Máximos e Mínimos

Cristiana Andrade Poffal

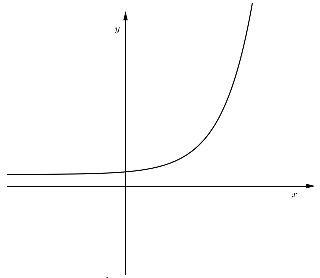
Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

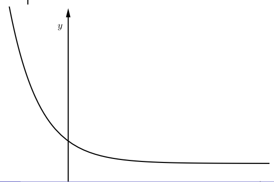
June 19, 2023

Noções Preliminares

p.85

Definição: Uma função $f(x)$ é dita **monótona** quando ela não muda de comportamento em relação ao crescimento, ou seja, se ela é crescente em todo seu domínio (ou estritamente crescente) ou se ela é decrescente em todo seu domínio (ou estritamente decrescente). A Figura 1 ilustra esse conceito.





Crescimento e Decrescimento

Definition

Diz-se que $f(x)$ é uma **função crescente** em um intervalo $I \subset D(f)$ se e somente se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I \subset D(f).$$

Definition

Diz-se que $f(x)$ é **estritamente crescente** em um intervalo $I \subset D(f)$, se e somente se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I \subset D(f).$$

Crescimento e Decrescimento

Definition

Diz-se que $f(x)$ é **decrescente** em um intervalo $I \subset D(f)$, se e somente se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I \subset D(f).$$

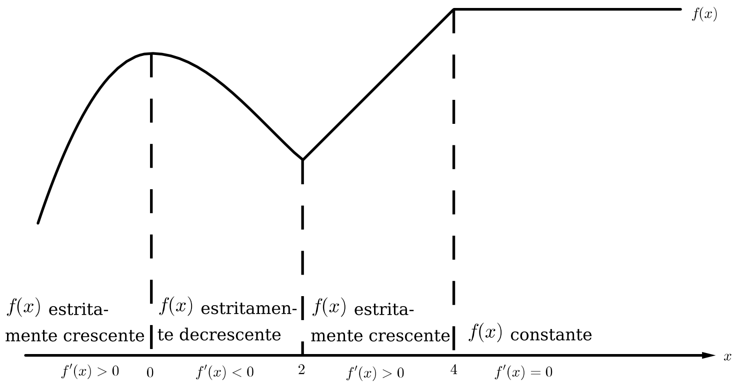
Definition

Diz-se que $f(x)$ é **estritamente decrescente** em um intervalo $I \subset D(f)$, se e somente se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I \subset D(f).$$

Crescimento e Decrescimento

Observe a Figura 2. Nos intervalos onde a função é estritamente crescente, a derivada de $f(x)$ é positiva, isto é $f'(x) > 0$, já nos intervalos onde a função é estritamente decrescente, a derivada de $f(x)$ é negativa, ou seja, $f'(x) < 0$. Quando a função é constante, a derivada de $f(x)$ é nula, $f'(x) = 0$.



Teste para determinar os intervalos de Crescimento e de Descrescimento
(Sinal da Primeira Derivada)

Theorem (Teste da Primeira Derivada)

Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo $]a, b[$.

(i) *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$.*

(ii) *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$.*

(iii) *Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é constante em $[a, b]$.*

Máximos e Mínimos

A Figura 3 apresenta o gráfico de uma função, onde as abscissas x_1, x_2, x_3 e x_4 estão assinaladas.

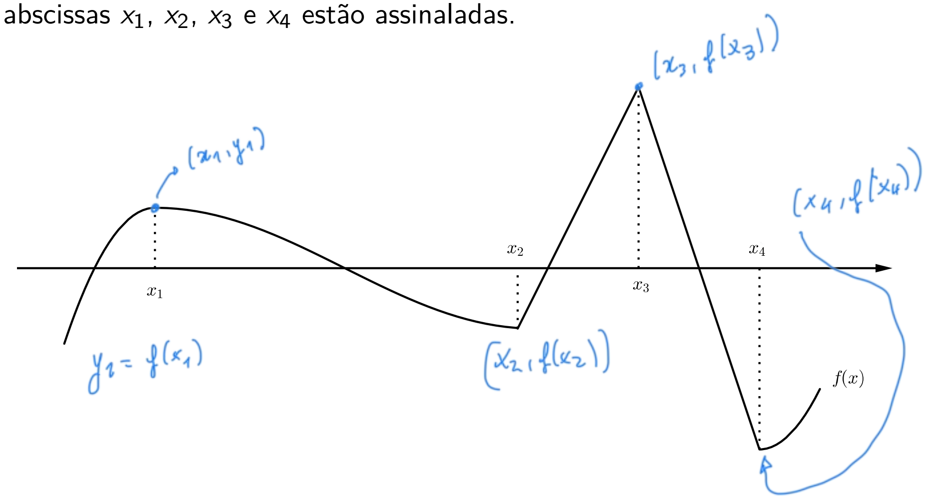


Figure: Máximos e Mínimos relativos

Pontos Extremos

Definition

Uma função $f(x)$ tem um ponto de **máximo relativo** ou **máximo local** em $x = c$, se existir um intervalo aberto I, contendo $x = c$, tal que $f(c) \geqslant f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$. Neste caso, representa-se por: $P_{ML}(c, f(c))$.

Definition

Uma função $f(x)$ tem um **mínimo relativo** ou **mínimo local** em $x = c$, se existir um intervalo aberto I, contendo $x = c$, tal que $f(c) \leqslant f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$. Neste caso representa-se por: $P_{mL}(c, f(c))$.

Definition

Diz-se que um ponto $(c, f(c))$ é um **ponto crítico** para a função f quando f é definida em $x = c$ e $f'(c) = 0$ ou $f'(c) = +\infty$, ou não existe $f'(c)$.

candidatos a "pto" de máx ou mín

Extremos Absolutos

Definition

Diz-se que $f(c)$ é o **valor máximo absoluto** da função f, se $c \in D(f)$ e $f(c) \geqslant f(x)$ para todos os valores de x no domínio da f. Neste caso, representa-se o ponto de máximo absoluto por: $P_{MA}(c, f(c))$.

Definition

Diz-se que $f(c)$ é o **valor mínimo absoluto** da função f, se $c \in D(f)$ e $f(c) \leqslant f(x)$ para todos os valores de x no domínio da f. Neste caso, representa-se o ponto de mínimo absoluto por: $P_{mA}(c, f(c))$.

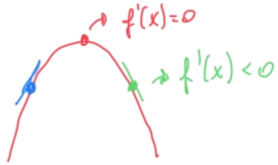
Critérios para determinação de extremos relativos ou locais

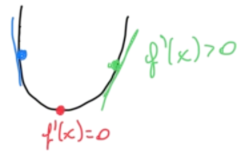
<u>1º critério:</u> Teste da Primeira Derivada para determinação de extremos relativos

Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ que possui derivada em todo $x \in]a, b[$, exceto possivelmente em $x = c$.

(i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em $(c, f(c))$.

(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em $(c, f(c))$.





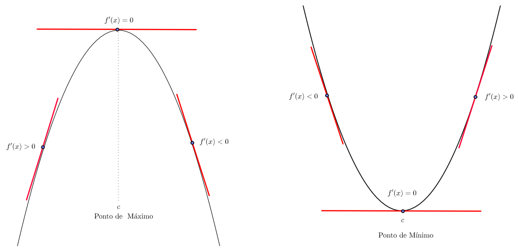


Figure: Pontos máximos e mínimos

Critérios para determinação de extremos relativos ou locais

2º critério: *Teste da Segunda Derivada para determinação de extremos relativos*

Seja f uma função derivável num intervalo $]a, b[$ e $(c, f(c))$ um ponto crítico de f com $c \in]a, b[$, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite segunda derivada em $]a, b[$, tem-se:

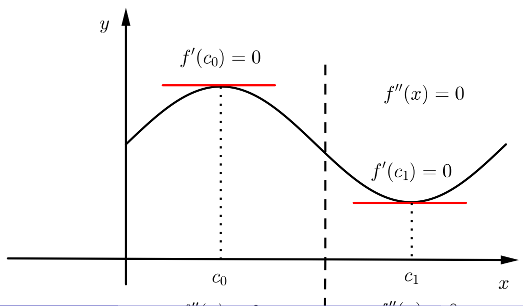
(i) Se $f''(c) < 0$, f tem um ponto de máximo relativo em $(c, f(c))$.

(ii) Se $f''(c) > 0$, f tem um ponto de mínimo relativo em $(c, f(c))$.

(iii) Se $f''(c) = 0$, então o teste é inconclusivo.

Mín

Máx



Concavidade e Pontos de Inflexão

O conceito de concavidade é muito útil no esboço do gráfico de uma função.

Definition

Uma função f é dita **côncava para cima** no intervalo $]a, b[$, se $f'(x)$ é crescente neste intervalo.

Definition

Uma função f é dita **côncava para baixo** no intervalo $]a, b[$, se $f'(x)$ é decrescente neste intervalo.

Reconhecer os intervalos onde uma curva tem concavidade voltada para cima ou para baixo auxilia no traçado do gráfico. Faz-se isso pela análise do sinal da derivada segunda $f''(x)$.

$f''(x) = 0 \to$ candidato a pto de inflexão

Teste para a Concavidade

Theorem (Teste da Concavidade)

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável até 2ª ordem no intervalo $]a, b[$.

a) *Se $f''(x) > 0$, o gráfico de $f(x)$ tem concavidade voltada para cima em $]a, b[$.*
b) *Se $f''(x) < 0$, o gráfico de $f(x)$ tem concavidade voltada para baixo em $]a, b[$.*

Pontos de Inflexão

Analisar o sinal da $f''(x)$

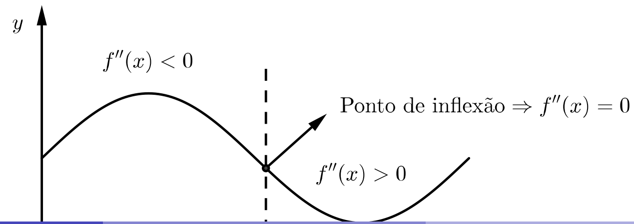
Definition

Um ponto $(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua f é chamado **ponto de inflexão**, se existe um intervalo $]a, b[$ contendo c, tal que uma das seguintes situações ocorra:

(i) f é côncava para cima em $]a, c[$ e côncava para baixo em $]c, b[$.

(ii) f é côncava para baixo em $]a, c[$ e côncava para cima em $]c, b[$.

Pode-se ainda afirmar que o ponto $(c, f(c))$ é dito ponto de inflexão do gráfico da função $f(x)$, se neste ponto da curva o gráfico da $f(x)$ troca de concavidade. A Figura 6 ilustra este fato.



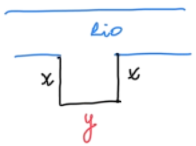
Problemas de Otimização

Exemplo: Um campo retangular deve ser cercado com 500 m de cerca ao longo de três lados e tem um rio reto como a Figura ??. Seja x o comprimento de cada lado perpendicular ao rio e y o comprimento de cada lado paralelo ao rio. Determine:

a) y em termos de x;

b) a área A do campo em termos de x;

c) a maior área que pode ser cercada.



Cerca = 500 m

Figura X

$x + x + y = 500$ $\quad x > 0$

a) $\boxed{y = 500 - 2x}$ $\quad y > 0$

$500 - 2x > 0 \rightarrow -2x < -500$ $\quad \boxed{x < 250}$

$D(f) = (0, 250)$

Problemas de Otimização

b) $A = x \cdot y \rightarrow A = x \cdot (500 - 2x)$

$$\boxed{A(x) = x\,(500 - 2x)}$$

ou

c) Máxima área

$A(x) = 500x - 2x^2$

$A'(x) = 500 - 4x$

Pto crítico (candidato a pto de máx)

$A'(x) = 0 \rightarrow 500 - 4x = 0 \rightarrow 4x = 500$

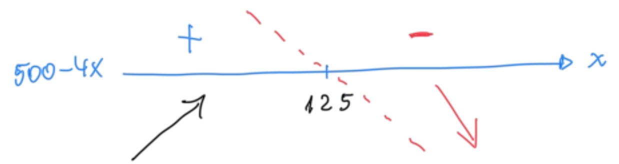
$x = \frac{500}{4}$

$\boxed{x = 125}$

Problemas de Otimização

Estudo do sinal da 1ª Derivada:

$A'(x) = 500 - 4x$



$x=125$ é abscissa de pto de máximo, pois $f'(x) > 0$ p/ $x < 125$ e $f'(x) < 0$ p/ $x > 125$.

Área Máx: $A(125) = 125\,(500 - 2\cdot 125) = 125 \cdot 250$

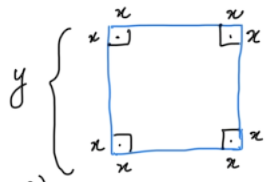
$$\boxed{A = 31250\ m^2}$$

Problemas de Otimização

Exercício: Uma folha quadrada de papelão de 12 m^2 é usada para fazer uma caixa aberta. São cortados quadrados de igual tamanho nos quatro cantos da folha e dobrados para dar altura à caixa. De que tamanho devem ser cortados os quadrados para conseguir o maior volume possível para a caixa?

$A = 12m^2 \longrightarrow y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{12}$



$V = x \cdot (y - 2x)^2$

$V = x\left(\sqrt{12} - 2x\right)^2 = x \cdot \left(12 - 4\sqrt{12}\,x + 4x^2\right)$

$V = 12x - 4\sqrt{12}\,x^2 + 4x^3$

Problemas de Otimização

Calcular os ptos críticos : $V' = 0$

$$V' = 12 - 4\sqrt{12} \cdot 2x + 12x^2$$

$$\boxed{V' = 12x^2 - 8\sqrt{12}x + 12}$$

$$V' = 0 \rightarrow 12x^2 - 8\sqrt{12}\,x + 12 = 0 \quad : 4$$

$$3x^2 - 2\sqrt{12}\,x + 3 = 0$$

$$x = \frac{2\sqrt{12} \pm \sqrt{4 \cdot 12 - 4(3)(3)}}{2 \cdot 3} \qquad 48 - 36$$

$$x = \frac{2\sqrt{12} \pm \sqrt{12}}{6}$$

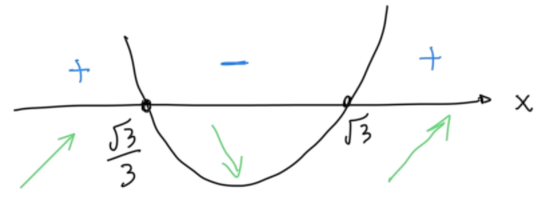
$$x_1 = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = \frac{3\sqrt{12}}{6} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

Problemas de Otimização

Estudo do sinal de V'

$3x^2 - 2\sqrt{12}\,x + 3$



$\frac{\sqrt{3}}{3}$ é abscissa de pto de máx, pois V é cresc. p/ $x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ e decrescente p/ $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

O valor do lado do quadrado a ser cortado é $x = \sqrt{3}/3$.

Construção de Gráficos

Tabela 1: Resumo para analisar o comportamento de uma função

Etapas	Procedimento
1ª	Determinar o domínio da função.
2ª	Calcular os pontos de intersecção com os eixos.
3ª	Calcular a primeira derivada da função.
4ª	Obter os pontos críticos.
5ª	Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$.
6ª	Calcular a segunda derivada da função.
7ª	Classificar os pontos críticos em máximos e mínimos relativos.
8ª	Determinar a concavidade e os pontos de inflexão da f.
9ª	Obter as assíntotas horizontais e verticais, se existirem.
10ª	Esboçar o gráfico.

Exercício 1: Esboce o gráfico de $f(x) = x^4 - 6x^2$.

Exercício 2: Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

Exercício 3: Esboce o gráfico de $f(x) = (x - 3)^2 e^x$.

Exercício 4: Esboce o gráfico de $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$.

$f(x) = x^4 - 6x^2$

1. Domínio da função: $D(f) = \mathbb{R}$

2. Intersecção c/ os eixos coordenados:

2.1 Raízes: $f(x) = 0$

↳ intersecção c/ o eixo x

$x^4 - 6x^2 = 0 \rightarrow x^2 \cdot (x^2 - 6) = 0$

$x^2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$ → raiz dupla

$x^2 - 6 = 0 \rightarrow x^2 = 6$

$\boxed{x = \pm\sqrt{6}}$

Ptos a serem marcados

Raízes: $(0,0)$; $(0,0)$; $(-\sqrt{6},0)$, $(\sqrt{6},0)$.

2.2 Intersecção c/ o eixo y: $f(0)$

$f(x) = x^4 - 6x^2 \rightarrow f(0) = 0^4 - 6.0^2 = 0$

Pto: $(0,0)$

3. Calcular $f'(x)$.

$f(x) = x^4 - 6x^2 \rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6 \cdot 2x$

$$\boxed{f'(x) = 4x^3 - 12x}$$

4. Determinar os ptos críticos: $f'(x) = 0$

↳ candidatos a ptos de máx ou mín

$4x^3 - 12x = 0 \rightarrow 4x \cdot (x^2 - 3) = 0$

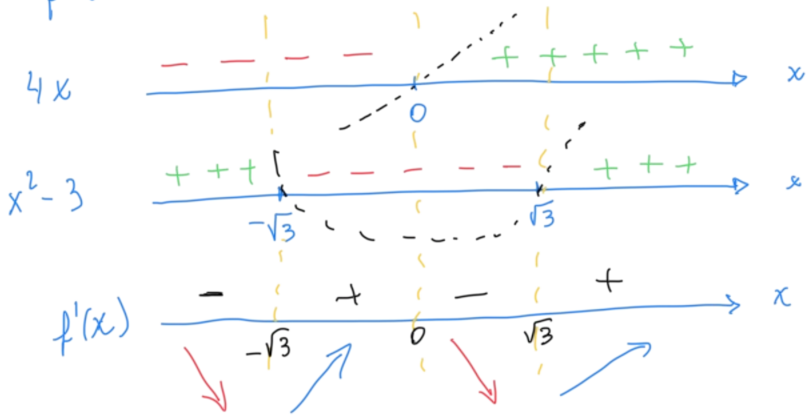
$4x = 0 \rightarrow x = 0$

$x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

5. Obter os intervalos de crescimento/decrescimento da função (estudar o sinal de $f'(x)$):

$$f'(x) = 4x^3 - 12x \Rightarrow f'(x) = 4x(x^2 - 3)$$



Int. Cresc: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Int. Dec: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

6. Calcular $f''(x)$:

$f'(x) = 4x^3 - 12x \rightarrow \boxed{f''(x) = 12x^2 - 12}$ //

7. Classificar os ptos críticos:

Pelas "setas" do estudo do sinal da $f'(x)$, temos que:

$(-\sqrt{3}, -9)$ é pto de mínimo.

$(0, 0)$ é pto de máximo.

$(\sqrt{3}, -9)$ é pto de mínemo.

↳ Pelos intervalos de cresc. e decresc. da função.

$f(x) = x^4 - 6x^2$

$x = -\sqrt{3} \rightarrow f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^4 - 6(-\sqrt{3})^2 = 9 - 6\cdot 3 = -9$

$x = \sqrt{3} \rightarrow f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^4 - 6\cdot(\sqrt{3})^2 = 9 - 18 = -9$

Ou: Classificando os ptos críticos usando a segunda derivada: $f''(x) = 12x^2 - 12$

$x = 0 \rightarrow f''(0) = 12\cdot 0^2 - 12 = -12 < 0$ $\cap$

$x=0$ é abscissa de pto de máximo

$x = -\sqrt{3} \rightarrow f''(-\sqrt{3}) = 12\cdot(-\sqrt{3})^2 - 12 = 12\cdot 3 - 12 = 24 > 0$ $\cup$

$f''(-\sqrt{3}) > 0 \rightarrow$ pto mínimo

$x = \sqrt{3} \rightarrow f''(\sqrt{3}) = 12\cdot(\sqrt{3})^2 - 12 = 12\cdot 3 - 12 = 24 > 0$ $\cup$

$\rightarrow$ pto de mínimo

$(0,0)$ é pto de máximo

$(-\sqrt{3}, -9)$ e $(\sqrt{3}, -9)$ são ptos de mínimo.

8. Concavidade e ptos de inflexão

8.1. Concavidade $\qquad f''(x) = 12x^2 - 12$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 12 = 0$

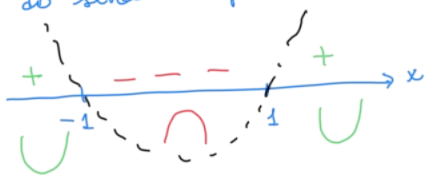
$12(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$

$x = \pm 1$

abscissas de candidatos a ptos de inflexão

Estudo do sinal de $f''(x)$:

$12x^2 - 12$



Concavidade voltada p/ cima $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

Concavidade voltada p/ baixo: $(-1,1)$

8.2 Pontos de inflexão (ptos onde há troca de concavidade)

$f(x) = x^4 - 6x^2$

$x=1 \to f(1) = 1-6 = -5 \to (1,-5)$

$x=-1 \to f(-1) = (-1)^4 - 6(-1)^2 \to 1-6 \to -5$

$(-1,-5)$

Ptos de inflexão: $(1,-5)$, $(-1,-5)$.

9. Assíntotas horizontais e Assíntotas verticais

Assíntotas verticais : $D(f) = \mathbb{R}$, não há

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^4 - 6x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^4 - 6x^2 = +\infty$$

Não há assíntotas horizontais.

10. Esboço do Gráfico.

no quadro