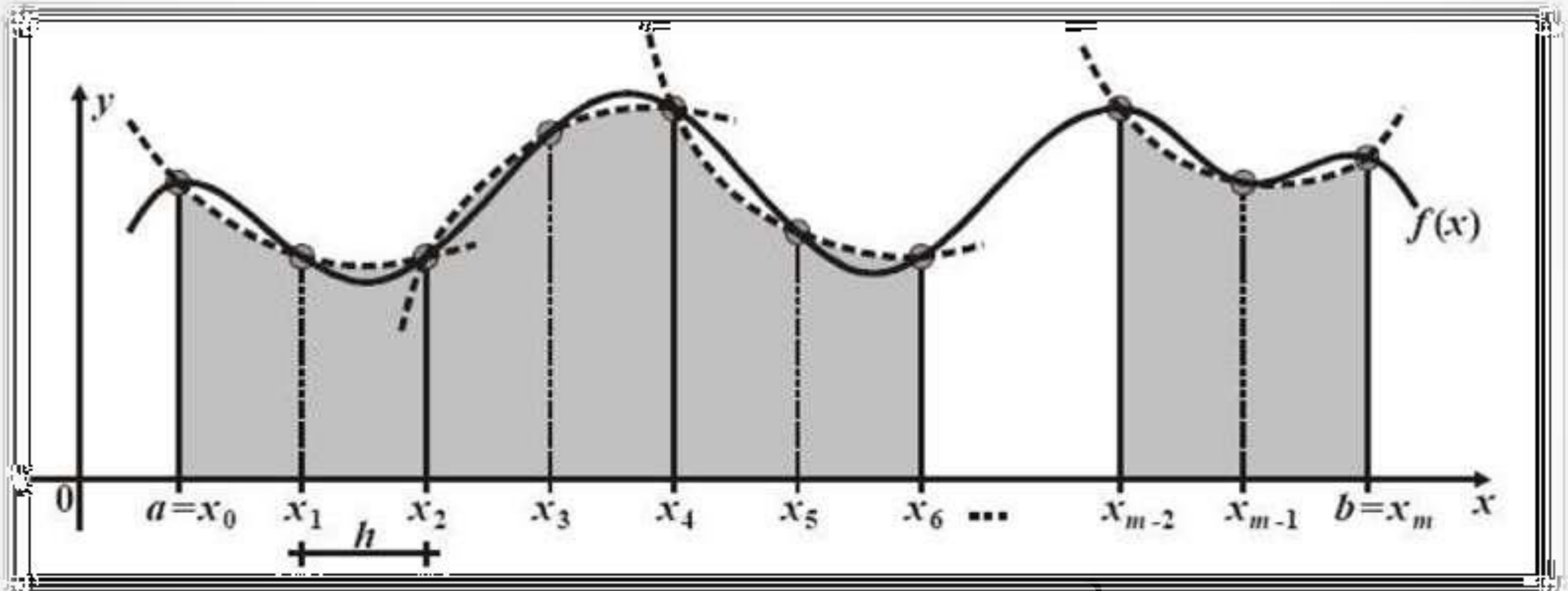
Neste método de integração utiliza-se 3 pontos (2 segmentos, de tamanho h), e aproxima-se a região por um polinômio de grau 2 (uma parábola). Pode-se mostrar que a área abaixo da parábola é dada por

$$A = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Esta fórmula é deduzida integrando-se o polinômio interpolador de Lagrange. Verifique!!!

Integração Numérica: Regra dos Simpson 1/3 composta

Na regra composta, o intervalo [a , b] é dividido em n segmentos, e aproximado por n/2 parábolas. Somando-se as áreas das parábolas, temos



$$A = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$A = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} y_i + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} y_i\right)$$

OBS: como serão n/2 parábolas, n deve ser par!

Integração Numérica: Regra dos Simpson 1/3 composta

Exemplo 1: Consideremos a tabela tempo x velocidade mostrada anteriormente. Vamos calcular

$$S = \int_{t=0}^{t=5} v\,dt$$

t (s)	v (m/s)	
0	0	y_0
1	1,3	y_1
2	2,4	y_2
3	3,3	y_3
4	2,1	y_4
5	2,9	y_5
6	3,1	y_6

Usando a regra dos trapézios composta (n=5, neste caso)

$$A = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} y_i + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} y_i\right) \quad , h = \frac{6-0}{6} \rightarrow h = 1$$

$$A = \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 4\underbrace{(y_1 + y_3 + y_5)} + 2\underbrace{(y_2 + y_4)})$$

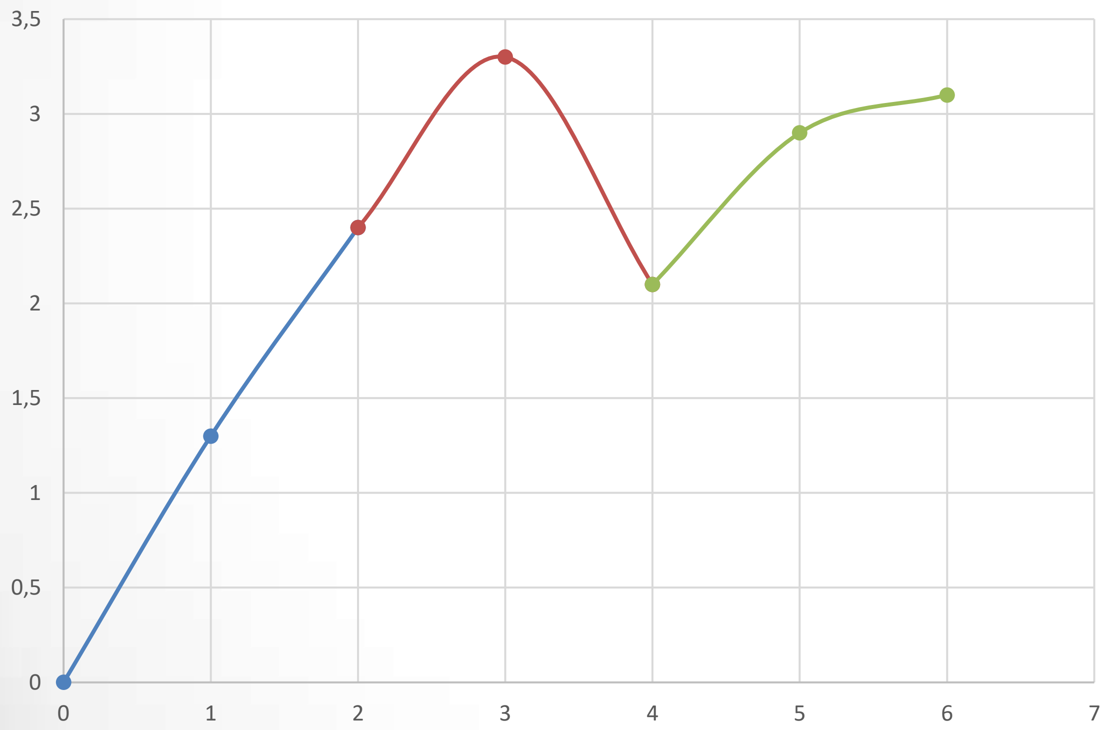
$$S = \frac{1}{2}(0 + 3{,}1 + 4(1{,}3 + 3{,}3 + 2{,}9) + 2(2{,}4 + 2{,}1))$$

$$S = 14{,}03\ldots m$$

Veja que nós resolvemos a integral, sem conhecer a expressão matemática da função v(t) !!!

Interpretação Geométrica

O Valor da integral corresponde a área abaixo da curva. Para o exemplo anterior, teríamos



Repare que a cada 3 pontos consecutivos, ajustamos uma parábola.

Integração Numérica: Regra dos Simpson 1/3 composta

Exemplo 2: Integre numericamente $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} e^{-x^2}\,dx$, usando n=10.

x	y	
0	e^{-0^2}	y_0
0,1	$e^{-0,1^2}$	y_1
0,2	$e^{-0,2^2}$	y_2
0,3	$e^{-0,3^2}$	y_3
0,4	$e^{-0,4^2}$	y_4
0,5	$e^{-0,5^2}$	y_5
0,6	$e^{-0,6^2}$	y_6
0,7	$e^{-0,7^2}$	y_7
0,8	$e^{-0,8^2}$	y_8
0,9	$e^{-0,9^2}$	y_9
1,0	e^{-1^2}	y_{10}

Solução: $h = \dfrac{b-a}{n} \rightarrow h = \dfrac{1-0}{10} \rightarrow h = 0,1$

Usando a regra dos trapézios composta (n=5, neste caso)

$$A = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} y_i + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} y_i\right)$$

$$A = \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8))$$

$$I_t = \frac{0,1}{3}(e^{-0^2} + e^{-1^2} + 4(e^{-0,1^2} + e^{-0,3^2} + e^{-0,5^2} + e^{-0,7^2} + e^{-0,9^2}) + 2(+e^{-0,2^2} + e^{-0,4^2} + e^{-0,6^2} + e^{-0,8^2}))$$

$$\boxed{I_t = 0,746825...}$$

Valor exato:

Definite integral:

$$\int_0^1 \exp(-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(1) \approx 0.746824$$

Integração Numérica: Regra dos Simpson 1/3 composta

Exercício 1: Integre numericamente $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$, usando n=10.

x	y	
0	cos(0²)	y_0
0,1	cos(0,1²)	y_1
0,2	cos(0,2²)	y_2
0,3	cos(0,3²)	y_3
0,4	cos(0,4²)	y_4
0,5	cos(0,5²)	y_5
0,6	cos(0,6²)	y_6
0,7	cos(0,7²)	y_7
0,8	cos(0,8²)	y_8
0,9	cos(0,9²)	y_9
1,0	cos(1²)	y_{10}

Solução: $h = \frac{b-a}{n} \rightarrow h = \frac{1-0}{10} \rightarrow h = 0,1$

Usando a regra dos trapézios composta (n=5, neste caso)

$$A = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} y_i + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} y_i\right)$$

$$A = \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8))$$

$\boxed{I_t = 0,904524...}$

Verifique!!!

Exercícios

1. Calcular o valor das seguintes integrais, pelos métodos de trapézios e Simpson 1/3, usando 4 segmentos (n=4).

1) $$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx$$

2) $$\int_{1.1}^2 \frac{1}{\ln(x)}\,dx$$

3) $$\int_{0.1}^1 \frac{e^x}{x}\,dx$$

Exercícios

2. Calcular o valor das seguintes integrais, pelos métodos de trapézios e Simpson 1/3, usando 8 segmentos (n=8).

1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx$

2) $\int_{1.1}^2 \frac{1}{\ln(x)}\,dx$

3) $\int_{0.1}^1 \frac{e^x}{x}\,dx$

Exercícios

3 programas em matlab

```
function I = trapezios(xi,yi)
  % xi: igualmente espacados e qtdade impar de pontos
  n=length(yi);
  h = xi(2)-xi(1);
  I = 2*sum(yi(2:n-1)) ; %calculo intermediário
  I = h*(yi(1) + I + yi(n))/2 ;
endfunction
```

Programa que calcula o método dos trapézios

```
function I = simpson13(xi,yi)
  % xi: igualmente espacados e qtdade impar de pontos
  n=length(yi);
  h = xi(2)-xi(1);
  I = 4*sum(yi(2:2:n-1)) + 2*sum(yi(3:2:n-2)); %calculo inter
  I = h*(yi(1) + I + yi(n))/3 ;
endfunction
```

Programa que calcula o método de Simpson 1/3

```
%---------ALTERE AQUI O INTERVALO DE INTEGRAÇÃO
a=0.1;
b=1;
n=10
%-------modifique aqui a funcao a ser integrada

%f = @(x)   exp(-(x.^2) ) ;
%f = @(x) sqrt(1-x.^4)
%f = @(x) 1./log(x);
f = @(x) exp(x)./x;
%-----------------------------------------------------
xi = linspace(a,b,n+1);
yi=f(xi);   M=[xi' yi']
plot(xi,yi)
 It = trapezios(xi,yi)  %Chamada da função trapézios
 Is = simpson13(xi,yi)  %Chamada da função Simpsin13
```

Roteiro para ser executado. Fornecemos aqui as informações necessárias: o intervalo [a, b], o numero de segmentos e a função a ser integrada.