CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

PROFª. DENISE MARIA VARELLA MARTINEZ

INTEGRAÇÃO POR PARTES

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

INTEGRAÇÃO POR PARTES

Dadas as integrais: $a) \int e^{2x} dx$; $b) \int xe^{2x} dx;$

Qual delas é uma integral imediata?

Fazendo $u = 2x \Rightarrow du = 2dx$

Temos que a integral imediata do tipo $\int e^u du$ é a do item a, pois a

integral do item b tem um x "sobrando" no integrando.

E como resolvemos a integral do item b ?

Fazendo uma integração por partes, como mostramos a seguir.

INTEGRAÇÃO POR PARTES

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções deriváveis no intervalo I, através da regra do produto destas funções temos:

$$\frac{d}{dx}(u.v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$d(u.v) = udv + vdu$$

$$udv = d(u.v) - vdu$$ integrando ambos os membros da equação temos:

$$\int udv = \underbrace{\int d(u.v)}_{u.v} - \int vdu \Longrightarrow \boxed{\int udv = u.v - \int vdu}$$

A aplicação da fórmula $\int udv = u.v - \int vdu$ é denominada integração por partes.

Resolvendo por partes a integral do item b) $\int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^{2x}dx}_{dv}$

Escolhemos $\quad u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \int dv = \frac{1}{2}\int e^{2x}2dx \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2}$$

Aplicamos a fórmula da integral por partes $\int udv = u.v - \int vdu$

$$\int xe^{2x}dx = \underbrace{x}_{u}.\underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{v} - \int \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{v}\underbrace{dx}_{du} = x.\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{2}2dx$$

$$= x.\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

DICA:
a diferencial dv quando integrada deve nos dar uma integral imediata, e a função u quando derivada deve ser uma função mais simples que u.

Exemplo 1: $\int xsen(x)dx$

Escolhemos $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = sen(x)dx \Rightarrow v = \int dv = \int sen(x)dx \Rightarrow v = -\cos(x)$$

Aplicamos a fórmula da integral por partes $\int udv = u.v - \int vdu$

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{sen(x)dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\underbrace{(-\cos(x))}_{v} - \int \underbrace{-\cos(x)}_{v}\underbrace{dx}_{du} = -x.\cos(x) + sen(x) + C$$

Exemplo 2: $\int x\, ln(x)\, dx$

Aqui escolhemos $u = lnx \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$, pois não existe a integral imediata de $\ln(x)$

$$dv = xdx \Rightarrow v = \int dv = \int xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

Aplicamos a fórmula da integral por partes $\int udv = u.v - \int vdu$

$$\int \underbrace{ln(x)}_{u}\, \underbrace{xdx}_{dv} = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} \underbrace{\ln(x)}_{u} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} \underbrace{\frac{dx}{x}}_{du} = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \int xdx = \frac{x^2}{2} ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$$

Exemplo 3: $\int arcsen(x)dx$

Aqui escolhemos $u = arcsen(x) \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, não existe a integral imediata de $arcsen(x)$,

$$dv = dx \Rightarrow v = \int dv = \int dx \Rightarrow v = x$$

Aplicamos a fórmula d a integral por partes $\int udv = u.v - \int vdu$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$\int arcsen(x)dx = \quad xarcsen(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = xarcsen(x) - \frac{1}{(-2)}\int \underbrace{(1-x^2)}_{u}{}^{\overbrace{-1/2}^{n}} \underbrace{(-2)xdx}_{du} =$$

$$= xarcsen(x) + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + C \quad = xarcsen(x) + (1-x^2)^{1/2} + C$$

Exemplo 4: $\int e^x cos(x)dx$

Aqui escolhemos $u = \cos(x) \Rightarrow du = -sen(x)dx$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

Aplicamos a fórmula da integral por partes $\int udv = u.v - \int vdu$

$$\int e^x cos(x)dx = \underbrace{e^x}_{v}\underbrace{cos(x)}_{u} - \int \underbrace{e^x}_{v}\underbrace{(-sen(x)dx)}_{du} = e^x \cos(x) + \underbrace{\int e^x sen(x)dx}_{\substack{vamos\ integrar \\ por\ partes,\ novamente}}$$

$$u = \mathrm{sen}(x) \Rightarrow du = cos(x)dx \ \ e \ \ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\int e^x cos(x)dx = e^x \cos(x) + \left| e^x \,\mathrm{sen}(x) - \int e^x \cos(x)\, dx \right| = e^x \cos(x) + e^x \,\mathrm{sen}(x) - \int e^x \cos(x)\, dx$$

$$\int e^x cos(x)dx = e^x \cos(x) + e^x \,\mathrm{sen}(x) - \int e^x \cos(x)\, dx \qquad \Rightarrow 2\int e^x cos(x)dx = e^x(\cos(x) + sen(x))$$

$$\int e^x cos(x)dx = \frac{e^x(\cos(x) + sen(x))}{2}$$

Estratégias para resolver a integral por partes:

Sabemos que o objetivo principal da integração por partes é escolher, convenientemente, u e dv para obter uma nova integral " mais fácil" de calcular que a original. Em geral, não há regras imediatas e precisas, é uma questão, muito mais, de experiência e prática. Entretanto podemos usar alguns critérios:

1. Escolher u e dv de tal modo que u fique "mais simples" ao derivar, enquanto dv seja mais fácil de integrar para obter v

2. Outra estratégia, quando temos o produto de duas funções de categorias distintas, isto é, o produto de uma função algébrica por uma exponencial, por exemplo, é eleger a função u como uma função cuja categoria ocorre na lista: Função **L**ogarítmica, Trigonométrica **I**nversa, **A**lgébrica, **T**rigonométrica e **E**xponencial. Elegendo u nessa sequência, costumamos ter sucesso na maioria das vezes, e dv será o restante do integrando.