

### POLINÔMIOS DE MACLAURIN

Seja  $f(x)$  uma função que possui a seguinte representação em série de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \dots$$

Quando truncamos esta série no termo de grau “ $n$ ”, obtemos o seguinte polinômio de Maclaurin de grau “ $n$ ”:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Ex.: Considere a função  $f(x) = \sin x$  e a série de Maclaurin desta função que é dada por:

$$f(x) = \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

e que converge para qualquer valor de  $x$ . A partir desta série, obtemos os seguintes polinômios de Maclaurin:

$$P_0(x) = 0$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = x + 0x^2$$

$$P_3(x) = x + 0x^2 - \frac{x^3}{3!}$$

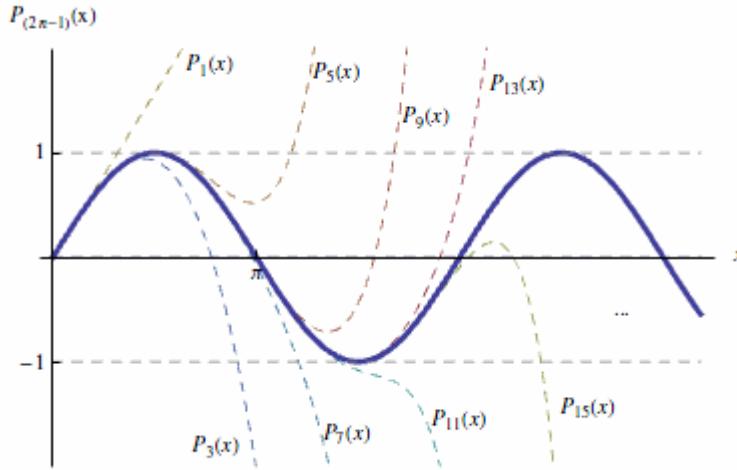
$$P_4(x) = x + 0x^2 - \frac{x^3}{3!} + 0x^4$$

$$P_5(x) = x + 0x^2 - \frac{x^3}{3!} + 0x^4 + \frac{x^5}{5!}$$

$$P_6(x) = x + 0x^2 - \frac{x^3}{3!} + 0x^4 + \frac{x^5}{5!} + 0x^6$$

$$P_7(x) = x + 0x^2 - \frac{x^3}{3!} + 0x^4 + \frac{x^5}{5!} + 0x^6 - \frac{x^7}{7!}$$

A figura a seguir mostra como esses polinômios de Maclaurin aproximam o gráfico da função  $f(x) = \sin x$ , perto de  $x = 0$ .



## POLINÔMIOS DE TAYLOR

Seja  $f(x)$  uma função que possui a seguinte representação em série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \dots$$

Quando truncamos esta série no termo de grau “ $n$ ”, obtemos o seguinte polinômio de Taylor de grau “ $n$ ”:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ex.: Considere a série de Taylor da função  $f(x) = \sin x$  em torno de  $a = \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n} = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6}{6!} + \dots$$

A partir desta série, obtemos os seguintes polinômios de Taylor:

$$P_0(x) = 1$$

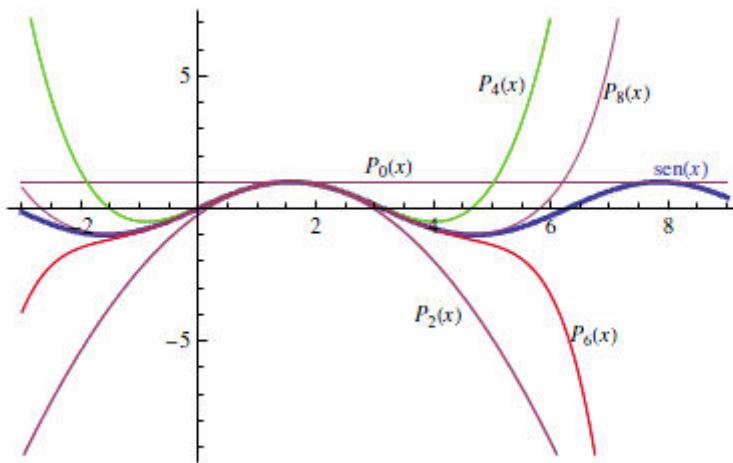
$$P_2(x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}$$

$$P_6(x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6}{6!}$$

$$P_8(x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6}{6!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^8}{8!}$$

A figura a seguir mostra como esses polinômios de Taylor aproximam o gráfico da função  $f(x) = \sin x$ , perto de  $x = \frac{\pi}{2}$ .



## DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

### TEOREMA 1: (Teorema da derivação termo a termo)

Se a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$  converge  $\forall x \in (a - R, a + R)$ , para algum  $R > 0$ , isso define a seguinte função:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n, \quad a - R < x < a + R.$$

Tal função tem derivadas de todas as ordens dentro do intervalo de convergência. As derivadas podem ser obtidas por meio da derivação da série original termo a termo:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x - a)^{n-2},$$

e assim por diante. Cada uma dessas séries derivadas converge em todo ponto do interior do intervalo de convergência da série original.

Ex.: 1) A série de Maclaurin da função  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^x + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1$$

Então:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots + nx^{x-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad -1 < x < 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \dots + n(n-1)x^{x-2} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \quad -1 < x < 1$$

**\*Obs.:** A derivação termo a termo pode não funcionar para outros tipos de série. Por exemplo, a série trigonométrica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^2}$$

é convergente  $\forall x \in IR$ . Mas se derivarmos termo a termo, chegamos à série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cos(n!x)}{n^2}$$

que diverge  $\forall x \in IR$ . Note que esta não é uma série de potências.

2) Sabendo que  $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1$ , obtenha uma série de potências de  $x$  para representar cada uma das funções abaixo. Em cada caso, especifique o conjunto dos valores de  $x$  onde a representação é válida:

a)  $g(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$

Solução:

No exemplo 1, vimos que  $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \quad -1 < x < 1$

Portanto podemos representar a função  $g(x)$  por:

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \quad -1 < x < 1$$

Ou então:

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)x^n}{2}, \quad -1 < x < 1$$

b)  $g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$

Solução:

No exemplo 1, vimos que  $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad -1 < x < 1$ , então podemos

escrever:

$$f'(-x) = \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1}, \quad -1 < x < 1$$

Logo

$$g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{2n-1}, \quad -1 < x < 1$$

$$c) \quad g(x) = \frac{x}{2-3x}$$

Solução:

$$\text{Como } f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1, \text{ temos que:}$$

$$f\left(\frac{3}{2}x\right) = \frac{1}{1-\frac{3}{2}x} = \frac{2}{2-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}x\right)^n$$

Portanto

$$g(x) = \frac{x}{2-3x} = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} x^{n+1}, \quad -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$$

## TEOREMA 2: (Teorema da integração termo a termo)

Suponha que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

converja  $\forall x \in (a-R, a+R)$ , para algum  $R > 0$ . Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

converge para  $a-R < x < a+R$  e

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

para  $a-R < x < a+R$ .

Ex.: 1) Para identificarmos a função

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

Derivamos a série original termo a termo e obtemos:

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, \quad -1 < x < 1$$

que é uma série geométrica com o primeiro termo 1 e razão  $-x^2$ , portanto a sua soma é:

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Agora integrando  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , obtemos:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctgx + C$$

Observe que a série para  $f(x)$  é zero quando  $x = 0$ , assim  $C = 0$ . Temos então:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \arctg x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

\*Obs.: Quando fazemos  $x = 1$  em

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \arctg x$$

obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

2) Para determinarmos uma série para a função  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $-1 < x \leq 1$ , podemos considerar a série

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \dots,$$

que converge no intervalo  $-1 < t < 1$  e calcular a seguinte integral:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \dots) dt = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots, \quad -1 < x \leq 1 \end{aligned}$$

3) Em estatística a função  $E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$  recebe o nome de Função Erro.

Encontre a Série de Maclaurin da função  $E(x)$ .

Solução:

A série de Maclaurin da função  $f(x) = e^x$  é dada por:  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , então

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad \text{e} \quad e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}, \quad \text{portanto:}$$

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt$$

De onde obtemos:

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[ \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

## ALGUMAS APLICAÇÕES:

### 1. CÁLCULO DE INTEGRAIS NÃO ELEMENTARES:

As séries de Taylor e Maclaurin podem ser usadas para expressar integrais não elementares em termos de séries.

Ex.: 1) Expressse  $\int \sin(x^2)dx$  como uma série de potências.

Vimos que a série de Maclaurin da função  $f(x) = \sin x$  é dada por:

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Então, substituindo  $x$  por  $x^2$  nesta série, obtemos a série de potências para a função  $g(x) = \sin(x^2)$  que é dada por:

$$g(x) = \sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} \dots$$

Portanto

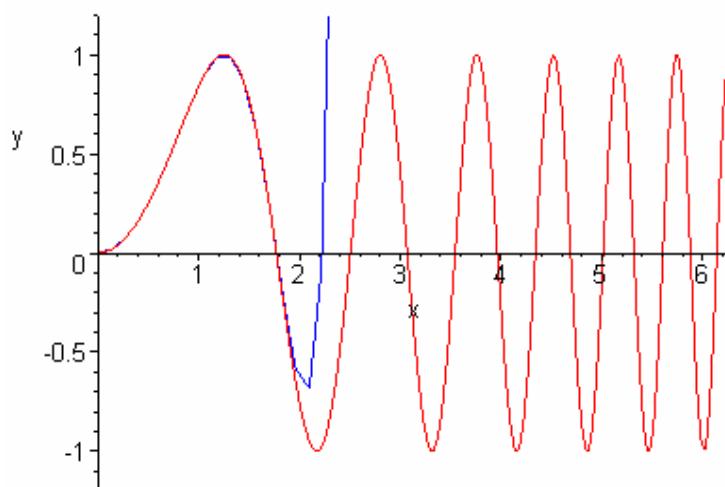
$$\begin{aligned} \int \sin(x^2)dx &= \int \left( x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} \dots \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \frac{x^{19}}{19 \cdot 9!} - \dots \end{aligned}$$

2) Para determinar o valor aproximado da integral  $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ , consideramos a integral indefinida do exemplo anterior e obtemos:

$$\int_0^1 \sin(x^2)dx \approx \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \frac{x^{19}}{19 \cdot 9!} \right]_0^1 \approx 0,310268303$$

Na figura abaixo podemos observar a aproximação da função  $g(x) = \sin(x^2)$  (curva vermelha) com o polinômio

$$P_{18}(x) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} \quad (\text{curva azul})$$



3) Usando uma série de potências adequada aproxime, com precisão de três casas decimais, o valor da integral:  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^3}$ .

Solução:

Vimos que  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, -1 < x < 1$ , então:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \text{ portanto temos:}$$

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} - \dots$$

De onde obtemos:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^3} \approx \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12}) dx = \left[ x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{13}}{13} \right]_0^{\frac{1}{2}} \approx 0,485$$

Observe que resolvendo esta integral através do método das frações parciais obtemos:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^3} = \left[ \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^{\frac{1}{2}} \approx 0,485$$

## 2. CÁLCULO DE LIMITES

Algumas vezes, podemos calcular limites de formas indeterminadas expressando as funções envolvidas como séries de Taylor.

Ex.: Para calcular o limite:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ , podemos representar  $\ln x$  como uma série de Taylor de potências de  $x-1$ , ou seja:

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots$$

Então temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^3 + \dots \right] = 1 \end{aligned}$$

## 3. SOMA DE SÉRIES NUMÉRICAS

Ex.: 1) Para determinar a soma da série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots = \frac{1}{2} \left[ 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \right],$$

podemos considerar série de Maclaurin da função  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ , ou seja:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

que converge se  $|x| < 1$  e substituir  $x$  por  $\frac{1}{2}$  nesta série, obtendo:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$$

Então podemos escrever:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \left[ 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

Portanto a série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  converge com soma igual a 2.

2) Integrando de  $x = 0$  até  $x = 1$  uma série de potências representando a função  $f(x) = xe^x$ , mostre que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{1}{2}$

Solução:

Temos que  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , então  $xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ , portanto obtemos:

$$\int_0^1 xe^x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$$

mas

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x - e^x]_0^1 = 1$$

logo

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$