CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

PROFª. DENISE MARIA VARELLA MARTINEZ

INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS

MÉTODO DAS FRAÇÕES PARCIAIS

$$\int \frac{P(x)}{G(x)}\,dx = ?$$

INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS

Nesta seção veremos como integrar qualquer função racional.

Uma função racional $f(x)$ é definida como o quociente de duas funções polinomiais, ou seja,

$f(x) = \dfrac{P(x)}{G(x)}$, onde $P(x)$ e $G(x)$ são polinômios e $G(x) \neq 0$.

Podemos expressar $\dfrac{P(x)}{G(x)}$ como uma soma de frações mais simples, chamadas de frações parciais, mais fáceis de integrar. Para ilustrar o método observe que, por exemplo, levando as frações $\dfrac{1}{2(x-1)}$ e $\dfrac{5}{2(x+1)}$ a um denominador comum, obtemos

$$\frac{1}{2(x-1)} + \frac{5}{2(x+1)} = \frac{(x+1)+5(x-1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{6x-4}{2(x-1)(x+1)} = \frac{3x-2}{(x-1)(x+1)}$$

Se revertermos o procedimento, veremos como integrar a função no lado direito dessa equação

$$\int \frac{3x-2}{(x-1)(x+1)}dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)} + \frac{5}{2(x+1)}\right)dx = \frac{1}{2}ln|x-1| + \frac{5}{2}ln|x+1|$$

Assim a decomposição em frações parciais realizada foi:

$$\frac{3x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{3x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{Ax+A+Bx-B}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x-2 = Ax+A+Bx-B \\ 3x-2 = x(A+B)+(A-B) \end{array}$$

$$\xrightarrow{igualando\ \ os\ \ termos\ \ semelhantes} \begin{cases} A+B=3 \\ A-B=-2 \end{cases} \to A = \frac{1}{2}, B = \frac{5}{2}$$

$$\frac{3x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{5}{2}}{x+1} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{5}{2(x+1)}$$

Então, para resolver a integral $\int \frac{P(x)}{G(x)} dx$ utilizamos, geralmente, o método da decomposição em frações parciais.

Para ver como esse método de frações parciais funciona, consideramos a função racional $f(x) = \frac{P(x)}{G(x)}$ onde $P(x)$ e $G(x)$ são polinômios. É possível expressar f como uma soma de frações mais simples, desde que o grau de $P(x)$ seja menor que o grau de $G(x)$ $(grau\ P(x) < grau\ G(x))$. Essa função racional é denominada própria.

Se f é uma racional imprópria, isto é, o $grau\ P(x) \geq grau\ G(x)$, então devemos fazer uma etapa preliminar dividindo $P(x)$ por $G(x)$ (por divisão de polinômios) até o resto $R(x)$ ser obtido, com $grau\ R(x) < grau\ G(x)$. O resultado da divisão é $\frac{P(x)}{\mathrm{G}(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{G(x)}$

Assim a resolução de uma integral de uma função racional depende da relação existente entre o grau do polinômio $P(x)$ e o grau do polinômio $G(x)$.

A seguir vamos considerar os seguintes casos:

1º Caso: O Grau do polinômio $P(x) \geq$ Grau do polinômio $G(x)$.

Neste caso temos uma fração imprópria, então dividimos $P(x)$ por $G(x)$ obtendo:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & G(x) \\ \hline \underline{R(x)} & Q(x) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{P(x)}{G(x)} = Q(x) + \frac{\overbrace{R(x)}^{grau\, R(x) < grau\, G(x)}}{G(x)}$$

$$\int \frac{P(x)}{G(x)} dx = \int Q(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{G(x)} dx$$

Exemplo 1:

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx = \int \left(\underbrace{1}_{Q(x)} - \frac{\overbrace{2}^{R(x)}}{\underbrace{x^2 + 1}_{G(x)}} \right) dx = \int dx - 2 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = x - 2\, arctg(x) + C$$

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -1 & x^2 + 1 \\ \cline{3-3} \underline{-x^2} & \underline{-1} & 1 \\ & -2 & \end{array}$$

2º Caso: O Grau do polinômio $P(x) <$ Grau do polinômio $G(x)$.

Neste caso, $f(x) = \frac{P(x)}{G(x)}$ é uma função racional própria, e podemos representar a fração em forma de uma soma de frações, usando o Método da Decomposição em Frações Parciais.

Dependendo do denominador $\mathrm{G}(x)$, podemos ter os seguintes casos:

I) $G(x)$ é o produto de fatores lineares distintos (as raízes da equação $G(x) = 0$ são reais e distintas).

II) $G(x)$ é o produto de fatores lineares, e alguns dos fatores são repetidos (as raízes da equação $G(x) = 0$ são reais e algumas são repetidas);

III) $G(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis, nenhum dos quais se repete ($G(x) = 0$ tem raízes imaginárias diferentes);

IV) $G(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos ($G(x) = 0$ tem raízes imaginária repetidas).

I) As raízes da equação $G(x) = 0$ são reais e distintas

$$\frac{P(x)}{G(x)} \rightarrow grau\ P(x) < grau\ G(x)$$

Se os fatores do polinômio do denominador são lineares e distintos, podemos escrever o denominador como $G(x) = a_n(x - a)\,(x - b) \ldots (x - n)$, onde a_n é o coeficiente do x de maior expoente.

Assim podemos decompor a função racional $\dfrac{P(x)}{G(x)} = \dfrac{P(x)}{(x-a)(x-b)\ldots(x-n)}$, supondo $a_n = 1$, em :

$$\frac{P(x)}{G(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots\ldots + \frac{N}{x-n}$$

onde: A, B,..., N são as constantes a determinar e $a, b, \ldots, n$ são as raízes do polinômio. Logo,

$$\int \frac{P(x)}{G(x)}dx = \int \frac{A}{x-a}dx + \int \frac{B}{x-b}dx + \ldots\ldots + \int \frac{N}{x-n}dx$$

Exemplo:

$$\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx$$ Neste caso o $grau\ P(x) < grau\ G(x)$, então vamos fatorar o denominador

$Fatorando\ \ o\ denominador, obtemos$: $x^3-x^2-2x = x(x-2)(x+1)$

$$\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x-2}dx + \int \frac{C}{x+1}dx$$

$$\frac{x-1}{x^3-x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

Eliminando os denominadores temos: $x-1 = A(x^2-x-2) + B(x^2+x) + C(x^2-2x)$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x , ou seja, fazendo uma igualdade de polinômios

$$x - 1 = (A + B + C)x^2 + (-A + B - 2C)x + (-2A)$$

obtemos o sistema $\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -A + B - 2C = 1 \\ -2A = -1 \end{cases} \rightarrow A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{6}, C = -\frac{2}{3}$

Logo, $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x}dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x-2}dx + \int \frac{C}{x+1}dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{6}\ln(x-2) - \frac{2}{3}\ln(x+1) + \mathrm{C}$$

OBSERVAÇÃO: Para resolver o sistema de equações do exemplo anterior podemos usar substituição, regra de Cramer, escalonamento ou ainda usar uma maneira prática para determinar as constantes $A, B\ e\ C$, quando temos fatores $(x-a)$ como segue:

$$x-1=A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2) \qquad (1)$$

Podemos determinar $A, B\ e\ C$ tomando valores de x que anulem os diversos fatores, como segue:

$x=0 \rightarrow em\ (1)$ $\quad 0-1=A(0-2)(0+1)+B(0)(0+1)+C(0)(0-2)$

$$-1=-2A \rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$x=2 \rightarrow em\ (1)$ $\quad 2-1=A(2-2)(2+1)+B(2)(2+1)+C(2)(2-2) \rightarrow 2-1=\mathrm{B}(2)(2+1)$

$$1=6B \rightarrow B=\frac{1}{6}$$

$x=-1 \rightarrow em\ (1)$ $\quad -1-1=A(1-2)(-1+1)+B(-1)(-1+1)+C(-1)(-1-2)$

$$-2=\mathrm{C}(-1)(-1-2)$$

$$-2=3C \rightarrow C=-\frac{2}{3}$$

II) As raízes da equação $G(x) = 0$ são reais e algumas são repetidas.

$$\frac{P(x)}{G(x)} \rightarrow grau\ P(x) < grau\ G(x)$$

$$\frac{P(x)}{G(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^K(x-b)(x-c)},$$ supondo $a_n = 1$.

Cada fator repetido *K* vezes, como $(x-a)^k$ corresponde à soma de *k* frações da forma:

$$\frac{P(x)}{G(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

$$\int \frac{P(x)}{G(x)}dx = \int \frac{A_1}{(x-a)^k}dx + \int \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}dx + \ldots\ldots + \int \frac{A_n}{x-a}dx + \int \frac{B}{x-b}dx + \int \frac{C}{x-c}dx$$

sendo $A_1, A_2, \ldots, A_n$, B e C as constantes a determinar

Exemplo: $\int \frac{1}{x^3+3x^2}dx$ *Fatorando o denominador, obtemos*: $x^3+3x^2 = x^2(x+3)$

raízes de $x^3+3x^2 \rightarrow x = 0$ (*raiz dupla*), $x = -3$ (*raiz simples*)

$$\int \frac{1}{x^3+3x^2}dx = \int \frac{A}{x^2}dx + \int \frac{B}{x}dx + \int \frac{C}{x+3}dx$$

$$\frac{1}{x^3+3x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3} \Rightarrow \frac{1}{x^3+3x^2} = \frac{A(x+3)+Bx(x+3)+Cx^2}{x^2(x+3)} = \frac{Ax+3A+Bx^2+3Bx+Cx^2}{x^2(x+3)}$$

Eliminando os denominadores, temos: $1 = Ax+3A+Bx^2+3Bx+Cx^2$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, obtemos:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A + 3B = 0 \\ 3A = 1 \end{cases} \rightarrow A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{9}, C = \frac{1}{9}$$

$$\int \frac{1}{x^3+3x^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x+3} = -\frac{1}{3x} - \frac{1}{9}lnx + \frac{1}{9}\ln(x+3) = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{9}ln\left(\frac{x+3}{x}\right) + C$$

$$\frac{P(x)}{G(x)} \rightarrow grau\ P(x) < grau\ G(x)$$

III) O denominador $G(x)$ contém fatores do 2º grau com raízes imaginárias diferentes.
Para cada fator como $x^2 + px + q$, sendo $p^2 < 4q$, corresponde uma fração simples da forma:

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$$

Se $G(x) = (x^2 + px + q)(x - c)^k(x - d),\ \ onde\ p^2 < 4q$. Escrevemos,

$$\int \frac{P(x)}{G(x)} dx = \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx + \int \frac{C_1}{(x - c)^k} dx + \int \frac{C_2}{(x - c)^{k-1}} dx + \cdots + \int \frac{C_k}{(x - c)} dx + \int \frac{D}{(x - d)} dx$$

$Exemplo$: $\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx$

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} \Rightarrow \frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}$$

Eliminando os denominadores, temos: $x = Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2 + C$

$$x = (A+C)x^2 + (-A+B)x + (-B+C)$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, obtemos:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B=1 \\ -B+C=0 \end{cases} \rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx = \int \frac{-\frac{1}{2}x + 1/2}{x^2+1}dx + \int \frac{1/2}{x-1}dx =$$

$$= -\frac{1}{2(2)}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{4}ln(x^2+1) + \frac{1}{2}arctgx + \frac{1}{2}ln(x-1) + C$$

$$\frac{P(x)}{G(x)} \rightarrow grau\ P(x) < grau\ G(x)$$

IV) O denominador $G(x)$ contém fatores do 2º grau com raízes imaginárias repetidas. Para cada fator como $x^2 + px + q$, sendo $p^2 < 4q$, repetido k vezes, como $(x^2 + px + q)^k$ corresponde uma soma de frações do tipo:

$$\frac{A_1x + B_1}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_nx + B_n}{x^2 + px + q}$$

Onde $A_1, A_2, \ldots.\ A_n, B_1,\ B_2, \ldots.\ B_n$ $são\ constantes\ que\ devem\ ser\ determinadas$

Quando tivermos $\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$ Usamos a fórmula de redução (ver tabela de integrais)