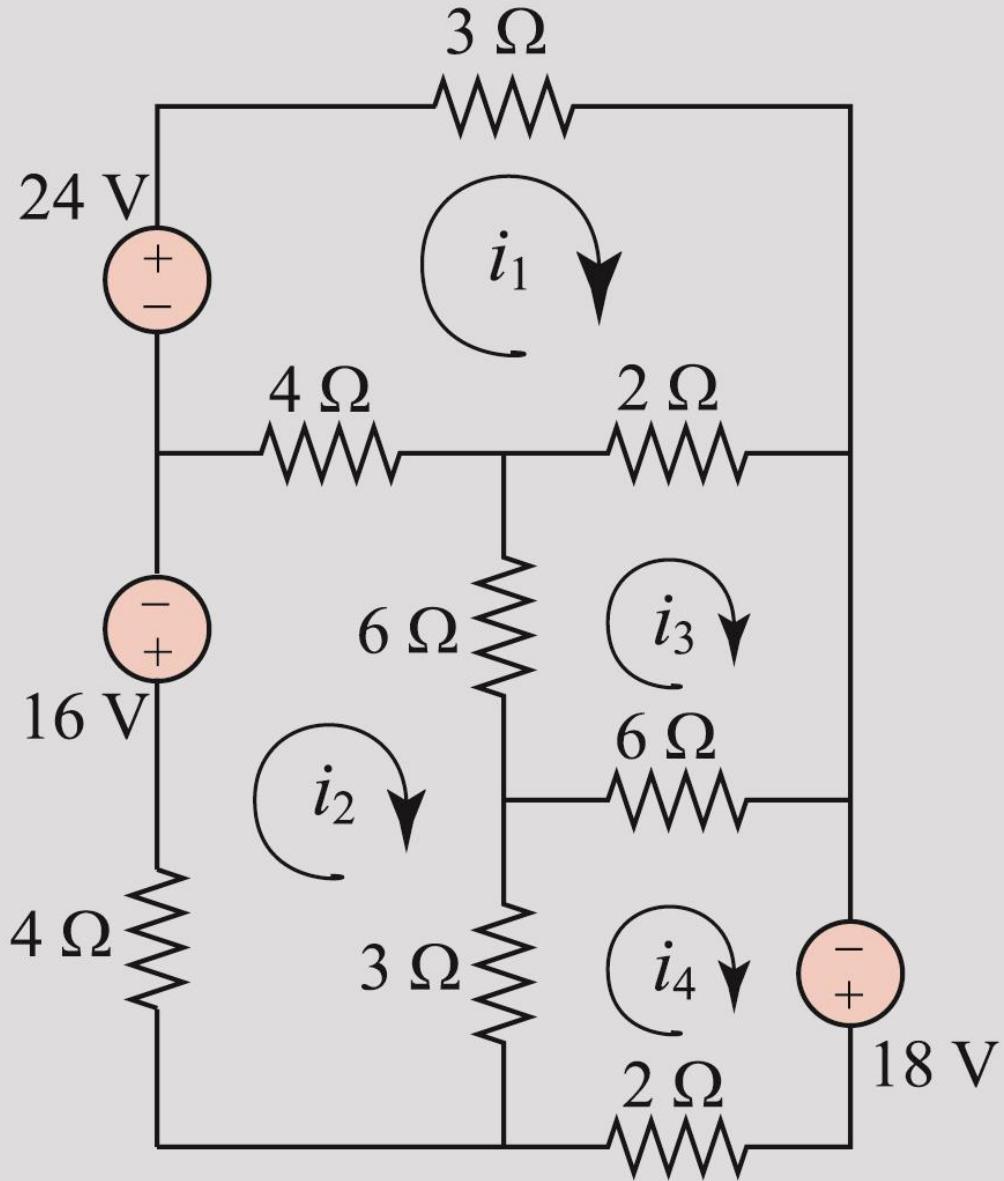


Sistema de Equações Lineares Algébricas (SELA)

Prof. Darci Luiz Savicki

Aplicações

- Circuitos Elétricos
- Circuitos hidráulicos
- Treliças
- Solução numéricas de EDPs
- ...



Aplicações de SELA:

Circuitos elétricos →

Descobrir o valor da corrente elétrica que passa por cada resistor.

Aplicações de SELA:

Círculo Hidráulico →
Descobrir o valor do
fluxo que passa em cada
seção (cano).

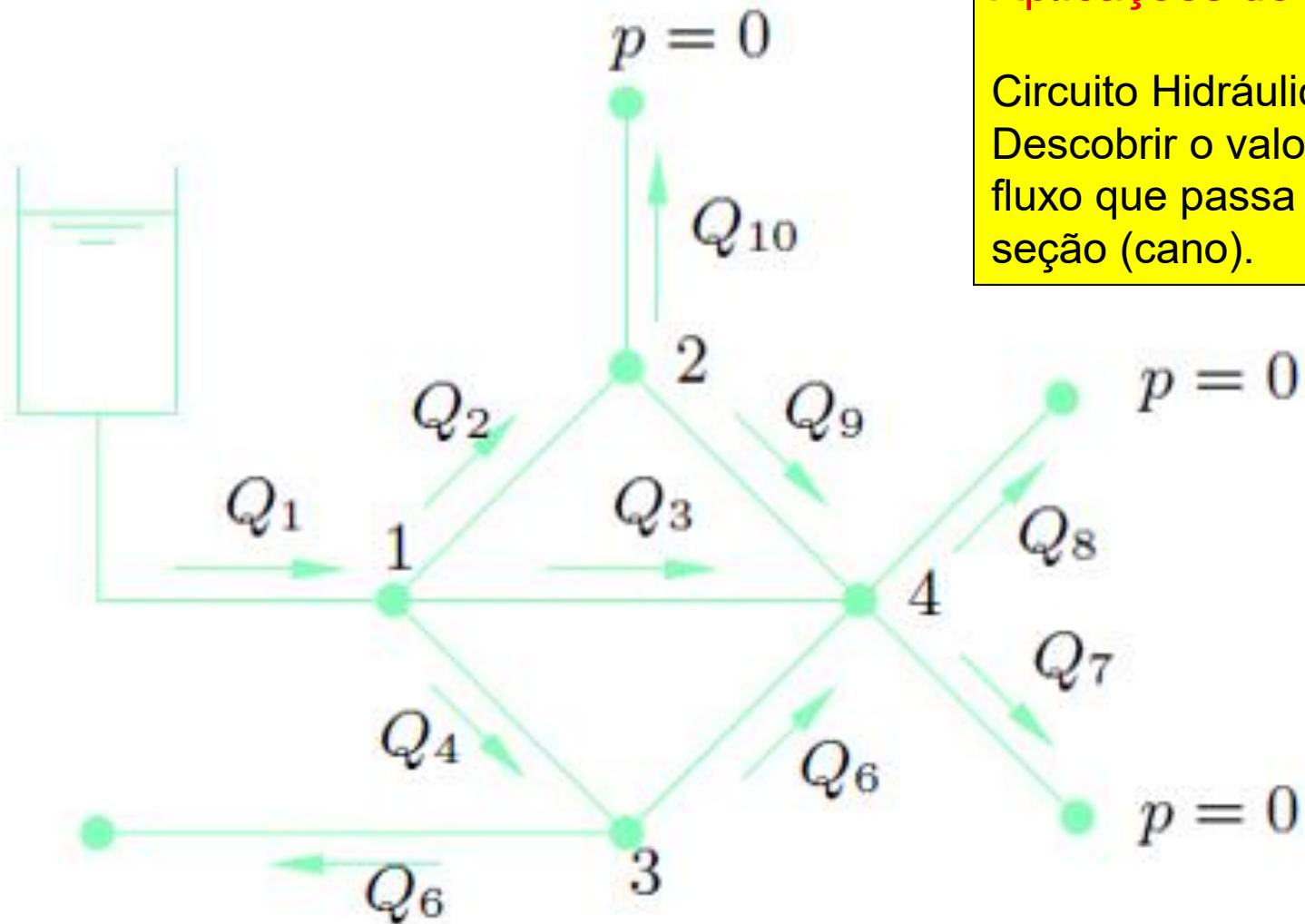
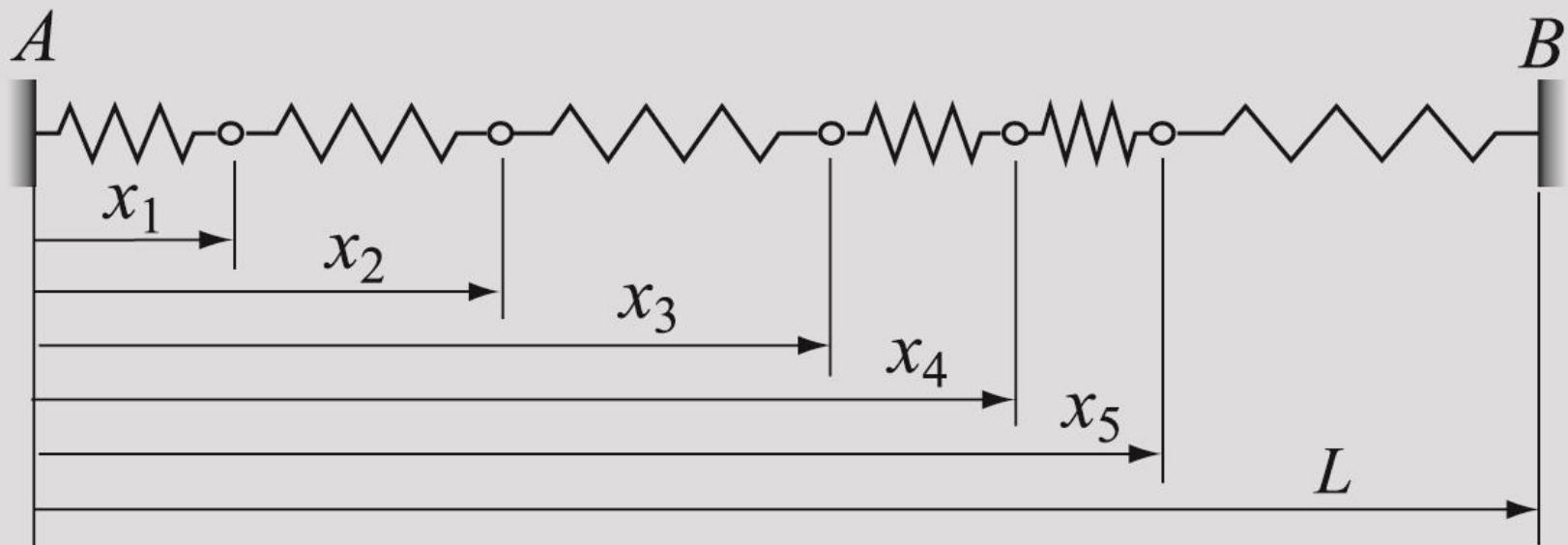
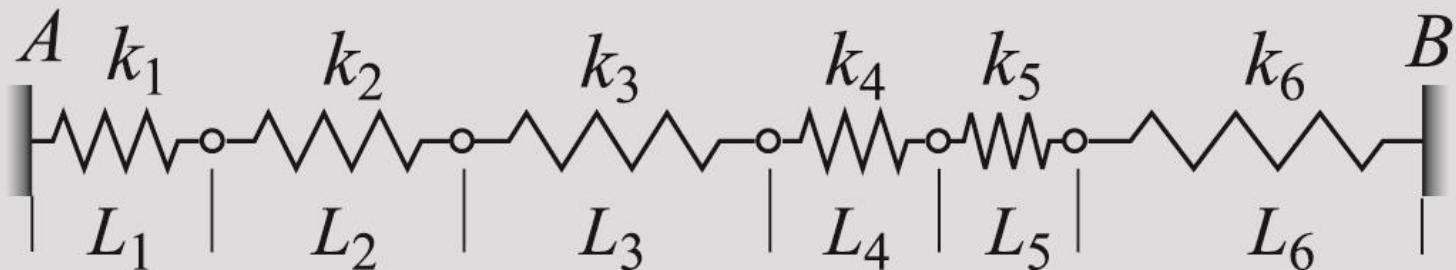
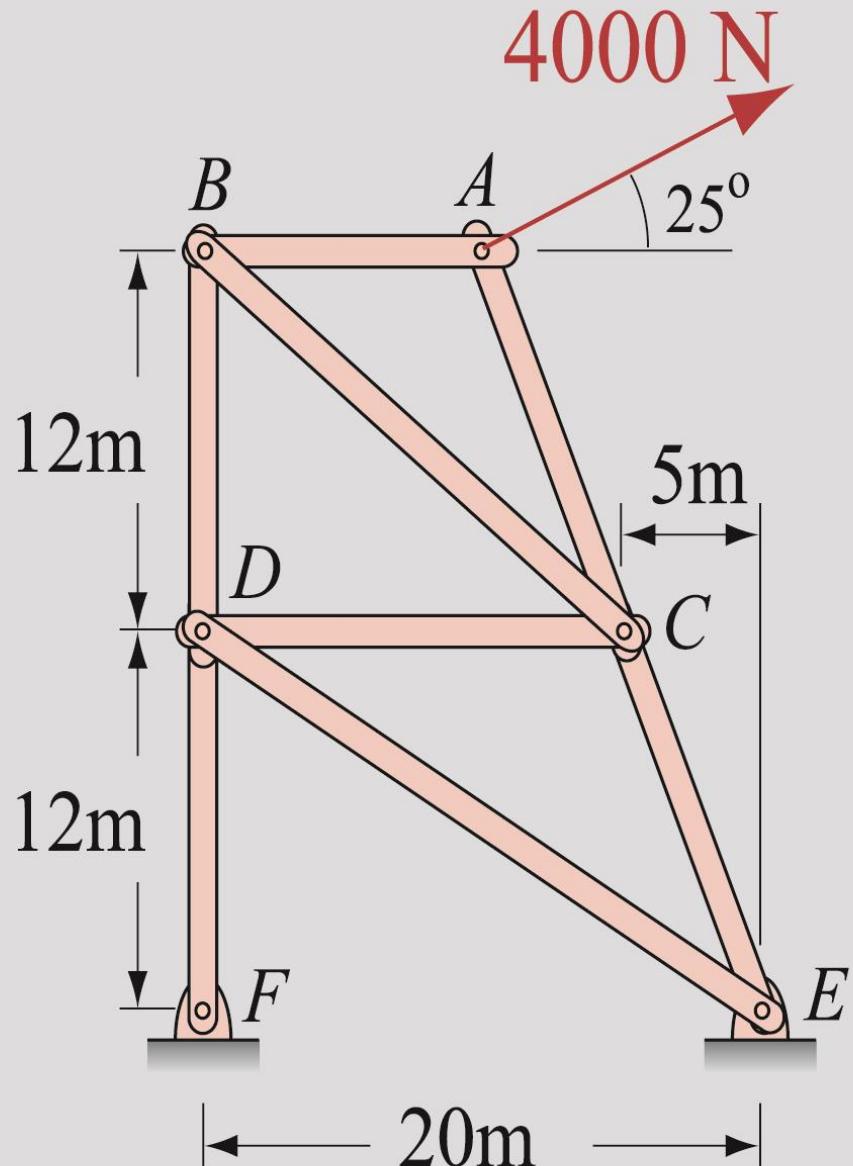


Figura 5.1. Red de tuberías del Problema 5.1

Aplicações de SELA:

Associação de molas →
Descobrir o valor do
alongamento de cada mola.





Aplicações de SELA:

Treliças →

Descobrir o valor das forças em cada haste.

Sistema de equações lineares: forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Figure 4-17

Operações elementares sobre uma matriz

Seja A uma matriz $A_{m \times n}$:

1. Troca da linha i com linha j : $L_i \leftrightarrow L_j$
2. Multiplicação da linha i por uma constante diferente de zero: $L_i^n \leftrightarrow \alpha L_i$
3. Adição de um múltiplo escalar da linha j à linha i : $L_i^n \leftrightarrow L_i + \alpha L_j$

Eliminação Gaussiana: exemplo para matriz A_{4x4}

Anulando os termos abaixo do elemento pivo a₁₁

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$L_2^n = L_2 - \left(\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) L_1$$

$$L_3^n = L_3 - \left(\frac{a_{31}}{a_{11}} \right) L_1$$

$$L_4^n = L_4 - \left(\frac{a_{41}}{a_{11}} \right) L_1$$

Figure 4-10

Resultado

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

Figure 4-11

Anulando os termos abaixo do elemento pivo a_{22}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

$$L_3^n = L_3 - \left(\frac{a_{32}}{a_{22}} \right) L_2$$

$$L_4^n = L_4 - \left(\frac{a_{42}}{a_{22}} \right) L_2$$

Figure 4-12

Resultado parcial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & a''_{43} & a''_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b''_4 \end{bmatrix}$$

$L_4^n = L_4 - \left(\frac{a_{43}}{a_{33}} \right) L_3$

Figure 4-13

Anulando os termos abaixo do elemento pivo a_{33}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a'''_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b'''_4 \end{bmatrix}$$

Figure 4-14

Em síntese

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Initial set of equations.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \cancel{a_{21}} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ \cancel{a_{31}} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ \cancel{a_{41}} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{bmatrix}$$

Step 1.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & \cancel{a'_{32}} & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & \cancel{a'_{42}} & a''_{43} & a''_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x'_2 \\ x''_3 \\ x''_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b''_4 \end{bmatrix}$$

Step 2.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & \cancel{a''_{43}} & a''_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x'_2 \\ x''_3 \\ x'''_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b'''_4 \end{bmatrix}$$

Step 3.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a''''_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x'_2 \\ x''_3 \\ x'''_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ b'''_4 \end{bmatrix}$$

Equations in upper triangular form.

Pivot element

Pivot row

Figure 4-15

Algoritmo: Elim. Gauss

para $k = 1:n-1$

 para $i = k+1:n$

$$m = a_{i,k} / a_{k,k}$$

 para $j = k+1:n$

$$a_{i,j} = a_{i,j} - m \cdot a_{k,j}$$

 fim

$$b_i = b_i - m \cdot b_k$$

 fim

fim

Programa em matlab

```
function [x]=eli_gauss2(a,b) ; %entrada: matriz a com n linhas e n colunas
n=length(b); %saída: vetor x com n elementos
```

```
for k=1:n-1 %percorre todas as colunas da matriz a
    for i=k+1:n
        m=a(i,k)/a(k,k);
        a(i,k)=0; %zera coef da linha i
        for j=k+1:n
            a(i,j)=a(i,j)-m*a(k,j); %modifica elemento a(i,j)
        end
        b(i)= b(i)-m*b(k); %modifica elemento b(i)
    end
end
```

Retro-substituição

Seja o sistema triangular superior

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

onde $a_{ii} \neq 0$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Por **substituição Retroativa** podemos resolvê-lo pelas fórmulas:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j \right) / a_{ii} \quad i = n-1, \dots, 1$$

Algoritmo: Retro-substituição

$$s = 0$$

$$x_n = b_n / a_{n,n}$$

para $i = n-1, 1$

$$s = b_i$$

para $j = i+1:n$

$$s = s - a_{i,j} \cdot x_j$$

fim

$$x_i = soma / a_{i,i}$$

fim

Programa em matlab

```
function x=sis_tri_sup(a,b)
n=length(b);
x(n)=b(n)/a(n,n);
for k=n-1:-1:1
    S=0;
    for j=k+1:n
        S=S+a(k,j)*x(j);
    end
    x(k)=(b(k)-S)/a(k,k);
end
end %fim da function
```

Exercícios

$$\begin{cases} 8x + 2y + 3z = 51 \\ 2x + 5y + z = 23 \\ -3x + y - 3z = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 54,5 \\ 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -14 \\ -3x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 4x_4 = 12,5 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 21 \end{cases}$$