自融资交易策略

如果无风险利率存在，则无风险对冲组合的收益率为 r

如果无风险利率不存在，则无风险对冲组合复制了 K 份单位零息券，故 $-f+S_0=KB(T)$

即 $f=S_0-KB(T)$.

若要求远期合约的初始价值为0，那么远期合约的敲定价格应设为多少？即

$$S_0 - Ke^{-rT} = 0 \quad 或 \quad S_0 - K B(T) = 0$$

得 $K = S_0 e^{rT}$ 或 $K = S_0 / B(T)$.

此称为远期价格.

远期价格是使得远期合约初始价格为0的敲定价格，记为F，即

$$F = S_0 e^{rT} \quad 或 \quad F = S_0/B(T)$$

上述讨论是以0时刻作为现在时刻，如果现在时刻为t（$t<T$），则远期合约的现在价格为 $S_t - Ke^{-r(T-t)}$ 或 $S_t - KB(T)$

其中 $\tau = T - t$.

相应地，远期价格为

$$F = S_t e^{r(T-t)} = S_t e^{r\tau}$$

或

$$F = S_t / B(\tau)$$

若记即期价格为 S，即 $S = S_t$，则

$$F = S e^{r\tau} \quad \text{或} \quad F = S / B(\tau).$$

也可以直接推导远期价格

推导过程：设远期价格为F，构造资产组合：

Fe^{-rT} 元现金，1份远期合约

则其初始价值为 Fe^{-rT}，现金存入银行，

则该资产组合的到期价值为 S_T，复制了一个份

标的资产，故其初始价值为标的资产的初始价值。

即 $Fe^{-rT} = S$

所以 $F = Se^{rT}$

欧式看涨期权的到期收益为

$$\max\{S_T - X, 0\} = (S_T - X)^+$$

欧式看跌期权的到期收益为

$$\max\{X - S_T, 0\} = (X - S_T)^+$$

设 $c(S, \tau; X)$，$C(S, \tau; X)$ 分别表示欧式和美式看涨期权.

$p(S, \tau; X)$，$P(S, \tau; X)$ 分别表示欧式和美式看跌期权.

其中 S 为标的资产即期价格，τ 为距离到期日的时间，X 为敲定价格.

期权价格的合理边界

1. $C \geq 0$, $P \geq 0$, $c \geq 0$, $p \geq 0$

2. $$C(S, T; X) \geq \underline{\max\{S - X, 0\}}$$

内在价值

$$P(S, T; X) \geq \max\{X - S, 0\}$$

3. $c(S, \tau; X) \geq c(S, \tau; X).$

$p(S, \tau; X) \geq p(S, \tau; X)$

4. $\tau_2 > \tau_1$:

$c(S, \tau_2; X) \geq c(S, \tau_1; X)$

$p(S, \tau_2; X) \geq p(S, \tau_1; X)$

5. 设 $X_1 < X_2$，则

$$c(S,\tau;X_2) \leq c(S,\tau;X_1)$$

$$C(S,\tau;X_2) \leq C(S,\tau;X_1)$$

$$p(S,\tau;X_2) \geq p(S,\tau;X_1)$$

$$P(S,\tau;X_2) \geq P(S,\tau;X_1)$$

欧式看涨：

$$(S_T - X_2)^+ \leq (S_T - X_1)^+$$

美式看涨：　$\forall\, t \leq T$

$$(S_t - X_2)^+ \leq (S_t - X_1)^+$$

6. 设 $S_2 > S_1$，

$$c(S_2, \tau; X) > c(S_1, \tau; X).$$

$$C(S_2, \tau; X) > C(S_1, \tau; X)$$

$$p(S_2, \tau; X) < p(S_1, \tau; X)$$

$$P(S_2, \tau; X) < P(S_1, \tau; X)$$

该结论不能仅由无套利性推出.

7. $S = C(S, \infty; 0) \geq C(S, \tau; X) \geq c(S, \tau; X)$

$\Rightarrow C(0, \tau; X) = c(0, \tau; X) = 0$

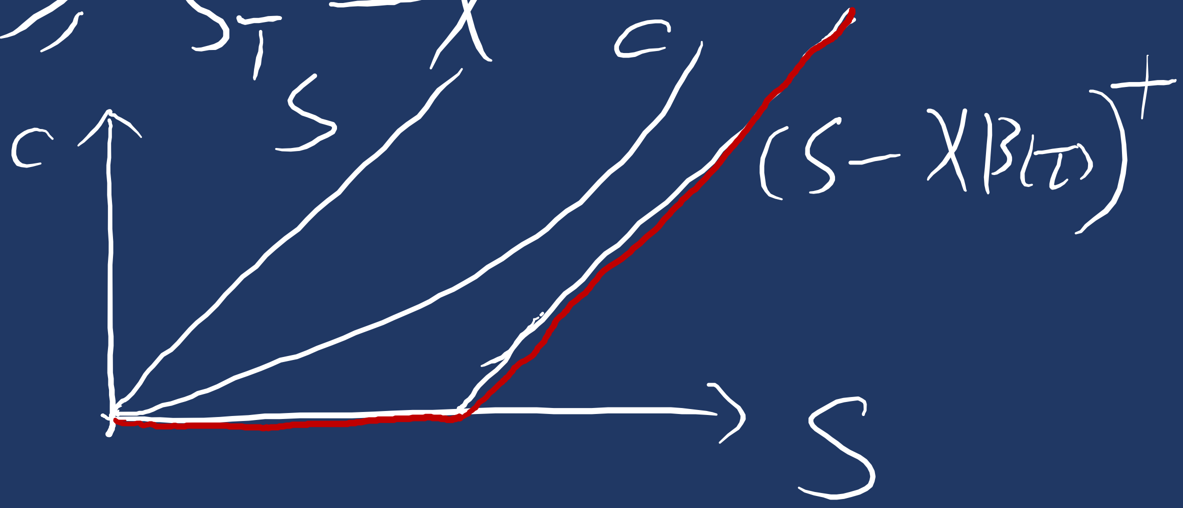
$X \geq P(S, \tau; X) \geq p(S, \tau; X)$

8. 假设标的资产不分红，则

$$S \geq c(S, T; X) \geq \max\{S - XB(T), 0\}$$

证明思路：

$$S_T \geq (S_T - X)^+ \geq S_T - X$$



$\Longrightarrow$ 不分红美式看涨期权不应提前实施，

其价格与欧式看涨期权相同.

因为如果 $t \le T$ 时刻实施，其内在价值为

$$(S_t - X)^+ \le (S_t - XB(\tau))^+ \le c(S_t, \tau; X).$$

期权在 t 时刻的价格

$\tau > 0$，$B(\tau) \le 1$

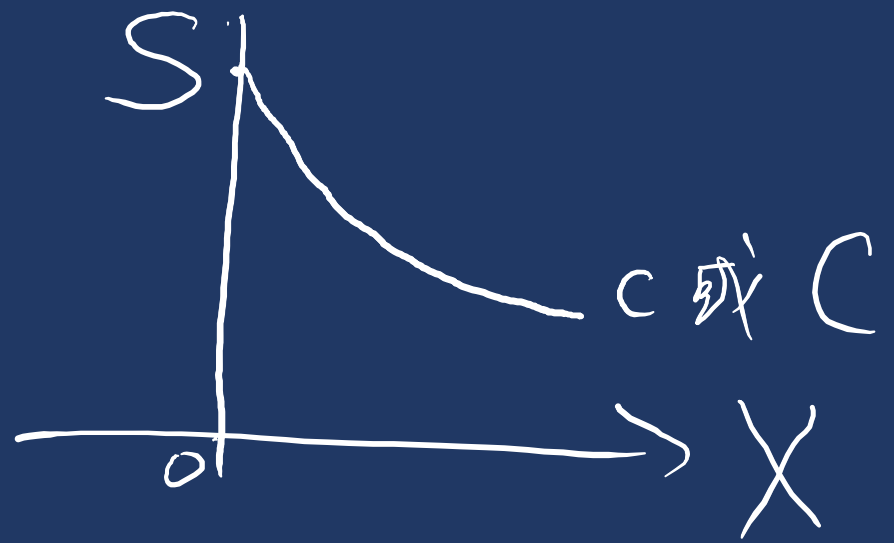
$$\Longrightarrow \quad C(S, \tau; X) \le c(S, \tau; X)$$

$$\Longrightarrow \quad C(S, \tau; X) = c(S, \tau; X)$$

9. 设 $0 \le \lambda \le 1$，$X_2 = \lambda X_3 + (1-\lambda) X_1$，则

① $c(S, \tau; X_2) \le \lambda c(S, \tau; X_3) + (1-\lambda) c(S, \tau; X_1)$

② $C(S, \tau; X_2) \le \lambda C(S, \tau; X_3) + (1-\lambda) C(S, \tau; X_1)$.



下例：构造如下两个资产组合.

1、1份敲定价格为X_2的欧式看涨期权.

2、λ份 —— X_3 ——

$(1-\lambda)$份 —— X_1 ——

资产组合1的到期价值为.

$$V_1 = (S_T - X_2)^+$$

资产组合2的到期价值为 $V_2 = \lambda(S_T - X_3)^+ + (1-\lambda)(S_T - X_1)^+$

而 $V_1 = \left(\underline{\lambda(S_T - X_3)} + \underline{(1-\lambda)(S_T - X_1)}\right)^+$

$\leq \lambda(S_T - X_3)^+ + (1-\lambda)(S_T - X_1)^+ = V_2.$

$(\because (x_1 + x_2)^+ \leq x_1^+ + x_2^+)$

故由无套利性，资产组合1的初始价值不超过资产组合2的初始价值.

即(1)式得证.

$\forall\ 0 \le \lambda \le 1$，$X_2 = \lambda X_3 + (1-\lambda) X_1$

$$C(S, \tau; X_2) \le \lambda C(S, \tau; X_3) + (1-\lambda) C(S, \tau; X_1) \quad ②$$

证明：构造

资产组合1：1份敲定价格为 X_2 的美式看涨期权

资产组合2：λ份 ———— X_3 ————

$(1-\lambda)$份 ———— X_1 ————

则资产组合1在任意时刻 u（$t \le u \le T$）的内在价值为

$$V_1(u) = (S_u - X_2)^+$$

资产组合2在任意u时刻的内在价值为

$$V_2(u)=\lambda(S_u-X_3)^+ + (1-\lambda)(S_u-X_1)^+$$

而

$$V_1(u)=\left(\lambda(S_u-X_3)+(1-\lambda)(S_u-X_1)\right)^+$$
$$\leq \lambda(S_u-X_3)^+ + (1-\lambda)(S_u-X_1)^+$$
$$= V_2(u)$$

故由无套利性可知资产组合1的初始价值不超过资产组合2的初始价值，即②式成立。