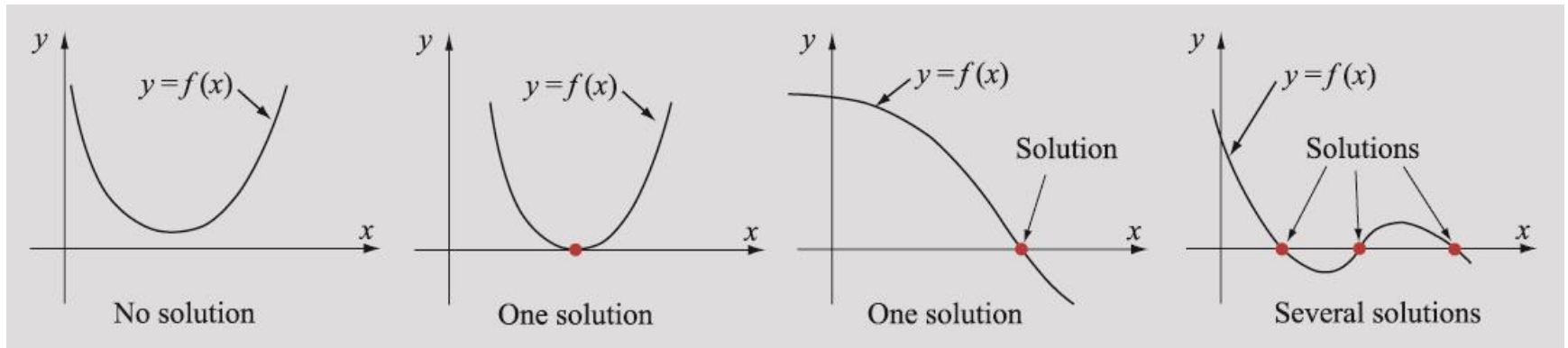


Universidade Federal do Rio Grande

Determinação Numérica de Raízes de Equações Algébricas

Computação e Cálculo
Numérico

Possibilidades de existência de raízes



Raízes de Equações Algébricas

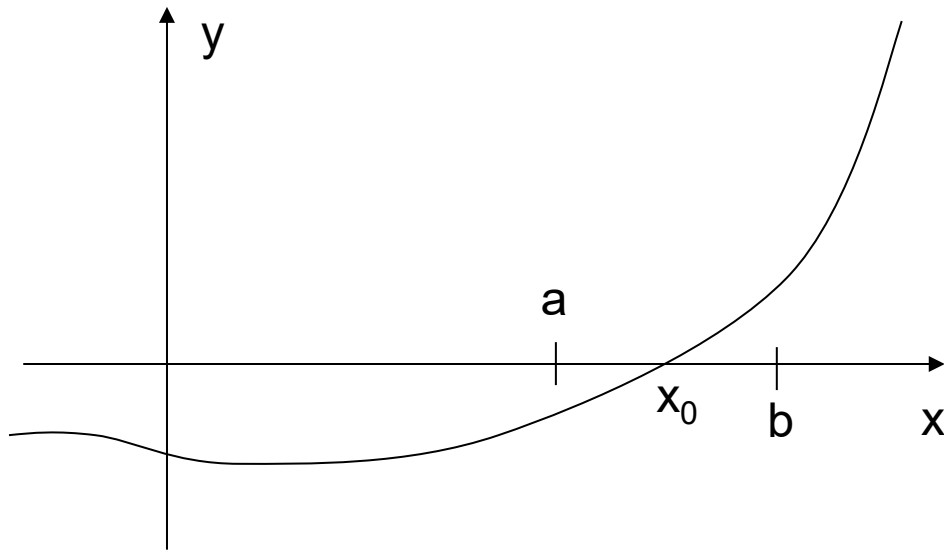
- Achar a raiz de uma função $f(x)$ significa achar um número $x = \xi$ tal que $f(\xi) = 0$
- Algumas funções podem ter suas raízes calculadas analiticamente, porém outras são de difícil solução (funções transcendentais, por exemplo) ou de solução desconhecida (polinômios de ordem maior que 4, por exemplo), sendo necessário a solução por métodos numéricos
- Passos para a solução numérica
 - Achar um intervalo fechado $[a,b]$ que contenha somente uma solução
 - Refinar a raiz até o grau de exatidão requerido

Isolamento de raízes

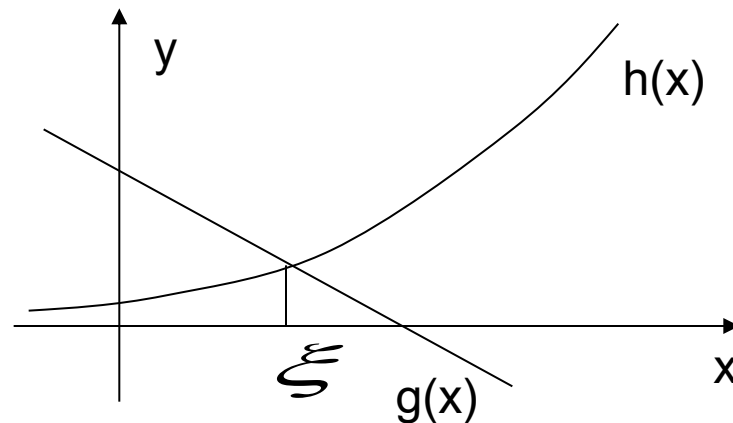
- Se uma função contínua $f(x)$ assume valores de sinais opostos entre o intervalo $[a,b]$, então a função possui pelo menos uma raiz neste intervalo
- Se a derivada da função preservar o sinal dentro do intervalo, ou seja, se a função for estritamente crescente ou estritamente decrescente, a raiz será única
- Pode-se estimar o intervalo $[a,b]$ pelo esboço do gráfico da função ou pela construção de tabelas para análise da variação do sinal da função

Isolamento de raízes por esboço do gráfico

- Dada a função $f(x)$, o ponto $f(\xi) = 0$ é exatamente o ponto onde a função cruza o eixo x



- Caso a função $f(x)$ seja complexa, podemos tentar escrevê-la na forma $f(x) = g(x) - h(x)$
- Supondo $f(\xi) = 0$ teremos
$$g(\xi) - h(\xi) = 0 \Rightarrow g(\xi) = h(\xi)$$
- Dessa forma, podemos traçar os gráficos das funções $g(x)$ e $h(x)$ e o ponto de interseção destes irá nos fornecer a raiz da função $f(x)$



Critérios de parada

Existem vários tipo de critérios de parada

- Analise do valor da funcao:

$$|f(x)| < \delta$$

- Erro absoluto:

$$|x_i - x_{i-1}| < \delta$$

- Erro relativo:

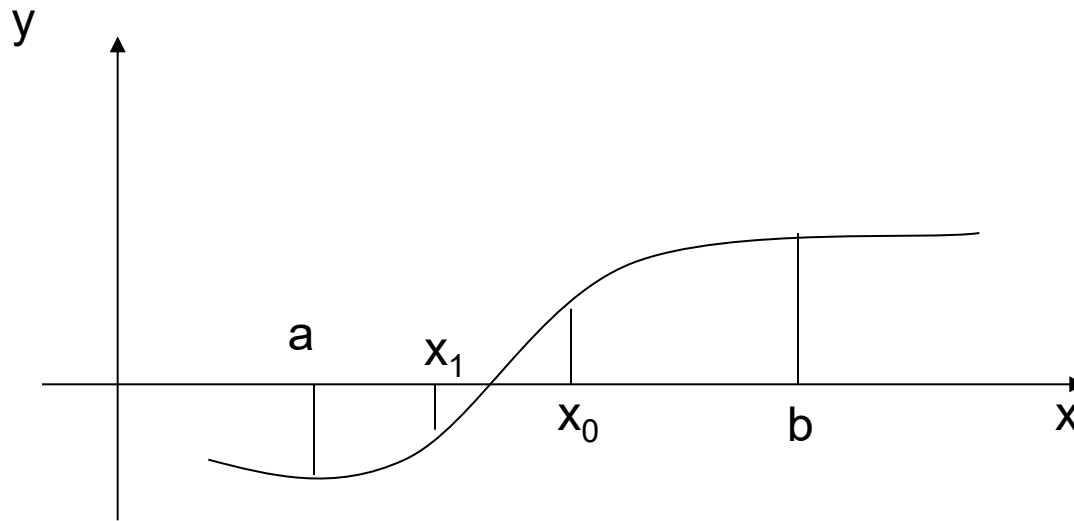
$$\left| \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} \right| < \delta$$

- Limites do intervalo:

$$\frac{b-a}{2} < \delta$$

Método da bisseção

- Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, dividindo o intervalo ao meio, obtém-se x_0 .
- Caso $f(x_0) = 0$, $\xi = x_0$
- Caso contrário,
 - Se $f(a) \cdot f(x_0) < 0$ então a raiz está no intervalo $[a, x_0]$
 - Se $f(x_0) \cdot f(b) < 0$ então a raiz está no intervalo $[x_0, b]$
- Dividi-se novamente o intervalo obtendo x_1 e assim sucessivamente até a precisão desejada



- **Convergência**

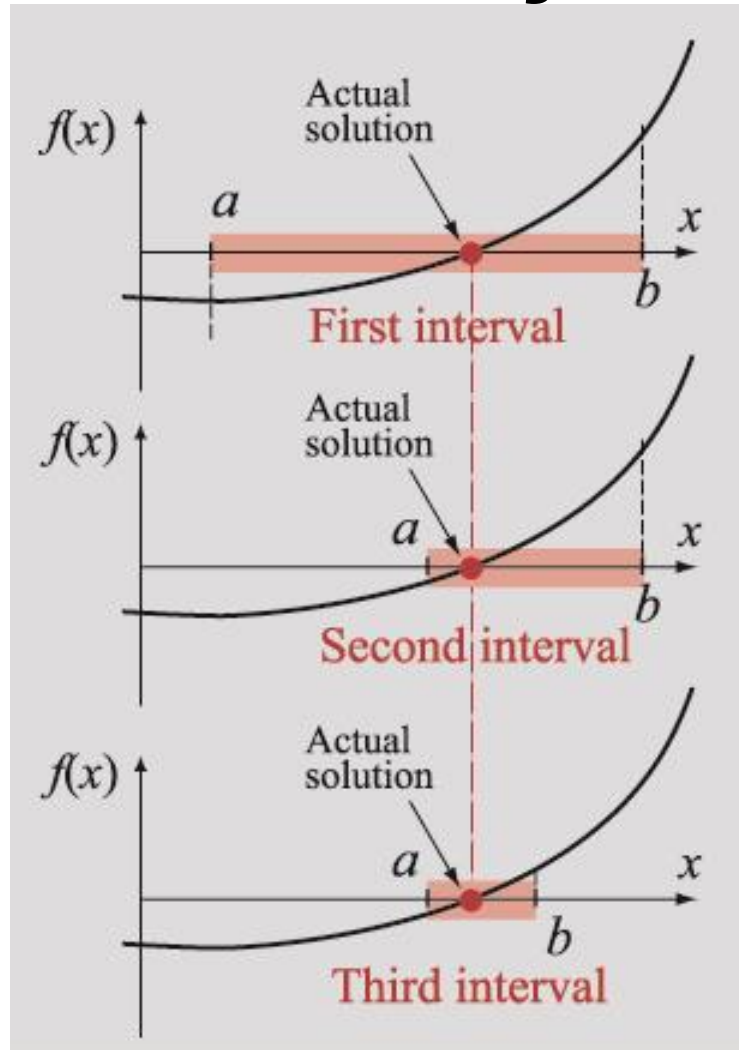
- Chamando os intervalos de $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ então:

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

Se $|b_n - a_n| \leq \varepsilon$

então $\left| \frac{b - a}{2^{n+1}} \right| \leq \varepsilon$

Funcionamento do método da biseção



- Ex: Achar a raiz da equação $f(x) = x^3 - 10$ no intervalo $[2,3]$ com o erro absoluto $\delta < 0,1$

$$f(2) \cdot f(3) = -2 \cdot 17 < 0$$

$$x_0 = (2 + 3) / 2 = 2,5 \rightarrow f(2,5) = 5,62$$

$$x_1 = (2 + 2,5) / 2 = 2,25 \rightarrow f(2,25) = 1,39$$

$$x_2 = (2 + 2,25) / 2 = 2,12 \rightarrow f(2,15) = -0,40$$

$$x_3 = (2,12 + 2,25) / 2 = 2,18 \rightarrow f(2,18) = 0,46$$

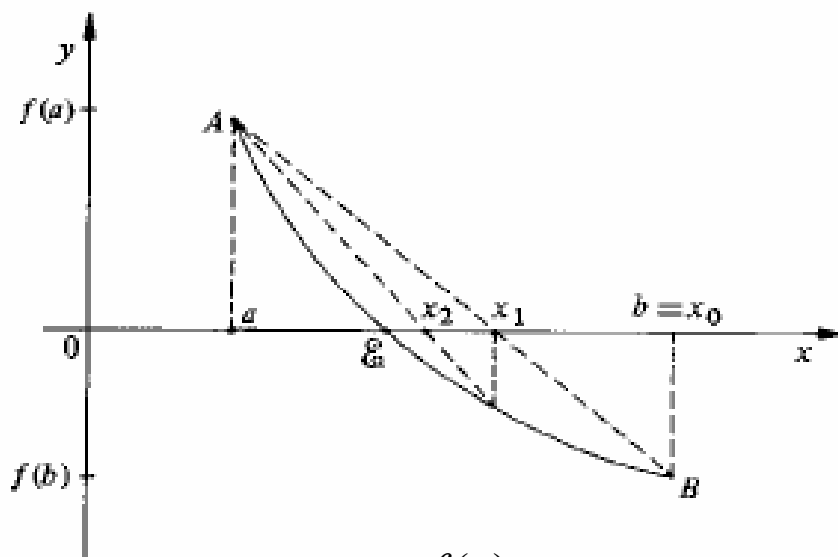
$$\hookrightarrow \varepsilon = 2,18 - 2,12 = 0,06$$

- O método sempre converge para uma solução
- O esforço computacional do método da bisseção cresce demasiadamente quando se aumenta a exatidão da raiz desejada
- Deve ser usado apenas para diminuir o intervalo que contém a raiz para posterior aplicação de outro método, como o método das cordas ou o método de Newton, por exemplo

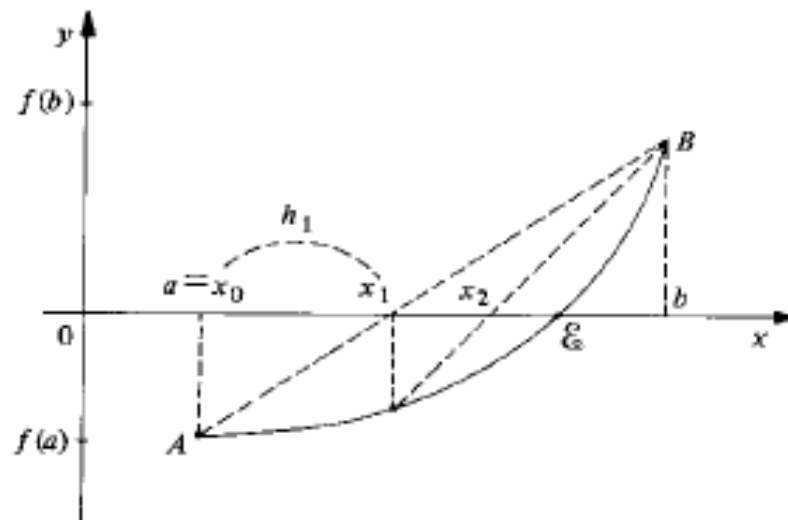
Método das cordas

- É semelhante ao método da bisseção
- a derivada segunda do método, $f''(x)$, deve ser constante no intervalo
- O intervalo $[a,b]$ não é dividido ao meio, mas sim em partes proporcionais a razão $-f(a)/f(b)$
- O intervalo é atualizado da mesma maneira que no método da bisseção

Existem duas possibilidades:



$$x_0 = a - \frac{f(a)}{f(a) - f(b)}(a - b)$$



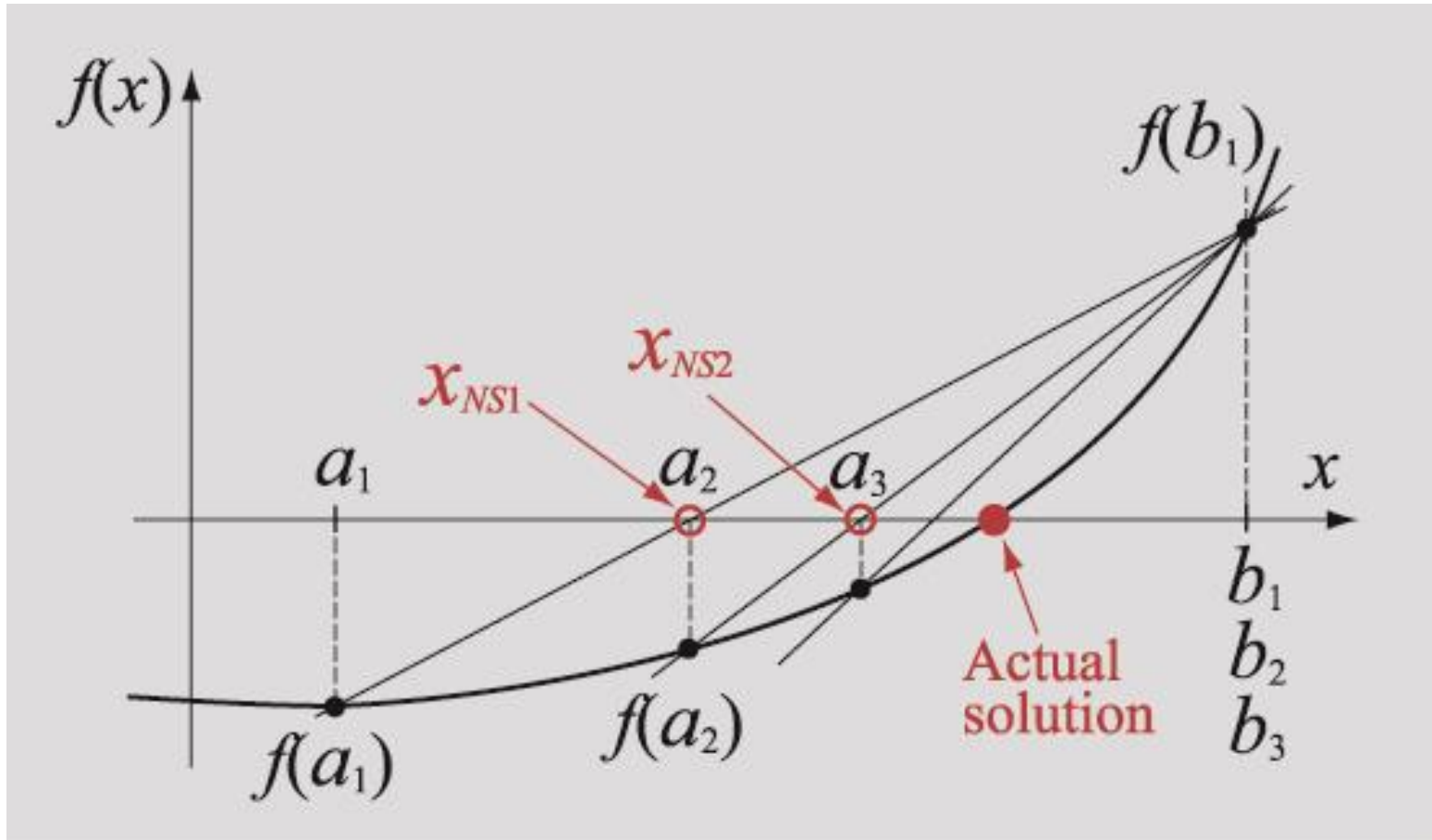
$$x_0 = b + \frac{f(b)}{f(a) - f(b)}(b - a)$$

Podemos substituir essas duas equações pela equação

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(c)}(x_n - c)$$

onde c é um ponto da função onde esta tem o mesmo sinal de sua derivada segunda ($f(c) \cdot f''(c) > 0$)

Funcionamento do método das cordas



- Ex: Achar a raiz da equação $f(x) = x^3 - 10$ no intervalo $[2,3]$

$$x_0 = 2 - \frac{f(2)}{f(3) - f(2)}(3 - 2) = 2 - \frac{-2}{19}(1) = 2,11 \rightarrow f(2,11) = -0,74$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2,11 - \frac{f(2,11)}{f(3) - f(2,11)}(3 - 2,11) \\ &= 2,11 - \frac{-0,74}{17,74}(0,89) = 2,15 \rightarrow f(2,15) = -0,07 \end{aligned}$$

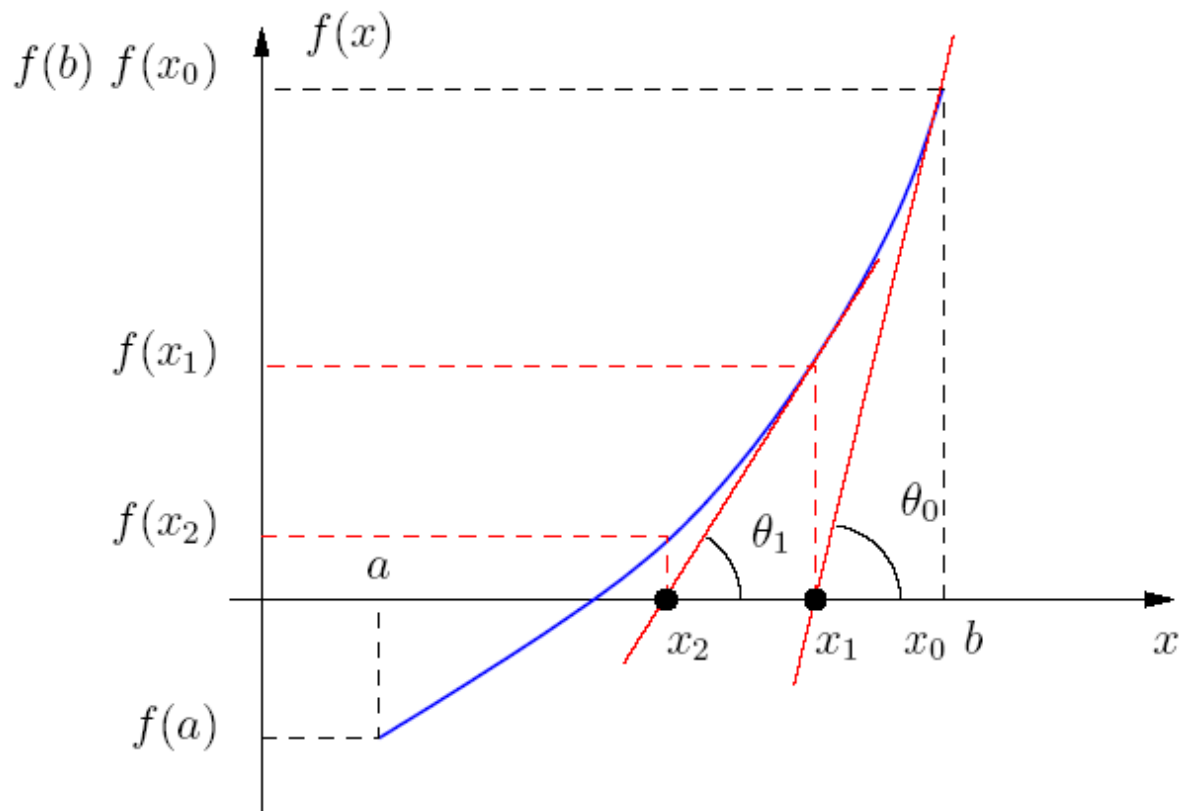
- Podemos ver que o método das cordas converge bem mais rápido que o método da bisseção

Método de Newton

- Supondo uma aproximação x_0 para a raiz de $f(x)$, no ponto $(x_0, f(x_0))$ passa apenas uma única reta tangente, que é a derivada de $f(x)$ em x_0 . Esta reta tangente corta o eixo x na coordenada x_1 , definindo por sua vez, o ponto $(x_1, f(x_1))$
- Por este novo ponto também passa uma única reta tangente que corta o eixo x em x_2 . Esta nova coordenada define outro ponto $(x_2, f(x_2))$ que repete todo o processo
- x_0, x_1, \dots são aproximações cada vez melhores para a raiz da função

- Pela figura temos que $\tan(\theta) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} \Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\tan(\theta)}$
- Já que $f'(x) = \tan(\theta)$ podemos concluir

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



- Convergência

- Caso se escolha x_0 de forma que x_1 saia do intervalo $[a,b]$ o método poderá não convergir.
- Caso $f'(x)$ e $f''(x)$ sejam não nulas e preservem o sinal no intervalo e x_0 seja tal que $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ a convergência é garantida

Ex: Ache a raiz da equação $f(x) = x^2 + \ln(x)$ para o erro relativo $\delta = 0,01$ e $[0,5; 1]$, ou seja:

$$\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| < \delta$$

Se

$$f(x) = x^2 + \ln(x)$$

Então

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = x - \frac{1}{x^2}$$

$$X_0 = 0,5 \text{ pois } f(0,5) \cdot f''(0,5) = -0,44 \cdot -3,5 = 1,54 > 0$$

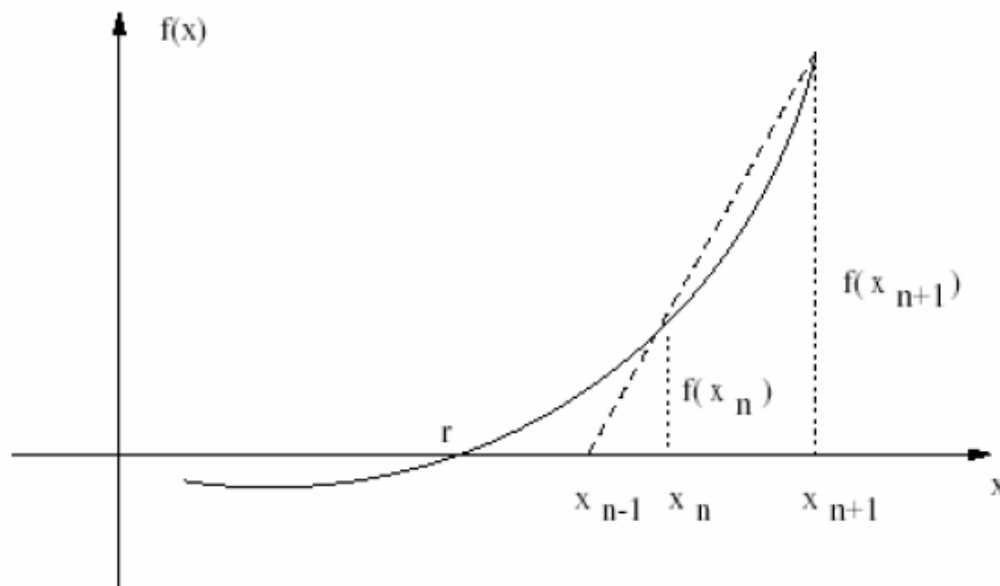
$$x_1 = 0,5 - \frac{f(0,5)}{f'(0,5)} = 0,5 - \frac{-0,44}{3} = 0,65$$

$$x_2 = 0,65 - \frac{f(0,65)}{f'(0,65)} = 0,65 \quad \hookrightarrow \quad \left| \frac{0,65 - 0,65}{0,65} \right| < 0,01$$

Método da Secante

- Uma modificação do método de Newton que substitui o a derivada da função pela equação

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$



- Substituindo o novo valor da derivada na formula de Newton, a fórmula do método da secante fica da seguinte maneira

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

- São necessários dois pontos iniciais(x_i e x_{i-1})

Ex: Determine a raiz da função $f(x) = e^{-x} - x$ com análise do valor da função $\delta < 0,01$

Comparação entre os métodos

- O método da bisseção é bastante simples por não exigir o conhecimento da derivada da equação em questão, porém possui uma convergência lenta
- O método das cordas exige que o sinal da derivada segunda permaneça constante no intervalo, porém, se o ponto inicial c estiver suficientemente próximo da raiz ($|f'(c)| < 10$) o método apresenta uma convergência bem mais rápida que o método da bisseção
- O método de Newton é o que apresenta a convergência mais rápida, porém exige o conhecimento da derivada analítica da função em questão
- O método da Secante é menos rápido que o de Newton, porém não exige o conhecimento da derivada analítica da função em questão