



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA – IMEF
CÁLCULO III

POLINÔMIOS DE MACLAURIN

Seja $f(x)$ uma função que possui a seguinte representação em série de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dots$$

Quando truncamos esta série no termo de grau “ n ”, obtemos o seguinte polinômio de Maclaurin de grau “ n ”:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Ex.: Considere a função $f(x) = \text{sen}x$ e a série de Maclaurin desta função que é dada por:

$$f(x) = \text{sen}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

e que converge para qualquer valor de x . A partir desta série, obtemos os seguintes polinômios de Maclaurin:

$$P_0(x) = 0$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = x + 0x^2$$

$$P_3(x) = x + 0x^2 - \frac{x^3}{3!}$$

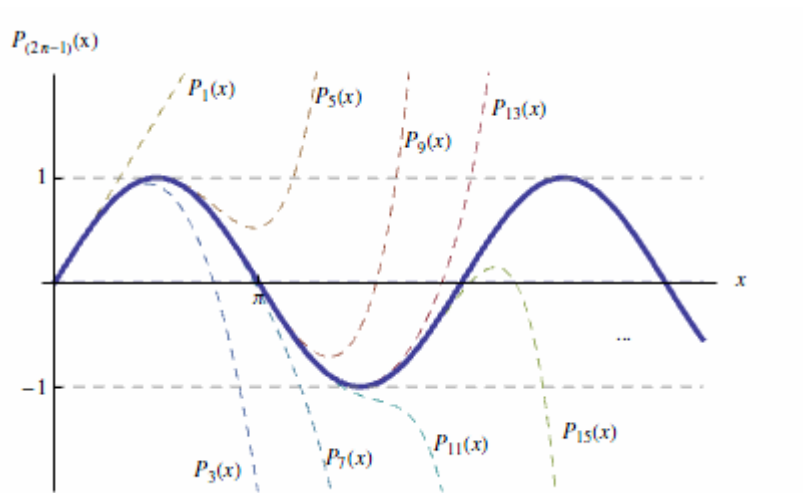
$$P_4(x) = x + 0x^2 - \frac{x^3}{3!} + 0x^4$$

$$P_5(x) = x + 0x^2 - \frac{x^3}{3!} + 0x^4 + \frac{x^5}{5!}$$

$$P_6(x) = x + 0x^2 - \frac{x^3}{3!} + 0x^4 + \frac{x^5}{5!} + 0x^6$$

$$P_7(x) = x + 0x^2 - \frac{x^3}{3!} + 0x^4 + \frac{x^5}{5!} + 0x^6 - \frac{x^7}{7!}$$

A figura a seguir mostra como esses polinômios de Maclaurin aproximam o gráfico da função $f(x) = \text{sen}x$, perto de $x = 0$.



POLINÔMIOS DE TAYLOR

Seja $f(x)$ uma função que possui a seguinte representação em série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \dots$$

Quando truncamos esta série no termo de grau “ n ”, obtemos o seguinte polinômio de Taylor de grau “ n ”:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ex.: Considere a série de Taylor da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ em torno de $a = \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n} = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6}{6!} + \dots$$

A partir desta série, obtemos os seguintes polinômios de Taylor:

$$P_0(x) = 1$$

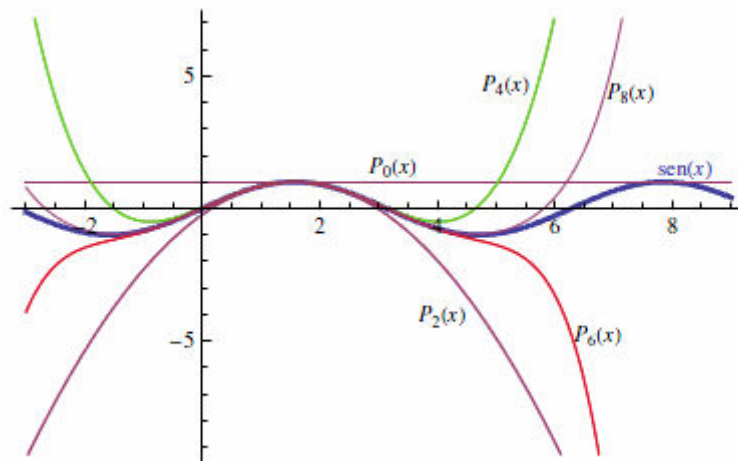
$$P_2(x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}$$

$$P_6(x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6}{6!}$$

$$P_8(x) = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6}{6!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^8}{8!}$$

A figura a seguir mostra como esses polinômios de Taylor aproximam o gráfico da função $f(x) = \text{sen} x$, perto de $x = \frac{\pi}{2}$.



DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

TEOREMA 1: (Teorema da derivação termo a termo)

Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ converge $\forall x \in (a-R, a+R)$, para algum $R > 0$, isso define a seguinte função:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad a-R < x < a+R.$$

Tal função tem derivadas de todas as ordens dentro do intervalo de convergência. As derivadas podem ser obtidas por meio da derivação da série original termo a termo:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-a)^{n-2},$$

e assim por diante. Cada uma dessas séries derivadas converge em todo ponto do interior do intervalo de convergência da série original.

Ex.: 1) A série de Maclaurin da função $f(x) = \frac{1}{1-x}$ é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1$$

Então:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots + nx^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad -1 < x < 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \dots + n(n-1)x^{n-2} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \quad -1 < x < 1$$

***Obs.:** A derivação termo a termo pode não funcionar para outros tipos de série. Por exemplo, a série trigonométrica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^2}$$

é convergente $\forall x \in \mathbb{R}$. Mas se derivarmos termo a termo, chegamos à série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cos(n!x)}{n^2}$$

que diverge $\forall x \in \mathbb{R}$. Note que esta não é uma série de potências.

2) Sabendo que $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $-1 < x < 1$, obtenha uma série de potências

de x para representar cada uma das funções abaixo. Em cada caso, especifique o conjunto dos valores de x onde a representação é válida:

a) $g(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$

Solução:

No exemplo 1, vimos que $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$, $-1 < x < 1$

Portanto podemos representar a função $g(x)$ por:

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \quad -1 < x < 1$$

Ou então:

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)x^n}{2}, \quad -1 < x < 1$$

b) $g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$

Solução:

No exemplo 1, vimos que $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $-1 < x < 1$, então podemos

escrever:

$$f'(-x) = \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1}, \quad -1 < x < 1$$

Logo

$$g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{2n-1}, \quad -1 < x < 1$$

c) $g(x) = \frac{x}{2-3x}$

Solução:

Como $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $-1 < x < 1$, temos que:

$$f\left(\frac{3}{2}x\right) = \frac{1}{1-\frac{3}{2}x} = \frac{2}{2-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}x\right)^n$$

Portanto

$$g(x) = \frac{x}{2-3x} = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} x^{n+1}, \quad -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$$

TEOREMA 2: (Teorema da integração termo a termo)

Suponha que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

converja $\forall x \in (a-R, a+R)$, para algum $R > 0$. Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

converge para $a-R < x < a+R$ e

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

para $a-R < x < a+R$.

Ex.: 1) Para identificarmos a função

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

Derivamos a série original termo a termo e obtemos:

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, \quad -1 < x < 1$$

que é uma série geométrica com o primeiro termo 1 e razão $-x^2$, portanto a sua soma é:

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Agora integrando $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, obtemos:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$$

Observe que a série para $f(x)$ é zero quando $x = 0$, assim $C = 0$. Temos então:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \arctg x, -1 \leq x \leq 1.$$

***Obs.:** Quando fazemos $x = 1$ em

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \arctg x$$

obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

2) Para determinarmos uma série para a função $f(x) = \ln(1+x)$, $-1 < x \leq 1$, podemos considerar a série

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \dots,$$

que converge no intervalo $-1 < t < 1$ e calcular a seguinte integral:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \dots) dt = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots, -1 < x \leq 1 \end{aligned}$$

3) Em estatística a função $E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ recebe o nome de Função Erro.

Encontre a Série de Maclaurin da função $E(x)$.

Solução:

A série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ é dada por: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, então

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad \text{e} \quad e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}, \text{ portanto:}$$

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt$$

De onde obtemos:

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

ALGUMAS APLICAÇÕES:

1. CÁLCULO DE INTEGRAIS NÃO ELEMENTARES:

As séries de Taylor e Maclaurin podem ser usadas para expressar integrais não elementares em termos de séries.

Ex.: 1) Exprese $\int \sin(x^2)dx$ como uma série de potências.

Vimos que a série de Maclaurin da função $f(x) = \sin x$ é dada por:

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Então, substituindo x por x^2 nesta série, obtemos a série de potências para a função $g(x) = \sin(x^2)$ que é dada por:

$$g(x) = \sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} \dots$$

Portanto

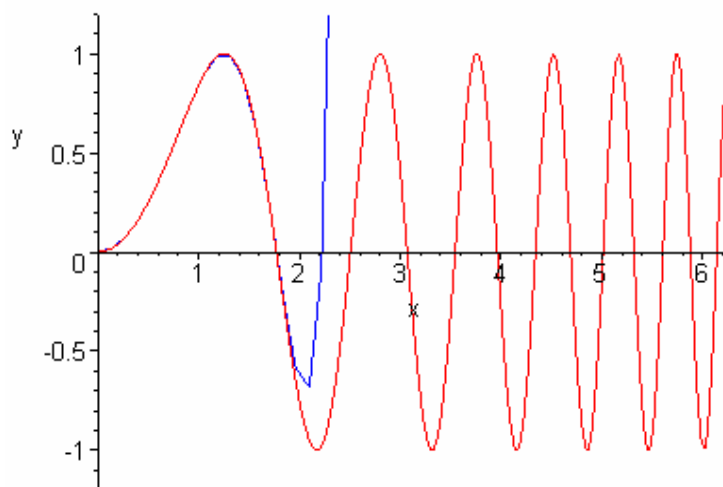
$$\begin{aligned} \int \sin(x^2) dx &= \int \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} \dots \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \frac{x^{19}}{19 \cdot 9!} - \dots \end{aligned}$$

2) Para determinar o valor aproximado da integral $\int_0^1 \sin(x^2) dx$, consideramos a integral indefinida do exemplo anterior e obtemos:

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx \approx \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \frac{x^{19}}{19 \cdot 9!} \right]_0^1 \approx 0,310268303$$

Na figura abaixo podemos observar a aproximação da função $g(x) = \sin(x^2)$ (curva vermelha) com o polinômio

$$P_{18}(x) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} \quad (\text{curva azul})$$



3) Usando uma série de potências adequada aproxime, com precisão de três casas decimais, o valor da integral: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^3}$.

Solução:

Vimos que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $-1 < x < 1$, então:

$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, portanto temos:

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} - \dots$$

De onde obtemos:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^3} \approx \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12}) dx = \left[x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{13}}{13} \right]_0^{\frac{1}{2}} \approx 0,485$$

Observe que resolvendo esta integral através do método das frações parciais obtemos:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^3} = \left[\frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^{\frac{1}{2}} \approx 0,485$$

2. CÁLCULO DE LIMITES

Algumas vezes, podemos calcular limites de formas indeterminadas expressando as funções envolvidas como séries de Taylor.

Ex.: Para calcular o limite: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$, podemos representar $\ln x$ como uma série de Taylor de potências de $x-1$, ou seja:

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots$$

Então temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^3 + \dots \right] = 1 \end{aligned}$$

3. SOMA DE SÉRIES NUMÉRICAS

Ex.: 1) Para determinar a soma da série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots = \frac{1}{2} \left[1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \dots \right],$$

podemos considerar série de Maclaurin da função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, ou seja:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

que converge se $|x| < 1$ e substituir x por $\frac{1}{2}$ nesta série, obtendo:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$$

Então podemos escrever:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \left[1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

Portanto a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ converge com soma igual a 2.

2) Integrando de $x = 0$ até $x = 1$ uma série de potências representando a função

$$f(x) = xe^x, \text{ mostre que } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{1}{2}$$

Solução:

Temos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, então $xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$, portanto obtemos:

$$\int_0^1 xe^x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$$

mas

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x - e^x]_0^1 = 1$$

logo

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$