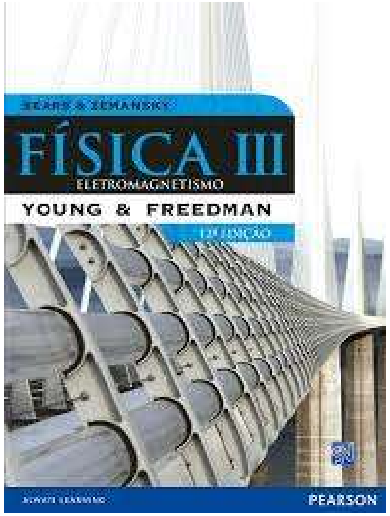
Aula de Exercícios



••7 Duas esferas condutoras iguais, mantidas fixas, se atraem mutuamente com uma força eletrostática de 0,108 N quando a distância entre os centros é 50,0 cm. As esferas são ligadas por um fio condutor de diâmetro desprezível. Quando o fio é removido, as esferas se repelem com uma força de 0,0360 N. Supondo que a carga total das esferas era inicialmente positiva, determine: (a) a carga negativa inicial de uma das esferas; (b) a carga positiva inicial da outra esfera.

Resolução:

Considerando duas esferas eletricamente carregadas com cargas q_1 e q_2, afastadas uma da outra por uma distância r, **a distribuição de cargas sobre cada uma delas é esfericamente simétrica (homogênea)**, e podemos utilizar a **lei de Coulomb** para entender a dinâmica das forças que atuam neste sistema. Podemos escolher um sistema de coordenadas tal que a força sobre q_2 é positiva se ela for repelida por q_1. Assim, a força sobre q_2 é dada por:

$$F_a = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = -k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

onde $r = 0.500 \text{ m}$

O sinal negativo indica que as esferas se atraem.

$$F_a = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = -k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Depois que o fio for removido as esferas irão adquirir a **mesma carga**. Como a carga é conservada, a carga total é a mesma antes de conectar as esferas. Então, após a conexão intermediada pelo fio, cada esfera terá carga igual a:

$$(q_1 + q_2)/2$$

E a força, agora repulsiva, é dada por:

$$F_b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)}{r^2} = k\frac{(q_1+q_2)^2}{4r^2}$$

$$F_a = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = -k\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad F_b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)}{r^2} = k\frac{(q_1+q_2)^2}{4r^2}$$

Então, resolvendo as equações para as forças simultaneamente para q_1 e q_2, temos que:

$$q_1 q_2 = -\frac{r^2 F_a}{k} = -\frac{(0.500\,\mathrm{m})^2 (0.108\,\mathrm{N})}{8.99\times 10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}} = -3.00\times 10^{-12}\,\mathrm{C^2}$$

$$q_1 + q_2 = 2r\sqrt{\frac{F_b}{k}} = 2(0.500\,\mathrm{m})\sqrt{\frac{0.0360\,\mathrm{N}}{8.99\times 10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}}} = 2.00\times 10^{-6}\,\mathrm{C}$$

$$q_1 q_2 = -\frac{r^2 F_a}{k} = -\frac{(0.500\,\mathrm{m})^2 (0.108\,\mathrm{N})}{8.99 \times 10^9\,\mathrm{N \cdot m^2/C^2}} = -3.00 \times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2$$

$$q_1 + q_2 = 2r\sqrt{\frac{F_b}{k}} = 2(0.500\,\mathrm{m})\sqrt{\frac{0.0360\,\mathrm{N}}{8.99 \times 10^9\,\mathrm{N \cdot m^2/C^2}}} = 2.00 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$$

Escolhemos a raiz positiva, assumindo que: $\boxed{q_1 + q_2 \geq 0}$

Do produto, temos $$q_2 = \frac{-\left(3.00 \times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2\right)}{q_1}$$

Que substituindo na soma, encontramos $$q_1 - \frac{3.00 \times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2}{q_1} = 2.00 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}.$$

Reescrevendo: $$\boxed{q_1^2 - \left(2.00 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}\right) q_1 - 3.00 \times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2 = 0.}$$

$$q_1^2 - \left(2.00 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}\right)q_1 - 3.00 \times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2 = 0.$$

As soluções para a equação de 2º grau para q_1 são:

$$q_1 = \frac{2.00 \times 10^{-6}\,\mathrm{C} \pm \sqrt{\left(-2.00 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}\right)^2 - 4\left(-3.00 \times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2\right)}}{2}$$

Se usamos o sinal positivo, encontramos: $\boxed{q_1 = 3.00 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}$

Se o sinal negativo for usado, temos: $q_1 = -1.00 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}$

Assim, a resposta para a questão (a) é:
A carga negativa inicial para uma das esferas, considerando **q_1 positivo** é:

$$q_2 = (-3.00 \times 10^{-12})/q_1$$

$$\boxed{q_2 = -1.00 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}$$

Se usamos o sinal positivo, encontramos: $q_1 = 3.00 \times 10^{-6}$ C

Se o sinal negativo for usado, temos: $\boxed{q_1 = -1.00 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}$

E a resposta para a questão (b) é:
A carga positiva da outra esfera, considerando q_1 negativo é:

$$q_2 = (-3.00 \times 10^{-12})/q_1$$

$$\boxed{q_2 = 3.00 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}$$

Quando $q_1 = 3.00 \times 10^{-6}$ C $\boxed{q_2 = -1.00 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}$

Quando $q_1 = -1.00 \times 10^{-6}$ C $\boxed{q_2 = 3.00 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}}$

Mas e se tivéssemos feito outra escolha???

$$q_1 + q_2 = 2r\sqrt{\frac{F_b}{k}} = 2(0.500\,\mathrm{m})\sqrt{\frac{0.0360\,\mathrm{N}}{8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}}} = 2.00 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

Escolhemos a raiz positiva, assumindo que: $q_1 + q_2 \geq 0$

Se tivéssemos escolhido: $\boxed{q_1 + q_2 < 0}$

As cargas seriam: $+1.00 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}$ e $-3.00 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}$

Mas a **magnitude das forças seriam as mesmas!**

••10 Na Fig. 22-33 as quatro partículas são mantidas fixas e têm cargas $q_1 = q_2 = +5e$, $q_3 = +5e$ e $q_4 = -12e$. A distância $d = 5{,}0$ μm. Qual é o módulo do campo elétrico no ponto P?

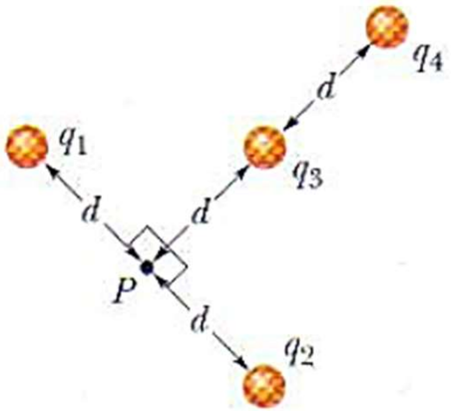
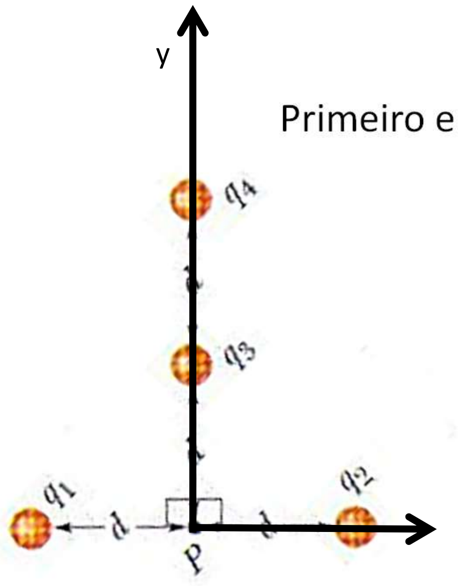


FIG. 22-33 Problema 10.

Corrijam: $q_3 = +3e$

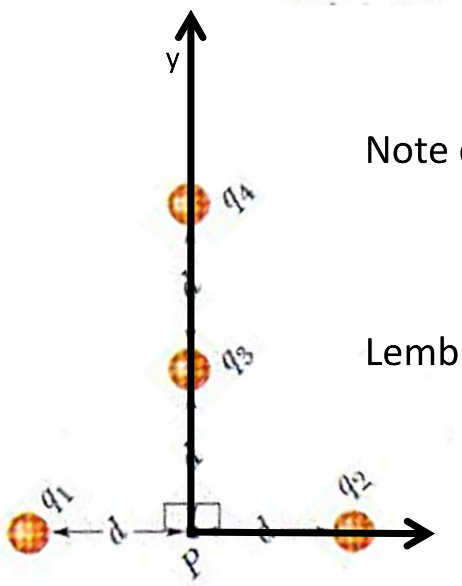


Primeiro escolho um sistema de coordenadas adequado.

Depois, utilizo a expressão para calcular o campo elétrico produzido por cargas pontuais.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\hat{r} \qquad \text{(carga pontual).} \qquad (22\text{-}3)$$

$q_1 = q_2 = +5e, q_3 = +3e$ e $q_4 = -12e.$



Note que a contribuição de q_1 cancela a de q_2:

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$$

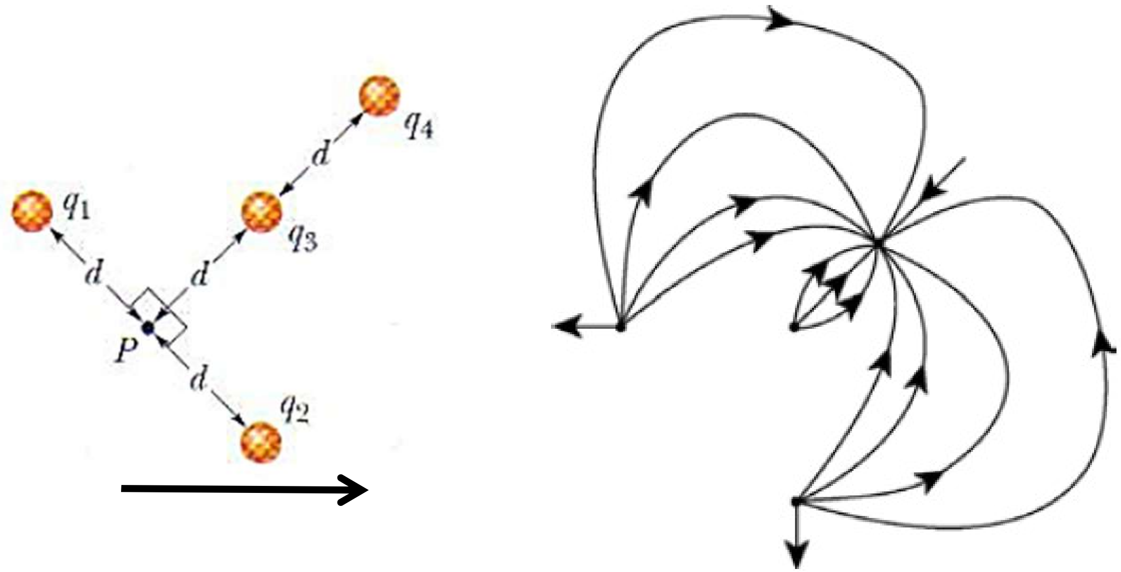
Lembrando que:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

O campo elétrico no ponto P terá somente componente **na direção y**. Então, considerando apenas o efeito das cargas q_3 e q_4:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{|q_4|}{(2d)^2} - \frac{q_3}{d^2}\right)\hat{j} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{12q}{4d^2} - \frac{3q}{d^2}\right)\hat{j}$$

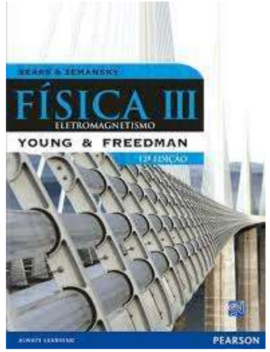
Ou seja, o campo elétrico é nulo no ponto P.



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{|q_4|}{(2d)^2} - \frac{q_3}{d^2}\right)\hat{\jmath} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{12q}{4d^2} - \frac{3q}{d^2}\right)\hat{\jmath}$$

Ou seja, o campo elétrico é nulo no ponto P.

CAMPO DE DUAS PLACAS INFINITAS CARREGADAS COM CARGAS OPOSTAS Duas placas paralelas infinitas possuem uma distância d entre elas (Figura 21.27). O plano da placa inferior possui uma densidade superficial de carga σ uniforme e positiva, e o plano superior possui uma densidade superficial de carga negativa $-\sigma$ com mesmo módulo. Determine o campo elétrico entre as duas placas, acima do plano inferior e abaixo do plano superior.



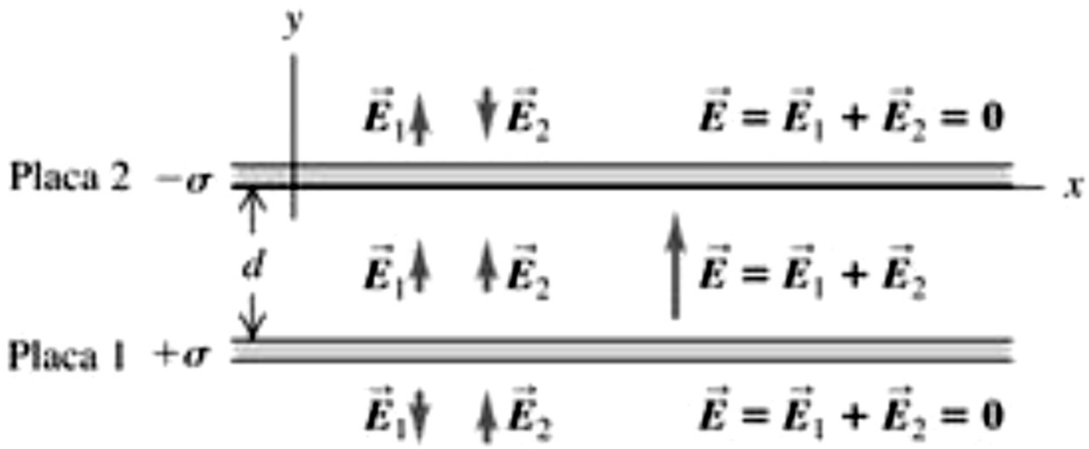


Figura 21.27 Cálculo do campo elétrico produzido por duas placas infinitas carregadas com cargas opostas. A figura mostra um corte ortogonal das placas; somente uma região das placas infinitas pode ser mostrada!

EXECUTAR: suponha que o plano 1 seja o plano inferior com cargas positivas e o plano 2 seja o plano superior contendo cargas negativas; os campos produzidos por esses planos são, respectivamente, $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$. De acordo com a Equação (21.12) do Exemplo 21.12, $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ possuem o mesmo módulo nos dois lados de cada plano, independentemente da distância entre o ponto e qualquer plano:

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Para qualquer ponto, a direção de $\vec{E}_1$ é sempre perpendicular ao plano e seu sentido aponta para fora da carga positiva do plano 1; a direção de $\vec{E}_2$ é sempre perpendicular ao plano e seu sentido aponta para dentro da carga negativa do plano 2.

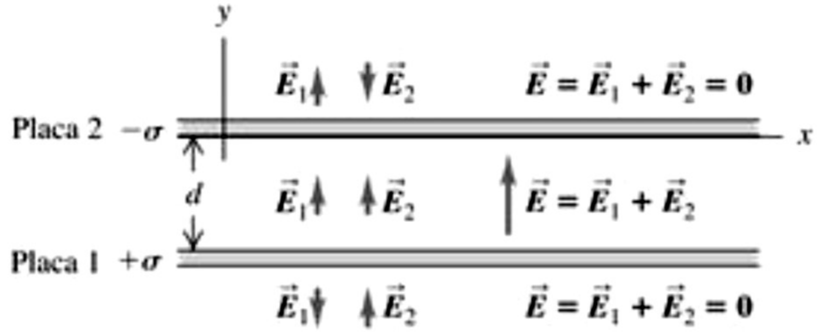
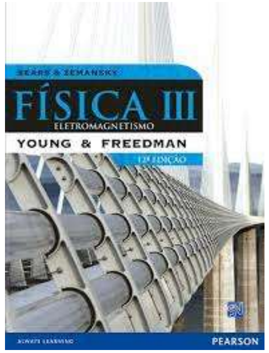


Figura 21.27 Cálculo do campo elétrico produzido por duas placas infinitas carregadas com cargas opostas. A figura mostra um corte ortogonal das placas; somente uma região das placas infinitas pode ser mostrada!

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{Acima da placa superior} \\ \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{j} & \text{Entre as placas} \\ \mathbf{0} & \text{Abaixo da placa inferior} \end{cases}$$

Como estamos supondo planos infinitos, nosso resultado não depende da distância d entre as placas.

FORÇA E TORQUE SOBRE UM DIPOLO ELÉTRICO A Figura 21.33a indica um dipolo elétrico no interior de um campo elétrico uniforme com módulo igual a $5{,}0 \times 10^5$ N/C orientado paralelamente ao plano da figura. As cargas são $\pm 1{,}6 \times 10^{-19}$ C e ambas as cargas estão sobre o plano da figura, sendo que a distância entre elas é igual a 0,125 nm = $0{,}125 \times 10^{-9}$ m. (Ambos os valores precedentes são típicos de dimensões moleculares.) Calcule (a) a força resultante exercida pelo campo elétrico sobre o dipolo; (b) o módulo, a direção e o sentido do momento de dipolo elétrico; (c) o módulo, a direção e o sentido do torque; (d) a energia potencial do sistema na posição indicada.



$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$p = qd$$

$$\tau = pE \operatorname{sen} \phi$$

$$U = -pE \cos \phi$$

(a)

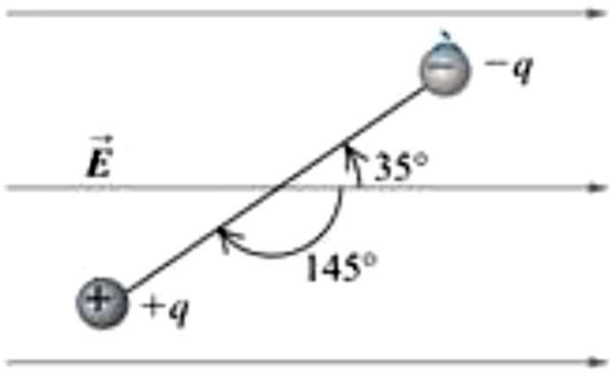


Figura 21.33 (a) Um dipolo elétrico. (b) C

EXECUTAR: (a) Uma vez que o campo elétrico é uniforme, as forças que atuam sobre as cargas são iguais e opostas e a força resultante é igual a zero.

(b) O módulo p do momento de dipolo elétrico $\vec{p}$ é dado por

$$p = qd = (1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})\,(0{,}125 \times 10^{-9}\ \mathrm{m})$$
$$= 2{,}0 \times 10^{-29}\ \mathrm{C \cdot m}$$

O sentido de $\vec{p}$ vai da carga negativa para a carga positiva, formando um ângulo de 145° no sentido dos ponteiros do relógio com o sentido do vetor do campo elétrico (Figura 21.33b).

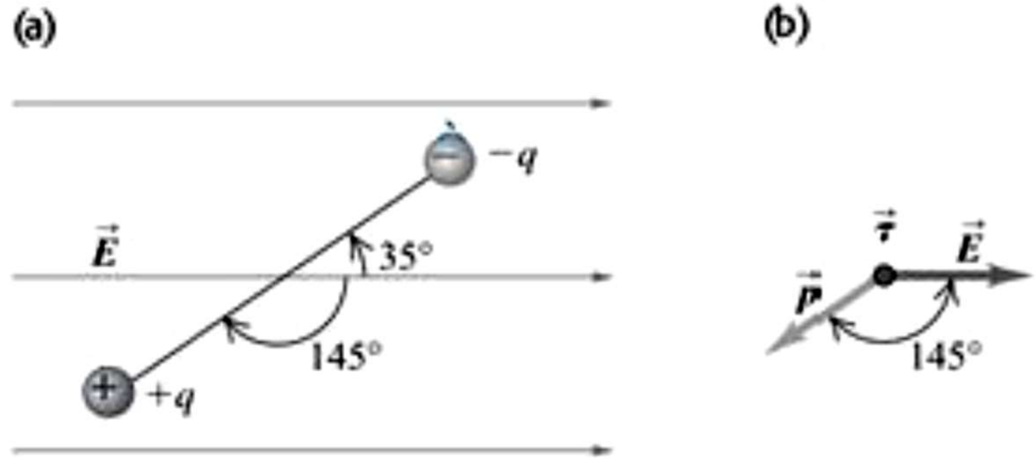


Figura 21.33 (a) Um dipolo elétrico. (b) Direções e sentidos do torque, campo elétrico e do momento de dipolo elétrico.

(c) O módulo do torque é

$$\tau = pE \operatorname{sen} \phi = (2{,}0 \times 10^{-29}\ \mathrm{C})\ (5{,}0 \times 10^{5}\ \mathrm{N/C})\ (\operatorname{sen} 145°)$$

$$= 5{,}7 \times 10^{-24}\ \mathrm{N \cdot m}$$

Usando a regra da mão direita para o produto vetorial (veja a Seção 1.10), vemos que o torque $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{p}} \times \vec{\boldsymbol{E}}$ sai perpendicularmente do plano da página. Isso corresponde a uma rotação no sentido anti-horário, que tende a fazer $\vec{\boldsymbol{p}}$ se alinhar a $\vec{\boldsymbol{E}}$.

(d) A energia potencial é dada por

$$U = -pE \cos \phi$$

$$= -(2{,}0 \times 10^{-29}\ \mathrm{C \cdot m})\ (5{,}0 \times 10^{5}\ \mathrm{N/C})\ (\cos 145°)$$

$$= 8{,}2 \times 10^{-24}\ \mathrm{J}$$

AVALIAR: o momento de dipolo, o torque e a energia potencial são excessivamente pequenos. Não se surpreenda com esse resultado: lembre-se de que estamos analisando uma única molécula, que é realmente um objeto muito pequeno!