

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

PROF^a. DENISE MARIA VARELLA MARTINEZ

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = ?$$

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = ?$$

$$\int_a^b f(x)dx = ? \quad a \notin Df$$

EXEMPLOS

1. Quais das integrais abaixo são integrais impróprias e quais são integrais definidas? Explique e as resolva.

a) $\int_1^2 \frac{dx}{x^5}$

b) $\int_0^2 \frac{dx}{x^5}$

c) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$

d) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^5}$

e) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^5}$

- Antes de fazer a análise, vamos determinar:

- O domínio da função $f(x) = \frac{1}{x^5} \rightarrow Df = \mathbb{R} - \{0\}$

- A integral indefinida $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$

a) $\int_1^2 \frac{dx}{x^5}$

É uma **integral definida**, pois $f(x)$ está definida no intervalo fechado $[1,2]$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^5} = \left(-\frac{1}{4x^4} \right)_1^2 = \left(-\frac{1}{4(2)^4} - \left(-\frac{1}{4(1)^4} \right) \right) = \left(-\frac{1}{64} + \frac{1}{4} \right) = \left(\frac{-1 + 16}{64} \right) = \frac{15}{64}$$



b) $\int_0^2 \frac{dx}{x^5}$ Integral imprópria
de 2ª espécie

É uma **integral imprópria**, pois $f(x)$ apresenta descontinuidade infinita em $x = 0$ ($\notin Df$).

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^5} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{0+h}^2 \frac{dx}{x^5} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{4x^4} \right)_{0+h}^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{4(2)^4} + \frac{1}{4(0+h)^4} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{64} + \frac{1}{4(h)^4} \right) = +\infty$$

Integral diverge

c) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$ Integral imprópria
de 1ª espécie

É uma **integral imprópria**, pois apresenta limite infinito de integração, intervalo de integração $[1, +\infty)$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^5} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4x^4} \right)_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\underbrace{\left(\frac{1}{4(b)^4} \right)}_{\text{zero}} + \frac{1}{4(1)^4} \right) = \frac{1}{4}$$



d) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^5}$ Integral imprópria
de 1ª espécie

É uma **integral imprópria**, pois apresenta limite infinito de integração, intervalo de integração $(-\infty, -1]$.

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^5} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} \frac{dx}{x^5} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{4x^4} \right)_a^{-1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{4(-1)^4} + \underbrace{\left(\frac{1}{4(a)^4} \right)}_{\text{zero}} \right) = -\frac{1}{4} \quad \text{Integral converge}$$

e) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^5}$ Integral imprópria
de 2ª espécie

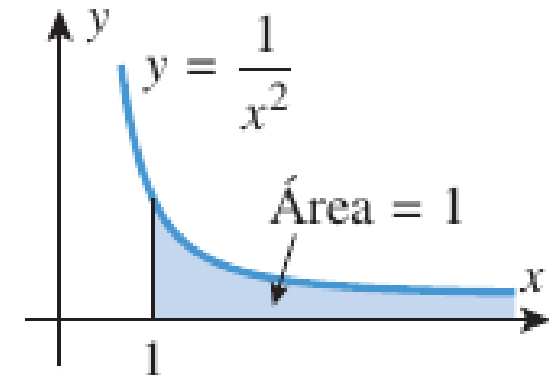
É uma **integral imprópria**, pois a função integrando apresenta descontinuidade em $x = 0$.

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^5} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-1}^{0-h} \frac{dx}{x^5} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{4x^4} \right)_{-1}^{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\underbrace{\left(\frac{1}{4(-h)^4} \right)}_{\text{infinito}} + \frac{1}{4(-1)^4} \right) = -\infty \quad \text{Integral diverge}$$

2. Calcule o valor da integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right)_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1 \quad \text{A integral converge para 1}$$

Podemos dizer que a área abaixo da curva é igual a 1, a partir de $x = 1$.



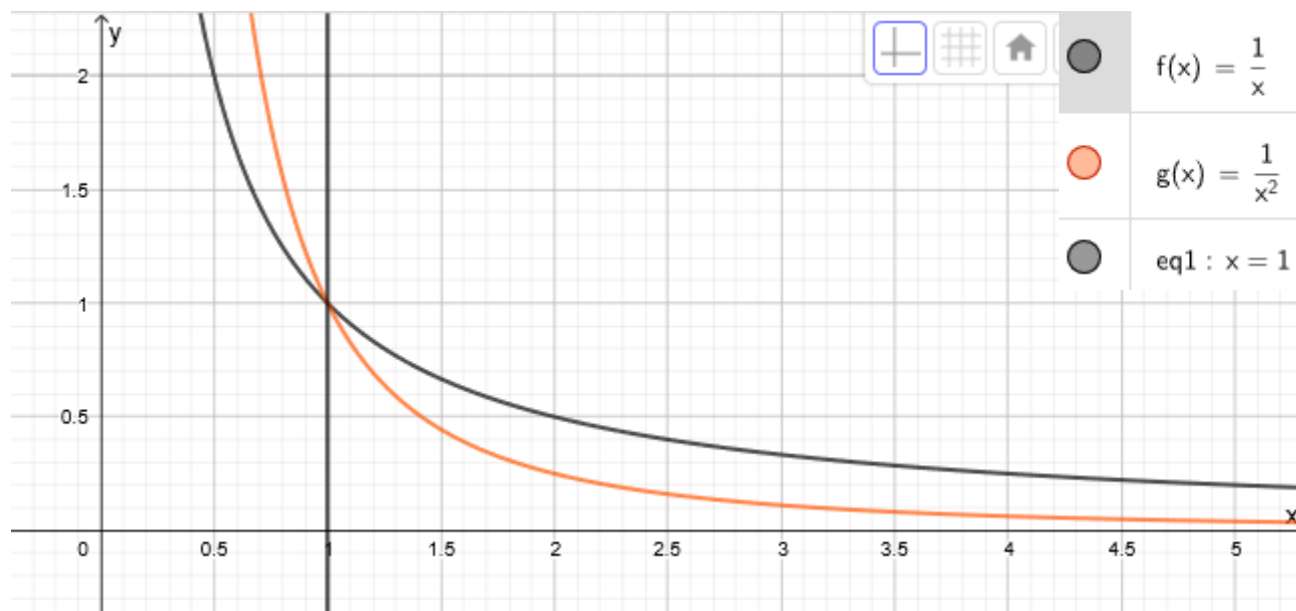
3. Calcule o valor da integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln|x|)_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\ln b}_{+\infty} - \underbrace{\ln 1}_{\text{zero}} \right) = +\infty \quad \text{A integral diverge}$$

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Os exemplos 2 e 3 nos mostram que, a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, enquanto $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge. Em termos geométricos, isso significa que a área sob a curva $y = \frac{1}{x^2}$ à direita de $x = 1$ é finita, enquanto a área sob a curva $y = \frac{1}{x}$ à direita de $x = 1$ é infinita.

A razão para a diferença é que, quando x tende a mais infinito, $\frac{1}{x^2}$ tende a zero mais depressa que $\frac{1}{x}$, como mostra a figura.

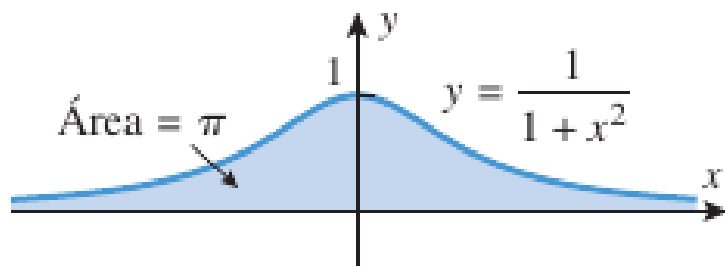


4. Mostre que a integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge para π .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} =$$

Integral imprópria
de 1ª espécie

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg x)_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg x)_0^b = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg a) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 0) =$$



$$= \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctg \left(\frac{u}{a}\right) + C, a \neq 0$$

5. Calcule $\int_0^1 \ln(x) dx$ $Df = (0, +\infty)$ Integral imprópria de 2ª espécie

$$\int_0^1 \ln(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{0+h}^1 \ln x dx = \lim_{h \rightarrow 0} (x \ln x - x) \Big|_{0+h}^1$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\underbrace{1 \ln 1}_0 - 1 \right) - (h \ln h - h)$$

$$= -1 - \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} h \ln h}_{0 \cdot \infty} = -1 - \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln h}{h^{-1}}}_{\frac{\infty}{\infty} \text{ L'Hospital}}$$

$$= -1 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h}}{-h^{-2}} = -1 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = -1 + \lim_{h \rightarrow 0} h = -1, \text{ converge}$$

integral por partes $\int u dv = u \cdot v - \int v du$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx, \quad dv = dx$$

$$\Rightarrow v = \int dx \Rightarrow v = x$$

$$\int \underbrace{\ln x}_u \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_v \underbrace{\ln(x)}_u - \int \underbrace{x}_v \underbrace{\frac{dx}{du}}_{du} = x \ln(x) - x + C$$

6. Determine se as integrais convergem ou divergem

$$a) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \quad Df = (-3,3); \quad 9-x^2 > 0 \quad \text{Integral imprópria de 2ª espécie}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{3-h} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\arcsen \frac{x}{3} \right)_0^{3-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\arcsen \left(\frac{3-h}{3} \right) - \underbrace{\arcsen \left(\frac{0}{3} \right)}_0 \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsen \left(\frac{u}{a} \right) + C, \quad a^2 > u^2, \quad a \neq 0$$

A integral imprópria converge para $\frac{\pi}{2}$

$$b) \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \quad Df = R - \{1\} \quad \text{Integral imprópria de 2ª espécie}$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}}_{\text{integral imprópria com integrando descontínuo}} + \underbrace{\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}}_{\text{integral imprópria com integrando descontínuo}}$$

Vamos resolver a integral indefinida

$$\int \frac{dx}{\underbrace{(x-1)^2}_u} = \int (x-1)^{-2} dx = \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x-1}$$

$du=dx$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_0^{1-h} \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_{1+h}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left(-\frac{1}{x-1} \right)_0^{1-h} + \left(-\frac{1}{x-1} \right)_{1+h}^2 \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left(-\frac{1}{1-h-1} + \frac{1}{0-1} \right) + \left(-\frac{1}{2-1} + \frac{1}{1+h-1} \right) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left(-\frac{1}{-h} + \frac{1}{-1} \right) + \left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{h} \right) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left(\underbrace{\frac{1}{h}}_{+\infty} - 1 \right) + \left(-1 + \underbrace{\frac{1}{h}}_{+\infty} \right) \right] = +\infty \end{aligned}$$

A integral imprópria diverge