第0章 概率论知识准备

1 事件、概率

1.1 事件域

1. 设$\Omega=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_n$，记$\Pi_\Omega:=\{\Lambda_n\}_{n\geq 1}$为一划分，令

$$\sigma(\Pi_\Omega):=\left\{\sum_{k\in J}\Lambda_k \mid J\subset\mathbb{N}\right\}.\ (J\text{可取}\emptyset)$$

证明：(1) $\sigma(\Pi_\Omega)$为Ω上的σ代数；

(2*)（不用交） $\sigma(\Pi_\Omega)$为包含集类Π_Ω的最小σ代数.

(1) σ代数$\mathcal{F}$需满足

① $\Omega\in\mathcal{F}$

② 若$A\in\mathcal{F}$，则$A^c\in\mathcal{F}$

③ 若$A_n\in\mathcal{F}, n\geq 1$ 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}$

对于$\sigma(\Pi_\Omega)$，取$J=\mathbb{N}^+\subseteq\mathbb{N}$

则 $\Omega=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_n=\sum_{k\in\mathbb{N}^+}\Lambda_k\in\left\{\sum_{k\in J}\Lambda_k \mid J\subseteq\mathbb{N}\right\}=\sigma(\Pi_\Omega)$，①满足

若 $\sum_{k\in J}\Lambda_k\in\sigma(\Pi_\Omega)$，$\left(\sum_{k\in J}\Lambda_k\right)^c=\left(\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus J}\Lambda_k\right)\in\sigma(\Pi_\Omega)$，$\mathbb{N}\setminus J\subset\mathbb{N}$ ②满足

对$\forall$集类$\{A_n\}_{n\geq 1}\subseteq\sigma(\Pi_\Omega)$，其中$A_n=\sum_{k\in J_n}\Lambda_k\in\sigma(\Pi_\Omega)$

$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k\in J_n}\Lambda_k\right)=\sum_{k\in\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n}\Lambda_k\in\sigma(\Pi_\Omega)$，$\forall J_n\in\mathbb{N}, n\geq 1\Rightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n\in\mathbb{N}$ ③满足 $\square$

2. （并改写成不交并）证明：$\cup_{n\geq 1}A_n=\sum_{n\geq 1}B_n$，其中，

$$B_1=A_1, B_2=A_2\cap A_1^c,\cdots,\ B_n=A_n\cap(\cap_{k=1}^{n-1}A_k^c),\cdots.$$

① 先证 $\bigcup_{n\geq 1}A_n\subseteq\sum_{n\geq 1}B_n$

假设 $x\in\bigcup_{n\geq 1}A_n$，

若 $x\in A_1$，则 $x\in B_1$

若 $x\in A_2$ 且 $x\notin A_1$，则 $x\in B_2$

⋮

若 $x\in A_n$ 且 $x\notin A_1, x\notin A_2\cdots x\notin A_{n-1}$，则 $x\in B_n$

$\forall x\in\bigcup_{n\geq 1}A_n$，都有 $x\in\bigcup_{n\geq 1}B_n$

$\because B_i\cap B_j=\phi, i\neq j$ $\therefore\bigcup_{n\geq 1}B_n=\sum_{n\geq 1}B_n$，$x\in\sum_{n\geq 1}B_n$

② 再证 $\sum_{n\geq 1}B_n\subseteq\bigcup_{n\geq 1}A_n$

假设 $x\in\sum_{n\geq 1}B_n$，则$\exists n_0\in\mathbb{N}^+$, s.t. $x\in B_{n_0}$

由B的定义

$B_{n_0}=A_{n_0}\cap\left(\bigcap_{k=1}^{n_0-1}A_k^c\right)$

$\therefore x\in A_{n_0}\subseteq\bigcup_{n\geq 1}A_n$

$\therefore\bigcup_{n\geq 1}A_n=\sum_{n\geq 1}B_n$ $\square$.

1.2 概率测度

3. （概率测度的连续性）设$\mathscr{F} \ni B_n \downarrow B = \cap_{n\geq 1} B_n$，证明$\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

$B_n \downarrow B \Rightarrow \forall n,\ B_{n+1} \subseteq B_n \Rightarrow \forall n,\ B_n^c \subseteq B_{n+1}^c$

$$
\begin{aligned}
P(B) = P\Big(\bigcap_{n\geq 1} B_n\Big) &= 1 - P\Big(\Big(\bigcap_{n\geq 1} B_n\Big)^c\Big) \\
&= 1 - P\Big(\bigcup_{n\geq 1} B_n^c\Big) \\
&= 1 - P\Big(B_1^c \cup \Big(\bigcup_{n\geq 2} (B_n^c \setminus B_{n-1}^c)\Big)\Big) \\
&= 1 - P(B_1^c) - \sum_{n\geq 2} \big(P(B_n^c) - P(B_{n-1}^c)\big) \\
&= 1 - P(B_1^c) - \lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} \big(P(B_n^c) - P(B_{n-1}^c)\big) \\
&= 1 - P(B_1^c) - \lim_{m\to\infty} \big(P(B_m^c) - P(B_1^c)\big) \\
&= 1 - P(B_1^c) - \lim_{n\to\infty} P(B_n^c) + P(B_1^c) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} P(B_n^c) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(B_n) \quad \square.
\end{aligned}
$$