金融数学

教授：林建希

笔记由 Dafu Zhu 编写

基于 2025 春季厦大数院研究生《金融数学》

最后修改：2025/04/07

目录

1 随机分析

1.1 单时段证券模型

某股票现价为 100 美元，在一年后股价可以是 90 美元或 120 美元，概率并未给定，即期利率（实际利率）是 5%。一年之后到期执行价为 105 美元的股票期权的公平价格是多少？

1.1.1 构造无风险对冲组合方法

若期权的价格为 V，股票的价格为 S，构造如下的资产组合：持有 a 股期权和 b 股股票，若 $a<0$ 或 $b<0$ 表示空头。则 $t=0$ 时资产组合的价值

$$\Pi_0 = aV + bS$$

这里 a, b 是未知的。当 $t=1$ 时：

$$\Pi_1 = \begin{cases} (120-105)a + 105b & S_1 = 120 \\ a \cdot 0 + 90b & S_1 = 90 \end{cases}$$

让 Π_1 不取决于股价涨跌

$$(120-105)a + 105b = a \cdot 0 + 90b$$

解得

$$a = -2b$$

令 $b=1$，则 $a=-2$

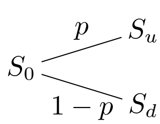
$$\Pi_0 = -2V + 1 \times 100$$

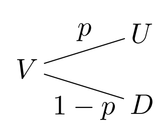
$$\Pi_1 = -2 \times (120-105) + 1 \times 120 = -2 \times 0 + 1 \times 90$$

由于组合 Π 是无风险的，根据无套利原理，其收益率应等于即期利率 5%，因此 $1.05\Pi_0 = \Pi_1$，即

$$1.05(100-2V) = 90$$

解得 $V = 7.14286$





左图为股价二叉树，右图为衍生产品价格二叉树

Definition 1 (无风险对冲组合)
构造资产组合：1 份衍生产品多头和 α 份股票空头。资产组合的初始价值为：

$$\Pi_0 = V - \alpha S_0$$

选择 α，使得资产组合的价值与股票的最终价值无关，称该组合为无风险对冲组合

$$\Pi_1 = \begin{cases} \Pi_1^u = U - \alpha S_u & \text{股价上升} \\ \Pi_1^d = D - \alpha S_d & \text{股价下降} \end{cases}$$

$$U - \alpha S_u = D - \alpha S_d$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{U - D}{S_u - S_d} = \frac{\Delta V}{\Delta S}$$

资产组合的初始价值：$V - \alpha S_0$
资产组合的最终价值：$U - \alpha S_u$
若无风险利率为 r（该时间段实际利率），则

$$V - \alpha S_0 = \frac{U - \alpha S_u}{1 + r}$$

于是得到衍生产品的定价公式

$$V = \alpha S_0 + \frac{U - \alpha S_u}{1 + r}$$

1.1.2 资产组合复制方法

Definition 2 (复制)
构造资产组合：包含 a 单位的股票和 b 单位的现金，无风险资产利率为 r，则在 $t = 0$ 时：

$$V_0 = aS_0 + b$$

若在 $\forall t, \forall \omega \in \Omega$ 下，该组合价值都与衍生品 C 价值相同，则称该资产组合为衍生品 C 的一个复制

在 $t = 1$ 时

$$V_1 = \begin{cases} V_1^u = aS_u + b(1 + r) \\ V_1^d = aS_d + b(1 + r) \end{cases}$$

令

$$\begin{cases} aS_u + b(1 + r) = U \\ aS_d + b(1 + r) = D \end{cases}$$

于是资产组合的价值和衍生证券的价值一致，该资产组合复制了衍生证券 V。
解得

$$a = \frac{U - D}{S_u - S_d}$$
$$b = (U - \frac{U - D}{S_u - S_d} S_u)/(1 + r)$$

$$\begin{aligned} V_0 &= aS_0 + b \\ &= \frac{U - D}{S_u - S_d} S_0 + (U - \frac{U - D}{S_u - S_d} S_u)/(1 + r) \end{aligned}$$

将 U 和 D 分开得

$$\begin{aligned}V_0 &= \left(\frac{S_0}{S_u-S_d}+\frac{1}{1+r}-\frac{S_u}{S_u-S_d}\cdot\frac{1}{1+r}\right)U-\left(-\frac{S_0}{S_u-S_d}+\frac{S_u}{S_u-S_d}\cdot\frac{1}{1+r}\right)D \\ &= \frac{1}{1+r}\left(\frac{(1+r)S_0}{S_u-S_d}-\frac{S_d}{S_u-S_d}\right)U+\frac{1}{1+r}\left(\frac{S_u}{S_u-S_d}-\frac{(1+r)S_0}{S_u-S_d}\right)D \\ &= \frac{1}{1+r}[qU+(1-q)D]\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}q &= \frac{(1+r)S_0}{S_u-S_d}-\frac{S_d}{S_u-S_d} \\ 1-q &= \frac{S_u}{S_u-S_d}-\frac{(1+r)S_0}{S_u-S_d}\end{aligned}$$

q 的意义是什么？
由无套利性可知

$$0<q<1$$

由 q 的表达式可知

$$S_0=\frac{1}{1+r}[qS_u+(1-q)S_d]$$

若令股票上涨、下跌的概率分别为 $q,1-q$，记此概率测度为 $\mathbb{Q}$，则

$$S_0=\frac{1}{1+r}\mathbb{E}_Q(S_1)$$

其中 S_1 为股票在 $t=1$ 时刻的价值
进一步

$$V=\frac{1}{1+r}\mathbb{E}_Q(V_1)=\mathbb{E}_Q\left[\frac{V_1}{1+r}\right]$$

其中 V_1 为期权在 $t=1$ 时刻的价值
问题：若证券种类更多，市场状态也更多的情况下，上述结论是否成立？

1.1.3 多个市场状态下投资组合定价

M 种风险资产价格过程 $S_1(t),S_2(t),\cdots,S_M(t),t=0,1$。在 $t=1$ 时刻有 K 种可能的市场状态 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_K\}$
在 $t=1$ 时刻风险资产的可能值表示为一个非负 $K\times M$ 矩阵，被称为 Payoff Matrix

$$S(1;\Omega)=\begin{pmatrix}S_1(1;\omega_1) & S_2(1;\omega_1) & \cdots & S_M(1;\omega_1)\\ S_1(1;\omega_2) & S_2(1;\omega_2) & \cdots & S_M(1;\omega_2)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ S_1(1;\omega_K) & S_2(1;\omega_K) & \cdots & S_M(1;\omega_K)\end{pmatrix}$$

每个列向量表示每个资产在所有市场状态下的价格，记为

$$S_m(t) = (S_m(t;\omega_i))_{i=1:K} = \begin{pmatrix} S_m(t;\omega_1) \\ S_m(t;\omega_2) \\ \vdots \\ S_m(t;\omega_K) \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 1 \tag{1.1}$$

当 $t=0$ 时，资产 m 的价值是确定的，因此 $S_m(0)$ 不是一个向量而是一个数值
用列向量的形式表示 $S(1;\Omega)$ 矩阵

$$S(1;\Omega) = (S_1(1)|\cdots|S_M(1)) = \mathrm{col}(S_m(1))_{m=1:K} \tag{1.2}$$

考虑无风险证券 $S_0(t), t=0,1$

$$S_0(0) = S_0(0;\omega) = 1$$
$$S_0(1) = S_0(1;\omega) = 1+r, \quad \forall\omega\in\Omega$$

结合(1.1)，风险资产贴现价格过程

$$S_m^*(t) = \frac{S_m(t)}{S_0(t)} = \begin{pmatrix} S_m(t;\omega_1)/S_0(t) \\ S_m(t;\omega_2)/S_0(t) \\ \vdots \\ S_m(t;\omega_K)/S_0(t) \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 0, \quad m = 1,2,\cdots,M \tag{1.3}$$

其中 $S_m(t)$ 为 $K\times 1$ 的列向量，$S_0(t)$ 是一个由 t 决定的数值，因此 $S_m^*(t)$ 也为 $K\times 1$ 的列向量
写成矩阵形式

$$S^*(1;\Omega) = \begin{pmatrix} S_1^*(1;\omega_1) & S_2^*(1;\omega_1) & \cdots & S_M^*(1;\omega_1) \\ S_1^*(1;\omega_2) & S_2^*(1;\omega_2) & \cdots & S_M^*(1;\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_1^*(1;\omega_K) & S_2^*(1;\omega_K) & \cdots & S_M^*(1;\omega_K) \end{pmatrix}$$

即

$$S^*(1;\Omega) = (S_1^*(1)|\cdots|S_M^*(1)) = \mathrm{col}(S_m^*(1))_{m=1:K} \tag{1.4}$$

所有资产在 $t=1$ 时刻的价格矩阵被称为扩展形式的 Payoff Matrix，如下所示

$$\hat{S}(1;\Omega) = \begin{pmatrix} 1+r & S_1(1;\omega_1) & S_2(1;\omega_1) & \cdots & S_M(1;\omega_1) \\ 1+r & S_1(1;\omega_2) & S_2(1;\omega_2) & \cdots & S_M(1;\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1+r & S_1(1;\omega_K) & S_2(1;\omega_K) & \cdots & S_M(1;\omega_K) \end{pmatrix}$$

第一列是无风险资产在 $t=1$ 时刻的价值，是一个 $K\times 1$ 的列向量。一般形式为

$$S_0(t) = (S_0(t;\omega_i))_{i=1:K} \tag{1.5}$$

结合(1.1)，则

$$\hat{S}(1;\Omega) = \mathrm{col}(S_m(1))_{m=0:M} \tag{1.6}$$

所有资产在 $t=0$ 时刻的价格向量为

$$\hat{S}(0) = (1, S_1(0), S_2(0), \cdots, S_M(0))^T \tag{1.7}$$

所有资产在 $t=1$ 时刻的贴现价格矩阵为

$$\hat{S}^*(1;\Omega) = \begin{pmatrix} 1 & S_1^*(1;\omega_1) & S_2^*(1;\omega_1) & \cdots & S_M^*(1;\omega_1) \\ 1 & S_1^*(1;\omega_2) & S_2^*(1;\omega_2) & \cdots & S_M^*(1;\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & S_1^*(1;\omega_K) & S_2^*(1;\omega_K) & \cdots & S_M^*(1;\omega_K) \end{pmatrix}$$

即

$$\hat{S}^*(1;\Omega) = (S_0^*(1)|S_1^*(1)|\cdots|S_M^*(1)) = \mathrm{col}(S_m^*(1))_{m=0:M} \tag{1.8}$$

其中 $S_m^*(t)$ 为 $K\times 1$ 的列向量(1.3)，并且 $S_0^*(t) = (1,\cdots,1)^T$.
所有资产在 $t=0$ 时刻的贴现价格向量为

$$\hat{S}^*(0) = (1, S_1^*(0), S_2^*(0), \cdots, S_M^*(0))^T \tag{1.9}$$

故 $\hat{S}^*(0) = \hat{S}(0)$

1.1.4 套利机会

在 $t=0$ 时刻的交易策略为 $\{h_m, m=0,1,\cdots,M\}$，其中 h_m 为第 m 个资产的持有份额。记所有资产权重向量为 $\hat{h} = (h_i)_{i=0:M}$ 此投资组合价值过程为

$$V_t = h_0 S_0(t) + \sum_{m=1}^{M} h_m S_m(t) \tag{1.10}$$

其中 $S_m(t), S_0(t)$ 均为 $K\times 1$ 的价格向量，见(1.1), (1.5)。因此 V_t 也为 $K\times 1$ 的向量。
将(1.10)写成矩阵形式，即

$$V_t = \hat{S}(1;\Omega)\hat{h} \tag{1.11}$$

其中 $\hat{S}(1;\Omega)$ 为扩展形式的 Payoff Matrix(1.6)。Elementwise 的表示(1.10)在计算中更常用,但矩阵形式(1.11)能更好的帮助我们理解。
投资组合收益

$$G \triangleq V_1 - V_0 = h_0 r \cdot \mathbf{1}_K + \sum_{m=1}^{M} h_m \cdot \Delta S_m \tag{1.12}$$

其中 $\mathbf{1}_K$ 为长度为 K 的全 1 列向量，且

$$\Delta S_m \triangleq S_m(1) - S_m(0) = \begin{pmatrix} S_m(1;\omega_1) - S_m(0) \\ S_m(1;\omega_2) - S_m(0) \\ \vdots \\ S_m(1;\omega_K) - S_m(0) \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

投资组合贴现价值过程

$$V_t^* \triangleq h_0 \cdot \mathbf{1}_K + \sum_{m=1}^{M} h_m S_m^*(t) \tag{1.14}$$

其中 $\mathbf{1}_K$ 为长度为 K 的全 1 列向量，$S_m^*(t)$ 为 $K \times 1$ 的列向量(1.3)。将(1.14)写成矩阵形式，即

$$V_t^* = \hat{S}^*(1;\Omega)\hat{h} \tag{1.15}$$

其中 $\hat{S}^*(1;\Omega)$ 为扩展形式的贴现 Payoff Matrix(1.8).

投资组合贴现收益为

$$G^* \triangleq V_1^* - V_0^* = \sum_{m=1}^{M} h_m \cdot \Delta S_m^* \tag{1.16}$$

其中

$$\Delta S_m^* \triangleq S_m^*(1) - S_m^*(0) = \begin{pmatrix} S_m^*(1;\omega_1) - S_m^*(0) \\ S_m^*(1;\omega_2) - S_m^*(0) \\ \vdots \\ S_m^*(1;\omega_K) - S_m^*(0) \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

可以将每个风险资产的 ΔS_m^* 合并写成矩阵形式

$$\Delta S^* = (\Delta S_1^* | \cdots | \Delta S_M^*) = \mathrm{col}(\Delta S_m^*)_{m=1:M} \in \mathbb{R}^{K \times M} \tag{1.18}$$

Definition 3 (套利机会)

某个交易策略被称为套利机会，如果

1. $V_0^* = 0$
2. $V_1^*(\omega) \geqslant 0, \forall \omega \in \Omega$ 且 $\mathbb{E}(V_1^*) > 0$

其中 $\mathbb{E}$ 为在实际概率测度 $\mathbb{P}$ 下的期望

注：(2) 等价于 $V_1^*(\omega) \geqslant 0, \forall \omega \in \Omega$ 且 $\mathbb{P}(V_1^* > 0) > 0$

不妨设 $\mathbb{P}(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$，则 (2) 又等价于 $V_1^*(\omega) \geqslant 0, \forall \omega \in \Omega$ 且不等号对于某个 $\omega \in \Omega$ 严格成立

Lemma 1 (套利机会等价条件)

存在套利机会

$\Leftrightarrow$ 存在交易策略 $\hat{h} = (h_0, h_1, \cdots, h_m)^T$，使得 $\hat{S}^*(0)\hat{h} = 0, \hat{S}^*(1;\Omega)\hat{h} \geqslant 0$ 且不等号对某个 $\omega \in \Omega$ 严格成立。其中 $\hat{S}^*(0), \hat{S}^*(1;\Omega)$ 分别为(1.9), (1.8).

$\Leftrightarrow$ 存在交易策略 $\{h_m, m = 0, 1, \cdots, M\}$，使得 $G^*(\omega) \geqslant 0, \forall \omega \in \Omega$ 且不等号对某个 $\omega \in \Omega$ 严格成立。其中 G^* 为(1.16).

$\Leftrightarrow$ 存在交易策略 $h = (h_1, \cdots, h_m)^T$ 使得 $(\Delta S^*)h \geqslant 0$ 且在上述向量不等式中，不等号至少对某个元素严格成立。其中 ΔS^* 为 (1.18).

证明：

1.1.5 风险中性测度

Definition 4 (风险中性概率测度)
Ω 上的概率测度 $\mathbb{Q}$ 被称为风险中性概率测度，如果

1. $\mathbb{Q}(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$
2. $\mathbb{E}_Q[\Delta S_m^*] = 0, \forall m = 1, 2, \cdots, M$，即

$$S_m^*(0) = \mathbb{E}_Q[S_m^*(1)]$$

其中 $\mathbb{E}_Q$ 表示在测度 $\mathbb{Q}$ 下的期望

记风险中性测度 $\Pi = (\mathbb{Q}(\omega_1), \mathbb{Q}(\omega_2), \cdots, \mathbb{Q}(\omega_K))$，则上述条件 (2) 的等价条件为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[\Delta S_m^*] = 0 &\Leftrightarrow \Pi \cdot (\Delta S_m^*) = 0, \forall m = 1, 2, \cdots, M \\
&\Leftrightarrow \Pi \cdot (\Delta S^*) = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{对任意交易策略} V_0^* = \mathbb{E}_Q(V_1^*), \text{亦即} \mathbb{E}_Q(G^*) = 0
\end{aligned}$$

其中 $\Delta S_m^*, \Delta S^*$ 分别为 (1.17), (1.18)。分析如下：

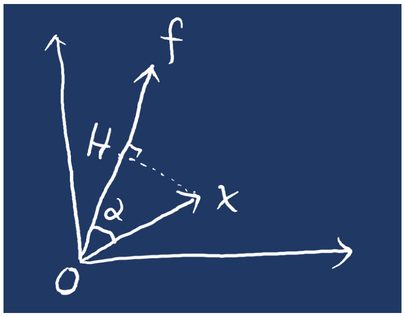
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[\Delta S_m^*] = 0 &\Leftrightarrow \Pi \cdot [S^*(1; \Omega)] = S^*(0), \sum_{i=1}^{K} \mathbb{Q}(\omega_i) = 1, \mathbb{Q}(\omega_i) \geqslant 0, \forall i = 1, \cdots, K \\
&\Leftrightarrow \Pi \cdot [\hat{S}^*(1; \Omega)] = \hat{S}^*(0), \mathbb{Q}(\omega_i) \geqslant 0, \forall i = 1, \cdots, K \\
&\Leftrightarrow \Pi \cdot (\Delta S^*) = 0, \sum_{i=1}^{K} \mathbb{Q}(\omega_i) = 1, \mathbb{Q}(\omega_i) \geqslant 0, \forall i = 1, \cdots, K
\end{aligned}$$

应用：对任意投资组合 V，其由 $M+1$ 种资产构成，权重为 $(h_0, h_1, \cdots, h_M)$。在 $t = 1$ 时刻有 K 种可能的市场状态，对应各种资产的贴现价值表示为 $\hat{S}^*(1; \Omega) =$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q(V_1^*) = \sum_{i=1}^{K} V_1^*(\omega_i)\mathbb{Q}(\omega_i) &= \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=0}^{M} h_j \cdot S_j^*(1; \omega_i) \cdot \mathbb{Q}(\omega_i) \\
&= \sum_{j=0}^{M}\sum_{i=1}^{K} h_j \cdot S_j^*(1; \omega_i) \cdot \mathbb{Q}(\omega_i) \\
&= \sum_{j=0}^{M} h_j \underbrace{\sum_{i=1}^{K} S_j^*(1; \omega_i) \cdot \mathbb{Q}(\omega_i)}_{\text{第} j \text{种资产的贴现价值期望}} \\
&= \sum_{j=0}^{M} h_j \cdot \mathbb{E}_Q(S_j^*(1)) \\
&= \sum_{j=0}^{M} h_j \cdot S_j^*(0) \quad [\text{风险中性定义}(4)] \\
&= \sum_{j=0}^{M} h_j \cdot S_j(0) = V_0 = V^*(0)
\end{aligned}$$

1.1.6 凸集分离定理

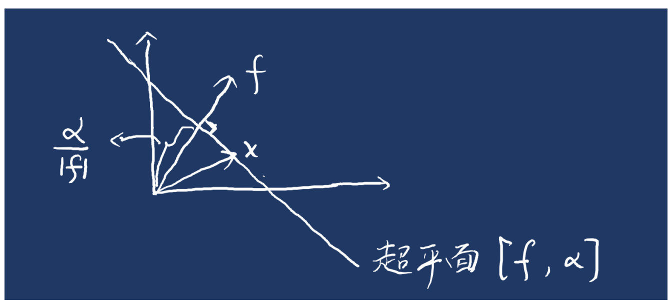
向量投影：$f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)\in\mathbb{R}^n, x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
向量 x 在 f 上的投影：（夹角为 α）



$$|f|\cdot|x|\cdot\cos\alpha=\sum_{i=1}^{n}f_ix_i\triangleq f\cdot x$$

显然 $f\cdot x=|f|\cdot|OH|$，若 $|f|=1$，则 $f\cdot x=|OH|$
固定 $\alpha\in\mathbb{R}$，下列点集是一个超平面

$$\{x|f\cdot x=\alpha\}\triangleq[f,\alpha]$$



Definition 5 (凸集)
点集 $C\subseteq\mathbb{R}^n$ 称为凸集，如果 $\forall x,y\in C$

$$\lambda x+(1-\lambda)y\in C,\quad \forall\lambda\in[0,1]$$

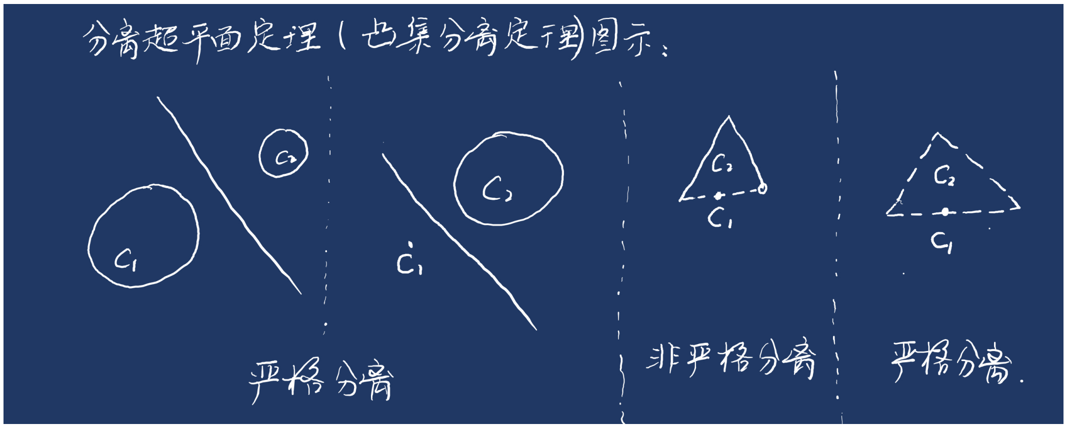
Definition 6 (凸集严格分离)
称凸集 A,B 能被超平面 $[f,\alpha]$ 严格分离，如果

$$\forall x\in A, f\cdot x\leqslant\alpha\quad 且\quad \forall y\in B, f\cdot y>\alpha$$

或

$$\forall x\in A, f\cdot x<\alpha\quad 且\quad \forall y\in B, f\cdot y\geqslant\alpha$$

总之，$f\cdot y>f\cdot x, \forall x\in A, y\in B$



Definition 7 (点集的线性支撑集)

点集 C 的线性支撑集为

$$C^l = \{\lambda x + (1-\lambda)y | \forall x, y \in C, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Definition 8 (代数开集)

点集 C 称为是代数开集，如果 C 为 C^l 内的开子集（即 C 为 C^l 内的相对开集）

Example 1

设 $x_1, \cdots, x_K \in \mathbb{R}^K$，令

$$A = \{\sum_{i=1}^{K} \lambda_i x_i | \sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1, \lambda_1 \geqslant 0, \forall i = 1, 2, \cdots, K\}$$

$$B = \{\sum_{i=1}^{K} \lambda_i x_i | \sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1, \lambda_1 > 0, \forall i = 1, 2, \cdots, K\}$$

则 A 为闭凸集，B 为代数开凸集

Theorem 1 (凸集分离定理)

若 C 为闭凸集或代数开凸集，且 $0 \notin C$，则 $\{0\}$ 与 A 被一个超平面严格分离，即存在 f 使得

$$f \cdot x > 0, \quad \forall x \in A$$

Theorem 2

在单时段模型中，不存在套利机会当且仅当存在风险中性概率测度 $\mathbb{Q}$

证明：(1) $\Leftarrow$ 充分性

设风险中性测度 $\mathbb{Q}$ 存在，即存在概率测度行向量 $\Pi > 0$，使得 $\Pi(\Delta S^*) = 0$，故 $\forall \hat{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_m)^T$

$$\Pi[(\Delta S^*)\hat{h}] = [\Pi(\Delta S^*)]\hat{h} = 0$$

于是不存在 $\hat{h}$，使得 $(\Delta S^*)\hat{h} \geqslant 0$，且不等号对某个 ω 严格成立

(2) $\Rightarrow$ 必要性

令 $P^+ = \{\Pi | \Pi = (q_1, \cdots, q_K), \sum_{i=1}^{K} q_i = 1, q_i > 0, \forall i = 1, 2, \cdots, K\}$，定义

$$W = \{\Pi(\Delta S^*) | \Pi \in P^+\}$$

则 W 为代数开凸集

用反证法。若风险中性测度不存在，则 $0 \notin W$，于是由凸集分离定理，存在向量 $\hat{h} = (h_1, \cdots, h_m)^T$，使得

$$\Pi[(\Delta S^*)\hat{h}] = [\Pi(\Delta S^*)] \cdot \hat{h} > 0, \quad \forall \Pi \in P^+$$

故 $(\Delta S^*)\hat{h} \geqslant 0$ 且对某个 ω 不等号严格成立，因此套利交易策略存在，矛盾

1.1.7 未定权益的可达性

期权等衍生品在到期时刻的收益是样本空间 Ω 上的一个随机变量。一般地，Ω 上的任意随机变量 Y 可以视作一个未定权益。

Definition 9 (未定权益)

未定权益（Contingent Claim）指的是在未来某一时刻（通常是到期时刻）的收益依赖于某些不确定因素的金融资产或合约。这些不确定因素通常与市场中的随机变量相关，比如股票价格、利率、汇率等。

Definition 10 (可达性)

在单时段模型中，$t = 1$ 时刻的未定权益 Y 被称为是可达的，如果存在一个交易策略，使得

$$Y(\omega) = V_1(\omega), \forall \omega \in \Omega$$

也就是说，未定权益 Y 可以由该交易策略下的投资组合复制，故由无套利性，未定权益 Y 在 $t = 0$ 时刻的价格为 V_0

Theorem 3

可达未定权益 Y 在 $t = 0$ 时刻的价格应为

$$V_0 = \mathbb{E}_Q\left[\frac{Y}{1+r}\right] = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_Q(Y)$$

风险中性概率测度的计算

$$\hat{S}^*(0) = \Pi \hat{S}^*(1; \Omega)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{K} q_i = 1 \\ \Pi(\Delta S^*) = 0 \end{cases}$$

其中 $\Pi = (q_1, q_2, \cdots, q_K) > 0$

Example 2

若

$$\hat{S}^*(1;\Omega) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}^*(0) = (1,3,3)$$

则风险中性测度满足

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ 4q_1 + 3q_2 + 2q_3 = 3 \\ 3q_1 + 2q_2 + 4q_3 = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ q_1 - q_3 = 0 \\ -q_2 + q_3 = 0 \end{cases}$$

解得 $\Pi = (1/3, 1/3, 1/3)$

Example 3

设

$$\hat{S}^*(1;\Omega) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}^*(0) = (1,3)$$

则风险中性测度满足

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ 4q_1 + 3q_2 + 2q_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ q_1 - q_3 = 0 \end{cases}$$

解得 $\Pi = (\lambda, 1-2\lambda, \lambda)$，其中 $0 < \lambda < \frac{1}{2}$

未定权益 Y 可达当且仅当线性方程组 $\hat{S}^*(1;\Omega)\hat{h} = \overrightarrow{Y}^*$ 有解，其中 $Y^* = Y/(1+r)$

$$\overrightarrow{Y}^* = (Y^*(\omega_1), Y^*(\omega_2), \cdots, Y^*(\omega_K))^T$$
$$\hat{h} = (h_0, h_1, \cdots, h_M)^T$$

或者说，未定权益贴现向量 $\overrightarrow{Y}^*$ 可以由所有已知证券的贴现价格向量 $S_0^*(1), S_1^*(1), S_2^*(1), \cdots, S_M^*(1)$ 线性表出，其中 $S_m^*(1)$ 为向量(1.3)在 $t=1$ 时刻的取值。

若任意未定权益可达，则称该证券模型为完全市场。易知证券模型为完全市场的充要条件为矩阵 $\hat{S}^*(1;\Omega)$ 为行满秩的。

Example 4

在例3的模型中，贴现未定权益 $(5,4,3)^T$ 可达，而贴现未定权益 $(2,4,3)^T$ 是不可达的

由风险中性定价原理知，贴现未定权益 $(5,4,3)^T$ 在 $t=0$ 时刻的价格应为

$$5\lambda + 4(1-2\lambda) + 3\lambda = 4$$

而例2的模型为完全市场，贴现未定权益 $(2,4,3)^T$ 在 $t=0$ 时刻的价格为

$$2 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = 3$$

在例3中，

$$\hat{S}^*(1;\Omega)=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad \hat{S}^*(0)=\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{Y}^*=(5,4,3)^T$$

存在等价关系

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}(\hat{S}^*(1;\Omega);\overrightarrow{Y}^*)=\operatorname{rank}(\hat{S}^*(1;\Omega))\\ \Leftrightarrow&\overrightarrow{Y}^*\text{可由}\hat{S}^*(1;\Omega)\text{的列向量线性表示}\\ \Leftrightarrow&\text{未定权益}Y\text{可达}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因此 $\operatorname{rank}(\hat{S}^*(1;\Omega);\overrightarrow{Y}^*)=\operatorname{rank}(\hat{S}^*(1;\Omega))$，$Y$ 可达

$(\lambda,1-2\lambda,\lambda)$ 为风险中性概率

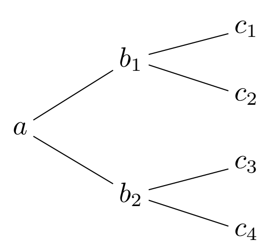
$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$3=\operatorname{rank}(\hat{S}^*(1;\Omega);\overrightarrow{Y}^*)\neq\operatorname{rank}(\hat{S}^*(1;\Omega))=2$，$Y$ 不可达

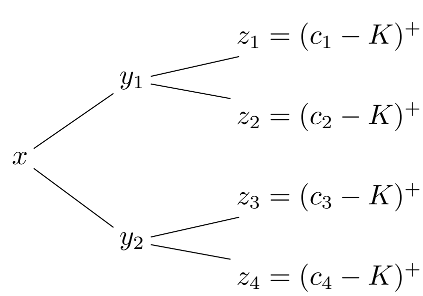
1.2 二期二叉树模型

设第 1 期和第 2 期银行存款利分别为 r_1,r_2，求到期敲定价格为 K 的欧式看涨期权的价格

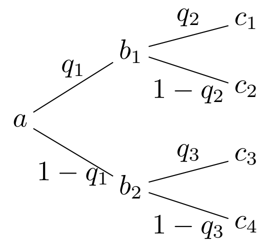
股票价格二叉树：



期权价格二叉树：



计算股票二叉树的风险中性概率，故得

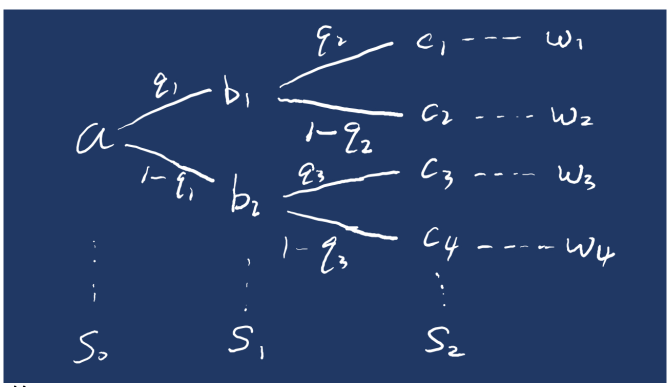


$$
\begin{aligned}
y_1 &= (1+r_2)^{-1}(q_2 z_1 + (1-q_2)z_2) \\
y_2 &= (1+r_2)^{-1}(q_3 z_3 + (1-q_3)z_4) \\
x &= (1+r_1)^{-1}(q_1 y_1 + (1-q_1)y_2)
\end{aligned}
$$

整理期权价格公式得

$$
\begin{aligned}
x &= (1+r_1)^{-1}(1+r_2)^{-1}[q_1 q_2 z_1 + q_1(1-q_2)z_2 + (1-q_1)q_3 z_3 + (1-q_1)(1-q_3)z_4] \\
&= (1+r_1)^{-1}(1+r_2)^{-1}\mathbb{E}_Q[(S_2-K)^+]
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbb{Q}(\omega_1) = q_1 q_2, \mathbb{Q}(\omega) = q_1(1-q_2), \mathbb{Q}(\omega_3) = (1-q_1)q_3, \mathbb{Q}(\omega_4) = (1-q_1)(1-q_3)$
考虑风险中性概率下的股票二叉树，设风险中性测度为 $\mathbb{Q}$



$$
\begin{aligned}
&\mathbb{Q}\{S_1 = b_1 | S_0 = a\} = q_1 \\
&\mathbb{Q}\{S_1 = b_2 | S_0 = a\} = 1-q_1 \\
&\mathbb{Q}\{S_2 = c_1 | S_0 = a, S_1 = b_1\} = q_2 \\
&\mathbb{Q}\{S_2 = c_2 | S_0 = a, S_1 = b_1\} = 1-q_2 \\
&\mathbb{Q}\{S_2 = c_3 | S_0 = a, S_1 = b_2\} = q_3 \\
&\mathbb{Q}\{S_2 = c_4 | S_0 = a, S_1 = b_2\} = 1-q_3
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Q}\{\omega_1\} &= \mathbb{Q}\{S_0 = a, S_1 = b_1, S_2 = c_1\} \\
&= \mathbb{Q}\{S_0 = a\} \cdot \mathbb{Q}\{S_1 = b_1 | S_0 = a\} \cdot \mathbb{Q}\{S_2 = c_1 | S_0 = a, S_1 = b\} \\
&= q_1 q_2
\end{aligned}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Q}\{\omega_2\} &= q_1(1-q_2) \\
\mathbb{Q}\{\omega_3\} &= (1-q_1)q_3 \\
\mathbb{Q}\{\omega_4\} &= (1-q_1)(1-q_3)
\end{aligned}
$$

在风险中性概率测度 $\mathbb{Q}$ 下，

$$\mathbb{E}[S_1|S_0=a]=(1+r_1)a$$
$$\mathbb{E}[S_2|S_0=a,S_1=b_1]=(1+r_2)b_1$$
$$\mathbb{E}[S_2|S_0=a,S_1=b_2]=(1+r_2)b_2$$

或者说

$$\mathbb{E}[S_1|S_0]=(1+r_1)S_0,\mathbb{E}[S_2|S_0,S_1]=(1+r_2)S_1$$

令 $S_2^*=(1+r_1)^{-1}(1+r_2)^{-1}S_2,S_1^*=(1+r_1)^{-1}S_1,S_0^*=S_0$，则

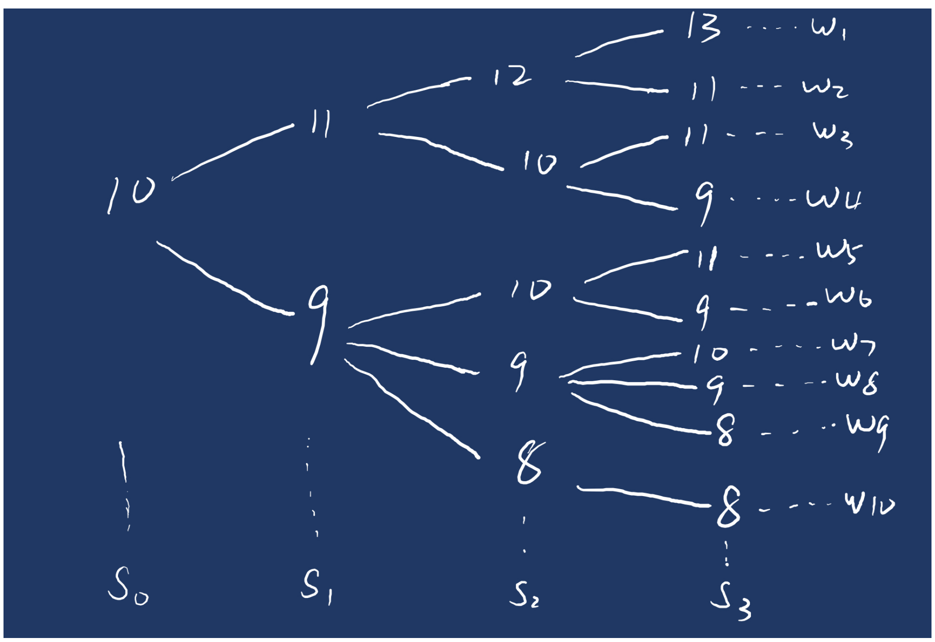
$$\mathbb{E}[S_1^*|S_0^*]=(1+r_1)^{-1}\mathbb{E}[S_1|S_0]=S_0=S_0^*$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_2^*|S_0^*,S_1^*]&=(1+r_1)^{-1}(1+r_2)^{-1}\mathbb{E}[S_2|S_0,S_1]\\&=(1+r_1)^{-1}S_1\\&=S_1^*\end{aligned}$$

换言之 $\{S_t^*,t=0,1,2\}$ 是一个 Q 鞅

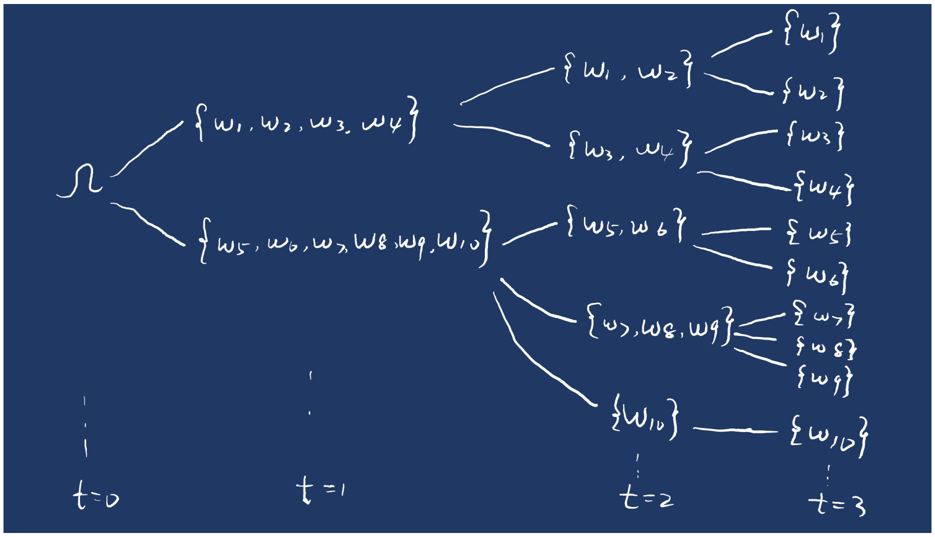
1.2.1 信息结构和域流

某风险资产的价格变化图



$$\{S_0 = 10\} = J_C = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10}\}$$
$$\{S_0 = 10, S_1 = 11\} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_4\}$$
$$\{S_0 = 10, S_1 = 9\} = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$$
$$\{S_0 = 10, S_1 = 11, S_2 = 12\} = \{\omega_1, \omega_2\}$$
$$\{S_0 = 10, S_1 = 11, S_2 = 10\} = \{\omega_3, \omega_4\}$$
$$\{S_0 = 10, S_1 = 11, S_2 = 12, S_3 = 13\} = \{\omega_1\}$$

信息树图



在各时刻所得到的信息可表示如下：

$$p_0 = \{\{\Omega\}\}$$

$$p_1 = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},\ \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}\}$$

$$p_2 = \{\{f\omega_1, \omega_2\},\ \{\omega_3, \omega_4\},\ \{\omega_5, \omega_6\},\ \{\omega_7, \omega_8, \omega_9\},\ \{\omega_{10}\}\}$$

$$p_3 = \{\{f\omega_1\},\ \{\omega_2\},\ \{\omega_3\},\ \{\omega_4\},\ \{\omega_5\},\ \{\omega_6\},\ \{\omega_7\},\ \{\omega_8\},\ \{\omega_9\},\ \{\omega_{10}\}\}$$

上述 p_0, p_1, p_2, p_3 对样本空间 Ω 的划分越来越精细，反映了随着时间的发展，所得到的信息越来越丰富

Definition 11 (σ-代数)

设 $\mathcal{F}$ 是样本空间 Ω 中的一些子集构成的集合。称 $\mathcal{F}$ 为一个 σ-代数，如果

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $B \in \mathcal{F} \Rightarrow B^c \in \mathcal{F}$
3. $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$

设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 的子集族（未必是 σ-代数），则必存在包含 $\mathcal{H}$ 的最小 σ-代数，称为由 $\mathcal{H}$ 生产的 σ-代数

Example 5

设子集族 $\mathcal{H}=\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$ 是样本空间 Ω 的一个划分，则

$$\sigma(\mathcal{H})=\{\bigcup_{j=1}^{k}B_{ij}|i_1,i_2,\cdots,i_k=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,n\}\cup\{\varnothing\}$$

回到前面的资产价格信息结构 (图??)，记

$$\mathcal{F}_i=\sigma\{p_i\},i=0,1,2,3$$

则 $\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}_2\subseteq\mathcal{F}_3$，成为一个域流

Definition 12 (域流)

设 $\mathcal{F}_t,t=0,1,\cdots,T$，均为样本空间 Ω 的 σ-代数，且 $\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}_1\subseteq\cdots\subseteq\mathcal{F}_T$，则称 $\{\mathcal{F}_t,t=0,1,\cdots,T\}$ 为样本空间 Ω 的一个域流

Definition 13 (可测性)

设 $\mathcal{F}$ 为一个 σ-代数，称任意随机变量 X 关于 $\mathcal{F}$ 可测，如果

$$\{X\leqslant x\}\in\mathcal{F},\forall x\in\mathbb{R} \tag{$*$}$$

若 X 为一个离散型 r.v.，则 $(*)$ 式等价于

$$\{X=x\}\in\mathcal{F},\forall x\in\mathbb{R}$$

可测性表明，X 的取值信息包含在 $\mathcal{F}$ 中，换句话说 $\mathcal{F}$ 的信息决定了 X 的取值

Property 1

若 $X_1,\cdots,X_n$ 均关于 $\mathcal{F}$ 可测，则 $g(X_1,\cdots,X_n)$ 也关于 $\mathcal{F}$ 可测

Property 2

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 均关于 $\mathcal{F}$ 可测，则 $g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 也关于 $\mathcal{F}$ 可测

1.2.2 随机变量的生成 σ-代数

若 σ-代数 $\mathcal{F}$ 是使得随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 可测的最小 σ-代数，即

$$\mathcal{F}=\sigma\{X_1\leqslant t_1,\cdots,X_n\leqslant t_n,\forall t_1,\cdots,t_n\in\mathbb{R}\}$$

记为

$$\mathcal{F}\triangleq\sigma(X_1,\cdots,X_n)$$

Definition 14 (适应域流)
如果对每个 $t=0,1,\cdots,T$，随机变量 $S(t)$ 都是 $\mathcal{F}_t$ 可测的，则称随机过程 $\{S(t),t=0,1,\cdots,T\}$ 适应域流 $\{\mathcal{F}_t,t=0,1,\cdots,T\}$，或称是关于 $\{\mathcal{F}_t\}$ 的适应随机过程

Definition 15 (自然域流)
若 $\mathcal{F}_t=\sigma(S(0),S(1),\cdots,S(t))$，则称 $\{\mathcal{F}_t,t=0,1,\cdots,T\}$ 为 $\{S(t)\}$ 的自然域流，它是使得 $\{S(t)\}$ 适应的最小域流

回到之前资产价格变化的例子

$$\mathcal{F}_i=\sigma\{p_i\}=\sigma(S(0),\cdots,S(i)),i=0,1,2,3$$

故 $\{\mathcal{F}_i,i=0,1,2,3\}$ 为自然域流

Definition 16 (可料)
由于利率在期初一般是已知的，因此货币市场存款过程 $S_0(t)$ 关于 $\mathcal{F}_{t-1}$ 可测 $(t=1,2,\cdots,T)$，或称 $S_0(t)$ 关于 $\{\mathcal{F}_t\}$ 是可料的，或 $\{S_0(t)\}$ 是 $\{\mathcal{F}_t\}$ 可料过程

Definition 17 (带域流的概率空间)
样本空间几乎定义在 Ω 上的一个 σ-代数 $\mathcal{F}$，构成一个可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$。若 P 为可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一个概率函数，则三元组合 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 成为一个概率空间。若 $\{\mathcal{F}_t\}$ 为一个域流，则 c 称此概率空间的带域流的概率空间。
（一般 $\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}$，$\forall t$）。

Definition 18 (等价测度)
设 P 和 P' 是定义在同一可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的两个概率测度，如果 $\forall A\in\mathcal{F}$，

$$P(A)>0 \iff P'(A)>0, \tag{$*$}$$

则称 P 和 P' 是等价测度。

若 Ω 是离散的，则 $(*)$ 式等价于 $\forall\omega\in\Omega$，

$$P(\omega)>0 \iff P'(\omega)>0.$$

Definition 19 (条件期望)
设 $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ 是一个概率空间，X 是可测空间 $(\Omega, \mathcal{G})$ 上一个随机变量，$\forall B \in \mathcal{G}$，定义

$$\mathbb{E}[X|B] = \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{I}_B)}{P(B)},$$

其中 $\mathbb{I}_B$ 为 B 的示性函数。即

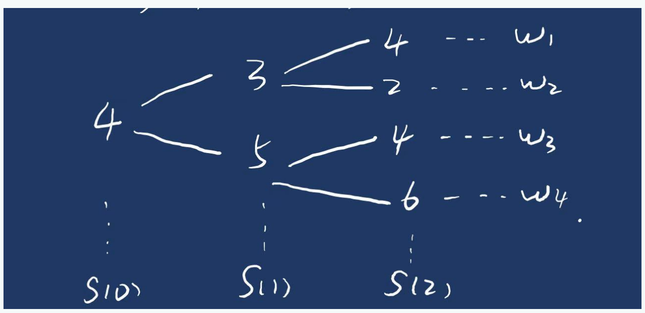
$$\mathbb{I}_B(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in B \\ 0, & \omega \notin B \end{cases}$$

设 σ-代数 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$。若 $\mathcal{F} = \sigma\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$，其中 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 Ω 的一个划分，则定义

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}](\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|B_i]\mathbb{I}_{B_i}(\omega) = \mathbb{E}[X|B_i], \quad \omega \in B_i$$

显然随机变量 $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ 关于 $\mathcal{F}$ 可测。

Example 6
设资产价格树形图为



$$p(\omega_1) = 0.2$$
$$p(\omega_2) = 0.3$$
$$p(\omega_3) = 0.35$$
$$p(\omega_4) = 0.15$$

则

$$\mathbb{E}[S(2)|S(1) = 3] = 4 \times \frac{0.2}{0.2 + 0.3} + 2 \times \frac{0.3}{0.2 + 0.3} = 2.8$$
$$\mathbb{E}[S(2)|S(1) = 5] = 4 \times \frac{0.35}{0.35 + 0.15} + 6 \times \frac{0.15}{0.35 + 0.15} = 4.6$$

令 $\mathcal{F}_1$ 表示在 $t = 1$ 时刻的得到的信息，则

$$\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \{w_1, w_2\}, \{w_3, w_4\}, \Omega\}$$

$$F_1 = \sigma(S_0, S_1) = \sigma(S_1) = \sigma\{(S_1 = 3), (S_1 = 5)\} = \sigma\{\{w_1, w_2\}, \{w_3, w_4\}\}$$

令 $B_1 = \{w_1, w_2\} = \{S(1) = 3\}$, $B_2 = \{w_3, w_4\} = \{S(1) = 5\}$，则 $\{B_1, B_2\}$ 是 Ω 的划分，且 $\mathcal{F}_1 = \sigma(B_1, B_2)$。于是

$$\mathbb{E}[S^{(2)}|\mathcal{F}_1] = 2.8\mathbb{I}_{B_1} + 4.6\mathbb{I}_{B_2}.$$

考虑条件期望如上述定义，那么若 $A \in \mathcal{F}$，则

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\mathbb{I}_A] = \mathbb{E}[X\mathbb{I}_A].$$

证明. $\mathcal{F}=\sigma(B_1,B_2,\ldots,B_n)$，$B_i, i=1,2,\ldots,n$ 为 Ω 的划分。故存在 $i_1,i_2,\cdots,i_k=0,1,2,\cdots,n$，且各不相同，使得：

$$A=\bigcup_{j=1}^{k} B_{i_j}$$

于是

$$\mathbb{I}_A=\sum_{j=1}^{k}\mathbb{I}_{B_{i_j}}.$$

进一步

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\mathbb{I}_A]=\sum_{j=1}^{k}\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\mathbb{I}_{B_{i_j}}]&=\sum_{j=1}^{k}\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|B_{i_j}]\mathbb{I}_{B_{i_j}}]\\
&=\sum_{j=1}^{k}\mathbb{E}[\frac{\mathbb{E}(X\mathbb{I}_{B_{i_j}})}{p(B_{i_j})}\mathbb{I}_{B_{i_j}}]\\
&=\sum_{j=1}^{k}\frac{\mathbb{E}(X\mathbb{I}_{B_{i_j}})}{p(B_{i_j})}\mathbb{E}[\mathbb{I}_{B_{i_j}}]\\
&=\sum_{j=1}^{k}\mathbb{E}(X\mathbb{I}_{B_{i_j}})\\
&=\mathbb{E}(X\sum_{j=1^k}\mathbb{I}_{B_{i_j}})\\
&=\mathbb{E}(X\mathbb{I}_A)
\end{aligned}$$

□

2 期权定价模型

参考文献