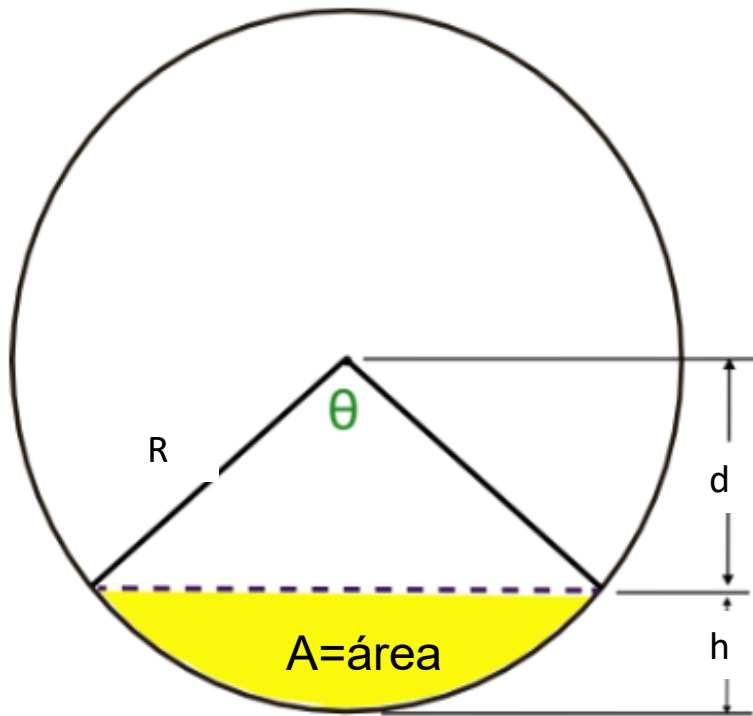


# Raízes de equações não lineares: Problema-exemplo

## Objetivos

1. Deduzir  $A = f(r, \theta)$
2. Dados  $A$  e  $r$ , achar  $\theta$
3. Dados  $\theta$  e  $r$ , achar  $h$

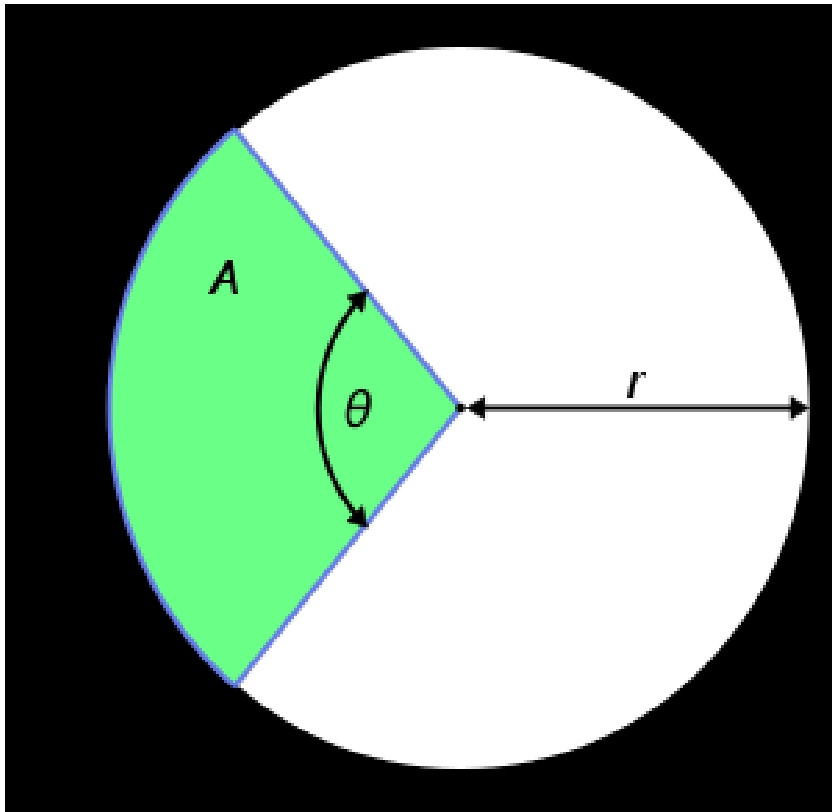


# Dedução da fórmula

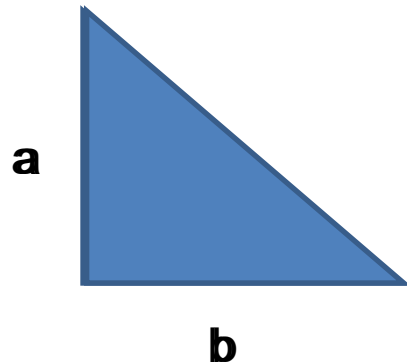
1. A equação da área do setor circular (sc) é bem conhecida:

$$A_{sc} = f(r, \theta)$$

$$A_{sc} = \frac{r^2 \theta}{2}$$



2. A equação da área do triângulo retângulo (tr) também já é bem conhecida

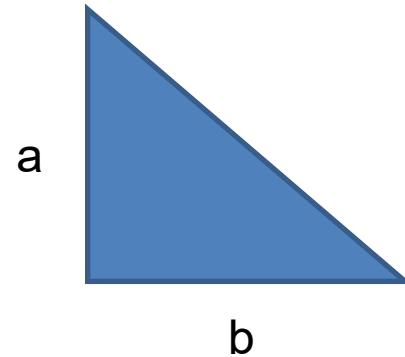
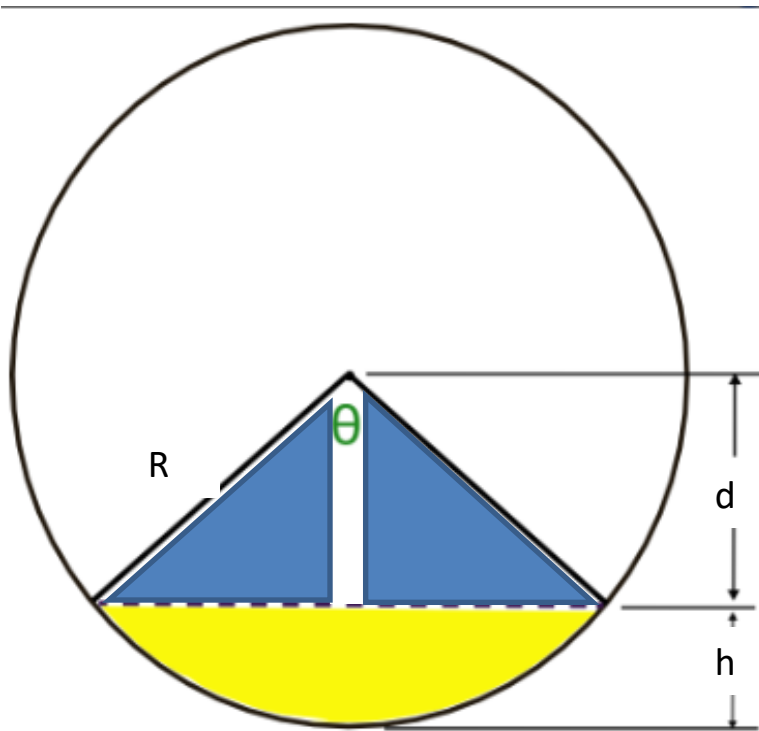


$$A_{tr} = f(b, h)$$

$$A_{tr} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Como expressar a área do triângulo pintado em amarelo, em função do raio e do ângulo?

Como expressar  $A = f(r, \theta)$ ?



Área do triângulo em função do valor dos catetos é conhecida:

$$A_{tr} = \frac{b \cdot a}{2}$$

# Área do triângulo retângulo

Achar  $A_{tr} = f(r, \theta)$

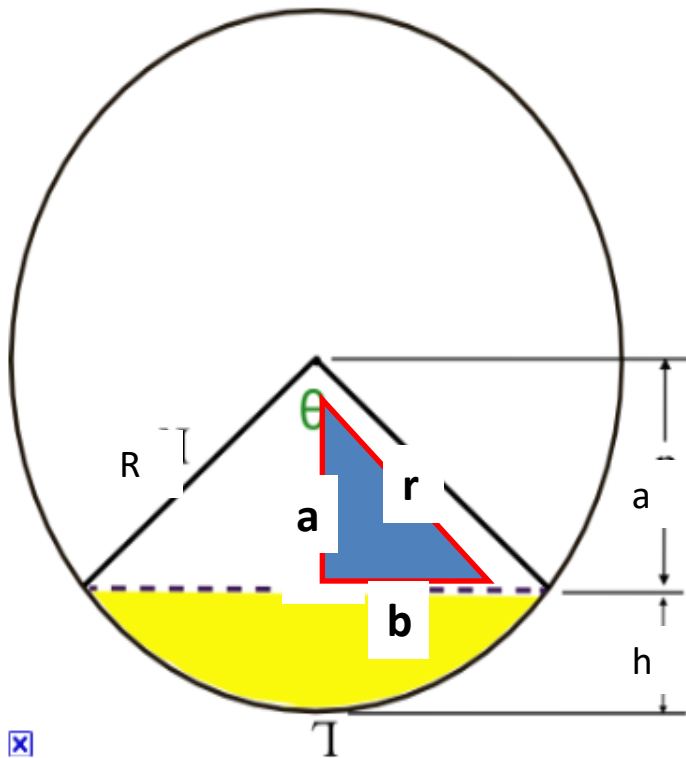
Vamos expressar a e b em função de r e theta.

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}, \quad \alpha = \theta / 2$$

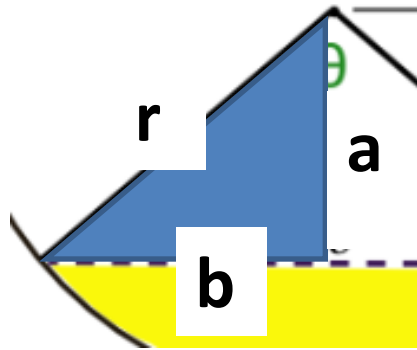
$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$



# Área do triângulo



$$b = r \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) ; \quad a = r \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

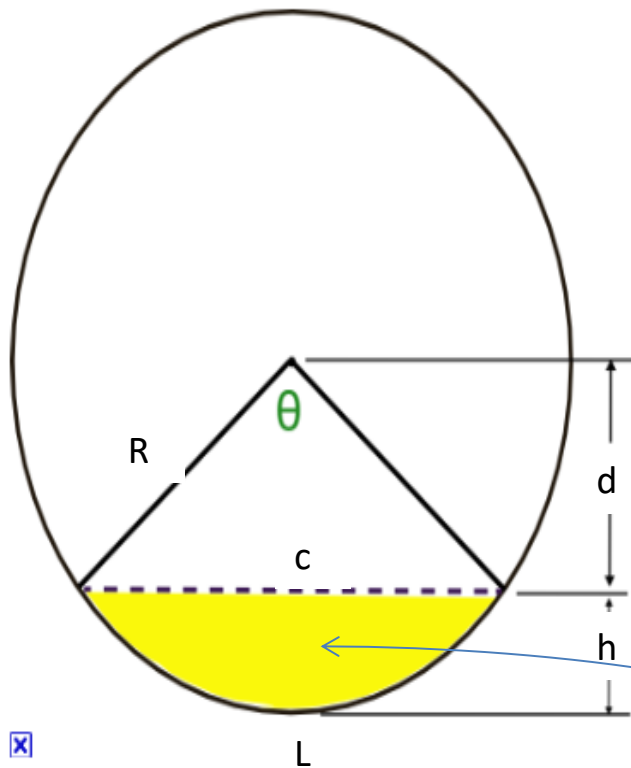
São 2 triângulos!!!

$$A = \cancel{2} \cdot \left( \frac{b \cdot a}{\cancel{2}} \right) \rightarrow A = b \cdot a \rightarrow A = r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Usando  $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$ , simplificamos para

$$A_{tr} = r^2 \frac{\sin(\theta)}{2}$$

Em resumo: Área da região em amarelo é:



$$A_{sc} = \frac{r^2 \theta}{2}$$

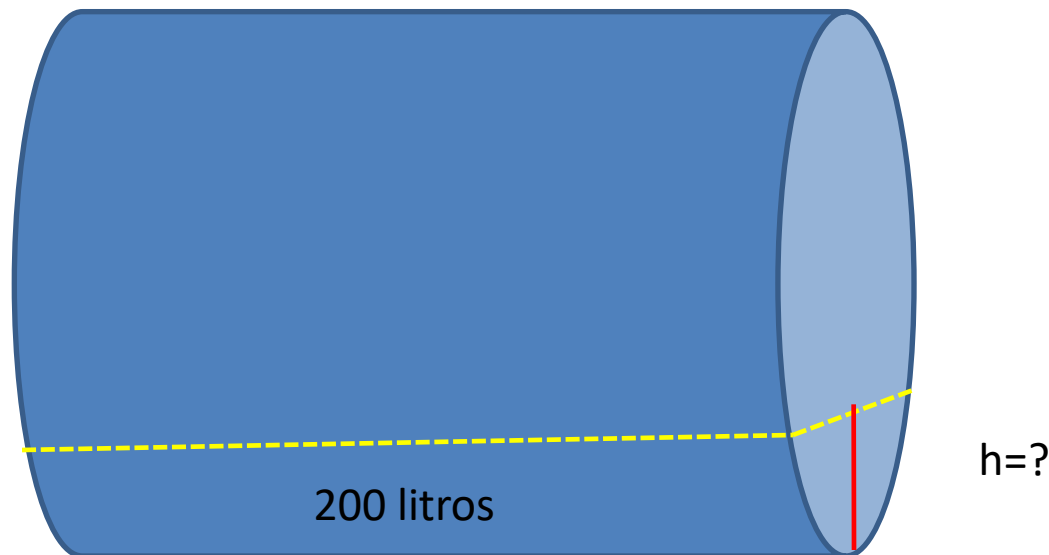
$$A_{tr} = r^2 \frac{\text{sen}(\theta)}{2}$$

$$A = \frac{r^2 \theta}{2} - r^2 \frac{\text{sen}(\theta)}{2} \rightarrow$$

$$A = \frac{r^2}{2} (\theta - \text{sen}(\theta))$$

# Aplicação:

1. Em tanque cilíndrico, com 1m de comprimento e raio de 0,5m foram colocados 200 litros ( $0,2 \text{ m}^3$ ) de liquido. Descubra qual a altura da camada liquido que se forma na base do tanque.



# Passos da solução

**Valor da área:**

$$A = V / z \quad \longrightarrow \quad A = 0,2m^3 / 1m = 0,2m^2$$

**Equação da área em função do ângulo :**

$$A = \frac{r^2}{2} (\theta - \text{sen}(\theta)) \quad \longrightarrow \quad 0,2 = \frac{0,5^2}{2} (\theta - \text{sen}(\theta))$$
$$\theta - \text{sen}(\theta) - 1,6 = 0$$

Equação da área em amarelo na figura do slide anterior

# Passos da solução

$$\theta - \text{sen}(\theta) - 1,6 = 0$$

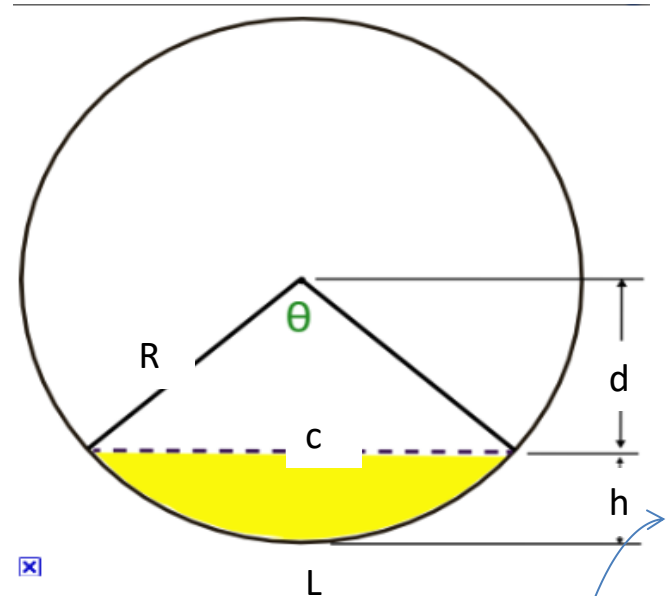
Recorde que “  $\theta$  ” é o ângulo.  
Resolvendo esta equação  
numericamente, obtemos  $\theta = 2.32726\dots$

Agora achar a altura “h” é fácil. Primeiro  
calculamos o cateto adjacente “d” e  
depois a altura “h” é o raio R menos o  
valor do cateto d:

$$d = R \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad h = R - d$$

$$d = 0,5 \cdot \cos\left(\frac{2.32726}{2}\right) = 0,198$$

$$h = 0,5 - 0,198 = 0,302m$$



# Comentários finais

- No calculo anterior, perceba que a única dificuldade que existe nos cálculos é a solução da equação

$$\theta - \text{sen}(\theta) - 1,6 = 0$$

- Para resolver esta equação utilizamos métodos numéricos, que dão uma solução numérica, que é exata até a precisão desejada (tantas casas decimais quanto desejarmos).

# Exercícios

- 1) Em tanque cilíndrico, com 2m de comprimento e raio de 0,5m foram colocados 200 litros ( $0,2 \text{ m}^3$ ) de liquido. Descubra qual a altura da camada liquido que se forma na base do tanque.

# Exercícios

- 2) Em tanque cilíndrico, com 5m de comprimento e raio de 1,0m foram colocados 2000 litros ( $2 \text{ m}^3$ ) de liquido. Descubra qual a altura da camada liquido que se forma na base do tanque.
-