MOVIMENTOS EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES.

Posição e Deslocamento

A localização de uma partícula (ou de um objeto que se comporte como uma partícula) pode ser especificada, de forma geral, através do **vetor posição** $\vec{r}$, um vetor que liga um ponto de referência (em geral a origem de um sistema de coordenadas) à partícula.

$$\vec{r} = x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}} + z\hat{\mathrm{k}},$$

Exemplo:

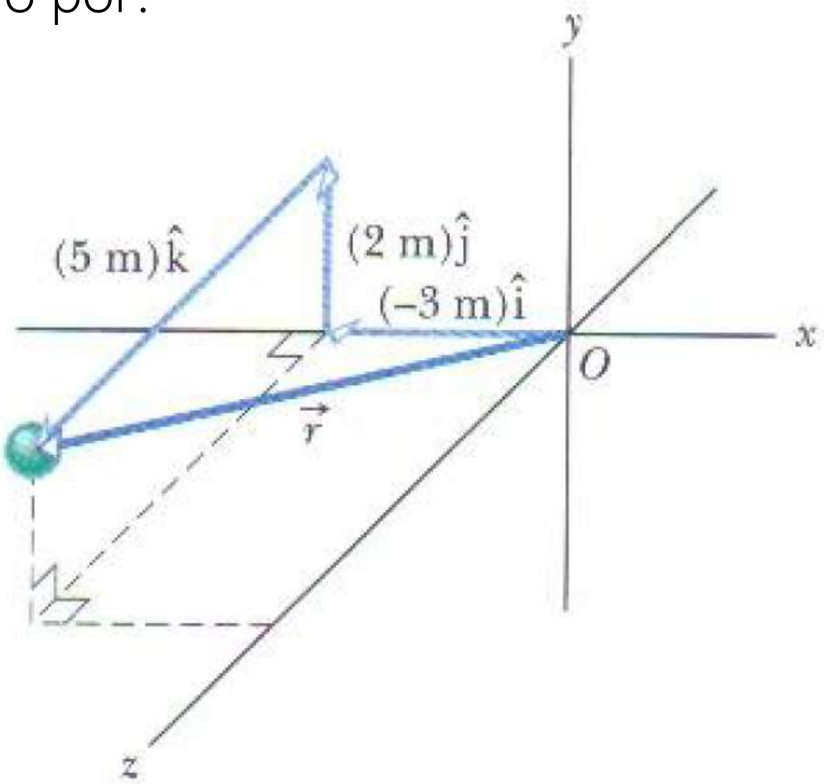
Inicialmente, o vetor posição de uma partícula é dado por:

$$\mathbf{r}_1 = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

e logo depois é

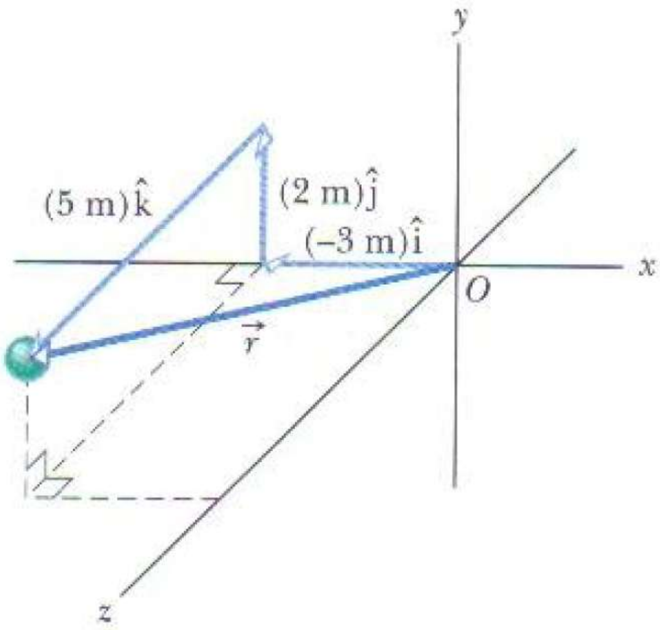
$$\mathbf{r}_2 = 9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

Qual é o deslocamento de $\mathbf{r}_1$ para $\mathbf{r}_2$?



$\mathbf{r}_1 = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

$\mathbf{r}_2 = 9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$



deslocamento

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$

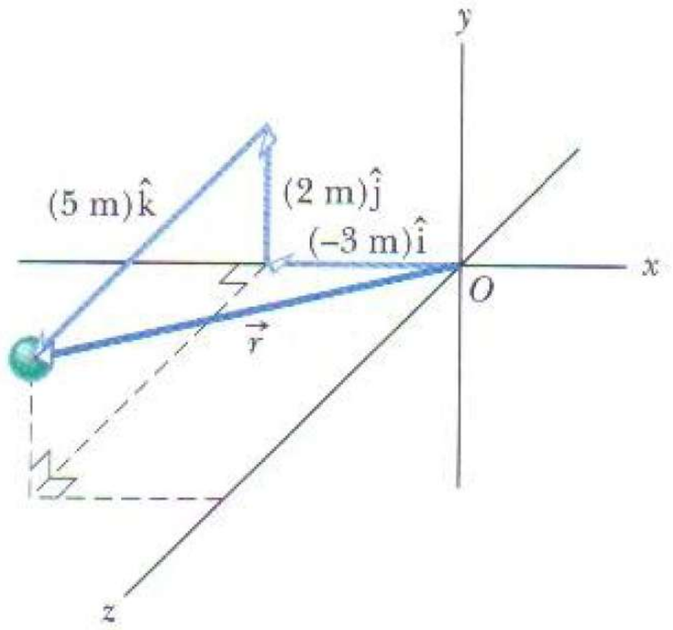
$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k},$$

$$\Delta\mathbf{r} = (9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) - (-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$$
$$= 12\mathbf{i} + 3\mathbf{k}.$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}.$$

$$\mathbf{r}_1 = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2 = 9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$



deslocamento

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

$$\Delta\mathbf{r} = (9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) - (-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$$
$$= 12\mathbf{i} + 3\mathbf{k}.$$

→ O vetor deslocamento é paralelo ao plano xz porque sua componente em y é nula.

4-3 | Velocidade Média e Velocidade Instantânea

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{intervalo de tempo}},$$

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta x\hat{\mathrm{i}} + \Delta y\hat{\mathrm{j}} + \Delta z\hat{\mathrm{k}}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\,\hat{\mathrm{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\,\hat{\mathrm{j}} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\,\hat{\mathrm{k}}.$$

4-3 | Velocidade Média e Velocidade Instantânea

Exemplo

Considerando o vetor anterior: $\Delta\mathbf{r} = 12\mathbf{i} + 3\mathbf{k}.$

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta x\hat{\mathrm{i}} + \Delta y\hat{\mathrm{j}} + \Delta z\hat{\mathrm{k}}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\mathrm{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\mathrm{j}} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{\mathrm{k}}.$$

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(12\text{ m})\hat{\mathrm{i}} + (3{,}0\text{ m})\hat{\mathrm{k}}}{2{,}0\text{ s}} = (6{,}0\text{ m/s})\hat{\mathrm{i}} + (1{,}5\text{ m/s})\hat{\mathrm{k}}.$$

Quando falamos da **velocidade** de uma partícula em geral estamos nos referindo à **velocidade instantânea** $\vec{v}$ em algum instante. Esta velocidade $\vec{v}$ é o valor para o qual tende a velocidade $\vec{v}_{\text{méd}}$ quando o intervalo de tempo Δt tende a zero. Usando a linguagem do cálculo, podemos escrever $\vec{v}$ como a derivada

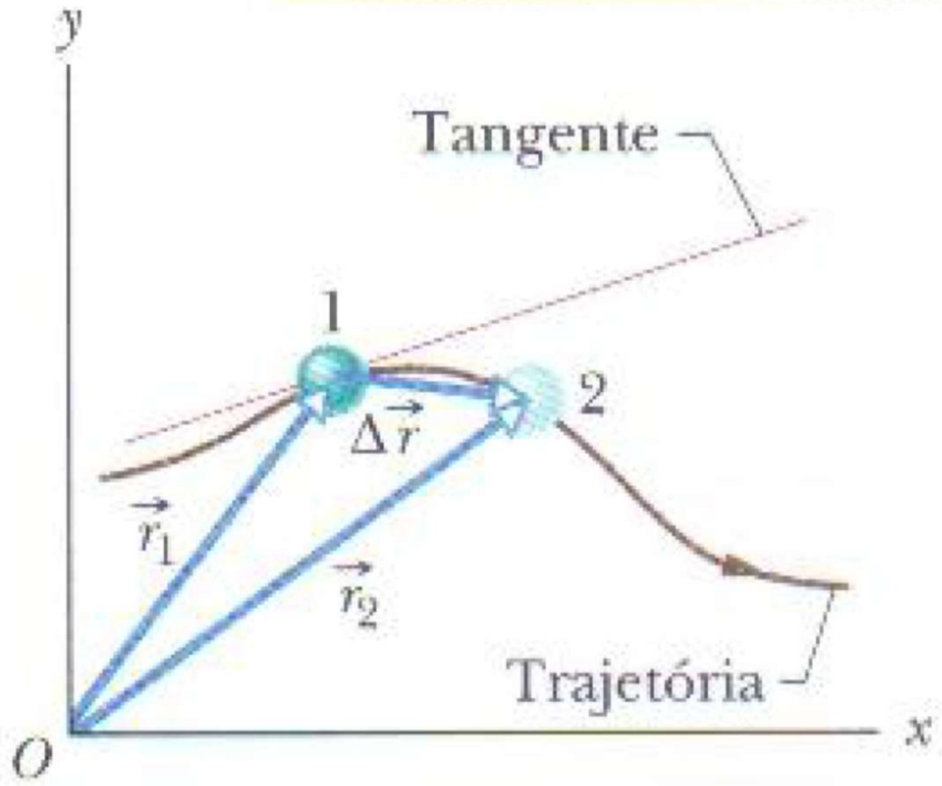
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}} + z\hat{\mathrm{k}}) = \frac{dx}{dt}\hat{\mathrm{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathrm{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathrm{k}}.$$

$$\vec{v} = v_x\hat{\mathrm{i}} + v_y\hat{\mathrm{j}} + v_z\hat{\mathrm{k}},$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad \text{e} \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

A direção da velocidade instantânea $\vec{v}$ de uma partícula é sempre tangente à trajetória da partícula na posição da partícula.



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Quando o intervalo Δt tender a zero:

- O vetor r_2 se move em direção a r_1 fazendo com que Δr tenda a zero .
- A direção Δr (logo, a direção de v) se aproxima da direção da tangente.
- A velocidade média tende à velocidade instantânea

4-4 Aceleração e Aceleração Média

Quando a velocidade de uma partícula varia, sua aceleração média é dada por:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}.$$

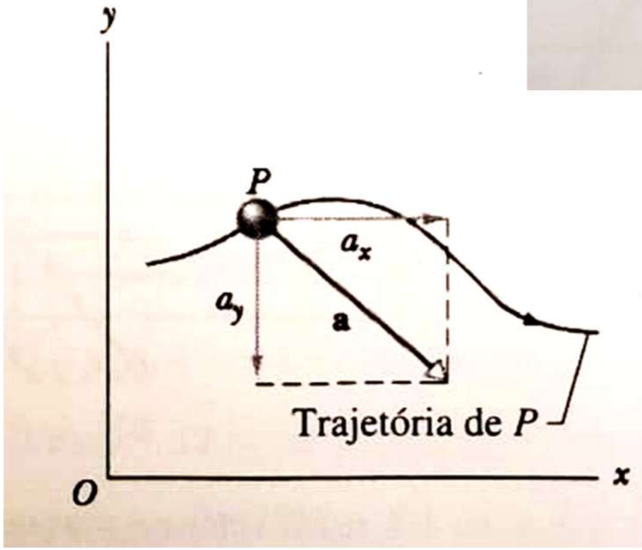
A aceleração instantânea é o limite da aceleração média quando Δt tender a zero:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Se a velocidade varia em módulo e/ou direção, existe uma aceleração. Logo:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k})$$
$$= \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k}$$



Representação gráfica da aceleração da partícula e suas componentes escalares.

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k})$$

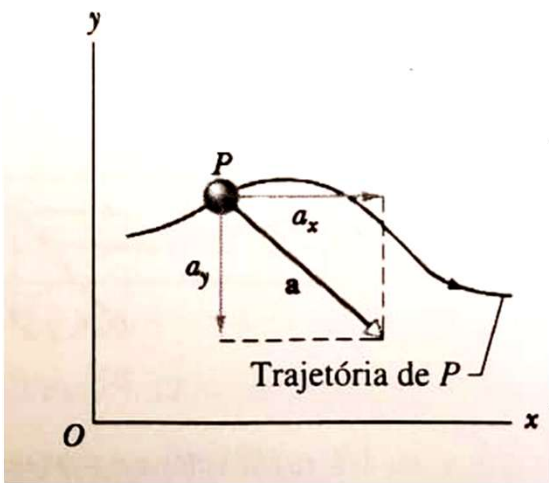
$$= \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k}$$

Pode ser escrita como:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},$$

Onde as componentes escalares do vetor aceleração são:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \text{e} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$



Representação gráfica da aceleração da partícula e suas componentes escalares.

Exemplo:

Uma lebre atravessa correndo um estacionamento de veículos onde, por estranho que possa parecer, um par de eixos cartesianos foi desenhado. A trajetória percorrida pela lebre é tal que as componentes do seu vetor posição com relação à origem das coordenadas das funções do tempo são dadas por:

$$x = -0{,}3\,t^2 + 7{,}2\,t + 28 \quad e \quad y = 0{,}22\,t^2 - 9{,}1\,t + 30$$

A) *Calcule o vetor posição da lebre (módulo e direção) em t = 15s.*

B) *Calcule a posição da lebre em t= 0,5 s; 10s; 20s e 25s.*

C) *Calcule o módulo e a direção do vetor velocidade em t = 15s.*

$$x = -0{,}3\,t^2 + 7{,}2\,t + 28 \quad e \quad y = 0{,}22\,t^2 - 9{,}1\,t + 30$$

A) Calcule o vetor posição da lebre (módulo e direção) em t = 15s.

$$x = (-0{,}31)(15)^2 + (7{,}2)(15) + 28 = 66\ \text{m}$$

$$y = (0{,}22)(15)^2 - (9{,}1)(15) + 30 = -57\ \text{m}.$$

O vetor **r** e suas componentes são mostrados na Fig. 4-7*a*.

O módulo de **r** é dado por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66\ \text{m})^2 + (-57\ \text{m})^2}$$
$$= 87\ \text{m}.$$

O ângulo θ que **r** faz com o semi-eixo positivo x é

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{-57\ \text{m}}{66\ \text{m}}\right) = -41°.$$

$$x = -0{,}3\, t^2 + 7{,}2\, t + 28 \quad e \quad y = 0{,}22\, t^2 - 9{,}1\, t + 30$$

B) Calcule a posição da lebre em t= 0,5 s; 10s; 20s e 25s.

Fazendo os mesmo cálculos realizados em "(A)", considerando os respectivos tempos, temos:

t (s)	x (m)	y (m)	r (m)	θ
0	28	30	41	+47°
5	56	−10	57	−10°
10	69	−39	79	−29°
15	66	−57	87	−41°
20	48	−64	80	−53°
25	14	−60	62	−77°

$$x = -0{,}3\,t^2 + 7{,}2\,t + 28 \quad e \quad y = 0{,}22\,t^2 - 9{,}1\,t + 30$$

C) Calcule o módulo e a direção do vetor velocidade em t = 15s.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28) = -0{,}62t + 7{,}2$$

Em $t = 15$ s, obtemos

$$v_x = (-0{,}62)(15) + 7{,}2 = -2{,}1 \text{ m/s}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30) = 0{,}44t - 9{,}1.$$

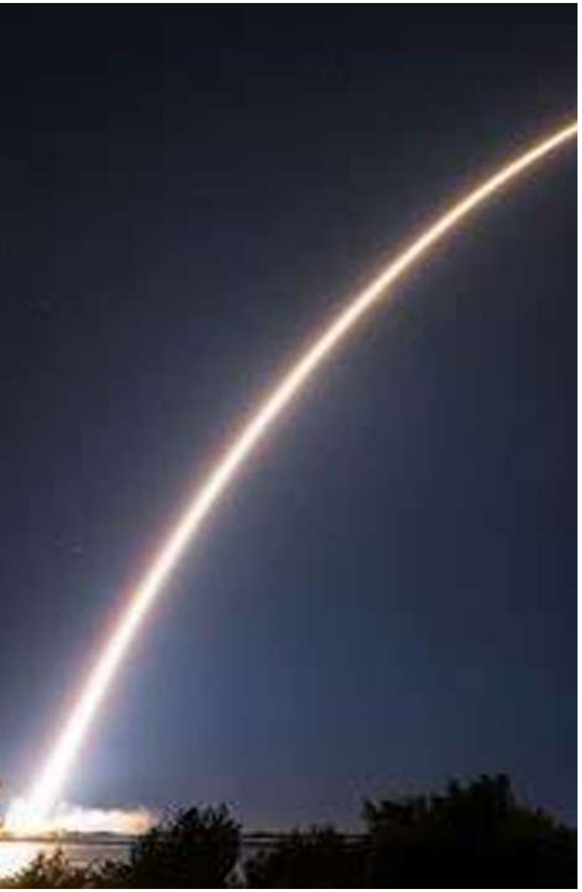
Em $t = 15$ s, obtemos

$$v_y = (0{,}44)(15) - 9{,}1 = -2{,}5 \text{ m/s}$$

O módulo e a direção de **v** são dados por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2{,}1 \text{ m/s})^2 + (-2{,}5 \text{ m/s})^2}$$
$$= 3{,}3 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}5 \text{ m/s}}{-2{,}1 \text{ m/s}}\right)$$
$$= \tan^{-1} 1{,}19 = -130°.$$



OBRIGADA

Profª. Dra. Talissa Rodrigues

talissa.trodrigues@gmail.com

QUE A FÍSICA ESTEJA COM VOCÊS!