补充习题 1.1. 说明如果远期合约价格不等于 $S_0 - KB(T)$，则存在套利。这里 S_0 为标的资产初始价格，K 为敲定价格，T 为到期时间，B(T)为到期时间为 T 的单位面值零息券价格。

设远期合约价格为 S

远期合约可用以下组合复制：

买入一份标的资产，同时借 $KB(T)$ 元.

1° $S > S_0 - KB(T)$ 说明远期合约被高估.

做多一份标的资产，卖出一份远期合约，

组合初始价值为 $S_0 - S$

到期时，标的资产为 S_T，远期合约为 $S_T - K$

此时组合价值为 $S_T - (S_T - K) = K$，贴现为 $KB(T)$

无风险收益为

$$KB(T) - (S_0 - S) = S - S_0 + KB(T) > 0 \quad \text{套利!}$$

2° $S < S_0 - KB(T)$ 说明远期合约被低估.

做多一份合约，做空一份标的，组合初始价值为 $S - S_0$

到期时，标的价格 S_T，合约价格 $(S_T - K)$，组合价值为

$$(S_T - K) - S_T = -K \text{，贴现为 } -KB(T)$$

$$-KB(T) - (S - S_0) = S_0 - S - KB(T) > 0 \quad \text{套利!}$$

补充习题 1.2. 设 S 为标的资产即期价格，$X_1 < X_2$ 为敲定价格，τ 为距离现在到期时间长度。证明: 欧式看跌期权价格 $p(S,\tau;X_1) \le p(S,\tau;X_2)$ 。

根据敲定价格 X_1, X_2 分别将期权记为 P_1, P_2

若 $p(S,\tau;X_2) < p(S,\tau;X_1)$

做多一份 P_2，做空一份 P_1，

初始时刻得到现金 $p(S,\tau;X_1) - p(S,\tau;X_2) > 0$

在到期时刻 T，看跌期权价格分别为 $(X_1 - S_T)^+$，$(X_2 - S_T)^+$

组合价值为

$$(X_2 - S_T)^+ - (X_1 - S_T)^+ + [p(S,\tau;X_1) - p(S,\tau;X_2)]e^{r\tau} > 0$$

存在套利机会，与无套利假设矛盾

补充习题 1.3. 令 S 标的资产即期价格，X 为敲定价格，τ 为距离现在到期时间长度，$B(\tau)$ 为单位零息券价格。假设标的资产在到期时刻前不分红，证明：欧式看跌期权价格

$$p(S,\tau;X) \geq \max\{XB(\tau)-S,0\}.$$

假设 $p(S,\tau;X) < \max\{XB(\tau)-S,0\}$

1° 若 $XB(\tau)-S<0$，则 $p(S,\tau;X)<0$，与非负性矛盾

2° 若 $XB(\tau)-S\geq 0$，则 $p(S,\tau;X) < XB(\tau)-S$

可改写为 $p(S,\tau;X)+S < XB(\tau)$

做多一份标的和一份欧式看跌期权

借钱 $p(S,\tau;X)+S$ 来买入资产

到期时组合价值为 $S_T+\max\{X-S_T,0\} = \max\{X,S_T\} \geq X$

贴现收益为

$$\max\{X,S_T\}\cdot B(\tau) - [p(S,\tau;X)+S] \geq XB(\tau) - [p(S,\tau;X)+S] > 0$$

有套利机会，与无套利假设矛盾

补充习题 1.4. 设 S 为标的资产即期价格，$X_1 < X_2$ 为敲定价格，τ 为距离现在到期时间长度。证明：美式看跌期权价格

$$P(S,\tau;X_1) \le P(S,\tau;X_2)\,.$$

进一步说明如果上式不成立，则可以构造怎样的套利交易策略？

若 $P(S,\tau;X_1) > P(S,\tau;X_2)$

做空敲定价格为 X_1 的期权① 做多敲定价格为 X_2 的期权②

初始时刻得到现金 $P(S,\tau;X_1) - P(S,\tau;X_2) > 0$

假如期权①的多头方选择在 t 时刻执行，

作为②的多头方也在 t 时刻执行

此时组合价值为

$$\left[(X_2 - S_t)^+ - (X_1 - S_t)^+\right] + \left[P(S,\tau;X_1) - P(S,\tau;X_2)\right]e^{rt} > 0$$

存在套利机会，与无套利假设矛盾