Limites de Funções de uma Variável Real

Cristiana Andrade Poffal

Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

18 de Fevereiro de 2025

Função Seno

p.59

$$\lim_{x \to a} \text{sen}(x) = \text{sen}(a), \forall a \in \mathbb{R}.$$

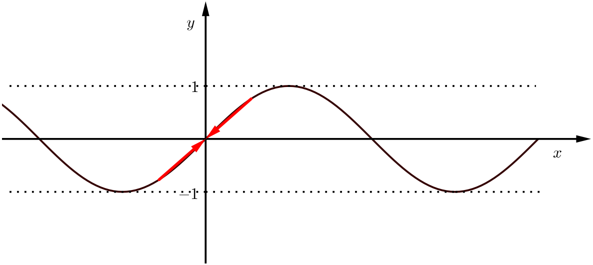


Figura: Representação do comportamento de $f(x) = \text{sen}(x)$ para $x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \text{sen}(x) = \text{sen}(0) = 0$$

Função cosseno

$$\lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a), \forall a \in \mathbb{R}.$$

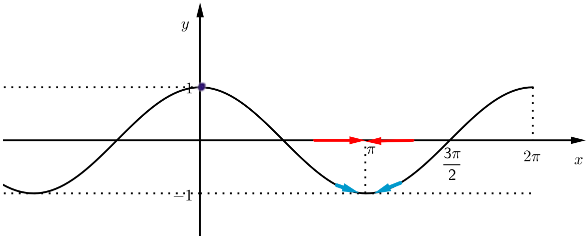


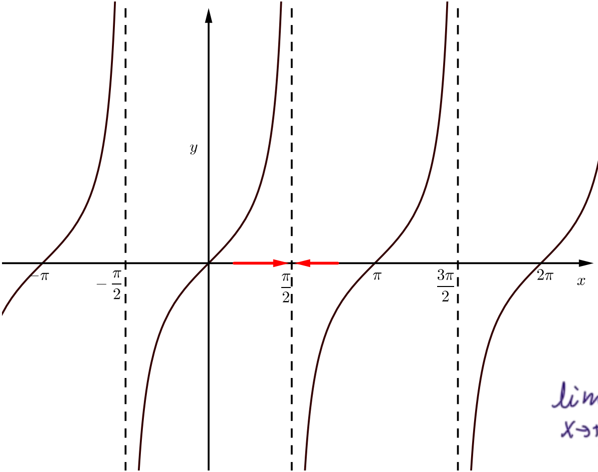
Figura: Representação do comportamento de $f(x) = \cos(x)$ para $x \longrightarrow \pi$.

$$\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1 \qquad \lim_{x \to \pi} \cos(x) = -1$$

Função tangente

$\cos(x) \neq 0$

$$\lim_{x\to a} \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(a), \forall a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



$$\lim_{x\to \pi/2^+} \operatorname{tg}(x) = +\infty$$

Figura: Representação do comportamento de $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ para $x \to \frac{\pi}{2}$.

Função exponencial

Obs: $y=0$ é assíntota horizontal de $y=a^x$.

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, então $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$.

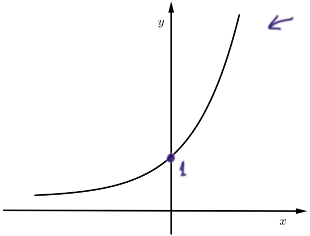
Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, então $\lim\limits_{x \to b} a^x = a^b$.

Se $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Cresc. Covid

Bact.

Fungo



$y = a^x$, $a > 1$

$a^0 = 1$

Figura: Representação do comportamento de $f(x) = e^x$.

Função exponencial

- Meia-vida de medicação
- Depreciação de produtos

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a < 1$, então $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ e $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

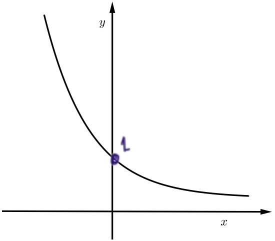


Figura: Comportamento de $g(x) = e^{-x}$.

Função exponencial

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$ e $\lim_{x \to b} f(x) = 0$, então $\lim_{x \to b} a^{f(x)} = 1$.

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$ e $\lim_{x \to b} f(x) = c$, então $\lim_{x \to b} a^{f(x)} = a^{\lim_{x \to b} f(x)} = a^c$.

$$\lim_{x \to 2} 3^{x^2-1} = 3^{\lim_{x \to 2}(x^2-1)} = 3^{2^2-1} = 3^3 = 27 //$$

Função logarítmica

O limite de funções logarítmicas podem ser calculados utilizando-se a propriedade operatória do limite do logaritmo de uma função.

$\log_e(x) = \ln(x)$

$e = 2{,}718281\ldots$

Exemplo: Resolva o limite $\lim_{x \to 3^+} \ln(x-3)$.

$\log_{10}(100) = \log(100)$
$= \log 10^2$
$= 2$

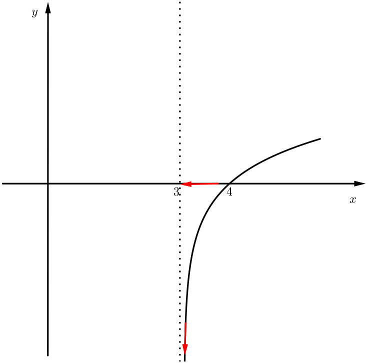


Figura: Representação do comportamento de $f(x) = \ln(x-3)$.

Exercícios de Limites

a) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2+4x-4} = \frac{2^2-3.2+2}{2^2+4.2-4} = \frac{4-6+2}{4+8-4}$$

$$= \frac{0}{8} = 0$$

b) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+4x+2}{x^2+4x+4} = \frac{2^2+4.2+2}{2^2+4.2+4} = \frac{4+8+2}{4+8+4}$$

$$= \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{2-2} = \frac{2}{0} \to$ limites laterais

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x-2} = \frac{2{,}000\ldots1}{2{,}000\ldots1 - 2} = \frac{2}{0{,}000\ldots1} = +\infty$$

$x = 2{,}000\ldots1$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x-2} = \frac{1{,}999\ldots}{1{,}999\ldots - 2} = \frac{2}{-0{,}00\ldots1} = -\infty$$

$x = 1{,}9999\ldots$

$$\nexists \lim_{x \to 2} \frac{x}{x-2}.$$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x-2} = \dfrac{2^2 - 2.2}{2-2} = \dfrac{0}{0} \to$ Forma Indeterminada

$$\lim_{x \to 2} \frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2} x = 2$$

$$\boxed{\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x-2} = 2}$$

Lista III

3. f) $\ell(x) = \dfrac{x-5}{x^2+16}$

$x^2+16=0 \Rightarrow \nexists x$ tal que $x^2+16=0$ $\Rightarrow D(\ell)=\mathbb{R}$

não há assíntotas verticais

Lista IV

não há dúvidas

em 22/04 !!!

Lista V

A profe escolheu exercícios para resolver!

(1) c) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$

Sol:

(1) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} = \dfrac{1^2-1}{1^2+1-2} = \dfrac{0}{0}$ → Forma Indet.

② Fatorar o numerador e o denominador:

$$\boxed{x^2 - 1 = (x-1)(x+1)}$$

$$x^2 + x - 2 = ?$$

$a = 1 \quad b = 1 \quad c = -2$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow -2 \end{array}$$

$$\boxed{x^2 + x - 2 = 1 \cdot (x-1)[x-(-2)] = (x-1)(x+2)}$$

3) Reescrever o limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \frac{2}{3}}$$

e) $\lim_{x \to 3} \dfrac{4x^2 - 11x - 3}{x - 3}$

2

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+2-2)}{x \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$