CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

IMEF INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

FURG

PROFª. DENISE MARIA VARELLA MARTINEZ

INTEGRAIS ENVOLVENDO $ax^2 + bx + c$

MÉTODO DE COMPLETAR QUADRADOS

$$\int f(x)dx = ?$$

$$\int f(u)du = ?$$

INTEGRAIS ENVOLVENDO $ax^2 + bx + c$

Nesta seção, mostraremos como podemos aplicar as fórmulas estudadas anteriormente para integrais envolvendo $ax^2 + bx + c$ e $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, $onde\ a \neq 0\ e\ b \neq 0$, pelo artifício de completar o quadrado.

O método de completar o quadrado se baseia no fato de que $(x \pm b)^2 = x^2 \pm 2bx + b^2, a = 1$.

$$Dado\ x^2 \pm 2bx + c \Leftrightarrow para\ completar\ o\ quadrado\ \ fazemos$$

$$x^2 \pm 2bx + b^2 - b^2 + c = (x \pm b)^2 + (\mathrm{c} - b^2)$$

$$Por\ exemplo, dado\ x^2 + 4x + 10 \Leftrightarrow para\ completar\ o\ quadrado\ \ fazemos$$

$$2bx = 4x \Rightarrow b = 2 \Rightarrow b^2 = 4$$

$$x^2 + 4x + \underbrace{4 - 4}_{b^2 - b^2} + 10 = \Big(x + \underbrace{2}_{b}\Big)^2 + \Big(10 - \underbrace{4}_{b^2}\Big) = (x + 2)^2 + 6$$

As integrais podem ser calculadas, na maioria das vezes, completando o quadrado e depois fazendo uma substituição apropriada. Vamos ver alguns exemplos:

Exemplo 1: $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$

$$Completando\ o\ quadrado\ \ fazemos$$

$$2bx = 2x \Rightarrow b = 1 \Rightarrow b^2 = 1 \qquad x^2 + 2x + \underbrace{1 - 1}_{b^2 - b^2} + 10 = (x+1)^2 + (10 - 1) = (x+1)^2 + 9$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 9}$$ Fazemos a substituição $u = x + 1 \Rightarrow du = dx$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} = \int \frac{\overbrace{dx}^{du}}{(\underbrace{x+1}_{u})^2 + \underbrace{9}_{a^2}} = \frac{1}{3} arctg\left(\frac{x+1}{3}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{(u)^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

Exemplo 2: Calcule $\int \frac{x\ dx}{x^2-4x+8}$

Dado $x^2-4x+8 \Leftrightarrow$ para completar o quadrado fazemos $2bx = 4x \Rightarrow b = 2 \Rightarrow b^2 = 4$

$$x^2-4x+\underbrace{4-4}_{b^2-b^2}+8 = (x-2)^2+(8-4) = (x-2)^2+4$$

$$\int \frac{x\ dx}{x^2-4x+8} = \int \frac{x\ dx}{(x-2)^2+4}$$ Fazemos a substituição $u = x-2 \Rightarrow du = dx; \quad x = u+2$

$$\int \frac{x\ dx}{x^2-4x+8} = \int \frac{x\ dx}{(x-2)^2+4} = \underbrace{\int \frac{(u+2)\ du}{u^2+4}}_{\substack{podemos\ dividir\ a \\ integral\ em\ duas}} = \underbrace{\int \frac{u\ du}{u^2+4}}_{\substack{integral\ du/u \\ u=u^2+4 \\ du=2udu}} + \underbrace{\int \frac{2\ du}{u^2+4}}_{\substack{integral \\ \frac{du}{u^2+a^2}}} = \frac{1}{2}\int \frac{2u\ du}{u^2+4} + 2\int \frac{du}{u^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u^2+4) + 2\left(\frac{1}{2}\right) arc\ tg\left(\frac{u}{2}\right) + C$$ Substituindo $u = x-2$

$$= \frac{1}{2}\ln\left((x-2)^2+4\right) + arc\ tg\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$

Exemplo 3: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

$Dado\ x^2+2x+5 \Leftrightarrow para\ completar\ o\ quadrado\ \ fazemos\quad 2bx=2x \Rightarrow b=1 \Rightarrow b^2=1$

$$x^2+2x+\underbrace{1-1}_{b^2-b^2}+5=(x+1)^2+(5-1)=(x+1)^2+4$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}}$$

Fazemos a substituição $u=x+1 \Rightarrow du=dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)+C = \ln\left((x+1)+\sqrt{(x+1)^2+4}\right)+C$$

Exemplo 4: Calcule $\int \frac{x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$

Dado $-(x^2-2x-3) \Leftrightarrow$ para completar o quadrado fazemos $2bx = 2x \Rightarrow b = 1 \Rightarrow b^2 = 1$

$$-(x^2-2x+\underbrace{1-1}_{b^2-b^2}-3) = -(x-1)^2+4 = 4-(x-1)^2$$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \int \frac{x+2\ dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$

Fazemos a substituição $u = x-1 \quad du = dx; \quad x = u+1$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \int \frac{x+2\ dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \int \frac{(u+1+2)\ du}{\sqrt{4-u^2}} = \underbrace{\int \frac{(u+3)\ du}{\sqrt{4-u^2}}}_{dividimos\ a\ integral\ em\ duas} = \int \frac{u\ du}{\sqrt{4-u^2}} + \int \frac{3\ du}{\sqrt{4-u^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(\underbrace{4-u^2}\right)^{-\frac{1}{2}}(\underbrace{-2udu}) + 3\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{4-(u)^2}}{1/2} + 3arcsen\left(\frac{u}{2}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{4-(x-1)^2}}{1/2} + 3arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right) + C = -\sqrt{3+2x-x^2} + 3arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$

Exemplo 5: $\int \frac{x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx =$

considerando $u = 3+2x-x^2, então\ temos\ du = 2-2x, podemos\ escrever\ a\ integral\ acima\ como$:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{-2(x+2)}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-4}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-4+2-2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \underbrace{-\frac{1}{2}\int \frac{(-2x+2)}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx}_{\int u^n du} + \underbrace{\frac{-6}{-2}\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}}_{completar\ quadrados}$$

$$Completando\ \ o\ \ quadrado \rightarrow 3+2x-x^2 = 4-(x-1)^2$$

$$Logo, \int \frac{x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \underbrace{(3+2x-x^2)}_{u}{}^{\overbrace{-1/2}^{n}} \underbrace{(-2x+2)dx}_{du} + 3\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}}_{\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}}$$

$$com\ \ \ a = 2, u = x-1$$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{4-(x-1)^2}}{\frac{1}{2}} + 3arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right) + C = -\sqrt{3+2x-x^2} + 3arcsen\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$