CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

PROFª. DENISE MARIA VARELLA MARTINEZ

INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES IRRACIONAIS

POR SUBSTITUIÇÃO

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx = ?$$

CASO 1: Quando no integrando aparecem potências da variável x com expoentes fracionários, usamos a substituição $x = y^n$, $onde\ n\ é\ o\ m.m.c(mínimo\ multiplo\ comum)$ entre os denominadores dos expoentes da variável x que aparecem no integrando.

Exemplo 1. : $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1}dx = \int \frac{x^{1/2}}{x^{1/4}+1}dx$

Neste caso, fazemos a seguinte substituição: $x = y^n, onde \quad n = m.m.c.(4,2)$

$$x = y^4, portanto\ dx = 4y^3 dy$$

$$\int \frac{(y^4)^{1/2}}{(y^4)^{1/4}+1}4y^3\text{dy} = 4\int \frac{y^2y^3dy}{y+1} = 4\int \frac{y^5dy}{y+1}$$

A integral resultante da substituição é uma integral racional onde $grau\ P(x) > grau\ G(x)$, então fazemos a divisão:

$$\frac{y^5}{y+1} = y^4 - y^3 + y^2 - y + 1 - \frac{1}{y+1}$$

$$\begin{array}{l|l}
y^5 & y+1 \\ \hline
-y^5 - y^4 & y^4 - y^3 + y^2 - y + 1 \\
\quad -y^4 & \\
\quad y^4 + y^3 & \\
\quad\quad y^3 & \\
\quad\quad -y^3 - y^2 & \\
\quad\quad\quad -y^2 & \\
\quad\quad\quad +y^2 + y & \\
\quad\quad\quad\quad +y & \\
\quad\quad\quad\quad -y - 1 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad -1 &
\end{array}$$

Exemplo 1

Assim,

$$4\int \frac{y^5 dy}{y+1} = 4\int \left(y^4 - y^3 + y^2 - y + 1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = 4\left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + y - \ln(y+1) + C\right)$$

Como $x = y^4 \Rightarrow y = x^{1/4}$, logo

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1} dx = \frac{4(x^{1/4})^5}{5} - \frac{4(x^{1/4})^4}{4} + \frac{4(x^{1/4})^3}{3} - \frac{4(x^{1/4})^2}{2} + 4(x)^{\frac{1}{4}} - 4\ln\left((x)^{1/4}+1\right) + C$$

$$= \frac{4x^{5/4}}{5} - x + \frac{4x^{\frac{3}{4}}}{3} - 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} - 4\ln\left(x^{1/4}+1\right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1} dx = \frac{4\sqrt[4]{x^5}}{5} - x + \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} - 2\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 4\ln(\sqrt[4]{x}+1) + C$$

CASO 2: Quando no integrando aparecem potências da expressão $a + bx$ com expoentes fracionários, usamos a substituição $a + bx = y^n$, $onde\ n\ é\ o\ m.m.c(mínimo\ multiplo\ comum)$ entre os denominadores dos expoentes da expressão $a + bx$ que aparecem no integrando.

Exemplo 2:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}} = \int \frac{dx}{1+(x+2)^{1/3}}$$

Fazemos a seguinte substituição: $x + 2 = y^3 \longrightarrow x = y^3 - 2$

$$dx = 3y^2dy$$

$$\int \frac{dx}{1+(x+2)^{1/3}} = \int \frac{3y^2dy}{1+y^{3/3}} = 3\int \frac{y^2dy}{1+y}$$

Temos uma integral racional onde $grau\ P(x) > grau\ G(x)$

$$\int \frac{dx}{1+(x+2)^{1/3}} = 3\int \frac{y^2dy}{1+y} = 3\int \left(y - 1 + \frac{1}{1+y}\right)dy = 3\frac{y^2}{2} - 3\mathrm{y} + 3\ln(1+\mathrm{y}) + \mathrm{C}$$

Como $(x+2) = y^3 \longrightarrow y = (x+2)^{1/3}$

$$\int \frac{dx}{1+(x+2)^{1/3}} = 3\frac{(x+2)^{2/3}}{2} - 3(x+2)^{1/3} + 3\ln\left(1+(x+2)^{1/3}\right) + \mathrm{C}$$