Universidade Federal do Rio Grande – FURG
Instituto de Matemática, Estatística e Física
Av. Itália km 8 Bairro Carreiros
Rio Grande-RS CEP: 96.203-900
Fone (53)32935411
e-mail: imef@furg.br
Sítio: www.imef.furg.br

Disciplinas: Cálculo I/ Cálculo Diferencial e Integral I
Professoras: Bárbara Rodriguez e Cristiana Poffal

Simulado de Derivadas – Parte I

Questão 1: (2,0) Calcule a primeira derivada das funções:

a) $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}+\dfrac{sen^3(x)}{x}+tg^4(x)+\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$

b) $g(x)=x\sqrt{9-x^2}+9arcsen\left(\dfrac{x}{3}\right)$

c) $g(x)=e^{\frac{1}{x^2}}sen(2x)-\dfrac{2x+1}{\sqrt{2-x^2}}$

d) $h(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}+\ln\left(x+\sqrt{8+x^2}\right)$

Questão 2: (1,8) Calcule a derivada indicada de cada função:

a) $y=\ln\left(\sqrt{x\left(e^x+1\right)}\right)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

b) $y=arctg\left(\sqrt{\dfrac{1+sen(x)}{1-sen(x)}}\right)$, $\cos(x)>0$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

c) $y=arcsen\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

d) $y=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$

e) $(x+y)^2+(x-y)^2=3x^2$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

f) $(x+2y)^2=2xy-8$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

Questão 3: (1,0) Resolva os itens:

a) Considere C a curva dada por $\sqrt{xy}+2y=\sqrt{x}+9$. Sabendo que essa equação define implicitamente y como função derivável de x perto de $x_0=1$, determine a inclinação da reta tangente à C no ponto $(1,4)$.

b) A curva $y=ax^2+bx+c$ passa pelo ponto $(1,2)$, tangenciando a reta $y=x$ na origem. Determine a, b e c.

Questão 4: (1,0) Em um instante t, a posição de um corpo que se desloca ao longo de um eixo s é $s(t)=\dfrac{\cos(4t)}{4}$ m.

Determine:
a) a expressão para a velocidade desse corpo;
b) a expressão que descreve sua aceleração;
c) a aceleração do corpo toda vez que a velocidade for nula;
d) o módulo da velocidade do corpo quando a aceleração for nula.

Questão 5: (1,0) Considere a função $\begin{cases} x = 2t^2 + 3 \\ y = t^4 \end{cases}, t \in R$

a) Calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

b) Determine a inclinação da reta tangente à curva descrita pelo sistema de equações dadas no ponto (5, 1).

Questão 6: (1,2) Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ das funções paramétricas:

a) $\begin{cases} x = te^t \\ y = t^2 + 2t \end{cases}, t \in R$

b) $\begin{cases} x = \ln\left(\sqrt{sen(t) + \cos(t)}\right) \\ y = \dfrac{2}{sen(t) + \cos(t)} \end{cases}, t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

c) $\begin{cases} x = arctg\left(\dfrac{1}{t}\right) \\ y = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}, t \in [1,10]$

d) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{1 + 4t^2} \\ y = arctg(2t) \end{cases}, t \in R$

Questão 7: (2,0) Resolva adequadamente os itens:

a) Mostre que a primeira derivada de $\ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$ é dada por $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y}{x - y}$.

b) Determine as equações das retas tangentes à $x^2 + y^2 = 40$ que são perpendiculares à reta $x - 3y - 5 = 0$.

c) Determine a equação da reta tangente à curva $\begin{cases} x = \dfrac{3 + t}{2t} \\ y = \dfrac{1 + t}{t^2} \end{cases}, t \in R$ no ponto do primeiro quadrante que tem ordenada 2.

d) Mostre que $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + x^2 + 4x + 5$, onde c_1 e c_2 são constantes é solução da equação diferencial ordinária $\dfrac{d^2 y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = x^2 - 1$

Respostas

Questão 1:

a) $f'(x) = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2} + \dfrac{sen^2(x)}{x^2}[3x\cos(x) - sen(x)] + 4tg^3(x)\sec^2(x) + \dfrac{1}{(2 - x)(2 + x)}$

b) $g'(x) = 2\sqrt{9 - x^2}$

c) $g'(x) = 2e^{\frac{1}{x^2}}\left[\cos(2x) - \dfrac{sen(2x)}{x^3}\right] - \dfrac{(4 + x)}{(2 - x^2)^{3/2}}$

d) $h'(x) = \dfrac{x^2}{(x^2 + 8)^{3/2}}$

Questão 2:

a) $y''=\dfrac{-1-e^{2x}+e^{x}(x^2-2)}{2x^2\left(e^x+1\right)^2}$

b) $y''=0$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

c) $y''=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

d) $y'''=\dfrac{4\left(1+3x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^3}$

e) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2y^2-x^2}{4y^3}$

f) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-3\left(2xy+x^2+4y^2\right)}{\left(x+4y\right)^3}$

Questão 3: a) $m=-\dfrac{2}{9}$ b) $y=x^2+x$

Questão 4: a) $v=-sen(4t)$ b) $a=-4\cos(4t)$ c) $a=\pm 4$ d) $v=0$

Questão 5: a) –1 b) $\dfrac{1}{2}$

Questão 6: a) $\dfrac{dy}{dx}=2e^{-t}$ b) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4}{sen(t)+\cos(t)}$

c) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{t}{1+t^2}$ d) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1+4t^2}{4t}$

Questão 7: c) reta tangente: $y=2x-2$

Relações Trigonométricas

<u>Três versões equivalentes da equação</u> $x^2+y^2=1$:

1. $\cos^2\theta+sen^2\theta=1$
2. $\sec^2\theta=tg^2\theta+1$
3. $cosec^2\theta=cotg^2\theta+1$

<u>Efeito da substituição de θ por –θ;</u>

4. $sen(-\theta)=-sen(\theta)$
5. $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$
6. $tg(-\theta)=-tg(\theta)$

<u>Fórmulas de adição e subtração</u>

7. $sen(\theta\pm\phi)=sen(\theta)\cos(\phi)\pm\cos(\theta)sen(\phi)$
8. $\cos(\theta\pm\phi)=\cos(\theta)\cos(\phi)\mp sen(\theta)sen(\phi)$
9. $tg(\theta\pm\phi)=\dfrac{tg(\theta)\pm tg(\phi)}{1\mp tg(\theta)tg(\phi)}$

<u>Fórmulas do ângulo duplo</u>

10. $sen(2\theta)=2sen(\theta)\cos(\theta)$
11. $\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-sen^2(\theta)$
12. $tg(2\theta)=\dfrac{2tg(\theta)}{1-tg^2(\theta)}$

<u>Fórmulas do ângulo metade</u>

13. $\cos^2(\theta)=\dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$
14. $sen^2(\theta)=\dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$