

随机过程

教授：吴明燕

笔记由 Dafu Zhu 编写

基于 2025 春季厦大数院《随机过程》

最后修改：2025/06/12

目录

1	概率论准备知识	4
1.1	事件概率	5
1.1.1	事件域	5
1.1.2	概率测度	6
1.2	独立性	9
1.3	条件概率与条件独立	13
1.4	期望与条件期望	15
1.4.1	离散随机变量的期望	15
1.4.2	条件期望	17
1.5	随机过程	26
1.5.1	什么是随机过程	26
1.5.2	随机过程的分布	26
1.5.3	随机过程的存在性	27
1.5.4	随机过程的基本类型	27
2	马氏链	28
2.1	离散时间马氏链	28
2.2	时齐马氏链与转移概率	32
2.3	多步转移概率与矩阵乘法	36
2.3.1	Chapman-Kolmogorov 方程	36
2.3.2	马氏链的任意有限维分布	38
2.4	(从固定点出发的) 马氏链	40
2.4.1	链的状态：常返和暂留	40
2.4.2	从数学角度：并改写成不交并	41
2.4.3	从“多步转移概率”角度判别	42
2.4.4	从“首次回访时间”角度判别	45

2.4.5	从“平均回访次数”角度判别	48
2.4.6	停时与强马氏性	50
2.5	类结构	55
2.5.1	状态 i 间的关系：可达与互通	55
2.5.2	常返与暂留是类性质	56
2.5.3	状态空间分解	58
2.6	平稳分布与特殊例子	60
2.6.1	双随机链 (Doubly Stochastic Chain)	60
2.6.2	细致平衡条件 (Detailed Balance Condition)	61
2.6.3	可逆性	62
2.6.4	求 P 的平稳分布 (若唯一)	63
2.7	极限行为与平稳分布的存在唯一性	64
2.8	首达时及其应用	67
2.8.1	击中概率 (hitting time) 与离出分布	67
2.8.2	平均首达时与离出时刻	70
2.9	具有无限状态的马氏链	73
2.9.1	广义生灭链	74
3	泊松过程	76
3.1	指数分布, 泊松分布	76
3.1.1	指数分布	76
3.1.2	泊松分布	79
3.2	泊松过程的定义	81
3.3	复合泊松过程	87
3.4	泊松过程的变换	88
3.4.1	稀释/可分解性	88
3.4.2	叠加	91
3.4.3	条件分布	92
4	更新过程	94
4.1	定义	94
4.2	极限定理	95
4.2.1	更新过程的大数定律	95
4.2.2	更新报酬过程及 LLN	96
4.2.3	交替更新过程及 LLN	97
4.2.4	使用年龄和剩余寿命	98
5	连续时间马氏链	100
5.1	定义	100
5.2	转移速率矩阵与转移概率的计算	103
5.2.1	转移概率的连续性	103
5.2.2	转移概率的可微性与 Kolmogorov 方程	104

5.2.3	轨道的跳跃性质	106
5.2.4	过程的构造	107
5.3	平稳分布与极限行为	111
5.3.1	平稳分布	111
5.3.2	极限行为	112
5.3.3	细致平衡条件 (DBC)	112
5.3.4	访问频率/渐进频率	114
6	离散鞅	115
6.1	定义	115
6.2	基本性质与例子	116
6.3	赌博策略与停时	119
6.4	鞅停时定理及其应用	121
6.4.1	应用: 离出分布	122
6.5	Doob 极大值不等式与鞅收敛定理	126
7	布朗运动	130

1 概率论准备知识

成绩：平时（作业 + 考勤）+ 期中论文 + 期末

概率论准备知识

概率论中，随机变量的本质是可测函数。

$$X : \Omega \rightarrow S$$

S 的 σ -代数记为 \mathcal{S} , 是个 Borel σ -代数（由开集/闭集生成）

Q: 为什么要给 Ω 一个 σ -代数？

A: 样本空间是抽象的，给它 σ -代数赋予它结构，相当于对信息进行重整/提取
概率测度的本质是集函数，

$$\text{集合} \rightarrow \text{函数}$$

将信息具象化，

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

$$A \rightarrow \mathbb{P}(A)$$

随机过程：一族随机变量 $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$

其中 \mathbb{T} 为指标集, $X_t : \Omega \rightarrow S$

Example 1.1

$\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$: 时间离散; $\mathbb{T} = [0, T]$: 时间连续

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (S, \mathcal{S}, \mu_X)$$

思考：什么是随机过程的分布 $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ ？

1.1 事件概率

1.1.1 事件域

Definition 1.1 (样本空间、事件)

样本点、样本空间、事件和事件的运算：

- 样本点 ω ：一次试验的结果
- 样本空间 Ω ：全体样本点
- 事件： Ω 的子集
- 事件的运算：集合的运算，即交并补 ($A \cap B, A \cup B, A^c$)

Definition 1.2

若 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 不相交, 更一般地, 若 $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$, 则称 $\{A_i\}_{i \geq 1}$ 互不相交

Definition 1.3 (σ -代数)

称 $\mathcal{F} \subset 2^\Omega = \{A | A \subset \Omega\}$ 是一个 σ -代数/事件域 (其中 2^Ω 表示所有 Ω 的子集构成的集合, 是一个集类) 若

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. (对补封闭) $A \in \mathcal{F} \rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. (对可列并封闭) $A_n \in \mathcal{F}, n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

σ 代数是满足以上特定条件的集类, 是由 Ω 的子集构成的集合

注: σ 代数对有限交/有限并/可列交封闭

现在给出了一个定义, 我们会想“为什么定义会这样给呢”, 现在要举一些例子说明“定义有意义”

Example 1.2

最小的 σ 代数: $\{\emptyset, \Omega\}$

最大的 σ 代数: 2^Ω

以上这两个例子一个太小、一个太大, 似乎没意义, 所以叫它们“平凡的”

Example 1.3

$A \subset \Omega, \sigma(\{A\}) = \sigma(A) = \{A, A^c, \Omega, \emptyset\} = \sigma(A^c)$

这是由 A 生成的 σ 代数

Definition 1.4 (划分/分割)

称 $\Pi_\Omega := \{\Lambda_n, n \geq 1\}$ 是 Ω 的一个分划, 若 $\Omega = \sum_{n \geq 1} \Lambda_n$

1. $\Omega = \bigcup_{n \geq 1} \Lambda_n$
2. $\{\Lambda_n\}_{n \geq 1}$ 互不相交

Example 1.4

$$\Omega = \sum_{n \geq 1} \Lambda_n, \Pi_\Omega := \{\Lambda_n\}_{n \geq 1}$$

$$\sigma(\Pi_\Omega) = \left\{ \sum_{k \in J} \Lambda_k, J \subset \mathbb{N} \right\}$$

Problem 1 (作业 1-1)

证明:

1. $\sigma(\Pi_\Omega)$ 是一个 σ 代数
2. $\sigma(\Pi_\Omega)$ 是包含集类 Π_Ω 的最小 σ 代数

$(S, \mathcal{S}) = (S, 2^S)$: S 可列时, 取 2^S 为 σ 代数

$(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$: S 为实数集时, 取博雷尔集 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 为 σ 代数

1.1.2 概率测度

Definition 1.5 (概率测度)

(Ω, \mathcal{F}) 称 $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ 是概率测度

1. 非负性
2. 归一性
3. 可列可加性 *

其中, 可列可加性的表述为: 设 $\{E_n, n \geq 1\}$ 是 \mathcal{F} 中互不相交的集合序列 ($E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$), 则

$$\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$$

Property 1.1

\mathbb{P} 满足有限可加性 (可列可加一定有限可加, 如果既不是可列可加、也不是有限可加, 则不可测)

Corollary 1.1

1. $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$
2. 若 $A \subset B$, 则 $\mathbb{B} = \mathbb{A} + \mathbb{P}(BA^c) \geq \mathbb{P}(A)$
3. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Remark 1. 引用知乎上[三维之外](#)的大白话解释可列可加性:

首先, 在我们总是习惯于处理有限相加, 而很少遇到无限相加的情况. 从测度论内容理解, 有限相加与事实 (数学的) 不符, 比如 $(0, 1)$ 区间有不可数个点, 每个点的测度 (理解为直径吧) 是 0, 按照习惯想法 (有限相加), 直径的加和 (总宽度) 应该为 0, 显然, $(0, 1)$ 区间的宽度不可能是 0;

如果规定为“只要是无穷多个点相加，其宽度就不再是 0”的话，还是存在矛盾，我们知道，区间 $(0,1)$ 上的有理数是无穷多个的（而且是可列的），那么其宽度就应该为 1，可是无理数还是不可数的呢——理解为无理数是有理数的无穷大量或有理数是无理数的无穷小量，那么无理数的宽度是多少呢？即使还是 1，显然 $(0,1)$ 区间的宽度不可能是 2 吧！？

于是，勒贝格说道：在测量长度、面积、体积时，我们采用可列可加性，即可列个点相加，规定其宽度（测度）为 0，如果点的个数超过了可列个（这时必是连续统的），那么，就不满足了——即这些点的总宽度就不是 0 了，而是具有了非 0 的宽度（正测度），当然，具有测度的这些点是紧挨在一起的，否则不一定有测度，比如康托大师制造的三分集就很诡异。

到这里，可列可加性事实上讲完了，再啰嗦一下次可列可加性。这是因为不论作为集合，还是概率上的事件（也是集合），一般是存在公共元素的，因此，一般情形下，当然满足次可列可加性的性质了，可列可加性只有在集合之间的距离大于 0 或事件之间完全独立的情形下，才会满足。

Property 1.2 (次可列可加性)

$$A_n \subset \mathcal{F}, n \geq 1$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$$

证明： $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \sum_{n \geq 1} B_n$ ，其中 $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \cap (A_1)^c, \dots, B_n = A_n \cap A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c$
 $B_n \subset A_n$ ，由可列可加性和 Corollary 1.1(2)

Problem 2 (作业 1-2)

证明 $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \sum_{n \geq 1} B_n$

证明：

1. 先证 $\bigcup_{n \geq 1} A_n \subseteq \sum_{n \geq 1} B_n$.

假设 $x \in \bigcup_{n \geq 1} A_n$,

若 $x \in A_1$, 则 $x \in B_1$,

若 $x \in A_2$ 且 $x \notin A_1$, 则 $x \in B_2$

...

若 $x \in A_n$ 且 $x \notin A_1, x \notin A_2, \dots, x \notin A_{n-1}$, 则 $x \in B_n$

$\forall x \in \bigcup_{n \geq 1} A_n$, 都有 $x \in \sum_{n \geq 1} B_n$

$\because B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j, \therefore \bigcup_{n \geq 1} B_n = \sum_{n \geq 1} B_n, x \in \sum_{n \geq 1} B_n$.

2. 再证 $\sum_{n \geq 1} B_n \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n$

假设 $x \in \sum_{n \geq 1} B_n$, 则 $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$, 使得 $x \in B_{n_0}$,

由 B 的定义

$$B_{n_0} = A_{n_0} \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n_0-1} A_k^c \right)$$

$$\therefore x \in A_{n_0} \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

$$\therefore \bigcup_{n \geq 1} A_n = \sum_{n \geq 1} B_n$$

□

Property 1.3 (连续性)

- (1) $A_n \uparrow$ 单调上升, 即 $A_n \subset A_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, 则 $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$
 (2) $B_n \downarrow$ 单调下降, 即 $B_n \supset B_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \bigcap_{n \geq 1} B_n$, 则 $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n)$

证明: (1) $\bigcup_{n \geq 1} A_n = A_1 + A_2 \setminus A_1 + A_3 \setminus A_2 + \dots$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) &= \mathbb{P}(A_1) + \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_{n+1} \setminus A_n) \\
 &= \mathbb{P}(A_1) + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mathbb{P}(A_{n+1} \setminus A_n) \\
 &= \mathbb{P}(A_1) + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m [\mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(A_n)] \\
 &= \mathbb{P}(A_1) + \lim_{m \rightarrow \infty} [\mathbb{P}(A_{m+1}) - \mathbb{P}(A_1)] \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_{m+1}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \quad \square
 \end{aligned}$$

(2) $B_n \downarrow B \Rightarrow \forall n, B_{n+1} \subseteq B_n \Rightarrow \forall B_n^c \subseteq B_{n+1}^c$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\bigcap_{n \geq 1} B_n) = 1 - \mathbb{P}((\bigcap_{n \geq 1} B_n)^c) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 1} B_n^c) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(B_1^c \cup (\bigcup_{n \geq 2} (B_n^c \setminus B_{n-1}^c))) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(B_1^c) - \sum_{n \geq 2} (\mathbb{P}(B_n^c) - \mathbb{P}(B_{n-1}^c)) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(B_1^c) - \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^m (\mathbb{P}(B_n^c) - \mathbb{P}(B_{n-1}^c)) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(B_1^c) - \lim_{m \rightarrow \infty} (\mathbb{P}(B_m^c) - \mathbb{P}(B_1^c)) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(B_1^c) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n^c) + \mathbb{P}(B_1^c) \\
 &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n^c) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) \quad \square
 \end{aligned}$$

第二个等式用到 De Morgan's Law

1.2 独立性

Definition 1.6 (事件间的独立性)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $A, B \in \mathcal{F}$, 称 A 与 B 独立, 若 $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, 记为 $A \perp B$

Definition 1.7 (事件间的相互独立)

$\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$, 称其相互独立, 若 $\forall J \subset \mathbb{N}, \#J \geq 2$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) = \prod_{k \in J} \mathbb{P}(A_k)$$

Property 1.4

$A \perp B \Rightarrow A \perp B^c, A^c \perp B, A^c \perp B^c$

Definition 1.8 (σ 代数间的独立性)

$(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}), (\Omega, \mathcal{F}_2, \mathbb{P})$ 称 \mathcal{F}_1 与 \mathcal{F}_2 独立, 若 $\forall A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$, 有 $A_1 \perp A_2$, 记为 $\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_2$

Definition 1.9 (σ 代数间相互独立)

$(\Omega, \mathcal{F}_k, \mathbb{P}) (k \geq 1)$ 称 $\{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 1}$ 相互独立, 若 $\forall J \subset \mathbb{N}, \#J \geq 2, \forall A_k \in \mathcal{F}_k (k \in J)$, 有

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) = \prod_{k \in J} \mathbb{P}(A_k)$$

Property 1.5

$\{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 1}$ 相互独立 $\Leftrightarrow \forall A_k \in \mathcal{F}_k, \mathbb{P}(\cap_{k \geq 1} A_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$

证明: \Rightarrow 显然, J 取 \mathbb{N} 即可, $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$

\Leftarrow 注意到右侧 $\forall A_k \in \mathcal{F}$ 对于左侧条件 $\forall A_k \in \mathcal{F} (k \in J)$ 更加一般, 所以证 \Leftarrow 的过程也是从一般到特殊. 从 $\cap_{k \geq 1} A_k \rightarrow \cap_{k \in J} A_k$ 即从 $k \in \mathbb{N} \rightarrow k \in J$. 思路是把 $k \in \mathbb{N}$ 分成 $k \in J$ 和 $k \in J^c$, 在 $k \in J^c$ 上取 $A_k = \Omega$, 再利用性质 $\Omega \perp A$.

对于 $\forall J \subseteq \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \bigcap_{k \geq 1} A_k &= \left(\bigcap_{k \in J} A_k \right) \cap \left(\bigcap_{k \in J^c} \Omega \right) \\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq 1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) \cap \left(\bigcap_{k \in J^c} \Omega\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in J^c} \Omega\right) \quad [\Omega \perp A_k] \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) \end{aligned}$$

$$\prod_{k \geq 1} \mathbb{P}(A_k) = \prod_{k \in J} \mathbb{P}(A_k) \cdot \prod_{k \in J^c} \mathbb{P}(\Omega) = \prod_{k \in J} \mathbb{P}(A_k)$$

又因为 $\mathbb{P}(\cap_{k \geq 1} A_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$

$$\mathbb{P}(\cap_{k \in J} A_k) = \prod_{k \in J} \mathbb{P}(A_k) \quad \square$$

Definition 1.10 (离散随机变量)

令取值空间 $S = \{x_k\}_{k \geq 1}$ (x_k 互不相同), $\Omega = \sum_{k \geq 1} \Lambda_k$ (划分), 则称

$$X(\omega) = \sum_{k \geq 1} x_k \mathbb{I}_{\Lambda_k}(\omega), \omega \in \Omega \quad (1.1)$$

为离散随机变量. 其中

$$\mathbb{I}_{\Lambda_k}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } \omega \in \Lambda_k \\ 0 & \text{if } \omega \notin \Lambda_k \end{cases}$$

这个定义的核心思想是:

- 对于每个样本点 $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ 的取值是 x_k , 当且仅当 $\omega \in \Lambda_k$
- 因此, X 的取值由样本点 ω 所在的划分 Λ_k 决定

由于随机变量是个可测函数

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (S, 2^S)$$

那么 X 生成的 σ 代数表示为 $\sigma(X) := X^{-1}(2^S) = \{X^{-1}(A) | A \in 2^S\}$

Property 1.6

$\sigma(X) := X^{-1}(2^S)$, 则

1. $\sigma(X) = \sigma(\Pi_\Omega)$ 故称 $\sigma(X)$ 为由 X 生成的 σ 代数. 其中 $\Pi_\Omega = \{\Lambda_k, k \geq 1\}, \Lambda_k = \{X = x_k\}$
2. $X : (\Omega, \sigma(X)) \rightarrow (S, 2^S)$. 这个记号的解释是 $\forall A \in 2^S, X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\} \in \sigma(X)$

证明: 要证 $\sigma(X) = \sigma(\Pi_\Omega)$, 即证两个集合互相包含

$\sigma(\Pi_X) = \{\sum_{k \in J} \Lambda_k | J \subseteq \mathbb{N}\}$ 由划分生成, $\sigma(X) = X^{-1}(2^S)$ 由 X 生成

下证 $\sigma(X) \subseteq \sigma(\Pi_X)$

$$\begin{aligned} \forall A \in 2^S, X^{-1}(A) &= \{\omega | X(\omega) \in A\} \\ &= \sum_{x_k \in A} \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_k\} \\ &= \sum_{x_k \in A} \{\Lambda_k\} \\ &= \sum_{x_k \in A} \Lambda_k \in \sigma(\Pi_X) \end{aligned}$$

第二个等式用到离散 r.v. 定义1.10

下证 $\sigma(\Pi_X) \subseteq \sigma(X)$

$$\begin{aligned} J \subseteq \mathbb{N}, \quad \sum_{k \in J} \Lambda_k &= \sum_{k \in J} \{\omega | X(\omega) = x_k\} \\ &= \{\omega | X(\omega) \in \{x_k, k \in J\}\} \\ &= X^{-1}(\{x_k, k \in J\}) \in \sigma(X) \end{aligned}$$

最后一个等式中 $\{x_k, k \in J\} \in 2^S$

□

Example 1.5

$X = \mathbb{I}_A$ 由划分的定义 $\Pi_X = \{\Lambda_k\}_{k \geq 1}, \Lambda_k = \{X = x_k\}$, 知道划分将全集分成两部分

$$\begin{aligned} \Pi_X &= \{\{X = 1\}, \{X = 0\}\} \\ &= \{\{\omega \in \Omega | X(\omega) = 1\}, \{\omega \in \Omega | X(\omega) = 0\}\} \\ &= \{A, A^c\} \end{aligned}$$

$$\sigma(\Pi_A) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\} = \sigma(A) = \sigma(A^c)$$

其中 $\sigma(\Pi_A)$ 由划分生成, $\sigma(A)$ 由 A 生成, 两者相等

$$\text{另外, } \sigma(X) = \sigma(\mathbb{I}_A) = \sigma(\Pi_X) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\} = \sigma(A) \Rightarrow \sigma(\mathbb{I}_A) = \sigma(A)$$

Definition 1.11 (离散随机变量间的独立性)

$X : \Omega \rightarrow S_1, Y : \Omega \rightarrow S_2$ 为两离散随机变量, 称 $X \perp\!\!\!\perp Y$, 若 $\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \sigma(Y)$ [定义1.8], 即 $X^{-1}(2^{S_1}) \perp\!\!\!\perp X^{-1}(2^{S_2})$ 即 $\forall E_1 \subseteq S_1, E_2 \subseteq S_2$, 有 $\mathbb{P}(X \in E_1, Y \in E_2) = \mathbb{P}(X \in E_1)\mathbb{P}(Y \in E_2)$

S_1, S_2 分别为 X, Y 的取值空间, $E_1 \subseteq S_1$ 为 X 的一个取值, $X \in E_1 := \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in E_1\}$, E_2 同理

Theorem 1.1

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \forall x \in S_X, y \in S_Y \text{ 有 } \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

证明: \Rightarrow 一般到特殊, 取 $E_1 = \{x\}, E_2 = \{y\}$, 由 $\{x\} \in S_X, \{y\} \in S_Y$ 易证

\Leftarrow

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in E_1, Y \in E_2) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in E_1} \{X = x\} \cap \{Y \in E_2\}\right) \\ &= \sum_{x \in E_1} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \sum_{y \in E_2} \{Y = y\}) \\ &= \sum_{x \in E_1} \sum_{y \in E_2} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x \in E_1} \left(\sum_{y \in E_2} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)\right) \\ &= \sum_{x \in E_1} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y \in E_2) \\ &= \mathbb{P}(X \in E_1)\mathbb{P}(Y \in E_2) \end{aligned}$$

第一个等式中, $\{X = x\} \cap \{Y \in E_2\}$ 看作一整个集合 $\subseteq \{X = x\}$, 因为离散、每个 x 不相交, 所以这是个不交并, 由练习2, 可以改写成加法形式.

第四个等式由条件 $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ 成立. \square

Theorem 1.2

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \forall x \in S_X, y \in S_Y, \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)$$

用 Theorem 1.1 证明

\Rightarrow 已知 $X \perp\!\!\!\perp Y$, 由定义1.11, $\forall E_1 \subseteq S_1, E_2 \subseteq S_2$, 有 $\mathbb{P}(X \in E_1, Y \in E_2) = \mathbb{P}(X \in E_1)\mathbb{P}(Y \in E_2)$. 取 $E_1 = \{\omega | X(\omega) \leq x\}, E_2 = \{\omega | Y(\omega) \leq y\}$

\Leftarrow

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = x, Y = y) &= \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x^-, Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y^-) + \mathbb{P}(X \leq x^-, Y \leq y^-) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x^-)\mathbb{P}(Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y^-) + \mathbb{P}(X \leq x^-)\mathbb{P}(Y \leq y^-) \\ &= [\mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq x^-)][\mathbb{P}(Y \leq y) - \mathbb{P}(Y \leq y^-)] \\ &= \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \end{aligned}$$

其中 x^-, y^- 为小于 x, y 的最大值, 由于离散, $\{X \leq x\} - \{X \leq x^-\} = \{X = x\}, \{Y \leq y\} - \{Y \leq y^-\} = \{Y = y\}$

Definition 1.12

称一列离散随机变量 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 相互独立, 若 $\sigma(X_n), n \geq 1$ 相互独立

Theorem 1.3

$\{A_n\}_{n \geq 1}$ 事件列下列等价

1. $\{A_n\}_{n \geq 1}$ 相互独立
2. $\sigma(A_n), n \geq 1$ 相互独立
3. $\mathbb{I}_{A_n}, n \geq 1$ 相互独立

证明. 1. 由例题1.5, $\sigma(\mathbb{I}_{A_n}) = \sigma(A_n)$, 所以 (2) \Leftrightarrow (3)

2. 下证 (2) \rightarrow (1), 一般到特殊, $A_n \subseteq \sigma(A_n)$

3. 下证 (1) \rightarrow (2), $\sigma(A_n) = \{A_n, A_n^c, \emptyset, \Omega\}, \emptyset \perp\!\!\!\perp A_n, \Omega \perp\!\!\!\perp A_n$, 由性质1.4, $\emptyset \perp\!\!\!\perp A_n^c, \Omega \perp\!\!\!\perp A_n^c$

由 Property 1.5, $\forall A_k \in \sigma(A_n), \mathbb{P}(\cap_{k \geq 1} A_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$

由于条件 (1), 上面等式成立 \Rightarrow 满足 σ 代数相互独立的定义. \square

1.3 条件概率与条件独立

Definition 1.13 (条件概率)

$B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(B) > 0$ 定义

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} =: \mathbb{P}_B(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Theorem 1.4 (乘法公式)

$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B),$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n|\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k) \quad (1.2)$$

Theorem 1.5 (全概公式)

(1) $\Omega = \sum_{k \geq 1} \Lambda_k$ 划分 $\mathbb{P}(\Lambda_k) > 0$, 则 $\forall A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A|\Lambda_k)\mathbb{P}(\Lambda_k)$$

(2) * 一般地, $\{B_n\}_{n \geq 1}$ 互不相交, $\mathbb{P}(B) > 0, \mathbb{P}(\sum_{n \geq 1} B_n) = 1$, 则 $\forall A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n)$$

注: $\mathbb{P}(\cdot) = 1$ 不一定是全集, 但概率测度是 1. 同样, $\mathbb{P}(\cdot) = 0$ 不一定是 \emptyset , 而是叫零测集

证明:

(1) 由 $A = A \cap \Omega = A \cap (\sum_{k \geq 1} \Lambda_k) = \sum_{k \geq 1} (A \cap \Lambda_k)$, A 被划分成若干不相交的集合 $A \cap \Lambda_k$, 根据可列可加性, 得到

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A \cap \Lambda_k) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A|\Lambda_k)\mathbb{P}(\Lambda_k)$$

(2) $\Omega = (\sum_{n \geq 1} B_n) + (\sum_{n \geq 1} B_n)^c = \sum_{n \geq 0} B_n$, 其中 $B_0 = (\sum_{n \geq 1} B_n)^c$

$\mathbb{P}(B_0) = 1 - \mathbb{P}(\sum_{n \geq 1} B_n) = 0 \rightarrow 0 \leq \mathbb{P}(AB_0) \leq \mathbb{P}(B_0) = 0$

左边不等号成立是因为概率测度非负, 右边不等号成立是因为 $AB_0 \subseteq B_0$, 所以 $\mathbb{P}(AB_0) = 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(AB_n) \quad [\text{可列可加性}] \\ &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(AB_n) \quad [\mathbb{P}(AB_0) = 0] \\ &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n) \quad [\text{全概公式}] \quad \square \end{aligned}$$

Theorem 1.6

$\mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{P}(B) > 0$

$$A \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

$\mathbb{P}(A|B)$ 见定义1.13

Theorem 1.7

$\mathbb{P}_B : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ 也是 (Ω, \mathcal{F}) 上的概率测度 [定义1.5]

Property 1.7

$\mathbb{P}(C) > 0, \mathbb{P}(B) > 0$, 则

$$\mathbb{P}_B(\cdot|C) = \mathbb{P}(\cdot|BC) = \mathbb{P}_{BC}(\cdot)$$

$\mathbb{P}_B(\cdot|C)$ 见定义1.13

Definition 1.14

称 C 条件发生下, A 与 B 独立, 若

$$\mathbb{P}_C(AB) = \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B) \quad (1.3)$$

记为 $A \perp\!\!\!\perp_C B$ (条件独立)

Theorem 1.8

$\mathbb{P}(C) > 0, \mathbb{P}(BC) > 0$ 则 $A \perp\!\!\!\perp_C B \Leftrightarrow \mathbb{P}_C(A|B) = \mathbb{P}_C(A)$

证明. 由 $A \perp\!\!\!\perp_C B, \mathbb{P}_C(AB) = \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B)$

$$\mathbb{P}_C(A|B) = \frac{\mathbb{P}_C(AB)}{\mathbb{P}_C(B)} = \mathbb{P}_C(A)$$

□

1.4 期望与条件期望

1.4.1 离散随机变量的期望

Definition 1.15 (X 的期望)

$X : \Omega \rightarrow S$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X)$$

当此求和绝对收敛

注: $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X)$ 强调这是在概率测度 \mathbb{P} 下的期望

Definition 1.16 ($g(X)$ 的期望)

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}g(X) = \sum_{x \in S} g(x) \mathbb{P}(X = x)$$

当此求和绝对收敛

关于“求和绝对收敛”的讨论:

Example 1.6

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = \mathbb{P}(A), A \in \mathcal{F}$$

Example 1.7

X 是离散随机变量, 由定义 1.10, $X = \sum_{x \in S} x \mathbb{I}_{A_x}$, 其中 $A_x := \{X = x\}$. B 是任意的, 求 $\mathbb{E}(\mathbb{I}_B X)$

Remark 2. 对于 $A_x := \{X = x\}$ 应这样理解, A_x 是样本空间 Ω 的一个子集, 包含了所有使得 $X(\omega) = x$ 的样本点 ω .

根据离散随机变量的定义, $X(\omega) = x_k$ 当且仅当 $\omega \in A_{x_k}$. 因此对于每个 $x_k \in S$, 有

$$A_{x_k} = \{X = x_k\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_k\} = A_{x_k}$$

所以 $A_x = \{A_{x_k}\}_{k \geq 1}$ 就是离散随机变量的划分

对于 $X = \sum_{x \in S} x \mathbb{I}_{A_x}$ 可以这样理解. 对于每个 $x \in S$, $\mathbb{I}_{A_x}(\omega)$ 是事件 $A_x = \{X = x\}$ 的指示函数

$$\mathbb{I}_{A_x}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } X(\omega) = x \\ 0 & \text{if } X(\omega) \neq x \end{cases}$$

Solution. 要先求 $\mathbb{E}(|\mathbb{I}_B X|) < \infty$ 说明期望存在

对 $\forall \omega \in B$

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_B X(\omega) &= \mathbb{I}_B(\omega) \sum_{x \in S} (x \cdot \mathbb{I}_{A_x}(\omega)) \\ &= \sum_{x \in S} x \mathbb{I}_{A_x \cap B}(\omega) \end{aligned}$$

其中 $\mathbb{I}_{A_x \cap B}$ 也可记为 $\mathbb{I}_{A_x B}$

$\{A_x B, x \in S\} \cup \{B^c\}$ 构成了样本空间 Ω 的一个划分. 因为 A_x 本身是对 Ω 的一个划分, 其与 B 的交是对 B 的划分. 并上 B^c , 则满足划分的定义 1.4

对于 $\omega \in \Omega$, 由划分

$$\mathbb{I}_B X(\omega) = 0 \cdot \mathbb{I}_{B^c}(\omega) + \sum_{x \in S} x \mathbb{I}_{A_x \cap B}$$

$$\therefore \mathbb{E}|\mathbb{I}_B X| = \sum_{x \in S} |x| \mathbb{P}(A_x B) \leq \sum_{x \in S} |x| \mathbb{P}(A_x) = \mathbb{E}|X| < \infty$$

最后一个等号参考期望的定义 1.15

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_B X) = \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(A_x B) = \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(\{X = x\} \cap B)$$

Theorem 1.9

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$$

离散随机变量有两种表达形式, 如定义 1.10 和练习 1.7 所示

$$X = \sum_{x \in S} x \mathbb{I}_{\{X=x\}} = \sum_{k \geq 1} x_k \mathbb{I}_{\Lambda_k}$$

$$\sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = x_k)$$

只有在“求和绝对收敛”(见定义 1.15) 的条件下, 等式才成立

Remark 3.

1. $\sum_{x \in S}$ (1) 级数的重排 (2) 可和族
2. X 是离散随机变量, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 则

$$g(X) = \sum_{x \in S} g(x) \mathbb{I}_{\{X=x\}}$$

是一个离散随机变量, 且 $\sigma(g(X)) \subseteq \sigma(X)$. 下面说明这个结论

当 $x_1 \neq x_2$ 时可能 $g(x_1) = g(x_2)$, 因此

$$\Pi_X = \{\{X = x\} | x \in S\} \neq \Pi_{g(X)}$$

其实 $\Pi_{g(X)} \subseteq \sigma(\Pi_X)$, 因为对于 $x_1 \neq x_2$ 但 $g(x_1) = g(x_2)$ 的情况, 比如在 Π_X 上 x_1, x_2 对应的样本空间是 Ω_1, Ω_2 , 但在 $\Pi_{g(X)}$ 上是 $\Omega_1 \cup \Omega_2$. 这一项在 Π_X 里有, 因为 σ 代数对可列并封闭. 但 Ω_1, Ω_2 分别在 $\Pi_{g(X)}$ 上没有. 把 σ 代数理解成信息, 则 $g(X) = y$ 提供的信息是比直接提供 x 的值要少的 (在 $g(\cdot)$ 已知的情况下).

3. $X \perp\!\!\!\perp Y$, $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 则 $g(X) \perp\!\!\!\perp h(Y)$. 因为 $\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \sigma(Y)$, 而 $\sigma(g(X)) \subseteq \sigma(X), \sigma(h(Y)) \subseteq \sigma(Y)$
如果 X, Y 是连续随机变量, 则对 g, h 有其他要求. 特殊地, 结论 3 对 g, h 连续时成立.

Theorem 1.10

- (1) $X \perp\!\!\!\perp Y, \mathbb{E}|X| < \infty, \mathbb{E}|Y| < \infty$, 则 $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
 (2) X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 则 $\mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = \mathbb{E}X_1 \cdots \mathbb{E}X_n$
 (3) $X \perp\!\!\!\perp Y, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{E}|g(X)| < \infty, \mathbb{E}|h(Y)| < \infty$

$$\Rightarrow g(X) \perp\!\!\!\perp h(Y), \mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y))$$

Theorem 1.11

若 $X \geq 0$ 取整数值, 则 $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k)$

证明:

1.4.2 条件期望

1° 关于“给定集合”的条件期望

Definition 1.17

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), X: \Omega \rightarrow S, A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{E}|X| < \infty$, 定义 X 关于 A 的条件期望

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|A) &:= \sum_{x \in S} \mathbb{P}(X = x|A) \\ &= \sum_{x \in S} x \mathbb{P}_A(X = x) \\ &= E^{\mathbb{P}_A}(X) \end{aligned}$$

Property 1.8 (线性性)

$$\mathbb{E}(aX + bY|A) = a\mathbb{E}(X|A) + b\mathbb{E}(Y|A)$$

证明: (用期望的性质)

Example 1.8

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_B|A) = 1 \cdot \mathbb{P}(B|A) + 0 \cdot \mathbb{P}(B^c|A) = \mathbb{P}(B|A)$$

Example 1.9

$$B \perp\!\!\!\perp A \Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{I}_B|A) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_B)$$

Property 1.9

$$\mathbb{E}|X| < \infty, \mathbb{P}(A) > 0, X \perp\!\!\!\perp \mathbb{I}_A \Rightarrow \mathbb{E}(X|A) = \mathbb{E}(X)$$

证明:

$$\because X \perp\!\!\!\perp \mathbb{I}_A, \therefore \{X = x\} \perp\!\!\!\perp A$$

$$\mathbb{E}(X|A) = \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x|A) = \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}(X)$$

其中

$$\sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x|A) = \sum_{x \in S} x \frac{\mathbb{P}(\{X = x\} \cap A)}{P(A)} = \mathbb{E}(X \mathbb{I}_A) / \mathbb{P}(A)$$

最后一个等号由例题1.7

至此没有用到独立性, 可以得到以下推论

Corollary 1.2

$$\mathbb{E}(X|A) = \mathbb{E}(X \mathbb{I}_A) / \mathbb{P}(A)$$

Problem 3 (作业 2-1)

Y 在 A 上取常数 c , 证明: $\mathbb{E}(XY|A) = c\mathbb{E}(X|A)$

2° 关于“给定划分生成的 σ 代数”的条件期望

Definition 1.18

设 $\Pi = \{\Lambda_k\}_{k \geq 1}$ 是 Ω 的划分, X 为离散随机变量, $\mathbb{E}|X| < \infty$, 定义

$$\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi))(\omega) := \mathbb{E}(X|\Lambda_k)$$

当 $\omega \in \Lambda_k$, 即

$$\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi)) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{\Lambda_k} \mathbb{E}(X|\Lambda_k)$$

期望的本质是积分, 现在因为数分里的积分不够用了, 我们要定义新积分, 希望它也能保留原先的好性质

Property 1.10 (线性性)

$$\mathbb{E}(aX + bY|\sigma(\Pi)) = a\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi)) + b\mathbb{E}(Y|\sigma(\Pi))$$

证明: $\omega \in \Lambda_k$, $LHS = \mathbb{E}(aX + bY|\Lambda_k) = a\mathbb{E}(X|\Lambda_k) + b\mathbb{E}(Y|\Lambda_k)$

第二个等号由性质1.8成立.

Example 1.10

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|\{\emptyset, \Omega\}) &= \mathbb{E}(X|\sigma(\Omega)) \\
&= \mathbb{I}_\Omega \mathbb{E}(X|\Omega) \quad [\text{定义 (1.18)}] \\
&= \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x|\Omega) \quad [\text{定义 (1.17), } \Omega \perp\!\!\!\perp X] \\
&= \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x) \\
&= \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

独立可以理解为：什么信息也没提供

Example 1.11

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{I}_B|\sigma(A)) &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_B|\{A, A^c, \Omega, \emptyset\}) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{I}_B|\sigma(A, A^c)) \\
&= \mathbb{I}_A \mathbb{E}(\mathbb{I}_B|A) + \mathbb{I}_{A^c} \mathbb{E}(\mathbb{I}_B|A^c)
\end{aligned}$$

更进一步, 若 $A \perp\!\!\!\perp B$, 由 $\sigma(B) \perp\!\!\!\perp \sigma(A) \rightarrow \sigma(\mathbb{I}_B) \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathbb{I}_A) \Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{I}_B|\sigma(A)) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_B)$

可以把这个结果推广：

Property 1.11

$\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \sigma(\Pi)$, 则 $\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi)) = \mathbb{E}(X)$

证明： $\Pi_X = \{\{X = x\} | x \in S\}$, 默认 x 不相同

$\sigma(X) = \sigma(\Pi_X) = \{\{X = x\} | x \in S\}$

不妨设 $\Pi = \{\Lambda_k, k \geq 1\}$

则 $\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \sigma(\Pi) \Rightarrow \forall x \in S, k \geq 1, \{X = x\} \perp\!\!\!\perp \Lambda_k$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi)) &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{\Lambda_k} \mathbb{E}(X|\Lambda_k) \\
&= \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{\Lambda_k} \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x|\Lambda_k) \\
&= \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{\Lambda_k} \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{\Lambda_k} \mathbb{E}(X) \\
&= \mathbb{I}_\Omega \mathbb{E}(X) \\
&= \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

Example 1.12

$$\mathbb{E}(X|\sigma(X)) = X$$

$\sigma(X)$ 作为条件相当于知道了与 X 相关的所有信息, 即提取已知量

证明: $\sigma(X) = \sigma(\Pi_X)$, 其中 $\Pi_X = \{\{X = x\} | x \in S\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|\sigma(X)) &= \sum_{x \in S} \mathbb{I}_{\{X=x\}} \mathbb{E}(X|X=x) \\ &= \sum_{x \in S} \mathbb{I}_{\{X=x\}} \mathbb{E}(X \mathbb{I}_{\{X=x\}}) / \mathbb{P}(X=x) \quad [\text{Cor (1.2)}] \\ &= \sum_{x \in S} \mathbb{I}_{\{X=x\}} \cdot \frac{x \cdot \mathbb{P}(X=x) + 0 \cdot \mathbb{P}(X \neq x)}{\mathbb{P}(X=x)} \\ &= \sum_{x \in S} x \mathbb{I}_{\{X=x\}} = X \quad \square \end{aligned}$$

Property 1.12 (提取已知量)

设 $\Pi = \{\Lambda_k, k \geq 1\}$ 为 Ω 的划分, $\mathbb{E}|X| < \infty, \mathbb{E}|XY| < \infty$, 则当 $\sigma(X) \subseteq \sigma(\Pi)$ 时, 有

1. $\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi)) = X$
2. $\mathbb{E}(XY|\sigma(\Pi)) = X \mathbb{E}(Y|\sigma(\Pi))$

特别地, 取 $X = \mathbb{I}_A, A \in \sigma(\Pi)$, 则

1. $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A|\sigma(\Pi)) = \mathbb{I}_A$
2. $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A Y|\sigma(\Pi)) = \mathbb{I}_A \mathbb{E}(Y|\sigma(\Pi))$

证明: 只需证 (2), 因为从 (2) \rightarrow (1) 即 $Y = \mathbb{I}_\Omega$

$X = \sum_{x \in S} x \mathbb{I}_{A_x}$, 其中 $A_x := \{X = x\}$

(Step 1) $\sigma(X) = \{\sum_{x \in S'_X} A_x | S'_X \subseteq S_X\}$

$\sigma(X) = \{\sum_{k \in J} \Lambda_k | J \subseteq \mathbb{N}\}$

已知: $\sigma(X) \subseteq \sigma(\Pi) \Rightarrow \exists$ 一族 $\{x_k\}_{k \geq 1}$ (可能有相同元素), 使得 $X = \sum_{k \geq 1} x_k \mathbb{I}_{\Lambda_k}$, 其中 $\cup_{k \geq 1} \{x_k\} = S_x$ (S_x 为取值空间)

注: Π 是 $\Pi_X = \{A_x | x \in S\}$ 的加细划分

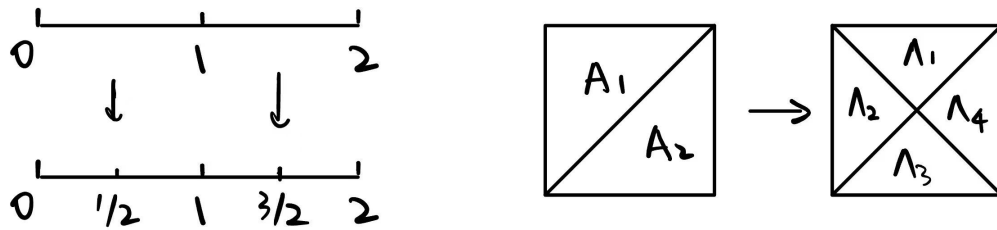


图 1: 加细划分

(Step 2) 对于 $\omega \in \Lambda_j, \forall j \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY|\sigma(\Pi))(\omega) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k \geq 1} x_k \mathbb{I}_{\Lambda_k} Y | \sigma(\Pi)\right)(\omega) \quad [X = \sum_{k \geq 1} x_k \mathbb{I}_{\Lambda_k}] \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k \geq 1} x_k \mathbb{I}_{\Lambda_k} Y | \Lambda_j\right) \quad [\sigma(\Pi) \text{ 定义}] \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k \geq 1} x_k \mathbb{I}_{\Lambda_k} Y \mathbb{I}_{\Lambda_j}\right) / \mathbb{P}(\Lambda_j) \quad [\text{Cor (1.2)}] \\
&= \mathbb{E}(Y x_j \mathbb{I}_{\Lambda_j}) / \mathbb{P}(\Lambda_j) \quad [\mathbb{I}_{\Lambda_k} \mathbb{I}_{\Lambda_j} \text{ 当 } \Lambda_k \neq \Lambda_j \text{ 时} = 0] \\
&= x_j \mathbb{E}(Y \mathbb{I}_{\Lambda_j}) / \mathbb{P}(\Lambda_j) \\
&= x_j \mathbb{E}(Y | \mathbb{I}_{\Lambda_j}) \\
&= X(\omega) \mathbb{E}(Y | \mathbb{I}_{\Lambda_j})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(XY|\sigma(\Pi)) = X \sum_{j \geq 1} \mathbb{I}_{\Lambda_j} \mathbb{E}(Y | \Lambda_j) = X \mathbb{E}(Y|\sigma(\Pi))$$

数学上有种现象叫“法国人的伎俩”，即把定理当定义用。严格地讲，这么做有时会出现存在性和唯一性不满足的问题。下面介绍一个常被当做定义用的定理：

Theorem 1.12

$\Pi = \{\Lambda_k, k \geq 1\}$ 为 Ω 的划分, $\mathbb{E}|X| < \infty$. 记 $Y := \mathbb{E}(X|\sigma(\Pi)) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{\Lambda_k} \mathbb{E}(X|\Lambda_k)$, 则

1. Y 仍是一个离散随机变量, 且 $\mathbb{E}|Y| \geq \mathbb{E}|X| < \infty$
2. $\sigma(Y) \subseteq \sigma(\Pi)$ (记作 $Y \in \sigma(\Pi)$, 即 Y 的所有信息都在 $\sigma(\Pi)$ 里)
3. $\forall A \in \sigma(\Pi)$, 有 $\mathbb{E}(Y \mathbb{I}_A) = \mathbb{E}(X \mathbb{I}_A)$

证明: (1) $\mathbb{E}|X| = \sum_{x \in S_x} |x| \mathbb{P}(X = x) < \infty$

$$\mathbb{E}|Y| = \sum_{k \geq 1} |\mathbb{E}(X|\Lambda_k)| \mathbb{P}(\Lambda_k) \geq \sum_{k \geq 1} \sum_{x \in S} |x| \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \Lambda_k)$$

逻辑上, 现在第一个等号不成立, 但之后 $< \infty$ 一写出来, 之前的所有等号立刻成立, 此处只为书写简便

$$\mathbb{E}|X| = \sum_{x \in S_x} |x| \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in S} |x| \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\Lambda_k \cap \{X = x\})$$

我们知道 $\sum_{x \in S} |x| \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\Lambda_k \cap \{X = x\})$ 绝对收敛, 若求和次序交换后的 $\sum_{k \geq 1} \sum_{x \in S} |x| \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \Lambda_k)$ 也绝对收敛, 则 $\mathbb{E}|Y| < \infty$ 得证. 有一个引理可以保证绝对收敛:

Lemma 1.1 ([7].P280. 推论)

从 273-280

Corollary 1.3

来自 Thm 1.12(1).

1. (重期望公式)

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi))] = \mathbb{E}[X], \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi))) = \mathbb{E}(X) \quad (1.4)$$

2. $|\mathbb{E}(X|\Lambda_k)| \leq \mathbb{E}(|X| | \Lambda_k), |\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi))| \leq \mathbb{E}(|X| | \sigma(\Pi))$

(2) 由定义, $Y = \sum_{k \geq 1} y_k \mathbb{I}_{\Lambda_k}$, 其中 $y_k := \mathbb{E}(X|\Lambda_k)$

记 $S_Y = \cup_{k \geq 1} \{y_k\}$, 注意到, 可能 $\exists i \neq j$, 但 $y_i = y_j$

故 $J_y = \{k | y_k = y\} (y \in S_Y)$ 中个数可能大于 1

$$Y = \sum_{y \in S_Y} y \mathbb{I}_{\sum_{k \in J_y} \Lambda_k}$$

$$\{Y = y\} = \sum_{k \in J_y} \Lambda_k \in \sigma(\Pi)$$

$$\sigma(Y) \subseteq \sigma(\Pi) \quad \square$$

(3) $\mathbb{E}(Y \mathbb{I}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A \mathbb{E}(X|\sigma(\Pi)))$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y \mathbb{I}_A) &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_A \mathbb{E}(X|\sigma(\Pi))) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mathbb{I}_A | \sigma(\Pi))) \quad [A \in \sigma(\Pi), \text{性质 (1.12)}] \\ &= \mathbb{E}(X \mathbb{I}_A) \quad [\text{Cor (1.3)}] \end{aligned}$$

3° 关于离散随机变量的条件期望

Definition 1.19

概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, X, Y 为离散随机变量, $\mathbb{E}|X| < \infty$. 定义 $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|\sigma(Y)) = \mathbb{E}(X|\sigma(\Pi_Y))$, 称为 X 关于 Y 的条件期望

注: $\omega = \{Y = y\} \in \Pi_Y$ 或 $Y(\omega) = y$, $\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \mathbb{E}(X|Y = y)$

Example 1.13

$$\mathbb{E}(X|\Pi_\Omega) = \mathbb{E}(X|\sigma(\Omega)) = \mathbb{E}(X)$$

Example 1.14

$$\mathbb{I}_A \perp\!\!\!\perp \mathbb{I}_B \Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) = [\text{Exa(1.11)}] \mathbb{E}(\mathbb{I}_A)$$

Example 1.15

$$\mathbb{E}(X|X) = \mathbb{E}(X|\sigma(X)) = X [\text{Exa 1.12}]$$

Property 1.13

假设以下期望、条件期望都有意义

1. $\mathbb{E}(aX + bY|Z) = a\mathbb{E}(X|Z) + b\mathbb{E}(Y|Z)$
2. $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X)$
3. $\sigma(X) \subseteq \sigma(Z) \Rightarrow \mathbb{E}(XY|Z) = X\mathbb{E}(Y|Z)$
4. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)) = \mathbb{E}(X)$
5. $|\mathbb{E}(X|Z)| \leq \mathbb{E}(|X| | Z)$

4° 关于多个离散随机变量的条件期望

$\mathbb{E}(Y|X_1, \dots, X_n)$

1. 由 X_1, \dots, X_n 生成的 σ 代数 $\sigma(X_1, \dots, X_n)$
2. $:= \mathbb{E}(Y|\sigma(X_1, \dots, X_n))$

怎样生成 σ 代数可以包含 X_1, \dots, X_n 尽可能多的信息?

直觉是 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k)$, 然而它不一定是 σ 代数, 因为它对可列并不封闭.

每个 $\sigma(X_k)$ 是一个 σ 代数, 因此它对可列并封闭.

然而, $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k)$ 只是将每个 $\sigma(X_k)$ 中的集合简单地并在一起, 并没有保证这些集合的可列并仍然在 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k)$ 中.

例如, 假设 $X_k \in \sigma(X_k)$, 那么 X_k 在 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k)$ 中, 但 $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ 可能不在 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k)$ 中, 因为它可能不属于任何一个单独的 $\sigma(X_k)$. 问题出在 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k)$ 缺少 $\{\sigma(X_k)\}_{k \geq 1}$ 交互的部分

怎样把 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k)$ 变成 σ 代数?

Definition 1.20 (多个离散随机变量的条件期望)

定义由离散随机变量 X_1, \dots, X_n 生成的 σ 代数

$$\begin{aligned}
\sigma(X_1, \dots, X_n) &:= (X_1, \dots, X_n)^{-1}(2^{S_1} \times \dots \times 2^{S_n}) \\
&:= \underbrace{\{(X_1, \dots, X_n)^{-1}(A_1 \times \dots \times A_n) | A_1 \times \dots \times A_n \subseteq S_1 \times \dots \times S_n\}}_{\text{柱集}} \\
&= \left\{ \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k^{-1}(A_k) | A_k \in 2^{S_k}, 1 \leq k \leq n \right\}
\end{aligned}$$

乘积空间

Theorem 1.13

令 $x_k = \sum_{i \geq 1} x_{k,i} \mathbb{I}_{\Lambda_{k,i}}, 1 \leq k \leq n$, 为离散随机变量, 对每一个 $k, \Pi_k := \{\Lambda_{k,i} | i \geq 1\}$ 为 Ω 的划分, 定义

$$\Pi_{(X_1, \dots, X_n)} := \{\Lambda_{1,i_1} \cap \dots \cap \Lambda_{n,i_n} | i_k \geq 1, 1 \leq k \leq n\}$$

则

1. $\Pi_{(X_1, \dots, X_n)}$ 是 Ω 的划分, 且

$$\sigma(\Pi_{(X_1, \dots, X_n)}) = \left\{ \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_n) \\ \in J_1 \times \dots \times J_n}} (\Lambda_{1,i_1} \cap \dots \cap \Lambda_{n,i_n}) | J_k \subseteq \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n \right\}$$

2. $\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(\Pi_{(X_1, \dots, X_n)})$ (即定义 1.20 是有意义的, well-defined, make sense, 良定义)

Problem 4 (作业 2-2)

证明 Theorem 1.13 在 $n = 2$ 时成立

Definition 1.21

$\mathbb{E}|Z| < \infty$ 定义

$$\mathbb{E}(Z | X_1, \dots, X_n) = \mathbb{E}(Z | \sigma(X_1, \dots, X_n)) := \mathbb{E}(Z | \sigma(\Pi_{(X_1, \dots, X_n)}))$$

Definition 1.22

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), Y : \Omega \rightarrow S_Y, X_1 : \Omega \rightarrow S_1, X_2 : \Omega \rightarrow S_2$ 为离散随机变量, 称 Y 和 (X_1, X_2) 独立, 若 $\sigma(Y) \perp \sigma(X_1, X_2)$. $[\sigma(Y) = Y^{-1}(2^{S_Y}), \sigma(X_1, X_2) = (X_1, X_2)^{-1}(2^{S_1} \times 2^{S_2})]$

即 $\forall A \subseteq S_Y, B \subseteq 2^{S_1} \times 2^{S_2}, B = B_1 \times B_2$, 有

$$\mathbb{P}(Y \in A, (X_1, X_2) \in B) = \mathbb{P}(Y \in A) \mathbb{P}((X_1, X_2) \in B)$$

其中 $\mathbb{P}((X_1, X_2) \in B) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2)$

Problem 5 (作业 2-3)

证明:

$$\begin{aligned} Y \perp (X_1, X_2) &\Leftrightarrow \forall y \in S_Y, x_1 \in S_1, x_2 \in S_2 \\ &\text{有 } \mathbb{P}(Y = y, (X_1, X_2) = (x_1, x_2)) \\ &= \mathbb{P}(Y = y) \mathbb{P}((X_1, X_2) = (x_1, x_2)) \end{aligned}$$

有了上述定义, 可以推广:

1. $(Y_1, \dots, Y_n) \perp (X_1, \dots, X_n)$
2. $Y \perp_A (X_1, \dots, X_n) (A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) > 0)$

Property 1.14

$$Y \perp\!\!\!\perp (X_1, X_2) \Rightarrow Y \perp\!\!\!\perp X_1, Y \perp\!\!\!\perp X_2$$

证明：在定义 1.22 中取 $B_2 = \Omega$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \in A, X_1 \in B_1) &= \mathbb{P}(Y \in A, X_1 \in B_1, X_2 \in S_2) \\ &= \mathbb{P}(Y \in A) \mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in S_2) \quad [Y \perp\!\!\!\perp (X_1, X_2)] \\ &= \mathbb{P}(Y \in A) \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \end{aligned}$$

注：看到 \Rightarrow 要自然地问，反过来 \Leftarrow 成立吗？做数学要多问自己一些问题，即便没有答案

Corollary 1.4

$$(Y_1, \dots, Y_m) \perp\!\!\!\perp (X_1, \dots, X_n) \Rightarrow Y_k \perp\!\!\!\perp X_j, 1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq n$$

1.5 随机过程

1.5.1 什么是随机过程

Definition 1.23 (随机过程)

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为概率空间, (S, \mathcal{S}) 为可测空间, \mathbb{T} 为指标集/参数集, 称随机变量族

$$\{X_t : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (S, \mathcal{S}) | t \in \mathbb{T}\}$$

为 (S, \mathcal{S}) 值随机过程 X . 其中 (S, \mathcal{S}) 称为 X 的状态空间

注:

1. $\forall t \in \mathbb{T}, X_t$ 为随机变量
2. \mathbb{T} 为时间集, X_t 为过程 X 在时刻 t 的状态

$\mathbb{T} \setminus S \subseteq \mathbb{R}$	离散(e.g. \mathbb{N}) 连续(e.g. \mathbb{R}, \mathbb{R}^+)
可数集(e.g. \mathbb{N}, \mathbb{Z})	离散时间/参数的随机过程
连续统(e.g. $[0, T], \mathbb{R}^+$)	连续时间/参数的随机过程

1.5.2 随机过程的分布

1. $\forall t \in \mathbb{T}, X_t : \Omega \rightarrow S$ 为随机变量/可测映射
2. $X : \mathbb{T} \times \Omega \rightarrow S$ 二元映射
3. $X : \Omega \rightarrow S^{\mathbb{T}}$ 其中 $S^{\mathbb{T}} = \{f | f : \mathbb{T} \rightarrow S\}$, $X : \omega \rightarrow X(\omega) = X(\cdot, \omega)$

分布可用有限维分布族刻画

Definition 1.24

固定样本点 ω , 则 $X_{\cdot}(\omega)$ 为 $\mathbb{T} \rightarrow S$ 的映射, 即 $X_{\cdot}(\omega) \in S^{\mathbb{T}}$, 称 $X_{\cdot}(\omega)$ 是过程 X 的一个实现/样本路径/样本函数

Definition 1.25

$\forall n \geq 1, t_1, t_2, \dots, t_n$ 称

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$$

为 X 的 n 维分布

Definition 1.26 (过程的有限维分布族)

定义

$$\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n} | n \geq 1, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}\}$$

1.5.3 随机过程的存在性

1. (抽象的) 从概率论/测度论出发去证明随机过程存在性, 不写出具体形式, 满足随机过程符合给定的有限维分布族即可
2. (具体的) 构造性证明

Property 1.15

随机过程的有限维分布族具有以下两个性质

1. (对称性) 重排, 设 $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ 为双射, 则

$$F_{t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$$

2. (相容性) $m \geq n$

$$F_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_m}(x_1, \dots, x_n, +\infty, \dots, +\infty) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$$

注: 相容性类比从高维向低维的投影, $\mathbb{P}(X \leq +\infty) = F_X(+\infty) = 1$

这两个性质是随机过程存在的必要条件

Theorem 1.14 (Kolmogorov 定理)

设分布函数族

$$\{F_{t_1, \dots, t_n} | t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}, n \geq 1\}$$

满足对称性, 相容性, 则必存在一个随机过程 $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ 使得上述分布函数族 F 是 X 的有限维分布族

1.5.4 随机过程的基本类型

1. 离散时间马氏链 (由条件概率定义)
2. Poisson 过程
3. 更新过程
4. 连续时间马氏链
5. 离散时间 Martingale (由条件期望定义)
6. 布朗运动

Definition 1.27

对连续时间的随机过程 $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$

1. 若对一切的 $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ 有 $X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 相互独立, 则过程 X 是独立增量过程 (e.g. 布朗运动)
2. 若对每一个 $S \in \mathbb{T}$, $X_{t+s} - X_t$ 对一切的 t 都有相同分布, 称 X 为平稳增量过程

2 马氏链

2.1 离散时间马氏链

马尔可夫性 \leftrightarrow 已知现在, 过去与未来不相干/独立

Definition 2.1 ((离散时间) 马氏链)

称 S 值随机过程 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为马氏链, 若 X 满足以下马氏性: $\forall n \geq 0, x_0, x_1, \dots, x_n, y \in S$,

$$\mathbb{P}(\underbrace{X_{n+1} = y}_{\text{未来}} | \underbrace{X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}}_{\text{过去}}, \underbrace{X_n = x_n}_{\text{现在}}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x_n) \quad (M_1)$$

其中 X_0 的分布称为 X 的初始分布

Definition 2.2

当 S 为有限集, 称链为有限链, 当 S 为无限集, 称链为无限链

注: 改写 (M_1)

$$LHS = \mathbb{P}_{X_n = x_n}(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})$$

$$RHS = \mathbb{P}_{X_n = x_n}(X_{n+1} = y)$$

$$M_1 \Leftrightarrow \{X_{n+1} = y\} \perp\!\!\!\perp_{\{X_n = x_n\}} \{X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}\}$$

$$\Leftrightarrow X_{n+1} \perp\!\!\!\perp_{\{X_n = x_n\}} (X_0, \dots, X_{n-1})$$

(M_1) 未来 $\perp\!\!\!\perp_{\text{现在}}$ 过去

$$\mathbb{P}_{\text{现在}}(\text{未来} | \text{过去}) = \mathbb{P}_{\text{现在}}(\text{未来})$$

Lemma 2.1 (马氏性的等价表示)

[Grimmett [3]] 下面三个命题等价

1. (M_1) 马氏性
2. $(M_2) \forall k \geq 0, 0 \leq n_1 < \dots < n_k \leq n$, 对于 $y, x_{n_1}, \dots, x_{n_k} \in S$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_{n_1} = x_{n_1}, \dots, X_{n_k} = x_{n_k}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_{n_k} = x_{n_k}) \quad (2.1)$$

即

$$\{X_{n+1} = y\} \perp\!\!\!\perp_{\{X_{n_k} = x_{n_k}\}} \{X_{n_1} = x_{n_1}, \dots, X_{n_{k-1}} = x_{n_{k-1}}\}$$

3. (M_3) 对 $\forall m \geq 1, n \geq 0, \{y, x_i, 0 \leq i \leq n\} \subseteq S$, 有

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = y | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+m} = y | X_n = x_n) \quad (2.2)$$

即

$$\{X_{n+m} = y\} \perp\!\!\!\perp_{\{X_n = x_n\}} \{X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}\}$$

证明：思路 $1 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 2$

(2) \rightarrow (3), 先处理一些记号的问题. 记 (2) 中的 n 为 $n^{(2)}$, (3) 中的 n 为 $n^{(3)}$. 则取 $n_k = n^{(3)} = n^{(2)} + 1 - m \leq n^{(2)}$, 所以 $n^{(3)} + m = (n^{(2)} + 1 - m) + m = n^{(2)} + 1$, 即已知 (2) 可推 (3)

(3) \rightarrow (1), 取 $m = 1$, 显然

只需证 (3) \rightarrow (2), (1) \rightarrow (3)

这里回顾独立的三种写法

1. $A \perp\!\!\!\perp_B C$ 记号
2. $\mathbb{P}_B(A, C) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}_B(C)$ 定义
3. $\mathbb{P}_B(A|C) = \mathbb{P}_B(A)$ 定理

(Step 1) 证明 (3) \rightarrow (2)

思路: (2)(3) 条件不同, 想要由 (3) 推 (2), 则切换到 (2) 的条件概率测度, 展开, 再用 (3) 的条件瘦身

对 $\forall k \geq 2, 0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k = n$

令 $J = \{0, 1, \cdots, n_k - 1, n_k\} \setminus \{n_1, \cdots, n_k\}$, $\tilde{\mathbb{P}}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | X_{n_1} = x_{n_1}, \cdots, X_{n_k} = x_{n_k})$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}(X_{n+1} = y) &= \sum_{x_j \in S, j \in J} \tilde{\mathbb{P}}(X_{n+1} = y | X_j = x_j, j \in J) \cdot \tilde{\mathbb{P}}(X_j = x_j, j \in J) \quad [\text{全概公式}] \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_{n_k} = x_{n_k}) \sum_{x_j \in S, j \in J} \tilde{\mathbb{P}}(X_j = x_j, j \in J) \quad [(3), \mathbb{P}_C(\cdot|A) = \mathbb{P}_C(\cdot)] \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_{n_k} = x_{n_k}) \end{aligned}$$

其中, 记号 $\sum_{x_j \in S, j \in J}$ 中的下标意为: 假设 J 中元素个数为 $\#J = u$, 则 $(x^{(1)}, \cdots, x^{(u)}) \in S^u$. 从简单的开始, $\sum_{x \in S} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\Omega)$, $\sum_{(x,y) \in S^2} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(\Omega)$, \cdots , $\sum_{(x^{(1)}, \dots, x^{(u)}) \in S^u} \mathbb{P}(X^{(1)} = x^{(1)}, \cdots, X^{(u)} = x^{(u)}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

(Step 2) 下证 (1) \rightarrow (3)

1. $m = 1$ 时, 即 (1)

2. 假设 $m = k$ 时 (3) 成立, 即 $\forall n \geq 1, \{y, x_i, n \geq i \geq 0\} \subseteq S$,

$$\{X_{n+k} = y\} \perp\!\!\!\perp_{\{X_n = x_n\}} \{X_0 = x_0, \cdots, X_{n-1} = x_{n-1}\} \xrightarrow{\text{性质(1.14)}} \{X_{n+k} = y\} \perp\!\!\!\perp_{\{X_n = x_n\}} \{X_{n-1} = x_{n-1}\}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+k} = y | X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n) &= \mathbb{P}(X_{n+k} = y | X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+k} = y | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}) \end{aligned} \quad (*)$$

当 $m = k + 1$ 时, 对 $\forall \{y, x_i, n \geq i \geq 0\} \subseteq S$

令 $\tilde{\mathbb{P}}_n(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot | X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n)$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_n(X_{n+k+1} = y) &\stackrel{\text{Thm(1.5)}}{=} \sum_{x_{n+1} \in S} \tilde{\mathbb{P}}_n(X_{n+k+1} = y | X_{n+1} = x_{n+1}) \cdot \tilde{\mathbb{P}}_n(X_{n+1} = x_{n+1}) \\ &= \sum_{x_{n+1} \in S} \mathbb{P}(X_{n+k+1} = y | X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n) \cdot \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \quad [(*), \text{归纳法假设}] \\ &\stackrel{(1.2)}{=} \sum_{x_{n+1} \in S} \mathbb{P}(X_{n+k+1} = y, X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n) / \mathbb{P}(X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+k+1} = y, X_n = x_n) / \mathbb{P}(X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+k+1} = y | X_n = x_n) \end{aligned}$$

即 $m = k + 1$ 得证 □

证明 (Step 2) 时如果在 x_{n+k} 处展开而不是在 x_{n+1} , 也是可以的. 实际上在 $x_{n+j}, \forall j, 1 \leq j \leq k$ 展开都可以, 关键在于用性质 1.14 和全概公式 1.5 凑出乘法公式 (1.2), 消元即可.

Remark 4. 三种写法的直觉

1. M_1 : 未来“下一步”跟过去“每一步”都无关
2. M_2 : 未来“下一步”跟过去的“任意若干步”都无关
3. M_3 : 未来“下 m 步”跟过去“每一步”都无关

可以推出, 由 (2)(3), 下式也成立:

对 $\forall m \geq 1, n \geq 0, \{y, x_i, 0 \leq i \leq n\} \subseteq S$

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = y | X_{n_1} = x_{n_1}, \dots, X_{n_k} = x_{n_k}) = \mathbb{P}(X_{n+m} = y | X_{n_k} = x_{n_k})$$

Corollary 2.1

若 X 是马氏链, 则 $\forall n \geq 1, \{x_i, n \geq i \geq 0, y\} \subseteq S$, 有

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1})$$

补充记号:

- 乘积空间

$$S^n := \underbrace{S \times \dots \times S}_{n \text{ 个}}$$

- 乘积 σ 代数

$$\bigotimes_n 2^S := \underbrace{2^S \times \dots \times 2^S}_{n \text{ 个}}$$

Property 2.1 (马氏性的等价条件)

下列三个命题等价

1. 马氏性 (M_1)
2. 对 $\forall n \geq 1, m \geq 1, A \in \bigotimes_n 2^S, B \in \bigotimes_m 2^S$, 即 $(A \subseteq S^n, B \subseteq S^m)$, 有

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}((X_0, \dots, X_{n-1}) \in A, (X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) \in B) \\ &= \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}((X_0, \dots, X_{n-1}) \in A) \cdot \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}((X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) \in B) \end{aligned} \quad (2.3)$$

即 $(X_0, \dots, X_{n-1}) \perp_{\{X_n=x_n\}} (X_{n+1}, \dots, X_{n+m})$ 的定义

3. $\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}((X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) \in B | (X_0, \dots, X_{n-1}) \in A) = \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}((X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) \in B)$

证明: (2) \Leftrightarrow (3), 独立的定义和定理, 显然

(3) \rightarrow (1), 取 $k = 0$ 显然

只需证 (1) \rightarrow (3)

只需证 (3) 对简单事件 A, B (单点集合) 成立, 即 $\forall n \geq 1, m \geq 1, \{x_0, x_1, \dots, x_{n+m} \subseteq S\}$, 有

$$\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}((X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) = x_{n+1}^{n+m} | (X_0, \dots, X_{n-1}) = x_0^{n-1}) = \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}((X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) = x_{n+1}^{n+m})$$

其中 $x_{n+1}^{n+m} = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m}), x_0^{n-1} = (x_0, \dots, x_{n-1})$

* 只要对单点集合成立, 对一般情况也成立, 证明见 Theorem 1.1

令

$$\tilde{\mathbb{P}}_n(\cdot) := \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}(\cdot | (X_0, \dots, X_{n-1}) = x_0^{n-1}) = \mathbb{P}(\cdot | (X_0, \dots, X_n) = x_0^n)$$

只证 $m = 2$, 即由

$$\tilde{\mathbb{P}}_n(X_{n+1} = x_{n+1}) = \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}(X_{n+1} = x_{n+1})$$

证得

$$\tilde{\mathbb{P}}_n(X_{n+1} = x_{n+1}, X_{n+2} = x_{n+2}) = \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}(X_{n+1} = x_{n+1}, X_{n+2} = x_{n+2})$$

$$\tilde{\mathbb{P}}_n((X_{n+1}, X_{n+2}) = (x_{n+1}, x_{n+2})) = \tilde{\mathbb{P}}_n(X_{n+1} = x_{n+1}) \cdot \tilde{\mathbb{P}}_n(X_{n+2} = x_{n+2} | X_{n+1} = x_{n+1})$$

$$\stackrel{(M_1)}{=} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \cdot \mathbb{P}(X_{n+2} = x_{n+2} | X_{n+1} = x_{n+1})$$

$$\stackrel{\text{Cor}(2.1)}{=} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \cdot \mathbb{P}(X_{n+2} = x_{n+2} | X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n)$$

$$= \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}(X_{n+1} = x_{n+1}) \cdot \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}(X_{n+2} = x_{n+2} | X_{n+1} = x_{n+1})$$

$$\stackrel{(1.2)}{=} \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}((X_{n+1}, X_{n+2}) = (x_{n+1}, x_{n+2}))$$

Corollary 2.2

设 X 为马氏链, 则对每一个 $n \geq 1, m \geq 1, u_k < u_{k+1}, 0 \leq k \leq n+m-1$, 有

$$(X_{u_0}, \dots, X_{u_{n-1}}) \perp\!\!\!\perp_{\{X_{u_n}=x_{u_n}\}}(X_{u_{n+1}}, \dots, X_{u_{n+m}})$$

2.2 时齐马氏链与转移概率

Definition 2.3 (时间齐次马氏链)

称马氏链 $X: \{X_n, n \geq 0\}$ 为时齐的或时间齐次马氏链, 若对 $\forall n \geq 0, i, j \in S$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i)$$

Definition 2.4

X 是时齐马氏链, 称

$$p_{ij} := p_{i,j} = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) \quad i, j \in S$$

为 X 从状态 i 到 j 的 (一步) 转移概率, 并称矩阵

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

为 (一步) 转移 (概率) 矩阵

若不加说明, 则默认讨论的马氏链都是时齐的

注:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_{n+1} = y) &= \sum_{x \in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) \cdot \mathbb{P}(X_n = x) \\ &= \sum_{x \in S} p_{xy} \cdot \mathbb{P}(X_n = x) \end{aligned}$$

Theorem 2.1 (转移矩阵的刻画)

转移矩阵是一个随机矩阵, 即

1. $\forall i, j \in S, p_{ij} \geq 0$
2. $\forall i \in S, \sum_{j \in S} p_{ij} = 1$

即转移矩阵的每一行 $(p_{ij})_{j \in S}$ 为 S 上的一个概率分布

注: 另一种随机矩阵是指元素为随机变量的矩阵, 和这里讲的没有关系

证明:

$$\sum_{j \in S} \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) = \mathbb{P}(X_1 \in S | X_0 = i) = \mathbb{P}(\Omega | X_0 = i) = 1$$

Definition 2.5 (时齐马氏链)

设 $X = \{X_n, n \geq 0\}$ 为一随机过程, 若

1. 初值 X_0 满足分布 $\mu = (\mu_i)_{i \in S}$, 即 $\mathbb{P}(X_0 = i) = \mu_i, i \in S$
2. 存在一个随机矩阵 $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ 使得 $\forall n \geq 1, i_0, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = p_{ij}$$

则称 X 具有初始分布 μ 和转移矩阵 P 的 (时齐) 马氏链, 记作 $X \sim \text{Markov}(\mu, P)$

上述定义与 (M_1) 马氏链定义 2.1 等价

证明: $(2) \rightarrow (M_1)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) &= \sum_{(i_0, \dots, i_{n-1}) \in S^n} \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= \sum_{(i_0, \dots, i_{n-1}) \in S^n} p_{ij} \cdot \mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = p_{ij} \end{aligned}$$

所以 $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$

即然有 (M_1) , 为什么还要定义 2.5? 因为该定义决定了马氏链的有限维分布

Example 2.1 (Gambler's Ruin)

[Durrett [2], P1]

Example 1.1 (Gambler's Ruin). Consider a gambling game in which on any turn you win \$1 with probability $p = 0.4$ or lose \$1 with probability $1 - p = 0.6$. Suppose further that you adopt the rule that you quit playing if your fortune reaches \$N. Of course, if your fortune reaches \$0 the casino makes you stop.

Let X_n be the amount of money you have after n plays. Your fortune, X_n has the “Markov property.” In words, this means that given the current state, X_n , any other information about the past is irrelevant for predicting the next state X_{n+1} . To check

图 2: Gambler's Ruin

Claim 2.1. $\{X_n, n \geq 0\}$ 为 (时齐) 马氏链

1. 对于 $0 < i_0, \dots, i_{n-1} < N, n \geq 0$ 有

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i) = 0.4 = \mathbb{P}(\text{第 } n+1 \text{ 次赌局赢一元}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i) = 0.6 = \mathbb{P}(\text{第 } n+1 \text{ 次赌局输一元}) \end{aligned}$$

2. $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = 1 = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0)$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = N | X_n = N, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = 1 = \mathbb{P}(X_{n+1} = N | X_n = N)$$

最后一个等号是由题目设定得到, 从 $0 \rightarrow 0$ 或 $N \rightarrow N$ 的概率都为 1, 因为游戏结束
 综上, $p(i, i+1) = 0.4, 0 < i < N, p(i, i-1) = 0.6, 0 < i < N, p(0, 0) = p(N, N) = 1$
 e.g.

When $N = 5$ the matrix is

	0	1	2	3	4	5
0	1.0	0	0	0	0	0
1	0.6	0	0.4	0	0	0
2	0	0.6	0	0.4	0	0
3	0	0	0.6	0	0.4	0
4	0	0	0	0.6	0	0.4
5	0	0	0	0	0	1.0

图 3: $N=5$

Example 2.2 (Two-Stage Markov Chains)

[Durrett [2], P7]

Example 1.10 (Two-Stage Markov Chains). In a Markov chain the distribution of X_{n+1} only depends on X_n . This can easily be generalized to case in which the distribution of X_{n+1} only depends on (X_n, X_{n-1}) . For a concrete example consider a basketball player who makes a shot with the following probabilities:

- 1/2 if he has missed the last two times
- 2/3 if he has hit one of his last two shots
- 3/4 if he has hit both of his last two shots

图 4: Two-Stage Markov Chains

1. $\mathbb{P}(X_{n+1} = H | X_n = M, X_{n-1} = M) = 1/2$
2. $\mathbb{P}(X_{n+1} = H | X_n = M, X_{n-1} = H) = \mathbb{P}(X_{n+1} = H | X_n = H, X_{n-1} = M) = 2/3$
3. $\mathbb{P}(X_{n+1} = H | X_n = H, X_{n-1} = H) = 3/4$

Claim 2.2. $Y_n = (X_n, X_{n-1}), n \geq 1$ 则 $\{Y_n, n \geq 1\}$ 是 (时齐) 马氏链, $Y_n : \Omega \rightarrow \{HH, HM, MH, MM\}$

证明:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(Y_{n+1} = HH | Y_n = HH, Y_j = (x_j, x_{j-1}), 1 \leq j \leq n-1) \\
 &= \mathbb{P}(X_{n+1} = H, X_n = H | X_n = H, X_{n-1} = H, X_j = x_j, X_{j-1} = x_{j-1}, 0 \leq j \leq n-1) \\
 &= \mathbb{P}(X_{n+1} = H | X_n = H, X_{n-1} = H) \\
 &= 3/4 \quad [3.]
 \end{aligned}$$

对 1.2. 同理

□

Proposition 2.1 (初见马氏链的有限维分布)

设 $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ 为随机矩阵, $\mu = (\mu_i)_{i \in S}$ 为概率分布, $X = \{X_n, n \geq 0\}$ 为 S 值离散时间随机过程. 则过程 $X \sim \text{Markov}(\mu, P)$ 当且仅当对任意的 $n \geq 0, i_0, i_1, \dots, i_n \in S$, X 有有限维分布:

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \mu_{i_0} \prod_{k=0}^{n-1} p_{i_k i_{k+1}} \quad (2.4)$$

证明: \Rightarrow

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) \\ &= \mathbb{P}(X_0 = i_0) \mathbb{P}(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \cdots \mathbb{P}(X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \quad [\text{乘法公式(1.2)}] \\ &= \mathbb{P}(X_0 = i_0) \mathbb{P}(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \cdots \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \quad [\text{Markov}] \\ &= \mu_{i_0} p_{i_0, i_1} \cdots p_{i_{n-1}, i_n} \end{aligned}$$

严格地讲, $\mathbb{P}(\cdot|A)$ 需保证 $\mathbb{P}(A) > 0$. 对 $\mathbb{P}(A) = 0$ 情况的分类讨论, 见 Resnick [4], prop 2.1.1

\Leftarrow

1. $n = 0, \mathbb{P}(X_0 = i_0) = \mu_{i_0} \Rightarrow X_0 \sim (\mu_i)_{i \in S}$
2. $n \geq 1$

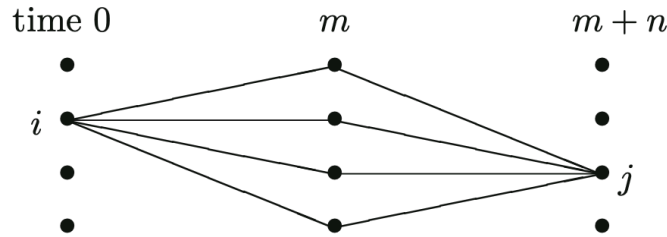
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = \frac{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n+1} = i_{n+1})}{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)} = p_{i_n, i_{n+1}}$$

由时齐马氏链定义, 初始分布和转移矩阵都符合定义 2.5

$$\therefore X \sim \text{Markov}(\mu, P) \quad \square$$

对于 $\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n)$, 如果我们想把 X_1 挖掉, 即

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_0 = i_0, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n) &= \sum_{i_1 \in S} \mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) \\ &= \mu_{i_0} \sum_{i_1 \in S} (P_{i_0, i_1} P_{i_1, i_2}) \cdots P_{i_{n-1}, i_n} \end{aligned}$$



2.3 多步转移概率与矩阵乘法

Definition 2.6

设 $X = \{X_n, n \geq 0\}$ 为马氏链, 称

$$p_{ij}(m, m+n) := \mathbb{P}(X_{m+n} = j | X_m = i) \quad (i, j \in S, m, n \geq 0)$$

为 X 的 n 步转移概率, 并称 $P(m, m+n) = (p_{ij}(m, m+n))_{i,j \in S}$ 为 X 的 n 步转移 (概率) 矩阵, 其中

$$p_{i,j}(0, 0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

当 X 时齐, $P(m, m+1) = (p_{ij}(m, m+1))_{i,j \in S} = (p_{ij}(0, 1))_{i,j \in S} = (p_{ij})_{i,j \in S}$

可见 $n=1$ 时, $P(m, m+1)$ 与 m 无关. 那 $n > 1$ 时呢?

2.3.1 Chapman-Kolmogorov 方程

Theorem 2.2 (C-K 方程)

设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为马氏链

$$p_{ij}(m, m+n+r) = \sum_{k \in S} p_{ik}(m, m+n) p_{kj}(m+n, m+n+r) \quad (2.5)$$

其中 $i, j \in S, m, n, r \geq 0$, 即

$$P(m, m+n+r) = P(m, m+n)P(m+n, m+n+r)$$

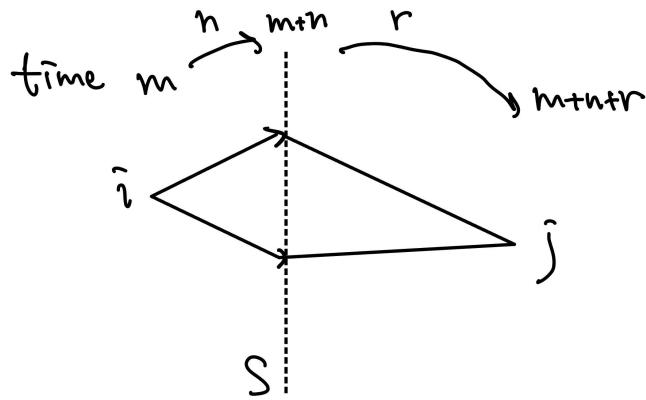


图 5: Multi-steps

证明:

$$\begin{aligned}
p_{ij}(m, m+n+r) &= P(X_{m+n+r} = j | X_m = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_{m+n+r} = j, X_{m+n} = k | X_m = i) \\
&= \sum_{k \in S} \mathbb{P}_{\{X_m=i\}}(X_{m+n+r} = j | X_{m+n} = k) \mathbb{P}_{\{X_m=i\}}(X_{m+n} = k) \quad [\text{乘法公式(1.2)}] \\
&= \sum_{k \in S} p_{ik}(m, m+n) p_{kj}(m+n, m+n+r) \quad [\text{Markov}]
\end{aligned}$$

Corollary 2.3

设 X 为具有（一步）转移矩阵 P 的时齐马氏链, 则

1. $\forall m, n \geq 0$, 有 $P(m, m+n) = P(0, n) = P^n$. 其中, 约定 $P^0 = I$ (单位矩阵)
从而, 可记 X 的 n 步转移概率为 $p_{ij}(n)$ 或 $p_{ij}^{(n)}$, n 步转移概率矩阵为 $P(n)$, 且有

$$P(n) = P^n = (p_{ij}^{(n)})_{i,j \in S}$$

2. C-K 方程可改写为

$$p_{ij}(m+n) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

$$P(m+n) = P(m)P(n), \text{ 即 } P^{m+n} = P^m P^n$$

证明:

$$\begin{aligned}
P(m, m+n) &= P(m, m+1) \cdot P(m+1, m+n) \quad [\text{C-K}] \\
&= P \cdot P(m+1, m+n) \quad [\text{时齐}] \\
&= P^n \quad \square
\end{aligned}$$

Proposition 2.2

$\forall n \geq 0, P(n) = P^n$ 仍是一个随机矩阵 (Theorem 2.1)

证明: $n = 2$ 时, $P^2 = (p_{ij}(2))_{i,j \in S}$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in S} p_{ij}(2) &= \sum_{j \in S} \sum_{k \in S} p_{ik} p_{kj} \quad [\text{C-K, 默认 } p_{ik}(1) = p_{ik}] \\
&= \sum_{k \in S} \sum_{j \in S} p_{ik} p_{kj} \\
&= \sum_{k \in S} p_{ik} \cdot \left(\sum_{j \in S} p_{kj} \right) \\
&= \sum_{k \in S} p_{ik} = 1 \quad \square
\end{aligned}$$

第二个等号, 级数可交换是因为非负, 要么有限 (收敛)、要么 $+\infty$ (发散)

2.3.2 马氏链的任意有限维分布

Proposition 2.3

$X \sim \text{Markov}(\mu, P)$, 其中 $\mu = (\mu_i)_{i \in S}, P = (p_{ij})_{i,j \in S}$, 则

$$\mathbb{P}(X_{u_1} = i_1, \dots, X_{u_n} = i_n) = \mu_{i_1}^{(u_1)} \prod_{k=1}^{n-1} p_{i_k, i_{k+1}}^{(u_{k+1}-u_k)}$$

其中, $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n, i_1, i_2, \dots, i_n \in S, \mu^{(u_1)} = (\mu_i^{(u_1)})_{i \in S}$ 为 X_{u_1} 的有限维分布

证明:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{u_1} = i_1, \dots, X_{u_n} = i_n) &= \mathbb{P}(X_{u_1} = i_1) \cdot \mathbb{P}(X_{u_2} = i_2 | X_{u_1} = i_1) \cdots \mathbb{P}(X_{u_n} = i_n | X_{u_1} = i_1, \dots, X_{u_{n-1}} = i_{n-1}) \\ &= (\mu_{i_1}^{(u_1)}) p_{i_1, i_2}^{(u_2-u_1)} \cdots p_{i_{n-1}, i_n}^{(u_n-u_{n-1})} \quad [\text{Markov}] \\ &= \mu_{i_1}^{(u_1)} \prod_{k=1}^{n-1} p_{i_k, i_{k+1}}^{(u_{k+1}-u_k)} \end{aligned}$$

用概率表示不够直观, 尝试用转移矩阵来表示

Lemma 2.2

$\mu^{(m+n)} = \mu^{(n)} P^m (\forall m, n \geq 0)$, 即

$$\mu_j^{(m+n)} = (\mu^{(n)} P^m)_j = \sum_{i \in S} \mu_i^{(n)} p_{ij}^{(m)}$$

特别地, 取 $n = 0$, 则 $\mu^{(m)} = \mu \cdot P^m$ (μ 看成行向量), 即 $\mu_j^{(m)} = (\mu P^m)_j = \sum_{i \in S} \mu_i \cdot p_{ij}^{(m)}$

证明:

$$\begin{aligned} \mu_j^{(n+m)} &= \mathbb{P}(X_{n+m} = j) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = i) \mathbb{P}(X_n = i) \\ &= \sum_{i \in S} p_{ij}^{(m)} \mu_i^{(n)} \\ &= (\mu^{(n)} P^m)_j \quad \square \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu^{(m+n)} = \mu^{(n)} P^m$$

Theorem 2.3 (任意有限维分布 II)

$\forall 0 \leq u_1 < u_2 < \dots < u_n, i_1, \dots, i_n \in S$

$$\mathbb{P}(X_{u_1} = i_1, \dots, X_{u_n} = i_n) = (\mu P^{u_1}) \prod_{k=1}^{n-1} P_{i_k, i_{k+1}}^{u_{k+1}-u_k}$$

其中, $P_{i,j}^m =: (P^m)_{i,j} =: p_{i,j}^{(m)}$

讨论随机过程地存在性:

抽象地, $\mu, P \xrightarrow{\text{Thm (1.14)}} \text{有限维分布族} \rightarrow X \sim \text{Markov}(\mu, P)$, μ, P 可以刻画具备对称性、相容性的有限维分布

具体地, 参考 Resnick [4], P62, Section 2.1

2.4 (从固定点出发的) 马氏链

固定 $i \in S$, 定义 $\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | X_0 = i)$, $\mathbb{E}_i(X) = \mathbb{E}(X | X_0 = i) = \sum_{x \in S} x \mathbb{P}_i(X = x)$

2.4.1 链的状态: 常返和暂留

Definition 2.7

称状态 i 为常返的, 若

$$\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ 对某个 } n \geq 1) = 1$$

如果上面的概率 < 1 , 则称为暂留的/非常返的

注: i 常返 $\Leftrightarrow \mathbb{P}_i(\bigcup_{n \geq 1} \{X_n = i\}) = 1$

思考: i 常返 \Leftrightarrow “不停地/无数次回到 i ”

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}_i(\omega | \omega \in \text{无数多个 } \{X_n = i\})$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}_i(\omega | \omega \in \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq k} \{X_n = i\}, \forall k)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}_i(X_n = i, i.o.) \text{ (infinitely often)}$$

无数多次返回 i 可严格定义为:

$$\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq k} \{X_n = i\}$$

集合的语言中, \cup 即 \exists , \cap 即 \forall , 因此

- $\bigcup_{n \geq k} \{X_n = i\}$ 表示 $\exists n_0 \geq k$ 使得 $X_{n_0} = i$
- 对 $\forall k$ 取交集 $\bigcap_{k \geq 1}$, 即无论 k 多大, 总存在更大的 n 满足 $X_n = i$, 从而保证无限次返回

即 $\forall k, \exists n_k, \text{s.t. } \{X_{n_k} = i\}$ 发生

$$k = 1, n_1 \geq k$$

$$k = n_1 + 1, n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$$

...

Remark 5 (如何进一步理解). 无界和 ∞ 的区别是什么?

无界: $\forall M > 0, \exists k, \text{s.t. } |x_k| > M$

Example 2.3

$1, 2, 3, 4, \dots$ 为 ∞ /无界

$1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots$ 并非 ∞ , 但是无界的

迁移到 $\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq k}$ 的例子

Example 2.4

$A_1 = \{0, 1\}, A_2 = \{2\}, A_3 = \{0, 3\}, \dots$, 则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq k} A_n = \{0\}, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$$

其中 $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq k}$ 也即 \limsup

但我们推理得到的“常返”和定义里的并不等价

$$\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq k} \{X_n = i\} \not\Leftrightarrow \bigcup_{n \geq 1} \{X_n = i\}$$

且 LHS 是 RHS 的子集, 因此由定义的 $\mathbb{P}(RHS) = 1$ 不能推出 $\mathbb{P}(LHS) = 1$. 于是我们疑惑为什么会叫它常返. 这里要用到高阶知识“停时”, 我们最后会回到这个问题.

下面给出几种判断常返/暂留的方法.

2.4.2 从数学角度: 并改写成不交并

$$i \text{ 常返} \Leftrightarrow \mathbb{P}_i(\bigcup_{n \geq 1} \{X_n = i\}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}_i(\text{有限步到达 } i) = 1$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\text{从 } i \text{ 出发条件下, 有限时间内回到 } i) = 1$$

$$B_1(i) = \{X_1 = i\}, B_2(i) = \{X_2 = i\} \setminus \{X_1 = i\} = \{X_2 = i, X_1 \neq i\}, \dots, B_n(i) = \{X_n = i, X_{n-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i\}$$

由练习 2,

$$\sum_{n \geq 1} B_n(i) = \bigcup_{n \geq 1} \{X_n = i\} \quad (2.6)$$

$$i \text{ 常返} \Leftrightarrow 1 = \mathbb{P}_i(\sum_{n \geq 1} B_n(i)) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_i(B_n(i)), \text{ 第二个等号由可列可加性得到 (定义 1.5)}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(B_n(j)) &= \mathbb{P}_i(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j) = \mathbb{P}_i(\text{首次访问 } j \text{ 的时刻为 } n) \\ &= \mathbb{P}_i(\text{走 } n \text{ 步首次到达 } j) \end{aligned}$$

故

$$\mathbb{P}_i\left(\sum_{n \geq 1} B_n(j)\right) = \mathbb{P}_i(\text{首次访问 } j \text{ 的时刻为有限时间}) = \mathbb{P}_i(\text{有限时间内首次访问 } j)$$

记号

$$\begin{cases} f_{ij} := \mathbb{P}_i\left(\sum_{n \geq 1} B_n(j)\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_i(B_n(j)) = \mathbb{P}_i(\text{首次访问 } j \text{ 的时刻为有限时间}) \\ f_{ij}(n) := \mathbb{P}_i(B_n(j)) = \mathbb{P}_i(\text{首次访问 } j \text{ 的时刻为 } n) \end{cases} \quad (2.7)$$

Proposition 2.4

(不交并视角下) 常返和暂留的等价命题

1. i 常返 \iff

$$1 = f_{ii} = \sum_{n \geq 1} f_{ii}(n) \quad (2.8)$$

2. i 暂留 \iff

$$1 > f_{ii} = \sum_{n \geq 1} f_{ii}(n) \quad (2.9)$$

证明：由可列可加性, $f_{ii} = \sum_{n \geq 1} f_{ii}(n)$ 总是成立. 而 $f_{ii} = \mathbb{P}_i(\sum_{n \geq 1} B_n(i)) = \mathbb{P}_i(\cup_{n \geq 1} \{X_n = i\})$, 即 i 常返的定义, 因此 $f_{ii} = 1$. 若 i 暂留, 则 $f_{ii} \neq 1$, 由概率测度的定义, f_{ii} 不能大于 1, 所以 $f_{ii} < 1$. \square

2.4.3 从“多步转移概率”角度判别定义新记号 (P 不是转移矩阵)

$$P_{ij}(s) := \sum_{n \geq 0} s^n p_{ij}(n) \quad F_{ij}(s) := \sum_{n \geq 0} s^n f_{ij}(n)$$

其中, $p_{ij}(0) = \delta_{ij}, f_{ij}(0) = 0$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

注：当 $|s| < 1$ 时, $P_{ij}(s), F_{ij}(s)$ 绝对收敛

由 Abel 连续性定理,

$$\lim_{s \uparrow 1} F_{ij}(s) = \sum_{n \geq 1} f_{ij}(n) = f_{ij} \in [0, 1]$$

$$\lim_{s \uparrow 1} P_{ij}(s) = \sum_{n \geq 0} p_{ij}(0) = \text{finite} / +\infty$$

Lemma 2.3 (Grimmett [3], Thm 6.3.3)设 $|s| < 1$, 则

$$P_{ij}(s) = \delta_{ij} + P_{jj}(s)F_{ij}(s) \quad (2.10)$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

证明：构造不交并, $B_m(i) = \{X_m = i, X_{m-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i\}, m \geq 1$

$$\sum_{m \geq 1} B_m(i) = \cup_{n \geq 1} \{X_n = i\}, B_m(i) \subseteq \{X_n \neq i\}, m \geq n + 1$$

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &= \mathbb{P}_i(X_n = j) = \mathbb{P}_i(\{X_n = j\} \cap \sum_{m \geq 1} B_m(j)) \\ &= \sum_{m \geq 1} \mathbb{P}_i(\{X_n = j\} \cap B_m(j)) = \sum_{m=1}^n \mathbb{P}_i(\{X_n = j\} \cap B_m(j)) \end{aligned} \quad (2.11)$$

最后一个等号成立是因为 $m \geq n + 1$ 时 $\{X_n = j\} \cap B_m(j)$ 为空集

$$\sum_{m=1}^n \mathbb{P}_i(\{X_n = j\} \cap B_m(j)) = \sum_{m=1}^n \mathbb{P}_i(X_n = j | B_m(j)) \mathbb{P}_i(B_m(j)) \quad (2.12)$$

其中 $X_m = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j, X_{n-1} \in S \setminus \{j\}$

用一般而非单点的马氏性(2.2)

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \mathbb{P}_i(X_n = j | B_m(j)) \mathbb{P}_i(B_m(j)) &= \sum_{m=1}^n \mathbb{P}(X_n = j | X_m = j) \cdot f_{ij}(m) \\ &= \sum_{m=1}^n p_{jj}(n-m) \cdot f_{ij}(m) \end{aligned} \quad (2.13)$$

整合(2.11), (2.12), (2.13),

$$p_{ij}(n) = \sum_{m=1}^n p_{jj}(n-m) \cdot f_{ij}(m) \quad (2.14)$$

当 $n \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} P_{ij}(s) &= s^0 p_{ij}(0) + \sum_{n \geq 1} s^n \cdot p_{ij}(n) \\ &= \delta_{ij} + \sum_{n \geq 1} s^n \sum_{m=1}^n p_{jj}(n-m) f_{ij}(m) \\ &= \delta_{ij} + \sum_{n \geq 1} \sum_{m=1}^n s^n p_{jj}(n-m) f_{ij}(m) \\ &= \delta_{ij} + \sum_{n \geq 1} \sum_{m=1}^n (s^{n-m} p_{jj}(n-m)) (s^m f_{ij}(m)) \\ &= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{1 \leq m \leq n\}} (s^{n-m} p_{jj}(n-m)) (s^m f_{ij}(m)) \end{aligned}$$

【重要技巧】 把 $\mathbb{I}_{\{1 \leq m \leq n\}} (s^{n-m} p_{jj}(n-m)) (s^m f_{ij}(m))$ 看作 $a_{n,m}$, 由 Lemma 1.1 考察绝对收敛 $0 \leq s < 1, |s| = s$

正向级数一定有意义, 就看是有限/ ∞

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{1 \leq m \leq n\}} s^{n-m} p_{jj}(n-m) s^m f_{ij}(m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{1 \leq m \leq n\}} s^{n-m} p_{jj}(n-m) s^m f_{ij}(m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} s^{n-m} p_{jj}(n-m) \right) s^m f_{ij}(m) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} s^k p_{jj}(k) \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} s^m f_{ij}(m) \right) < \infty
\end{aligned}$$

其中 $k = n - m$. 因为 $s^0 f_{ij}(0) = 0$, 则 $\sum_{m=0}^{\infty} s^m f_{ij}(m) = \sum_{m=1}^{\infty} s^m f_{ij}(m)$. 代回原式

$$P_{ij}(s) = \delta_{ij} + P_{jj}(s) \cdot F_{ij}(s)$$

Proposition 2.5

(多步转移概率视角下) 常返和暂留的等价命题

1. j 常返 \iff

$$1 = f_{jj} \iff \sum_{n \geq 0} p_{jj}(n) = \infty \quad (2.15)$$

2. j 暂留 \iff

$$\begin{aligned}
1 > f_{jj} &\iff \sum_{n \geq 0} p_{jj}(n) < \infty \\
&\Rightarrow \sum_{n \geq 0} p_{ij}(n) < \infty, \forall i \in S \\
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = 0, \forall i \in S
\end{aligned} \quad (2.16)$$

证明: 只证 (1). $|s| < 1$ 时, $P_{ij}(s) = \delta_{ij} + P_{jj}(s)F_{ij}(s)$

令 $i = j$, $P_{jj}(s) = 1 + P_{jj}(s)F_{jj}(s)$

$$P_{jj}(s) = \frac{1}{1 - F_{jj}(s)} \quad (2.17)$$

由(2.8), j 常返 $\iff 1 = f_{jj} = F_{jj}(1) \stackrel{\text{Abel}}{=} \lim_{s \uparrow 1} F_{jj}(s)$

对(2.17), 令 $s \rightarrow 1$, 有 $\sum_{n \geq 0} p_{jj}(n) = +\infty$ □

Problem 6 (作业 5-1)

证明: j 暂留 $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} p_{ij}(n) < \infty, \forall i \in S$

证明. 由(2.10), 若 $s \uparrow 1$,

$$\sum_{n \geq 0} p_{ij}(n) = \delta_{ij} + \left(\sum_{n \geq 0} p_{jj}(n) \right) \left(\sum_{n \geq 0} f_{ij}(n) \right) \leq \delta_{ij} + \sum_{n \geq 0} p_{jj}(n) < \infty$$

其中 $\sum_{n \geq 0} f_{ij}(n) = f_{ij} \in [0, 1]$. □

2.4.4 从“首次回访时间”角度判别

$$\begin{aligned}
 j \text{ 常返} &\iff 1 = \mathbb{P}_j(X_n = j \text{ 对某个 } n \geq 1) = \mathbb{P}_j(\text{有限时间内回访 } j) \\
 &\iff 1 = f_{jj} = \mathbb{P}_j(\underbrace{\text{首次回访 } j \text{ 的时刻}}_{T_j < \infty} \text{ 有限}) \\
 1 &= \sum_{n \geq 1} f_{jj}(n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_j(\underbrace{\text{首次回访 } j \text{ 的时刻}}_{T_j = n} \text{ 是 } n)
 \end{aligned}$$

Definition 2.8 (首次回访时间)

首次回访 j 的时刻

$$T_j = \min\{n \geq 1 | X_n = j\} \quad (2.18)$$

约定 $\min \emptyset = +\infty$

注: $\{T_j = \infty\} \iff \{\omega | \{n \geq 1 | X_n(\omega) = j\} = \emptyset\} \iff \{\omega | X_n(\omega) \neq j, \forall n \geq 1\} = \cap_{n \geq 1} \{X_n \neq j\}$
 $\{T_j < \infty\} = (\{T_j = \infty\})^c = (\cap_{n \geq 1} \{X_n \neq j\})^c = \cup_{n \geq 1} (\{X_n \neq j\})^c = \cup_{n \geq 1} \{X_n = j\}$
 这个式子串联起常返的定义和 T_j 的关系, 于是有以下性质.

Property 2.2

$$f_{jj} = \mathbb{P}_j(T_j < \infty), f_{jj}(n) = \mathbb{P}_j(T_j = n)$$

由(2.7)知, $f_{ij}, f_{ij}(n)$ 是由不交并定义的, 对于“首次回访时间”这一角度, 定义新的符号

$$\rho_{ij} := \mathbb{P}_i(T_j < \infty) \quad (2.19)$$

Proposition 2.6

(首次回访时间视角下) 常返和暂留的等价命题

1. j 常返 \iff

$$1 = \rho_{jj} = \mathbb{P}_j(T_j < \infty) \iff 0 = \mathbb{P}_j(T_j = \infty) \quad (2.20)$$

2. j 暂留 \iff

$$1 > \rho_{jj} = \mathbb{P}_j(T_j < \infty) \iff 0 < \mathbb{P}_j(T_j = \infty) \quad (2.21)$$

证明: 由(2.15), (2.16), j 常返 $\iff 1 = f_{jj} = \rho_{jj} \iff 0 = 1 - \rho_{jj}$, 其余同理. □

Definition 2.9 (平均回访时间)

j 的平均回访时间

$$m_j := \mathbb{E}_j T_j = \mathbb{E}(T_j | X_0 = j) \quad (2.22)$$

Theorem 2.4

用不交并表示平均回访时间.

$$m_j = \mathbb{E}_j T_j = \begin{cases} \sum_{n \geq 1} n f_{jj}(n) & j \text{ 常返} \\ \infty & j \text{ 暂留} \end{cases} \quad (2.23)$$

证明:

$$(1) j \text{ 暂留} \Rightarrow \mathbb{P}_j(T_j = \infty) > 0$$

$$T_j = T_j \mathbb{I}_{\{T_j = \infty\}} + T_j \mathbb{I}_{\{T_j < \infty\}}$$

$$\mathbb{E}_j T_j = \mathbb{E}_j T_j \mathbb{I}_{\{T_j = \infty\}} + \mathbb{E}_j T_j \mathbb{I}_{\{T_j < \infty\}} \geq \mathbb{E}_j T_j \mathbb{I}_{\{T_j = \infty\}} = \infty \cdot \mathbb{P}_j(T_j = \infty) = \infty$$

$$(2) j \text{ 常返} \Rightarrow \mathbb{P}_j(T_j = \infty) = 0$$

取期望时不起作用, 因为 $0 \cdot \infty$ 是不定形

$$\mathbb{E}_j T_j = \mathbb{E}_j T_j \mathbb{I}_{\{T_j < \infty\}} = \mathbb{E}_j T_j \mathbb{I}_{\sum_{n \geq 1} \{T_j = n\}} \stackrel{(1.1)}{=} \mathbb{E}_j \sum_{n \geq 1} T_j \mathbb{I}_{\{T_j = n\}} = \sum_{n \geq 1} n \mathbb{P}_j(T_j = n) = \sum_{n \geq 1} n f_{jj}(n)$$

Definition 2.10 (正常返/零常返)

j 常返时

1. $\mathbb{E}_j T_j < \infty$ 称 j 是正常返
2. $\mathbb{E}_j T_j = \infty$ 称 j 是零常返 (平均意义上再也不回来)

$$\begin{aligned} j \text{ 常返} &\iff 1 = f_{jj} \iff \sum_{n \geq 0} p_{jj}(n) = \infty \\ &\iff 1 = \rho_{jj} = \mathbb{P}_j(T_j < \infty) \iff 0 = \mathbb{P}_j(T_j = \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_j(T_j < \infty) &= \mathbb{P}(\text{从 } j \text{ 出发条件下, 首次回到 } j \text{ 的时刻有限}) \\ &= \mathbb{P}(\text{从 } j \text{ 出发条件下, 有限时间内至少访问 } j \text{ 有 } 1 \text{ 次}) \\ &= \mathbb{P}(\text{从 } j \text{ 出发条件下, 有限时间内回访 } j \text{ 的次数 } \geq 1) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Definition 2.11 (访问次数)

链在时刻 0 之后, 访问 j 的次数

$$N(j) := \#\{n \geq 1 | X_n = j\} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{I}_{\{X_n = j\}} \quad (2.25)$$

注: $N(j) : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{+\infty\}$

至此, 我们已经从四个角度表示了常返

1. 常返的定义
2. 不交并
3. 多步转移概率
4. 首次访问时间

做个阶段性小结, 回顾 i 常返的几种等价表示

$$\begin{aligned}
i \text{ 常返} &\stackrel{\text{Def}}{\iff} 1 = \mathbb{P}_i\left(\bigcup_{n \geq 1} \{X_n = i\}\right) \\
&\iff 1 = f_{ii} := \sum_{n \geq 1} f_{ii}(n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_i(X_1 \neq i, \dots, X_{n-1} \neq i, X_n = i) \\
&\iff \sum_{n \geq 1} p_{ii}(n) = \infty \\
&\iff 1 = \rho_{ii} = \mathbb{P}_i(T_i^{(1)} := T_i < \infty)
\end{aligned}$$

由(2.24), $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = \mathbb{P}_i(N(i) \geq 1)$, 因此可得“回访次数”视角下 i 常返的条件

Proposition 2.7

(回访次数视角下) 常返和暂留的等价命题

1. i 常返 \iff

$$\mathbb{P}_i\{N(i) \geq 1\} = 1 \quad (2.26)$$

2. i 暂留 \iff

$$\mathbb{P}_i\{N(i) \geq 1\} < 1 \quad (2.27)$$

另一方面, 我们从“常返”的文字含义推理.

无数次地回访 \leftrightarrow 访问次数 $= \infty \leftrightarrow$

$$\mathbb{P}_i(N(i) = \infty) = 1$$

两种表述的等价条件互相等价吗? 即

$$\mathbb{P}_i(N(i) \geq 1) \stackrel{?}{\iff} \mathbb{P}_i(N(i) = \infty)$$

需要 Strong Markov Property (SMP) 使上面 \iff 成立. 这里先补充一些关于 $N(j)$ 的内容, 然后再回到证明.

考察 $\{N(y) = \infty\} = \cap_{k \geq 1} \{N(y) \geq k\}$

由概率测度的连续性 (性质1.3)

$$\mathbb{P}_x(N(y) = \infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(N(y) \geq k)$$

其中,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(N(y) \geq k) &= \mathbb{P}(\text{从 } x \text{ 出发条件下, 访问 } y \text{ 的次数} \geq k) \\
&= \mathbb{P}(\text{从 } x \text{ 出发条件下, 至少访问 } y \text{ 有 } k \text{ 次}) \\
&= \mathbb{P}(\text{从 } x \text{ 出发条件下, 第 } k \text{ 次访问 } y \text{ 的时刻有限})
\end{aligned}$$

Definition 2.12 (第 k 次访问时间)

由 $T_y^{(1)} := T_y := \min\{n \geq 1 | X_n = y\}, T_y^{(2)} := \min\{n > T_y^{(1)} | X_n = y\}, \dots$, 得到

$$T_y^{(k)} := \min\{n > T_y^{(k-1)} | X_n = y\}, \quad \forall k \geq 2 \quad (2.28)$$

Claim 2.3. $N(y) \geq k$ 与 “第 k 次访问 y 的时刻有限” 等价,

$$\mathbb{P}_x(N(y) \geq k) = \mathbb{P}_x(T_y^{(k)} < \infty) \quad (2.29)$$

Definition 2.13

(1) 第 k 次访问概率

$$\rho_{xy}^{(k)} := \mathbb{P}_x(T_y^{(k)} < \infty) \quad (2.30)$$

其中, $\rho_{xy}^{(1)} = \rho_{xy}$, rf.(2.19)

(2) 第 k 次回访概率

$$\rho_{yy}^{(k)} := \mathbb{P}_y(T_y^{(k)} < \infty) \quad (2.31)$$

注: $\rho_{yy}^{(2)} \stackrel{?}{=} \rho_{yy} \cdot \rho_{yy}$

直观上是这样, 但严格证明要求 SMP

这是因为不同时间对应的是不同的随机过程, 如

- $t = 0$ 时, 过程是 $\{X_n, n \geq 0\}$
- $t = T_j$ 时, 过程是 $\{X_{T_j+n}, n \geq 0\}$

SMP 是一个使得 $X_{T_j+n} = X_n, \forall T_j$ 的性质, 之后会详细说. 以上结论可总结成下面引理.

Lemma 2.4

(由 SMP 知) $\rho_{xy}^{(k)} = \rho_{xy} \rho_{yy}^{(k-1)}$. 特别地, $\rho_{yy}^{(k)} = \rho_{yy}^k$

接着我们回到证明

$$\mathbb{P}_i(N(i) \geq 1) = 1 \iff \mathbb{P}_i(N(i) = \infty) = 1 \quad (2.32)$$

证明: \Leftarrow 显然, 因为 $\{N(i) = \infty\}$ 相对 $N(i) \geq 1$ 是小集合

\Rightarrow 由于 $\{N(i) = \infty\} = \cap_{k \geq 1} \{N(i) \geq k\}$, $\{N(i) \geq k\}$ 单调下降, 所以 $\cap_{k \geq 1} \{N(i) \geq k\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \{N(i) \geq k\}$.

$$\mathbb{P}_i(N(i) = \infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_i(N(i) \geq k) \stackrel{\text{SMP}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{ii}^k = 1$$

暂留的证明同理:

$$\begin{aligned} i \text{ 暂留} &\iff 1 > \rho_{ii} \\ &\iff \mathbb{P}_i(N(i) = \infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{ii}^k = 0 \end{aligned}$$

2.4.5 从 “平均回访次数” 角度判别

回顾(2.25),

$$N(y) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{I}_{\{X_n=y\}} = \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{\{N(y) \geq k\}}$$

Lemma 2.5 (Durrett [2], lem 1.11)

$$\mathbb{E}_y N(y) = \begin{cases} \infty & y \text{ 常返} \\ \frac{\rho_{yy}}{1 - \rho_{yy}} & y \text{ 暂留} \end{cases} \quad (2.33)$$

证明:

$$\mathbb{E}_y N(y) = \mathbb{E}_y \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{\{N(y) \geq k\}} \stackrel{\text{Exa(1.6)}}{=} \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}_y(N(y) \geq k) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}_y(T_y^{(k)} < \infty) = \sum_{k \geq 1} \rho_{yy}^{(k)} \stackrel{\text{SMP}}{=} \sum_{k \geq 1} \rho_{yy}^k$$

$$\rho_{yy} = 1 \Rightarrow \mathbb{E}_y N(y) = \infty$$

$$\rho_{yy} < 1 \Rightarrow \mathbb{E}_y N(y) = \rho_{yy} / (1 - \rho_{yy}) \quad \square$$

Proposition 2.8

(平均回访次数视角下) 常返和暂留的等价命题

1. i 常返 \iff

$$\mathbb{E}_i N(i) = \infty \quad (2.34)$$

2. i 暂留 \iff

$$\mathbb{E}_i N(i) < \infty \quad (2.35)$$

证明 (1): \Rightarrow 由(2.33), 显然

$\Leftarrow N(y)$ 为非负 r.v., 有当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\forall \omega, \sum_{n=1}^k \mathbb{I}_{\{X_n=y\}}(\omega) \uparrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{X_n=y\}}(\omega)$

$$\mathbb{E}_y N(y) := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}_y \sum_{n=1}^k \mathbb{I}_{\{X_n=y\}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \mathbb{E}_y \mathbb{I}_{\{X_n=y\}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \mathbb{P}_y(X_n = y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{yy}(n) = \infty$$

由(2.15), y 常返 \square

将上面几个角度总结成下面定理

Theorem 2.5 (链的状态: 等价表述)

$$\begin{aligned} i \text{ 常返} & \stackrel{\text{Def}}{\iff} 1 = \mathbb{P}_i\left(\bigcup_{n \geq 1} \{X_n = i\}\right) \quad [\text{回访发生的概率}] \\ & \iff 1 = f_{ii} := \sum_{n \geq 1} f_{ii}(n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_i(X_1 \neq i, \dots, X_{n-1} \neq i, X_n = i) \\ & \iff \sum_{n \geq 1} p_{ii}(n) = \infty \\ & \iff 1 = \rho_{ii} = \mathbb{P}_i(T_i^{(1)} := T_i < \infty) = \mathbb{P}_i\{N(i) \geq 1\} = 1 \\ & \stackrel{\text{why the name}}{\iff} \mathbb{P}_i(N(i) = \infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_i(N(i) \geq k) \stackrel{\text{SMP}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{ii}^k = 1 \\ & \iff \mathbb{E}_i N(i) = \infty \end{aligned}$$

2.4.6 停时与强马氏性

Definition 2.14 (停时/Stopping time)

随机变量 $\tau : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{+\infty\}$, 满足 $\forall \infty > n \geq 0, \{\tau = n\} \in \sigma(X_0, \dots, X_n)$, 称 τ 是关于 $(X_n)_{n \geq 0}$ 的停时

Example 2.5

首次回访时刻是一个停时 $T_y^{(1)} := T_y := \min\{n \geq 1 | X_n = y\}$.

$$\begin{aligned} \{T_y^{(1)} = n\} &= \{X_1 \neq y, \dots, X_{n-1} \neq y, X_n = y\} \quad n \geq 1 \\ &= \{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in S \times (S \setminus \{y\}) \times \dots \times (S \setminus \{y\}) \times \{y\}\} \\ &\in \sigma(X_0, \dots, X_n) = (X_0, \dots, X_n)^{-1}(\bigotimes_{n+1} 2^S) \end{aligned}$$

Definition 2.15 (停止 σ 代数)

τ 是关于 $(X_n)_{n \geq 0}$ 的停时, 定义

$$\mathcal{F}_\tau := \{A | A \cap \{\tau = n\} \in \sigma(X_0, \dots, X_n), \forall n\}$$

注: $B \in \mathcal{F}_\tau \Leftrightarrow B$ 是由 X_0, \dots, X_τ 决定的事件 (这是直观上的解释, 因为 τ 是随机的, 我们不知道 “...” 是什么) $\Leftrightarrow B \cap \{\tau = n\} \in \sigma(X_0, \dots, X_n), \forall n$

停止 σ -代数的定义是为了形式化 “到随机时间 τ 为止的信息”. 因为 τ 本身是随机的, 我们不能直接写 $\sigma(X_0, \dots, X_\tau)$ (因为 τ 不确定), 所以需要通过对所有可能的 $\tau = n$ 进行分解.

Problem 7 (作业 5-2)

设 τ 为关于 $(X_n)_{n \geq 0}$ 的停时, 即对任意的 $\infty > n \geq 0$, 有

$$\{\tau = n\} \in \sigma(X_0, \dots, X_n)$$

证明:

1. (停止 σ 代数的定义) $\mathcal{F}_\tau := \{A | A \cap \{\tau = n\} \in \sigma(X_0, \dots, X_n), \forall n \geq 1\}$ 是一个 σ -代数
2. $\sigma(X_\tau) \in \mathcal{F}_\tau$

以下内容来自强马氏性讲义 [1].

Lemma 2.6 (马氏性的小推广)

若 X 为马氏链, 则对任意 $n, m \geq 0, x_n \in S, A \in \otimes_{n+1} 2^S, B \in \otimes_{m+1} 2^S$ (即 $A \subset S^{n+1}, B \subset S^{m+1}$), 有

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{\{X_n = x_n\}}((X_0, \dots, X_n) \in A, (X_n, \dots, X_{n+m}) \in B) \\ &= \mathbb{P}_{\{X_n = x_n\}}((X_0, \dots, X_n) \in A) \times \mathbb{P}_{\{X_n = x_n\}}((X_n, \dots, X_{n+m}) \in B) \end{aligned} \quad (2.36)$$

即 $(X_0, \dots, X_n) \perp\!\!\!\perp_{\{X_n = x_n\}} (X_n, \dots, X_{n+m})$ 的定义, rf.(1.3)

证明：回顾马氏性, rf.(2.3)

不妨设 $A = A_0 \times \cdots \times A_n, B = B_n \times \cdots \times B_{n+m}$

(Case 1) 若 $x_n \notin A_n$ 或 $x_n \notin B_n$, 则

$$\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}((X_0, \cdots, X_n) \in A) = 0 \text{ 或 } \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}((X_n, \cdots, X_{n+m}) \in B) = 0$$

且

$$\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}((X_0, \cdots, X_n) \in A, (X_n, \cdots, X_{n+m}) \in B) = 0$$

从而, (2.36) 得证

(Case 2) 设 $x_n \in A_n$, 且 $x_n \in B_n$. 若 $n = 0, m = 0$, 则显然有

$$\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}((X_0, \cdots, X_n) \in A) = \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}((X_n, \cdots, X_{n+m}) \in B) = 1$$

$$\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}((X_0, \cdots, X_n) \in A, (X_n, \cdots, X_{n+m}) \in B) = 1$$

此时, 显然有 (2.36) 成立. 若 $n \geq 1, m \geq 1$, 则

$$\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}((X_0, \cdots, X_n) \in A) = \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\{X_j \in A_j, 0 \leq j \leq n-1\}$$

$$\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}((X_n, \cdots, X_{n+m}) \in B) = \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\{X_j \in B_j, n+1 \leq j \leq n+m\}$$

且

$$\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}((X_0, \cdots, X_n) \in A, (X_n, \cdots, X_{n+m}) \in B)$$

$$= \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\{X_j \in A_j, 0 \leq j \leq n-1, X_k \in B_k, n+1 \leq k \leq n+m\}$$

$$\stackrel{(2.3)}{=} \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\{X_j \in A_j, 0 \leq j \leq n-1\} \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\{X_k \in B_k, n+1 \leq k \leq n+m\}$$

故而 (2.36) 得证. 对于其他情形 $n \geq 1, m = 0$ 或 $n = 0, m \geq 1$, 可类似证明. □

Proposition 2.9 (强马氏性)

$X := \{X_n, n \geq 0\} \sim \text{Markov}(\mu, P)$, τ 是关于 $(X_n)_{n \geq 0}$ 的停时, 则

1. 在 $\{\tau < \infty\}$ 和 $\{X_\tau = x\}$ 条件下

$$(X_{\tau+n})_{n \geq 0} \sim \text{Markov}(\delta_x, P)$$

其中 $\delta_x = (\delta_{xy})_{y \in S}$, 记号

$$\delta_{xy} = \begin{cases} 1 & y = x \\ 0 & y \neq x \end{cases}$$

注: $(X_{\tau+n})_{n \geq 0} \sim \text{Markov}(\delta_x, P)$ under $\mathbb{P}(\cdot | \tau < \infty, X_\tau = x)$. 在原先的概率测度 \mathbb{P} 下, $(X_{\tau+n})_{n \geq 0}$ 不是马氏链

2. $\forall J \subseteq \mathbb{N}_0, \#J < \infty$, 有

$$\sigma(X_{\tau+n}, n \in J) \perp\!\!\!\perp_{\{\tau < \infty, X_\tau = x\}} \mathcal{F}_\tau$$

注:

- (a) $(X_{\tau+n})_{n \geq 0}$ 与 X_0, \dots, X_τ 独立
- (b) $(X_{\tau+n})_{n \geq 0} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_\tau$ under $\mathbb{P}(\cdot | \tau < \infty, X_\tau = x)$

证明: (1) 回顾马氏链的有限维分布, rf.(2.4),

根据此结论, 我们只需考察链 $\{X_{\tau+n}, n \geq 0\}$ 的有限维分布.

(Step 1) 设 $j_0 \neq x$. 则对任意的 $n \geq 1, m \geq 0$, 有

$$\mathbb{P}(X_{\tau+0} = j_0, \dots, X_{\tau+n} = j_n, \tau = m, X_\tau = x) = 0$$

关于 $m \geq 0$ 求和, 并注意到 $\{\tau < \infty\} = \sum_{m=0}^{\infty} \{\tau = m\}$, 得:

$$\mathbb{P}(X_{\tau+0} = j_0, \dots, X_{\tau+n} = j_n, \tau < \infty, X_\tau = x) = 0$$

两边同除 $P(\tau < \infty, X_\tau = x)$, 有

$$\mathbb{P}(X_{\tau+0} = j_0, \dots, X_{\tau+n} = j_n | \tau < \infty, X_\tau = x) = 0 = \delta_{xj_0} \prod_{k=0}^{n-1} p_{j_k j_{k+1}}$$

(Step 2) 设 $j_0 = x$. 注意到, 对任意的 $m \geq 0$, 有

$$\{\tau = m\} \in \sigma(X_0, \dots, X_m)$$

故而, 由(2.36): 对任意的 $n \geq 1, m \geq 0$, 有

$$\{\tau = m\} \perp\!\!\!\perp_{\{X_m = x\}} \{X_m = j_0, X_{m+1} = j_1, \dots, X_{m+n} = j_n\}$$

从而, 对任意的 $m \geq 0$, 有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{\tau+0} = j_0, \tau = m, X_\tau = x) &= \mathbb{P}(X_{m+0} = j_0, \tau = m, X_m = x) \\
&\stackrel{(1.2)}{=} \mathbb{P}(X_{m+0} = j_0, \tau = m | X_m = x) \times \mathbb{P}(X_m = x) \\
&\stackrel{(M_1)}{=} \mathbb{P}(X_{m+0} = j_0 | X_m = x) \times \mathbb{P}(\tau = m | X_m = x) \times \mathbb{P}(X_m = x) \\
&\stackrel{(1.2)}{=} 1 \times \mathbb{P}(\tau = m, X_m = x) \\
&= \delta_{xx} \mathbb{P}(\tau = m, X_m = x)
\end{aligned}$$

以及, 对任意的 $n \geq 1, m \geq 0$, 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{\tau+0} = j_0, X_{\tau+1} = j_1, \dots, X_{\tau+n} = j_n, \tau = m, X_\tau = x) \\
&= \mathbb{P}(X_{m+1} = j_1, \dots, X_{m+n} = j_n, \tau = m, X_m = x) \\
&\stackrel{(1.2)}{=} \mathbb{P}(X_{m+1} = j_1, \dots, X_{m+n} = j_n, \tau = m | X_m = x) \times \mathbb{P}(X_m = x) \\
&\stackrel{(M_1)}{=} \mathbb{P}(X_{m+1} = j_1, \dots, X_{m+n} = j_n | X_m = x) \times \mathbb{P}(\tau = m | X_m = x) \times \mathbb{P}(X_m = x) \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{m+1} = j_1, \dots, X_{m+n} = j_n, X_m = x)}{\mathbb{P}(X_m = x)} \times \mathbb{P}(\tau = m | X_m = x) \times \mathbb{P}(X_m = x) \\
&\stackrel{(2.4)}{=} \frac{\mu_x^{(m)} p_{x,j_1} p_{j_1,j_2} \dots p_{j_{n-1},j_n}}{\mu_x^{(m)}} \times \mathbb{P}(\tau = m, X_m = x) \\
&= \delta_{xx} p_{x,j_1} p_{j_1,j_2} \dots p_{j_{n-1},j_n} \times \mathbb{P}(\tau = m, X_m = x)
\end{aligned}$$

其中, $\mu_x^{(m)} := P(X_m = x)$. 综上, 关于 $m \geq 0$ 求和 (注意到 $\{\tau < \infty\} = \sum_{m=0}^{\infty} \{\tau = m\}$), 再两边同除以 $P(\tau < \infty, X_\tau = x)$, 得: 当 $j_0 = x$, 对任意的 $n \geq 0$, 有

$$\mathbb{P}(X_{\tau+0} = j_0, \dots, X_{\tau+n} = j_n | \tau < \infty, X_\tau = x) = \delta_{xj_0} \prod_{k=0}^{n-1} p_{j_k j_{k+1}}.$$

(Step 3) 综上, 链的 $(X_{\tau+n})_{n \geq 0}$ 的有限维分布为

$$\mathbb{P}(X_{\tau+0} = j_0, \dots, X_{\tau+n} = j_n | \tau < \infty, X_\tau = x) = \delta_{xj_0} \prod_{k=0}^{n-1} p_{j_k j_{k+1}}.$$

即有 $(X_{\tau+n})_{n \geq 0} \sim \text{Markov}(\delta_x, P)$ under $\mathbb{P}(\cdot | \tau < \infty, X_\tau = x)$.

(2) 作业.

Problem 8 (作业 5-3)

$\forall J \subseteq \mathbb{N}_0, \#J < \infty$, 有

$$\sigma(X_{\tau+n}, n \in J) \perp\!\!\!\perp_{\{\tau < \infty, X_\tau = x\}} \mathcal{F}_\tau$$

注:

1. $(X_{\tau+n})_{n \geq 0}$ 与 X_0, \dots, X_τ 独立
2. $(X_{\tau+n})_{n \geq 0} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_\tau$ under $\mathbb{P}(\cdot | \tau < \infty, X_\tau = x)$

用下面方法表述两次返回之间的等待时间 $S_y^{(k)}$

$$T_y^{(0)} := 0, T_y^{(1)} := T_y, \text{ 对于 } k \geq 2, T_y^{(k)} := \min\{n \geq T_{y+1}^{(k-1)} | X_n = y\}$$

$$S_y^{(k)} = \begin{cases} T_y^{(k)} - T_y^{(k-1)} & \text{若 } T_y^{(k-1)} < \infty \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$$\text{注意到 } T_y^{(k)} = T_y^{(k-1)} + \min\{n \geq 1 | X_{T_y^{(k-1)}+n} = y\}$$

$$\Rightarrow S_y^{(k)} = \min\{n \geq 1 | X_{T_y^{(k-1)}+n} = y\}, \text{ if } T_y^{(k-1)} < \infty$$

即 $(X_{T_y^{(k-1)}+n})_{n \geq 0}$ 的首次回访时刻 $S_y^{(k)}$

Lemma 2.7

对 $k \geq 2$, 有 $\sigma(S_y^{(k)}) \perp_{\{T_y^{(k-1)} < \infty\}} \mathcal{F}_{T_y^{(k-1)}}$, 且

$$\mathbb{P}(S_y^{(k)} < \infty | T_y^{(k-1)} < \infty) = \mathbb{P}(T_y^{(1)} < \infty | X_0 = y) =: \rho_{yy} \quad (2.37)$$

Corollary 2.4

对 $k \geq 0$ 有 $\rho_{yy}^{(k)} = \rho_{yy}^k$, 即

$$\mathbb{P}_y(N(y) \geq k) = \mathbb{P}_y(T_y^{(k)} < \infty) = \rho_{yy}^k$$

证明：第 k 次访问 y 的时刻有限，即第 $k-1$ 次访问 y 的时刻有限且时间间隔有限，即

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_y(T_y^{(k)} < \infty) &= \mathbb{P}_y(S_y^{(k)} < \infty, T_y^{(k-1)} < \infty) \\ &= \mathbb{P}_y(S_y^{(k)} < \infty | T_y^{(k-1)} < \infty) \mathbb{P}_y(T_y^{(k-1)} < \infty) \end{aligned}$$

递归

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_y(T_y^{(k)} < \infty) &= \mathbb{P}_y(S_y^{(k)} < \infty | T_y^{(k-1)} < \infty) \cdots \mathbb{P}_y(S_y^{(2)} < \infty | T_y^{(1)} < \infty) \mathbb{P}_y(T_y^{(1)} < \infty) \\ &\stackrel{(2.37)}{=} \rho_{yy}^k \quad \square \end{aligned}$$

2.5 类结构

2.5.1 状态 i 间的关系：可达与互通

Definition 2.16 (可达)

$i, j \in S$, 若 $\exists n \geq 0$, s.t. $p_{ij}(n) > 0$, 则称 i 可达 j , 记作 $i \rightarrow j$

注: $i \rightarrow i, p_{ii}(0) = 1 > 0$ 包括在内

Definition 2.17 (互通)

若 $i \rightarrow j, j \rightarrow i$ 称 i 与 j 互通, 记作 $i \leftrightarrow j$

Theorem 2.6

对不同的 i 与 j , 下面命题等价

1. $i \rightarrow j$
2. $0 < f_{ij} = \rho_{ij} = \mathbb{P}_i(T_j < \infty)$ [Durrett [2], Def 1.1]
3. \exists 某些状态, $i_0 = i, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n = j$, s.t. $p_{i_0, i_1} \cdots p_{i_{n-1}, i_n} > 0$
4. $\mathbb{P}_i(\exists n \geq 0, X_n = j) > 0$

Problem 9 (作业 6-1)

证明: Theorem 2.6 命题的等价性, 即 $1 \Leftrightarrow 2, 1 \Leftrightarrow 3, 1 \Leftrightarrow 4$

Problem 10 (作业 6-2)

定义 first hitting time

$$H^j := \min\{n \geq 0 | X_n = j\}$$

1. 证明: H^j 是一个关于 $(X_n)_{n \geq 0}$ 的停时
2. 利用 H^j 定义“可达”, 并且证明该新定义与原定义等价

Property 2.3 (Durrett [2], Lem1.4)

若 $i \rightarrow j, j \rightarrow k$, 则 $i \rightarrow k$

证明. $i \rightarrow j \iff \exists n \geq 0$, s.t. $p_{ij}(n) > 0$

$j \rightarrow k \iff \exists m \geq 0$, s.t. $p_{jk}(m) > 0$

$$p_{ik}(n+m) \stackrel{\text{C-K}}{=} \sum_{r \in S} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0, \quad \therefore i \rightarrow k$$

□

Property 2.4

互通关系 (\leftrightarrow) 在 S 上是等价关系, 即

1. (自反的) $i \leftrightarrow i$
2. (对称的) $i \leftrightarrow j$, 则 $j \leftrightarrow i$
3. (传递的) $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k$, 则 $i \leftrightarrow k$

2.5.2 常返与暂留是类性质

Lemma 2.8 (Durrett [2], Thm1.5&Lem1.6)

设 $i \rightarrow j, \rho_{ij} > 0$, 则

1. i 常返的 $\Rightarrow \rho_{ji} = 1 (> 0 \Rightarrow j \rightarrow i)$
2. $\rho_{ji} < 1 \Rightarrow i$ 非常返/暂留的

注: 直观上 (2) $i \rightarrow j \xrightarrow{\text{prob}>0} i$, 则 i 暂留

证明. (1), (2) 是逆否命题等价, 因此只需证一个即可. 下面证明 (2).

$$i \neq j, \rho_{ji} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \rho_{ji} = 1 - \mathbb{P}_j(T_i < \infty) = \mathbb{P}_j(T_i = \infty)$$

为了证 i 暂留, 即证 $\rho_{ii} < 1$, 即 $\mathbb{P}_i(T_i = \infty) > 0$

(Step 1) $\rho_{ij} > 0, i \rightarrow j \Rightarrow \exists k \geq 1, \text{s.t. } p_{ij}(k) > 0$

$$K := \min\{k \geq 1 | p_{ij}(k) > 0\}$$

由 C-K 方程(2.5), \exists 与 i, j 不同的状态 $i_1, \dots, i_{K-1}, \text{s.t.}$

$$p_{i,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{K-1},j} > 0$$

注: 已知 $\mathbb{P}_j(T_i = \infty) > 0$, 要证 $\mathbb{P}_i(T_i = \infty) > 0$, 思路是将起始点从 i 挪到 j .

(Step 2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(T_i = \infty) &= \mathbb{P}_i\left(\bigcap_{n \geq 1} \{X_n \neq i\}\right) \\
&\geq \mathbb{P}_i\left(\bigcap_{n=0}^{K-1} \{X_n = i_n\}, X_K = j, \bigcap_{n \geq K+1} \{X_n \neq i\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{K-1} \{X_n = i_n\}, X_K = j, \bigcap_{n \geq K+1} \{X_n \neq i\}\right) / \mathbb{P}(X_0 = i) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{K-1} \{X_n = i_n\} | X_K = j\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq K+1} \{X_n \neq i\} | X_K = j, \bigcap_{k=0}^{K-1} \{X_k = i_k\}\right) \cdot \mathbb{P}(X_K = j) / \mathbb{P}(X_0 = i) \\
&\stackrel{\text{Markov}}{=} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{K-1} \{X_n = i_n\} | X_K = j\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq K+1} \{X_n \neq i\} | X_K = j\right) \cdot \mathbb{P}(X_K = j) / \mathbb{P}(X_0 = i) \\
&= \underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{K-1} \{X_n = i_n\}, X_K = j\right)}_{\text{有限维分布}} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq K+1} \{X_n \neq i\} | X_K = j\right) / \mathbb{P}(X_0 = i) \\
&= \frac{\mu_i^{(0)} \cdot p_{i,i_1} \cdot p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{K-1},j}}{\mu_i^{(0)}} \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=K+1}^{K+m} \{X_n \neq i\} | X_K = j\right)
\end{aligned}$$

由 (Step 1), $p_{i,i_1} \cdot p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{K-1},j} > 0$, 因此只需证明后面概率的极限也为正, 即可证明 $\mathbb{P}_i(T_i = \infty) > 0$.

假设 $(X_n)_{n \geq 0} \sim \text{Markov}(\mu, P)$

$\tau_1 = 0, \tau_2 = K$ 为关于 $(X_n)_{n \geq 0}$ 的停时, 则由 SMP 知

1. 在 $\tilde{\mathbb{P}}(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot | X_K = j)$ 下, $(X_{K+n})_{n \geq 0} \sim \text{Markov}(\delta_j, P)$
2. 在 $\mathbb{P}_j(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot | X_0 = j)$ 下, $(X_n)_{n \geq 0} \sim \text{Markov}(\delta_j, P)$

发现在测度 $\tilde{\mathbb{P}}(\cdot)$ 下的 $(X_{K+n})_{n \geq 0}$, 与测度 $\mathbb{P}_j(\cdot)$ 下的 $(X_n)_{n \geq 0}$ 遵循同样的有限维分布

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=K+1}^{K+m} \{X_n \neq i\} | X_K = j\right) \\
&= \tilde{\mathbb{P}}(X_{K+n} \neq i, 1 \leq n \leq m) \\
&\stackrel{\text{SMP}}{=} \mathbb{P}_j(X_n \neq i, 1 \leq n \leq m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}_j\left(\bigcap_{n \geq 1} \{X_n \neq i\}\right) = \mathbb{P}_j(T_i = \infty) = 1 - \rho_{ji} > 0
\end{aligned}$$

因此 $\mathbb{P}_i(T_i = \infty) > 0$

□

Corollary 2.5

$i \rightarrow j, i$ 常返 $\Rightarrow j$ 常返

证明. $i \neq j, i \rightarrow j, i$ 常返, 由 Lemma 2.8, 知 $\rho_{ji} = 1 > 0$, 所以 $j \rightarrow i, i \leftrightarrow j$

$\exists m, n \geq 0$, s.t. $p_{ij}(m) > 0, p_{ji}(n) > 0$

$\forall r \geq 0, p_{jj}(n+r+m) \stackrel{\text{C-K}}{\geq} p_{ji}(n)p_{ii}(r)p_{ij}(m)$

两边同时求和

$$\sum_{r \geq 0} p_{jj}(n+r+m) \geq p_{ji}(n) \left(\sum_{r \geq 0} p_{ii}(r) \right) p_{ij}(m) = \infty$$

其中 $p_{ji}(n) > 0, p_{ij}(m) > 0, \sum_{r \geq 0} p_{ii}(r) = \infty$ (i 常返)

$$\therefore \sum_{r \geq 0} p_{jj}(r) = \infty \Rightarrow j \text{ 常返}$$

□

Corollary 2.6

若 $i \leftrightarrow j$, 则

$$i \text{ 常返} \iff j \text{ 常返}$$

Definition 2.18 (集合的不可约)

$C \subseteq S, \forall i, j \in C$, 有 $i \leftrightarrow j$, 则称 C 不可约

Definition 2.19 (链的不可约)

若 S 不可约, 则称链不可约

Theorem 2.7

若 $C \subseteq S$ 不可约, 则 C 中状态要么全是常返的, 要么全是暂留的

2.5.3 状态空间分解

Definition 2.20 (闭集)

$C \subseteq S$, 若 $i \in C, j \notin C \Rightarrow p_{ij} = 0$, 则称 C 为闭集

Problem 11 (作业 6-3)

证明 $C \subseteq S$ 闭集等价于

$$i \in C, i \rightarrow j \Rightarrow j \in C \quad (j \notin C \Rightarrow i \nrightarrow j)$$

Example 2.6

若 $\{i\}$ 闭, 则 $\forall j \neq i, p_{ij} = 0 \Leftrightarrow p_{ii} = 1$, 称 i 为吸收态

Theorem 2.8

每一个有限的不可约闭集都是常返的

证明之前先介绍一个 Lemma

Lemma 2.9

每一个有限闭集中都至少有一个常返态

证明. (反证法) 设 C 为有限闭集, 非常返的

$\forall i \in C \Rightarrow i$ 暂留 $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} p_{ji}(n) < \infty, \forall j \in S$. (由(2.16))

$$\infty > \sum_{i \in C} \sum_{n \geq 1} p_{ji}^{(n)} = \sum_{n \geq 1} \sum_{i \in C} p_{ji}^{(n)}$$

这里不是 $i \in S$ 而是 $i \in C$, 所以还要考虑 $i \in C^c$

$\forall i \in C^c, j \in C \xrightarrow{C \text{ 闭}} j \nrightarrow i \Rightarrow \forall n \geq 0, p_{ji}(n) = 0$

$$\infty > \sum_{n \geq 1} \sum_{i \in C} p_{ji}^{(n)} = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{i \in S} p_{ji}^{(n)} \right) = \sum_{n \geq 1} 1 = \infty$$

矛盾 □

在一个不可约闭集 C 中, 至少有一个常返态 $i \in C$, 由不可约定义和 Lemma 2.6, $\forall j \in C, j \leftrightarrow i, j$ 常返

Corollary 2.7

状态空间 S 有限, 则 S 中必存在一个常返态

Theorem 2.9 (分解定理)

状态空间 S 可分解为

$$S = T + R_1 + R_2 + \cdots$$

其中 T 中所有状态非常返, R_r 为常返不可约闭集

证明. (Step 1) 首先把所有暂留态拿出来

$$T := \{j \in S | j \text{ 暂留}\}$$

(Step 2) $i_1 \in S \setminus T \neq \emptyset$ (若 $S \setminus T = \emptyset$, 则在 Step 1 结束)

i_1 常返, 定义 $R_1 = \{j \in S | j \leftrightarrow i_1\}$

$R_1 \subseteq S \setminus T$, R_1 常返互通类

(Step 3) $i_2 \in S \setminus (T \cup R_1), R_2 = \{j \in S | i_2 \leftrightarrow j\} \Rightarrow R_2 \subseteq S \setminus (T \cup R_1)$

若 $j \in R_2, j \in R_1 \Rightarrow j \leftrightarrow i_2, j \leftrightarrow i_1 \Rightarrow i_1 \leftrightarrow i_2 \Rightarrow i_2 \in R_1$, 矛盾

(Step 4) 迭代 □

2.6 平稳分布与特殊例子

$$(X_n)_{n \geq 0} \sim \text{Markov}(\mu^{(0)}, P)$$

初始分布 $\mu^{(0)} = (\mu_i^{(0)})_{i \in S}$, 其中 $\mu_i^{(0)} = \mathbb{P}(X_0 = i)$

在 n 时刻的分布, $\mu^{(n)} = (\mu_i^{(n)})_{i \in S}$, 其中 $\mu_i^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = i)$

$$\mu^{(n)} = \mu^{(0)} P^n$$

Definition 2.21 (平稳分布)

称概率分布 $\pi = (\pi_i)_{i \in S}$ 是转移矩阵 P 的平稳分布, 若

$$\pi P = \pi \quad (2.38)$$

注: $\mu^{(n+1)} = \pi P^{n+1} = \pi P \cdot P^n = \pi P^n = \pi P = \pi = \mu^{(0)}$

Problem 12 (作业 6-4)

设 $(X_n) \sim \text{Markov}(\pi, P)$, π 是 P 的平稳分布, 证明: 对固定 $m \geq 0$, 有 $(X_{m+n})_{n \geq 0} \sim \text{Markov}(\pi, P)$

2.6.1 双随机链 (Doubly Stochastic Chain)

回顾随机矩阵定义 2.1, 现在由行和为 1, 拓展到列和也为 1.

Definition 2.22

称转移矩阵 $(p_{xy})_{x,y \in S}$ 是双随机的, 若 $\sum_{x \in S} p_{xy} = 1$

Theorem 2.10

设 $P = (p_{xy})_{x,y \in S}$ 为具有 $N < \infty$ 个状态的马氏链的转移概率矩阵, 且有均匀分布 $\pi_x = \frac{1}{N}, x \in S$ 则下面两个命题等价:

1. π_x 是 P 的平稳分布
2. P 双随机

证明. $\forall y \in S, \pi_y = \frac{1}{N}$

$$(\pi P)_y = \sum_{x \in S} \pi_x p_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{x \in S} p_{xy}$$

1. P 双随机, $(\pi P)_y = 1/N = \pi_y, (\forall y \in S) \Rightarrow \pi P = \pi$
2. $(\pi P)_y = \pi_y, \forall y \in S, \frac{1}{N} \sum_{x \in S} p_{xy} = 1/N \Rightarrow \sum_{x \in S} p_{xy} = 1 \Rightarrow P$ 双随机

□

2.6.2 细致平衡条件 (Detailed Balance Condition)

Definition 2.23

称概率分布 π 满足 DBC, 若

$$\pi_x p_{xy} = \pi_y p_{yx} \quad (\forall x, y \in S) \quad (2.39)$$

注: DBC 是 $\pi P = \pi$ 的充分不必要条件.

证明. $\pi P = \pi \iff (\pi P)_y = \pi_y, \forall y \iff \sum_{x \in S} \pi_x p_{xy} = \pi_y, \forall y$. 由于 $\pi_y = \pi_y (\sum_{x \in S} p_{yx}) = \sum_{x \in S} \pi_y p_{yx}$,

$$\pi P = \pi \iff \sum_{x \in S} \pi_x p_{xy} = \sum_{x \in S} \pi_y p_{yx} \quad (2.40)$$

由 (2.39) 可以推出 (2.40) 右边等式, 但反之不然. □

Example 2.7 (DBC 反例)

$S = \{1, 2, 3\}, N = 3$

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

P 双随机, $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$ 是 P 的平稳分布

Claim 2.4. π 不满足 DBC

反证: π 满足 DBC $\Rightarrow \pi_x p_{xy} = \pi_y p_{yx}$ 与 $p_{12} = 0.5 \neq p_{21} = 0.3$ 矛盾 □

Example 2.8 (生灭链)

状态空间 $S = \{l, l+1, \dots, r-1, r\} \subseteq N_0$, 设 P 满足

1. 一步转移不超过 1, 当 $|x - y| \geq 2$ 时, $p_{xy} = 0$
2. $p_{x, x+1} = p_x (\forall x < r)$
3. $p_{x, x-1} = q_x (\forall x > l)$
4. $p_{x, x} = 1 - p_x - q_x (\forall x \in S)$

求出 P 的满足 DBC 条件的平稳分布 π , rf.(2.39).

1. $|x - y| \geq 2$ 时, $p_{xy} = p_{yx} = 0$
2. $x = y$ 时, $p_{xy} = p_{yx}, \pi_x = \pi_y$
3. $y = x + 1$ 时, $(x < r), \pi_x p_{x, x+1} = \pi_{x+1} p_{x+1, x}$

$$\pi_{x+1} = \frac{\pi_x p_{x, x+1}}{p_{x+1, x}} = \pi_x \frac{p_x}{q_{x+1}}$$

$$\pi_{l+n} = \pi_l \underbrace{\frac{p_l}{q_{l+1}} \frac{p_{l+1}}{q_{l+2}} \dots \frac{p_{l+n-1}}{q_{l+n}}}_{\pi_{l+1}}$$

令

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{p_l}{q_{l+1}}, a_2 = \frac{p_l p_{l+1}}{q_{l+1} q_{l+2}}, \dots, a_{r-l} = \frac{p_l p_{l+1} \cdots p_{r-1}}{q_{l+1} q_{l+2} \cdots q_r}$$

则 $\pi = (\pi_l a_0, \pi_l a_1, \dots, \pi_l a_{r-l})$. 又 $\sum_{x \in S} \pi_x = 1$, 则

$$\pi_l \sum_{0 \leq n \leq r-l} a_n = 1 \Rightarrow \pi_l = \frac{1}{\sum_{0 \leq n \leq r-l} a_n}$$

记 $a := \sum_{0 \leq n \leq r-l} a_n$, 则 $\pi = (a_0/a, a_1/a, \dots, a_{r-l}/a)$ □

2.6.3 可逆性

Theorem 2.11

设 $(X_n)_{n \geq 0} \sim \text{Markov}(\pi, P)$, 其中 π 是 P 的平稳分布. 固定 n , 令 $Y_m := X_{n-m} (0 \leq m \leq n)$, 则

$$(Y_m)_{0 \leq m \leq n} \sim \text{Markov}(\pi, \hat{P})$$

其中 $\hat{P} = (\hat{p}_{ij})_{i,j \in S}$

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}$$

这里 \hat{p}_{ij} 称为对偶 (dual) 转移概率

证明. 先验证 $(Y_m)_{0 \leq m \leq n} \sim \text{Markov}(\pi, \hat{P})$, 用定义/有限维分布. 这里用定义验证.

(Step 1) 验证 \hat{P} 是随机矩阵

1. 元素非负 $\hat{p}_{ij} \geq 0$
2. $\sum_{j \in S} \hat{p}_{ij} = \sum_{j \in S} (\pi_j p_{ji} / \pi_i) = \pi_i / \pi_i = 1$, rf.(2.38)

(Step 2) 验证初始分布. 由 (2.38), 初始分布 $Y_0 = X_n \sim \pi$

(Step 3) 验证马氏性

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{m+1} = i_{m+1} | Y_m = i_m, \dots, Y_1 = i_1, Y_0 = i_0) &= \frac{\mathbb{P}(Y_{m+1} = i_{m+1}, \dots, Y_0 = i_0)}{\mathbb{P}(Y_m = i_m, \dots, Y_0 = i_0)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_{n-m-1} = i_{m+1}, \dots, X_{n-1} = i_1, X_n = i_0)}{\mathbb{P}(X_{n-m} = i_m, \dots, X_n = i_0)} \\ &= \frac{\pi_{i_{m+1}} P_{i_{m+1}, i_m} \cdots P_{i_1, i_0}}{\pi_{i_m} P_{i_m, i_{m-1}} \cdots P_{i_1, i_0}} \\ &= \frac{\pi_{i_{m+1}} P_{i_{m+1}, i_m}}{\pi_{i_m}} = \hat{p}_{i_m, i_{m+1}} \end{aligned}$$

□

Corollary 2.8 (可逆性)

若 P 的平稳分布为 π , 满足 DBC 条件(2.39), 则 $\hat{P} = P$. 即原来的链 $\stackrel{(d)}{=}$ 逆向链 (记号 $\stackrel{(d)}{=}$ 表示同分布)

证明. $\hat{p}_{ij} = (\pi_j p_{ji}) / \pi_i \stackrel{\text{DBC}}{=} (\pi_i p_{ij}) / \pi_i = p_{ij}$ □

2.6.4 求 P 的平稳分布 (若唯一)

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum_x \pi_x = 1 (\pi_x \geq 0, \forall x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi(P - \mathbb{I}) = 0 \\ \sum_x \pi_x = 1 \end{cases}$$

Example 2.9

例 [Durrett, 1.19]

Example 1.19 (Brand Preference (Continuation of 1.5)).

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \ \mathbf{2} \ \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \ .8 \ .1 \ .1 \\ \mathbf{2} \ .2 \ .6 \ .2 \\ \mathbf{3} \ .3 \ .3 \ .4 \end{array}$$

$$P - \mathbb{I} = \begin{bmatrix} -0.2 & 1 & 1 \\ 0.2 & -0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & -0.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \sum_x \pi_x = 1 (\pi_x \geq 0, \forall x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0.2\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.3\pi_3 = 0 \\ \pi_1 - 0.4\pi_2 + 0.3\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + 0.2\pi_2 - 0.6\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

前三个等式是线性相关的, 删去一个等式

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & 1 & 1 \\ 0.2 & -0.4 & 1 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = [0, 0, 1]$$

$\pi A = b \Rightarrow \pi = bA^{-1}$, 即 A^{-1} 的最后一行

2.7 极限行为与平稳分布的存在唯一性

研究 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$

1. 由 (2.16), j 暂留 $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} p_{ij}^{(n)} < \infty, \forall i \in S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \forall i \in S$. 下面可以把注意力放在常返上
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ 不存在的反例

$$S = \{1, 2\}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{2n+1} = P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$p_{ij}^{(2n)} \neq p_{ij}^{(2n+1)}, \forall i, j \in S$, 所以 $p_{ij}^{(n)}$ 不收敛

Definition 2.24 (周期)

令 $I_x := \{n \geq 1 | P_{xx}^{(n)} > 0\}$, 定义 x 的周期 $d(x) = \gcd(I_x)$

1. $d(x) > 1$, 称 x 周期的
2. $d(x) = 1$, 称 x 非周期的
3. $I_x = \emptyset$, 称 x 周期为 ∞

注: \gcd 为 greatest common divisor 最大公因数.

Definition 2.25

称链是周期的, 若所有状态是周期的

Theorem 2.12 (收敛定理)

马氏链不可约, 非周期, 且存在平稳分布 π , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad (\forall i, j \in S)$$

注: 找到周期不是件容易的事, 我们通常讨论非周期的链

Problem 13 (作用 7-1)

设 S 有限, $\exists i \in S$, s.t. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j (\forall j \in S)$. 证明: $\pi = (\pi_j)_{j \in S}$ 是 $P = (p_{ij})_{i, j \in S}$ 的平稳分布

Theorem 2.13 (渐进频率)

马氏链不可约, 常返, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(y)}{n} = \frac{1}{\mathbb{E}_y T_y} \quad (2.41)$$

注:

1. $N_n(y) = \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{X_k=y\}}$ (n 时刻前, 访问 y 的总次数)
2. 考虑 $\frac{N_n(y)}{n}$, 表示 n 时刻前访问 y 的频率/时间比例, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(y)}{n}$ 为在状态 y 上花费的时间比例的极限
3. $\mathbb{E}_y T_y = \begin{cases} < \infty & y \text{ 正常返} \\ \infty & y \text{ 暂留/零常返} \end{cases}$, rf. (Def 2.10).

证明. Durrett (3ed), Thm 1.20, p47. □

Theorem 2.14

马氏链不可约

1. (平稳分布唯一性, Durrett, Thm 1.21) 若平稳分布存在, 则

$$\pi_y = \frac{1}{\mathbb{E}_y T_y} \quad (2.42)$$

则 π 唯一

2. (平稳测度存在性) 若马氏链常返, 则 \exists 平稳测度, $\mu = (\mu_x)_{x \in S}$, 且 $\mu_x > 0, \forall x$. 令 $T_x = \min\{n \geq 1 | X_n = x\}$.

$$\mu_x(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y, T_x > n) \quad (2.43)$$

注: $\mu = (\mu_x)_{x \in S}$ 是一个平稳测度, 若

1. (测度) $\mu_x \geq 0, \forall x \in S$
2. $\mu P = \mu$

证明. 1. (2.42): Durrett (3ed), Thm 1.21, p47.

2. (2.43): Durrett (3ed), Thm 1.24, p48. □

相对于上面的大定理, 下面的推论对我们更有用

Corollary 2.9

马氏链具有有限状态, 不可约, 则

1. 存在唯一平稳分布 $\pi = (\pi_x)_{x \in S}$, 且 $\pi_x = \frac{1}{\mathbb{E}_x T_x} > 0, \forall x \in S$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(y)}{n} = \frac{1}{\mathbb{E}_x T_x} = \pi_x$

证明. 1. S 有限不可约, 闭集 \Rightarrow 不可约, 常返, rf. (Thm 2.8).

(a) 由 Thm 2.14 (2) 知, 存在 $\mu = (\mu_x)_{x \in S}, \mu_x \geq 0, \mu P = \mu$. 令 $\pi_x = \frac{\mu_x}{\sum_{x \in S} \mu_x}$ (正则化 μ), $\pi_x > 0$, 且

$$\pi P = \frac{1}{\sum_{x \in S} \mu_x} \mu P = \frac{1}{\sum_{x \in S} \mu_x} \mu = \pi$$

(b) 由 Thm 2.14 (1) 知, π 唯一且 $\pi_x = \frac{1}{\mathbb{E}_x T_x}$

2. 由 Thm 2.13

□

2.8 首达时及其应用

Definition 2.26 (首达时)

首达时 (first hitting time) 定义为

$$V_A := \min\{n \geq 0 | X_n \in A\} \quad (2.44)$$

注：前面提到的首次回访时间 (first passage time) 是要求 $n \geq 1$, rf. (2.18).

2.8.1 击中概率 (hitting time) 与离出分布

Definition 2.27 (击中概率)

击中概率定义为

$$h_x^A := \mathbb{P}_x(V_A < \infty) \quad (2.45)$$

特别地, A 为闭集, 称 h_x^A 为吸收概率

下面介绍 h_x^A 的一个性质

Lemma 2.10

$h^A := (h_x^A)_{x \in S}$ 满足下列方程

$$\begin{cases} h_x^A = 1 & x \in A \\ h_x^A = \sum_y p_{xy} h_y^A & x \notin A \end{cases} \quad (2.46)$$

其中 $x \notin A$ 的情况对应卷积 $f(x) = (f * g)(x) = \sum_{y \in S} f(y)g(x - y)$.

击中概率是上述方程的一个解, 之后我们将验证其唯一性.

证明. $x \in A \Rightarrow V_A = 0$, 所以 $h_x^A = \mathbb{P}_x(V_A < \infty) = 1$.

$x \notin A \Rightarrow V_A \geq 1$, 考虑一步转移情况 (one step reasoning) \leftarrow 证明思想

$$h_x^A = \sum_{y \in S} \mathbb{P}_x(V_A < \infty, X_1 = y) = \sum_{y \in S} \mathbb{P}(V_A < \infty | X_1 = y, X_0 = x) \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x)$$

Claim 2.5. $\mathbb{P}(V_A < \infty | X_1 = y, X_0 = x) = h_y^A, \forall y \in S, x \notin A$

利用马氏性,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_A < \infty | X_1 = y, X_0 = x) &\stackrel{x \notin A}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \{X_n \in A\} | X_1 = y, X_0 = x\right) \\ &\stackrel{\text{Markov}}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \{X_n \in A\} | X_1 = y\right) \\ &\stackrel{\text{SMP}}{=} \mathbb{P}_y\left(\bigcup_{n \geq 0} \{X_n \in A\}\right) = \mathbb{P}_y(V_A < \infty) = h_y^A \end{aligned}$$

□

Example 2.10

$a, b \in S, V_a := V_{\{a\}}, V_b := V_{\{b\}}$, 考虑 $h(x) = \mathbb{P}_x(V_a < V_b)$, 则 $h = (h(x))_{x \in S}$ 满足下列方程

$$\begin{cases} h(a) = 1, h(b) = 0 \\ h(x) = \sum_y p_{xy} h(y) \quad x \neq a, b \end{cases}$$

证明. (和上述引理证明过程一样) 使用一步展开方法,

$$h(x) = \mathbb{P}_x(V_a < V_b) = \sum_{y \in S} \mathbb{P}_x(V_a < V_b | X_1 = y) \mathbb{P}_x(X_1 = y)$$

只需证 $\mathbb{P}_x(V_a < V_b | X_1 = y) = h(y), \forall x \neq a, b, y \in S, \rightarrow V_a \geq 1$, 就满足 $h(x) = \sum_{y \in S} p_{xy} h(y)$.

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \mathbb{P}_x(1 \leq V_a < \infty, V_a < V_b | X_1 = y) \\ &\stackrel{x \neq a, b}{=} \mathbb{P}_x \left(\bigcup_{m \geq 1} \left\{ \{X_m = a\} \cap \bigcap_{1 \leq k \leq m} \{X_k \neq a, b\} \right\} \middle| X_1 = y \right) \\ &= \mathbb{P}_x \left(\sum_{m \geq 1} \left\{ \{X_m = a\} \cap \bigcap_{1 \leq k \leq m} \{X_k \neq a, b\} \right\} \middle| X_1 = y \right) \\ &= \sum_{m \geq 1} \mathbb{P}_x \left(\{X_m = a\} \cap \bigcap_{1 \leq k \leq m} \{X_k \neq a, b\} \middle| X_1 = y \right) \\ &\stackrel{\text{Markov}}{=} \sum_{m \geq 1} \mathbb{P}(V_a = m, V_a < V_b | X_1 = y) \\ &\stackrel{\text{SMP}}{=} \sum_{m \geq 1} \mathbb{P}_y(V_a = m, V_a < V_b) \\ &= \mathbb{P}_y(V_a < V_b) = h(y) \end{aligned}$$

□

Theorem 2.15

$A, B \subseteq S, A \cap B = \emptyset$, 令 $C = S - A \cup B$. 若 C 有限, $\mathbb{P}_x(V_A \wedge V_B < \infty) > 0, \forall x \in C$, 则方程

$$\begin{cases} h(x) = 1 & x \in A \\ h(x) = \sum_{y \in S} p_{xy} h(y) & x \in C \\ h(x) = 0 & x \in B \end{cases} \quad (2.47)$$

存在唯一非负解 $h(x) = \mathbb{P}_x(V_A < V_B), \forall x \in S$ (不证明)

注:

1. \wedge 是取小符号, $V_A \wedge V_B := \min\{V_A, V_B\}$
2. $\mathbb{P}_x(V_A \wedge V_B < \infty) > 0 \iff x \rightarrow a \text{ 或 } x \rightarrow b$
3. $A \cap B = \emptyset$ 时, $V_A \wedge V_B = V_{A \cup B}$

Problem 14 (作业 8-1)

证明:

1. $\mathbb{P}_x(V_a \wedge V_b < \infty) > 0 \iff x \rightarrow a \text{ 或 } x \rightarrow b$
2. $A \cap B = \emptyset$ 时, $V_A \wedge V_B = V_{A \cup B}$

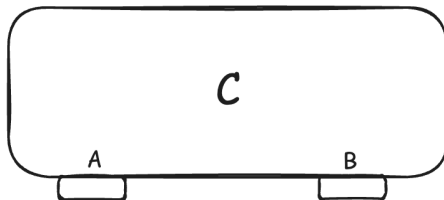


图 6: An example

$\tau_C = \min\{n \geq 0 | X_n \notin C\}$ 为首次离出时刻/逃逸时刻.

$\tau = \min\{n \geq 0 | X_n \in A \cup B\}, A \cap B = \emptyset$.

$\mathbb{P}_x(X_{\tau_C} \in A) = \mathbb{P}_x(V_A < V_B)$ 为逃逸概率/离出分布.

特别的, $A = \{a\}, B = \{b\}$, a, b 为吸收态, $x \rightarrow a (x \neq a), a \nrightarrow x, \rho_{ax} = 0 < 1$, 由 Lem 2.8, x 暂留.

$\mathbb{P}_x(V_a < V_b) = \mathbb{P}_x(V_a < \infty)$ 为吸收概率.

$\tau_C = V_{A \cup B} = V_A \wedge V_B$

$\therefore \mathbb{P}_x(V_A \wedge V_B < \infty) = \mathbb{P}_x(\tau_C < \infty) > 0$.

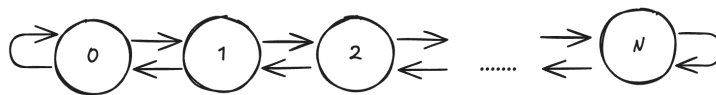
Example 2.11

X_n : 财富, $X_n = 0$ 或 N 时游戏结束, 问: 赌徒破产概率.

解.

$$\begin{cases} p(x, x+1) = p & 0 < x < N \\ p(x, x-1) = q = 1-p & 0 < x < N \\ p(0, 0) = 1, p(N, N) = 1 & x = 0, x = N \end{cases}$$

$0, N$ 为吸收态. 令 $h(x) := \mathbb{P}_x(V_0 < \infty) = \mathbb{P}_x(V_0 < V_N)$, $x = 1, \dots, N-1$. S 有限, 不可约, 则 $\forall 0 < x < N, x \rightarrow 0, x \rightarrow N$.



由 Thm 2.15, $h(x) = (h(x))_{x \in S}$ 是下列方程的唯一非负解.

$$\begin{cases} h(0) = 1, h(N) = 0 \\ h(x) = \sum_y p_{xy} h(y) = p(x, x+1)h(x+1) + p(x, x-1)h(x-1) & 0 < x < N \end{cases}$$

$$h(x) = ph(x+1) + qh(x-1), 0 < x < N. \quad p(h(x+1) - h(x)) = q(h(x) - h(x-1)).$$

$$h(x+1) - h(x) = \frac{q}{p}(h(x) - h(x-1)) = \left(\frac{q}{p}\right)^x (h(1) - h(0)), \quad \forall 0 \leq x \leq N$$

$$\begin{aligned} h(x) &= h(0) + \sum_{k=0}^{x-1} (h(k+1) - h(k)) \\ &= h(0) + (h(1) - h(0)) \sum_{k=0}^{x-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k, \quad \forall 0 \leq x \leq N \end{aligned}$$

令 $\theta = q/p$.

1. $\theta = 1$ 时, $h(x) = h(0) + x(h(1) - h(0))$, $0 = h(N) = 1 + N(h(1) - h(0))$, $h(1) - h(0) = -1/N$,
 $h(x) = 1 + (-1/N)x = (N-x)/N$
2. $\theta \neq 1$ 时, 同理.

□

还有一种用线性代数方法求

$$h[A] := (h(x))_{x \in A} \text{ (列)}, \quad P[C, C] = (p_{ij})_{i,j \in C}, \quad h(x) = \mathbb{P}_x(V_A < V_B).$$

$$\begin{cases} h(x) = 1 & x \in A \\ h(x) = 0 & x \in B \\ h(x) = \sum_{y \in S} p_{xy} h(y) & x \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h[A] = \mathbf{1} \\ h[B] = \mathbf{0} \\ h[C] = P[C, C]h[C] + P[C, A]\mathbf{1} \end{cases}$$

因为 A, B, C 互不相交,

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{y \in S} p_{xy} h(y) \\ &= \sum_{y \in A} p_{xy} h(y) + \sum_{y \in B} p_{xy} h(y) + \sum_{y \in C} p_{xy} h(y) \\ &= \sum_{y \in A} p_{xy} + \sum_{y \in C} p_{xy} h(y) \\ &= (P[x, A])_{x \in C} \mathbf{1} + (P[x, C])_{x \in C} (h(y))_{y \in C} \\ &= P[C, A]\mathbf{1} + P[C, C]h[C], \quad \forall x \in C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h[C] = (I_{|C|} - P[C, C])^{-1} P[C, A]\mathbf{1}$$

2.8.2 平均首次时与离出时刻

Definition 2.28

定义平均首次时.

$$k_x^A := \mathbb{E}[V_A | X_0 = x] = \begin{cases} \sum_{n \geq 0} n \mathbb{P}_x(V_A = n) & \mathbb{P}_x(V_A < \infty) = 1 \\ \infty & \mathbb{P}_x(V_A = \infty) > 0 \end{cases}$$

思考: $\mathbb{P}_x(V_A < \infty) = 1$ 与常返的区别是?

常返 $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) = 1$ 是 $\mathbb{P}_x(V_A < \infty) = 1$ 的充分不必要条件.

Lemma 2.11

$k^A = (k_x^A)_{x \in S}$ 满足

$$\begin{cases} k_x^A = 0 & x \in A \\ k_x^A = 1 + \sum_{y \in S} p_{xy} k_y^A & x \notin A \end{cases}$$

证明. 当 $x \in A$ 时, $V_A = 0, k_x^A = 0$. 当 $x \notin A$ 时,

$$\mathbb{E}_x V_A = \sum_{y \in S} \mathbb{E}_x [V_A \mathbb{I}_{\{X_1=y\}}] \stackrel{\text{Cor (1.2)}}{=} \sum_{y \in S} \mathbb{E}_x [V_A | X_1 = y] \mathbb{P}_x(X_1 = y)$$

Claim 2.6. $\mathbb{E}_x[V_A | X_1 = y] = \mathbb{E}[V_A + 1 | X_0 = y], \forall y \in S, x \notin A$.

证明. 见 HW Week8 作业 2. □

将 Claim 2.6 代回 $\mathbb{E}_x V_A$.

$$\begin{aligned} \sum_{y \in S} \mathbb{E}_x [V_A | X_1 = y] \mathbb{P}_x(X_1 = y) &= \sum_{y \in S} p_{xy} (1 + \mathbb{E}[V_A | X_0 = y]) \\ &= \sum_{y \in S} p_{xy} + \sum_{y \in S} p_{xy} k_y^A \\ &= 1 + \sum_{y \in S} p_{xy} k_y^A \end{aligned}$$

□

Theorem 2.16

令 $C = S - A, A \subseteq S$. 若 C 有限, 且 $\forall x \in C, \mathbb{P}_x(V_A < \infty) = 1$. 则

$$\begin{cases} g(x) = 0 & x \in A \\ g(x) = 1 + \sum_{y \in C} p_{xy} g(y) & x \in C \end{cases} \quad (2.48)$$

存在唯一非负解 $g(x) = \mathbb{E}_x V_A$.

$$g[C] = \mathbf{1} + P[C, C]g[C]. \quad g[C] = (I_{|C|} - P[C, C])^{-1} \mathbf{1} \stackrel{\text{书上}}{=} (\mathbf{I} - \gamma)^{-1} \mathbf{1}$$

继续 Gambler's Ruin 例题

离出时刻 $\tau_C := \min\{n \geq 0 | X_n \notin C\} = V_{C^c}$

离出分布 X_{τ_C} 的分布

1. $X_{\tau_C} \in C^c$, 故 $\{X_{\tau_C} = C^c\} = \Omega$
2. 令 $x \in C, A \subseteq C^c, \mathbb{P}_x(X_{\tau_C} \in A) = \mathbb{P}_x(V_A < V_{C^c})$

Example 2.12 (等待 HT 出现的时间)

X_n : $n + 1$ 时刻硬币朝上的图案, $n \geq 0$, $S_x = \{H, T\}$. 令 $Y_n = (X_n, X_{n+1}), n \geq 0$, 考虑其为马氏链且 $S = \{HH, HT, TH, TT\}$.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \mathbf{HH} & \mathbf{HT} & \mathbf{TH} & \mathbf{TT} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{HH} \\ \mathbf{HT} \\ \mathbf{TH} \\ \mathbf{TT} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

令 T_{HT} 为出现 HT 所需的硬币投掷数. 求 $\mathbb{E}T_{HT}$.

解. $A = \{HT\}$, $V_A := \min\{n \geq 0 | Y_n = (X_n, X_{n+1}) \in A\}$, $T_{HT} = V_A + 2$

(Step 1) 求 $\mathbb{E}_x V_A$. S 有限, 不可约. 由 Thm 2.16, $g(x) := \mathbb{E}_x V_A$ 是下列方程的唯一非负解.

$$\begin{cases} g[A] = 0 \\ g[C] = \mathbf{1}_{|C|} + P[C, C]g[C] \end{cases}$$

$$g[C] = (I_{|C|} - P[C, C])^{-1} \mathbf{1}_{|C|} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{HH} \\ \mathbf{TH} \\ \mathbf{TT} \end{array}$$

(Step 2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T_{HT} &= 2 + \mathbb{E}V_A \\ &= 2 + \sum_{x \in S} \mathbb{E}V_A \mathbb{I}_{\{Y_0=x\}} \\ &\stackrel{\text{Cor (1.2)}}{=} 2 + \sum_{x \in S} \mathbb{E}[V_A | Y_0 = x] \mathbb{P}(Y_0 = x) \\ &= 2 + \sum_{x \in S} g(x) \mathbb{P}(X_0 = H, X_1 = T) \\ &= 2 + \frac{1}{4}(0 + 2 + 2 + 4) = 4 \end{aligned}$$

□

2.9 具有无限状态的马氏链

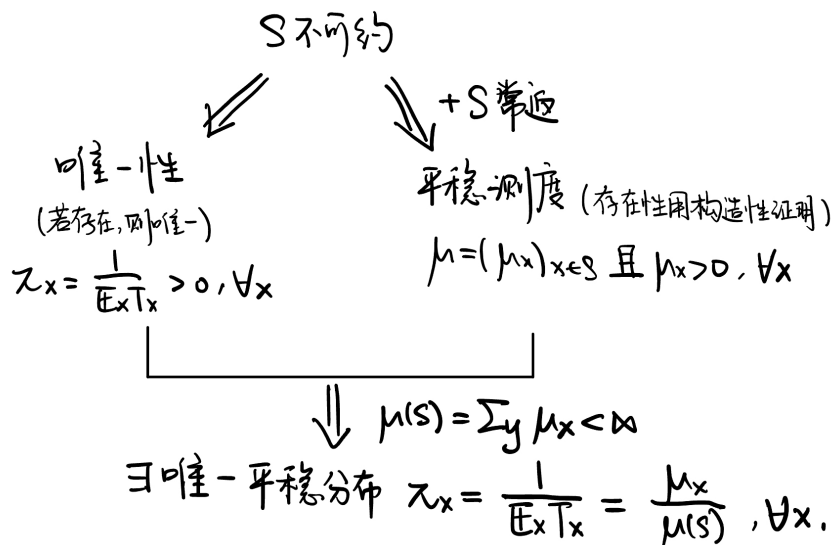


图 7: Summary

“构造性证明”见 (2.43).

Claim 2.7. S 不可约, 若存在平稳分布, 则 $\pi_x > 0, \forall x \in S$.

证明. 设 $\exists x, \text{s.t. } \pi_x = 0$. $\pi = \pi P^n, \forall n \geq 0$. $\pi_x = \sum_y \pi_y p_{yx}^{(n)}, \forall n \geq 0 \Rightarrow \pi_y p_{yx}^{(n)} = 0, \forall y \in S, n \geq 0$. 又因 S 不可约, $\forall y \in S, y \rightarrow x$. 所以 $\exists n_y \geq 0, \text{s.t. } p_{yx}^{(n_y)} > 0 \Rightarrow \forall y \in S, \pi_y = 0$. 这与 $\sum_y \pi_y = 1$ 矛盾 \square

Lemma 2.12

S 不可约, 若存在平稳测度 $\mu = (\mu_x)_{x \in S}, \mu_x > 0, \forall x$ (即“若 S 常返成立”), $\mu(S) = \sum_{x \in S} \mu_x < \infty$, 则存在唯一平稳分布

$$\pi_x = \frac{1}{\mathbb{E}_x T_x} = \frac{\mu_x}{\mu(S)} > 0, \forall x \quad (2.49)$$

注: $\pi_x = 1/(\mathbb{E}_x T_x) > 0, \forall x$ 为必要条件

$\Rightarrow \mathbb{E}_x T_x < \infty, \forall x \Rightarrow \forall x, x$ 正常返 $\Rightarrow S$ 正常返. (这是必要条件, 那反过来是否充分? 能否推出框内条件?)

$i \leftrightarrow j$, 则由 Cor 2.6, i 正常返 $\iff j$ 正常返, i 零常返 $\iff j$ 零常返, i 非周期 $\iff j$ 非周期. $p_{jj} > 0 \Rightarrow d(j) = 1$.

Theorem 2.17

S 不可约, 则下列结论等价

1. 某个状态正常返
2. 存在平稳分布 π
3. 所有状态正常返

证明. (3) \Rightarrow (1) 显然, (2) \Rightarrow (3) 在上面注记中已证. 要证 (1) \Rightarrow (2).

S 不可约, 存在 x 正常返 $\Rightarrow S$ 不可约, 常返. 由 Thm 2.14 及 (2.43), 存在平稳测度 $\mu_y = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x(T_x > n, X_n = y), \forall y \in S$. 由 Lem 2.12 框内条件知, 平稳测度要求 $\mu(S) < \infty$.

$$\begin{aligned}\mu(S) &= \sum_{y \in S} \mu_y = \sum_{n \geq 0} \sum_{y \in S} \mathbb{P}_x(T_x > n, X_n = y) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x(T_x > n) = \mathbb{E}_x T_x < \infty\end{aligned}$$

注: $T_x = \sum_{n \geq 0} \mathbb{I}_{\{T_x > n\}} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{I}_{\{T_x \geq n\}}$.

存在平稳分布 $\pi_x = \mu_x / \mu(S) > 0, \forall x$. □

Corollary 2.10

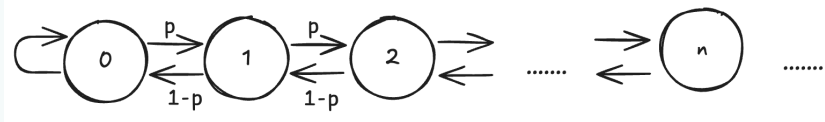
对不可约链, 下列情况之一必发生

1. S 非常返, 则不存在平稳分布
2. S 常返, 则对 $\forall x \in S$, 存在平稳测度 $\mu^{(x)} = (\mu_y^{(x)})_{y \in S}$. (由 Thm 2.14 定义).
 - (a) $\forall x, \mu^{(x)}(S) = \mathbb{E}_x T_x < \infty$, 则 S 正常返, 则存在唯一平稳分布
 - (b) $\forall x, \mu^{(x)}(S) = \mathbb{E}_x T_x = \infty$, 则 S 零常返, 则不存在平稳分布

2.9.1 广义生灭链

Example 2.13 (带反射壁的随机游动 (Durrett 1.54))

质点在 $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ 移动, 规定



$p \in (0, 1)$, X_n : 表示 n 时刻质点所在位置. 则

1. $p \in (0, 1/2)$ 时, 存在唯一平稳分布, S 正常返
2. $p > 1/2$ 时, S 非常返, 不存在平稳分布
3. $p = 1/2$ 时, S 零常返, 不存在平稳分布

证明. 1. (Step 1) S 不可约, 则平稳分布若存在则唯一

(Step 2) (存在性) 回顾 Exa 2.8, 与当前例子的区别是状态空间 S 是否有限. 设 π 满足 DBC, $\pi_x p_{xy} = \pi_y p_{yx}, \forall x, y$. $\pi_i p_{i, i+1} = \pi_{i+1} p_{i+1, i}, \forall i \geq 0$. $\pi_i p = \pi_{i+1} (1 - p), \forall i \geq 0$.

$$\pi_{i+1} = \frac{p}{1-p} \pi_i = \left(\frac{p}{1-p} \right)^{i+1} \pi_0, \forall i \geq 0$$

$$\pi_i = \left(\frac{p}{1-p} \right)^i \pi_0, \forall i \geq 0 \quad (*)$$

又由 $\sum_i \pi_i = 1$, 有

$$1 = \pi_0 \sum_{i \geq 0} \left(\frac{p}{1-p} \right)^i = \pi_0 \frac{1}{1 - \frac{p}{1-p}} \Rightarrow \pi_0 = \frac{1-2p}{1-p} \in (0, 1)$$

代回 (*), 得 $\pi_i > 0, \forall i$. 其中无穷级数 $\sum_{i \geq 0} \left(\frac{p}{1-p} \right)^i$ 当 $|p/(1-p)| < 1$ 时收敛, 即 $p < 1/2$ 时. ($\sum_{i=0}^{\infty} r^i = 1/(1-r), \forall |r| < 1$)

2. 只需证状态 0 暂留, 又因为 $0 \rightarrow 1$, Lem 2.8, 故只需证 $1 > \rho_{1,0} = \mathbb{P}_1(T_0 < \infty) = \mathbb{P}_1(V_0 < \infty)$. 考察 $\mathbb{P}_x(V_0 < \infty)$. 注意到

$$\{V_0 < \infty, X_0 = x \neq 0\} = \bigcup_{M \geq 0} \{V_0 = M, X_0 = x \neq 0\} = \bigcup_{M \geq 0} \bigcup_{N \geq x+M} \{V_0 < V_N, X_0 = x \neq 0\}$$

$$X_0 = x \neq 0, \forall N \geq x + M + 10000000, M = V_0 < V_N < V_{N+1}.$$

令 $h(x) := \mathbb{P}_x(V_0 < V_N)$, 则

$$\begin{cases} h(0) = 1, h(N) = 0 \\ h(x) = ph(x+1) + (1-p)h(x-1) \quad \forall x \neq 0, N \end{cases}$$

由 Exa 2.11, $\theta = (1-p)/p < 1$ 时, $h(x) = (\theta^x - \theta^N)/(1 - \theta^N), \forall x \in S$.

3. 考虑一步转移情况.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 T_0 &= \mathbb{E}_0[T_0 \mathbb{I}_{\{X_1=0\}}] + \mathbb{E}_0[T_0 \mathbb{I}_{\{X_1=1\}}] \\ &= \mathbb{E}_0[T_0 | X_1 = 0] p_{0,0} + \mathbb{E}_0[T_0 | X_1 = 1] p_{0,1} \\ &\stackrel{\text{Markov}}{=} \mathbb{E}[V_0 + 1 | X_0 = 0] \frac{1}{2} + \mathbb{E}[V_0 + 1 | X_0 = 1] \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}_0(1) + \mathbb{E}_1(1)) + \frac{1}{2} \mathbb{E}_1 V_0 \\ &= 1 + \frac{1}{2} \mathbb{E}_1 V_0 \end{aligned} \tag{*}$$

考察 $g(x) = \mathbb{E}_x V_0$.

(Step 1) 考察 $\mathbb{E}_x(V_0 \wedge V_N)$, 同 Exa 2.12 类似计算得到 $\mathbb{E}_x(V_0 \wedge V_N) = x(N-x)$.

(Step 2) $\mathbb{E}_1 V_0 \geq \mathbb{E}_1(V_0 \wedge V_N) = N-1 \rightarrow +\infty, (N \rightarrow +\infty)$. 代回 (*) 得 $\mathbb{E}_0 T_0 = +\infty$

□

3 泊松过程

3.1 指数分布, 泊松分布

3.1.1 指数分布

Definition 3.1 (指数分布)

称随机变量 T 服从“参数/速率 $\lambda(\lambda > 0)$ 的指数分布”, 记作 $T \sim \text{EXP}(\lambda)$, 若分布

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Property 3.1 (矩)

$T \sim \text{EXP}(\lambda)$, 则

1. $\mathbb{E}T = 1/\lambda$
2. $\mathbb{E}T^2 = 2/\lambda$
3. $\text{Var}(T) = \mathbb{E}T^2 - (\mathbb{E}T)^2 = 1/\lambda^2$

Property 3.2 (Scaling)

$T \sim \text{EXP}(\lambda), S \sim \text{EXP}(1)$, 则 $S/\lambda \stackrel{(d)}{=} T, S \stackrel{(d)}{=} \lambda T$.

Property 3.3 (无记忆性)

$T \sim \text{EXP}(\lambda)$, 则 $\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s)$

注: 等价于 $\bar{F}(t + s) = \bar{F}(t)\bar{F}(s)$, 其中 $\bar{F}(t) := 1 - F(t)$.

Property 3.4 (指数分布的排序)

$T_i \sim \text{EXP}(\lambda_i)$, 独立. 令 $V = \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, $I := \min\{i | T_i = V\}$ (随机下标)

1. $V \sim \text{EXP}(\sum_{k=1}^n \lambda_k)$, 即

$$\mathbb{P}(V > t) = \exp\left(-\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot t\right) \quad (3.3)$$

2. $\mathbb{P}(T_i = V) = \lambda_i / (\sum_{k=1}^n \lambda_k)$
3. $I \perp\!\!\!\perp V$

证明. (1) $\mathbb{P}(V > t) = \mathbb{P}(T_k > t, 1 \leq k \leq n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(T_k > t) = \prod_{k=1}^n e^{-\lambda_k t} = \exp(-\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot t), t \geq 0$.

(2) 设 $S \sim \text{EXP}(\lambda), U \sim \text{EXP}(\mu), S \perp U$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = \min\{S, U\}) &= \mathbb{P}(S \leq U) \\
&\stackrel{S \perp U}{=} \int_0^\infty \mathbb{P}(S \leq t) f_U(t) dt \\
&= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t}) f_U(t) dt \\
&= 1 - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu t} dt \\
&= 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \int_0^\infty (\lambda + \mu) e^{-(\lambda + \mu)t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}
\end{aligned} \tag{*}$$

令 $S = T_i, U = \min\{T_1, \dots, T_{i-1}, T_{i+1}, \dots, T_n\}$, 由 (1) 结论, 则 $\lambda = \lambda_i, \mu = (\sum_{k=1}^n \lambda_k) - \lambda_i$. 代回 (*), 得 $\lambda_i / (\sum_{k=1}^n \lambda_k)$.

(3) 令 $\tilde{V}_i := \min\{T_1, \dots, T_{i-1}, T_{i+1}, \dots, T_n\}$.

$\{I = i\} = \{T_i < \tilde{V}_i\} + \cup_{j=i+1}^n \{T_i \leq \tilde{V}_i, T_i = T_j\}$. 其中 $\{T_i < \tilde{V}_i\}$ 为唯一最小, $T_i \leq \tilde{V}_i$ 中至少一个与之相等.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=i+1}^n \{T_i \leq \tilde{V}_i, T_i = T_j\}\right) &\leq \sum_{j=i+1}^n \mathbb{P}(T_i = T_j) \\
&\stackrel{T_i \perp T_j}{=} \sum_{j=i+1}^n \int_0^\infty \mathbb{P}(T_i = t) f_{T_j}(t) dt = 0
\end{aligned}$$

其中 $\mathbb{P}(T_i = t) = 0$. 由此得 $\mathbb{P}(I = i) \stackrel{(d)}{=} \mathbb{P}(T_i < \tilde{V}_i)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(I = i, V > t) &= \mathbb{P}(T_i < \tilde{V}_i, V > t) \\
&= \mathbb{P}(\tilde{V}_i > T_i > t) \\
&\stackrel{T_i \perp \tilde{V}_i}{=} \int_0^\infty \mathbb{P}(\tilde{V}_i > s > t) f_{T_i}(s) ds \\
&= \int_0^\infty \mathbb{I}_{s>t} \mathbb{P}(\tilde{V}_i > s) f_{T_i}(s) ds \\
&= \int_t^\infty \exp\left(-\sum_{k \neq i} \lambda_k \cdot s\right) \cdot \lambda_i e^{-\lambda_i s} ds \\
&\stackrel{(1)}{=} \frac{\lambda_i}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} \cdot \int_t^\infty \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right) \exp\left(-\sum_{k=i}^n \lambda_k \cdot s\right) ds \\
&\stackrel{(1,2)}{=} \mathbb{P}(V > t) \mathbb{P}(I = i)
\end{aligned}$$

由 (2), $\mathbb{P}(T_i = V) = \mathbb{P}(T_i \leq \tilde{V}_i) = \lambda_i / (\sum_{k=1}^n \lambda_k)$. 所以 $\mathbb{P}(I = i) = \mathbb{P}(T_i < \tilde{V}_i) = \lambda_i / (\sum_{k=1}^n \lambda_k)$, 在测度意义上相等. \square

Theorem 3.1 (指数分布随机变量之和)

设 τ_1, τ_2, \dots 独立同分布, $\tau_1 \sim \text{EXP}(\lambda)$, 则对 $n \geq 1$, 有

$$T_n = \sum_{k=1}^n \tau_k \sim \Gamma(n, \lambda) \quad (3.4)$$

即

$$f_{T_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

其中约定 $0^0 = 1, 0! = 1$.

证明. 1. $n = 1$ 显然.

2. 假设 $n = k$ 成立. 下证 $n = k + 1$ 也成立.

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= T_k + \tau_{k+1}, T_k \perp\!\!\!\perp T_{k+1} \\ f_{T_{k+1}}(t) &= (f_{T_k} * f_{\tau_{k+1}})(t) \\ &= \int_0^t f_{T_k}(s) f_{\tau_{k+1}}(t-s) ds \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda e^{-\lambda(t-s)} ds \\ &= \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \int_0^t s^{k-1} ds \\ &= \frac{\lambda^{k+1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \left[\frac{s^k}{k} \right]_0^t = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \end{aligned}$$

□

注: 概率密度函数之和的分布等于这两个密度函数的卷积. 从分布函数出发推导

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}(X + Y \leq z) \stackrel{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \iint_{x+y \leq z} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y) dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) F_Y(z-x) dx \end{aligned}$$

对分布函数求导得到密度函数:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{d}{dz} F_Z(z) = \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) F_Y(z-x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \frac{d}{dz} F_Y(z-x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \\ &= (f_X * f_Y)(z) \end{aligned}$$

3.1.2 泊松分布

Definition 3.2

称 X 服从“均值/参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松分布” (记作 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$), 若

$$\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad (3.6)$$

Property 3.5 (矩)

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, 对 $\forall k \geq 1$,

$$\mathbb{E}X(X-1)\cdots(X-k+1) = \lambda^k \quad (3.7)$$

特别地,

1. $k = 1$ 时, $\mathbb{E}X = \lambda$
2. $\text{Var}(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X(X-1) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2 \stackrel{k=2}{=} \lambda^2 + (\lambda - \lambda^2) = \lambda$

证明.

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \lambda^k e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} \\ &\stackrel{m=n-k}{=} \lambda^k e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \\ &= \lambda^k e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^k \end{aligned}$$

□

Theorem 3.2 (Durrett Thm 2.4, 泊松随机变量之和)

$X_k \sim \text{Poisson}(\lambda_k), k \geq 1$ 独立, 则

$$\sum_{k=1}^N X_k \sim \text{Poisson}\left(\sum_{k=1}^N \lambda_k\right) \quad (3.8)$$

证明. $N = 2$.

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) \stackrel{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 + m = n) \mathbb{P}(X_2 = m)$$

公式: $\mathbb{E}|g(X, Y)| < \infty, X \perp\!\!\!\perp Y$, 则 $\mathbb{E}g(X, Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}g(x, Y)|_{x=X})$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) &= \mathbb{E}\mathbb{I}_{\{X_1 + X_2 = n\}} \\ &\stackrel{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=} \mathbb{E}_{X_2}(\mathbb{E}_{X_1}\mathbb{I}_{\{X_1 + m = n\}}|_{m=X_2}) \\ &= \mathbb{E}_{X_2}(\mathbb{P}(X_1 + m = n)|_{m=X_2}) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 + m = n)\mathbb{P}(X_2 = m)\end{aligned}$$

$\mathbb{E}_{X_1}, \mathbb{E}_{X_2}$ 表示关于 X_1, X_2 求期望. 利用独立改写成卷积.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) &\stackrel{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=} \sum_{m=0}^n \mathbb{P}(X_1 = n - m)\mathbb{P}(X_2 = m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^m}{m!} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^m \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-m} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}\end{aligned}$$

其中, 由二项式定理 $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ 知,

$$\sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^m \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-m} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^n = 1$$

□

Theorem 3.3 (Durrett(3ed), Thm 2.5, 二项分布的泊松逼近)

$X_n \sim \text{Binomial}(n, \frac{\lambda}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Poisson}(\lambda), \lambda > 0$. 其中 $\xrightarrow{n \rightarrow \infty}$ 表示依分布收敛.

证明.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left[\frac{n!}{(n-k)! \cdot n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \right] \\ &=: \frac{\lambda^k}{k!} \cdot [\mathcal{J}_{n,1} \cdot \mathcal{J}_{n,2} \cdot \mathcal{J}_{n,3}] \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{n,1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n \cdot n \cdots n} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{n,2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-\lambda}{n}\right)^{n/(-\lambda)} \right]^{-\lambda} = e^{-\lambda}\end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{n,3} = 1^{-k} = 1$. 代回得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

□

3.2 泊松过程的定义

Definition 3.3 (计数过程)

若随机变量 $N(t)$ 表示时间段 $[0, t]$ 内某事件发生的次数, 则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个计数过程, 若

1. $N(t) \geq 0$ 取整数值
2. 若 $s < t$, 则 $N(s) \leq N(t)$, 且 $N(t) - N(s)$ 表示时间段 $(s, t]$ 内事件的发生次数

Definition 3.4 (泊松过程 I)

称一个计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个带有参数/速率 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松过程, 若

1. $N(0) = 0$, 即 $\mathbb{P}(N(0) = 0) = 1$
2. (独立增量) $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 有

$$N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

相互独立

3. $\forall t > 0, s \geq 0, N(t+s) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

Property 3.6

由 Def 3.4 (3) 易知, $(N(t))_{t \geq 0}$ 具有平稳增量.

$$N(t+s) - N(s) \stackrel{(d)}{=} N(t) - N(0) \stackrel{(d)}{=} N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

注: $\mathbb{E}N(t) = \lambda t \Rightarrow \lambda = \mathbb{E}N(t)/t$ 过程的速率

Property 3.7 (Durrett, Lem 2.5)

对固定 $s \geq 0$, $\{N(t+s) - N(s), t \geq 0\}$ 仍是一个带有速率 λ 的 Poisson 过程, 且 $N(t+s) - N(s) \perp\!\!\!\perp N(r), \forall 0 \leq r \leq s, t \geq 0$

Definition 3.5 (泊松过程 II: 到达时间间隔)

令 τ_1, τ_2, \dots 为一列独立同分布的随机变量, $\tau_1 \sim \text{EXP}(\lambda)$,

$$T_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \tau_k & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

$N(t) = \max\{n | T_n \leq t\}$, 则称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为带有速率 λ 的 Poisson 过程

注: “无穷小定义”, 见 Sheldon Ross 随机过程 [5].

注:

1. $T_n (n \geq 1)$: 第 n 个顾客的到店时刻

2. $\tau_n (n \geq 1)$: 第 n 个和第 $n-1$ 个顾客的到店时间间隔
3. $N(t)$: t 时刻之前到达的顾客总数

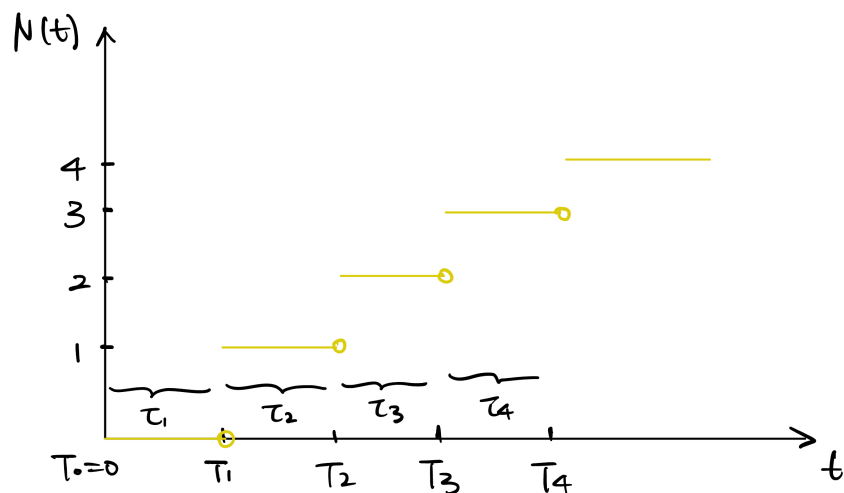


图 8: Arrival

注意 T_1, T_2, \dots 是随机的

1. $n \geq 1, \tau_n = T_n - T_{n-1} \sim \text{EXP}(\lambda), T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$
2. $\{N(t) = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$
3. $\{N(t) \geq n\} = \{t \geq T_n\}$
4. $\{N(t) < n\} = \{t < T_n\}$

Theorem 3.4

两种定义是等价的, 即 $\text{Def 3.4} \iff \text{Def 3.5}$

Proposition 3.1

$\text{Def 3.5} \Rightarrow \text{Def 3.4}$

证明. 1. $\{N(0) = 0\} = \{T_1 > 0\} = \{\tau_1 > 0\} \Rightarrow \mathbb{P}(N(0) = 0) = \mathbb{P}(\tau_1 > 0) = 1$
先引入下面引理.

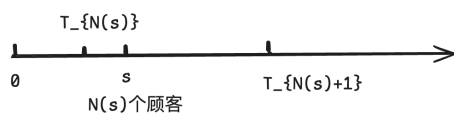


图 9: 固定起始时间 s

Lemma 3.1 (Lem 2.5')

对固定 $s \geq 0$ (图 9), 令 $\tau_1^s := T_{N(s)+1} - s$. $\tau_n^s := \tau_{N(s)+n}$, $n \geq 2$.

$$T_n^s := \begin{cases} \sum_{k=1}^n \tau_k^s & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

$N^s(t) := \max\{n | T_n^s \leq t\}$. 则

(a) $N^s(t) = N(t+s) - N(s)$

(b) $\forall k \geq 1, (\tau_1^s, \dots, \tau_k^s) \perp\!\!\!\perp N(s)$, 即 $\tau_k^s = \tau_k \sim \text{EXP}(\lambda)$, $\tau_1^s, \tau_2^s, \dots$ 相互独立

(c) $\{N^s(t) = N(t+s) - N(s), t \geq 0\}$ 为带有速率 λ 的泊松过程, 且 $N(t+s) - N(s) \perp\!\!\!\perp N(r), \forall 0 \leq r \leq s, t \geq 0$

2. (独立增量) 由 Lem 3.1 (c) 及数学归纳法

$n = 2$, 对 $0 = t_0 \leq t_1 < t_2$, 有 $N(t_2) - N(t_1) \perp\!\!\!\perp N(t_1) = N(t_1) - N(t_0)$.

$n = k$, 假设对 $0 = t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 有 $N(t_k) - N(t_{k-1}), \dots, N(t_1) - N(t_0)$ 相互独立. 考虑 $n = k+1$, 对于第 $k+1$ 个增量 $N(t_{k+1}) - N(t_k)$, 由 Lem 3.1 (c), 令 $s = t_k$, $N^s(t_{k+1} - t_k) \perp\!\!\!\perp N(r), \forall r \leq t_k$, 因此由 Thm 1.3, $N^s(t_{k+1} - t_k) \perp\!\!\!\perp \sigma(\bigcup_{r \leq t_k} N(r))$. $\forall 1 \leq j \leq k, N^s(t_{k+1} - t_k) \perp\!\!\!\perp (N(t_j) - N(t_{j-1}))$. 又因 $\forall 1 \leq j \leq k, N(t_j) - N(t_{j-1})$ 相互独立, 则 $\forall 1 \leq j \leq k+1, N(t_j) - N(t_{j-1})$ 相互独立.

3. 由 Lem 3.1 (a)(c) 知, 只需证 $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, 则有 $N(t+s) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$. 这是因为 Lem 3.1 (a)(c) 已经把 $N(t+s) - N(s)$ 表达为一个“从 s 开始重新计时”的新泊松过程 $N^s(t)$, 而我们知道 $N^s(t)$ 的构造方式与原始的 $N(t)$ 完全一致, 只不过起点平移到了 s .

(a) $\mathbb{P}(N(t) = 0) = \mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(\tau_1 > t) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^0 / (0!)$

(b) $n > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n) &= \mathbb{P}(T_n \leq t < T_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(T_n \leq t < T_n + \tau_{n+1}) \\ &= \frac{T_n \perp\!\!\!\perp \tau_{n+1}}{\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(u \leq t < u + \tau_{n+1}) f_{T_n}(u) du} \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{I}_{\{u \leq t\}} \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t - u) f_{T_n}(u) du \\ &= \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} \lambda e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} du \\ &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \int_0^t e^{\lambda u} \cdot e^{-\lambda u} u^{n-1} du \\ &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{n} \cdot u^n \Big|_0^t = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \sim \text{Poisson}(\lambda t) \end{aligned}$$

□

下面证明 Lem 3.1.

证明. (a) 要证 $N^s(t) = N(t+s) - N(s)$.

$$n \geq 1, T_n^s = T_{N(s)+1} - s + \tau_{N(s)+2} + \cdots + \tau_{N(s)+n} = T_{N(s)+n} - s, T_{N(s)} \leq s$$

$$\begin{aligned} N^s(t) &= \max\{n \geq 0 | T_n^s \leq t\} \\ &= \max\{n \geq 0 | T_{N(s)+n} \leq t + s\} \\ &\stackrel{m=N(s)+n}{=} \max\{m - N(s) \geq 0 | T_m \leq t + s\} \\ &= \max\{m \geq 0 | T_m \leq t + s\} - N(s) \\ &= N(t + s) - N(s) \end{aligned}$$

(b) 要证明

$$\forall k \geq 1, \boxed{(\tau_1^s, \dots, \tau_k^s) \perp\!\!\!\perp N(s)}, \text{ 即 } \tau_k^s = \tau_k \sim \text{EXP}(\lambda), \tau_1^s, \tau_2^s, \dots \text{ 相互独立}$$

实际上方框内的陈述更强, 目前无法证明, 所以只证后面的部分.

(1) $k = 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_1^s > t_1, N(s) = n) &= \mathbb{P}(T_{N(s)+1} - s > t_1, N(s) = n) \\ &= \mathbb{P}(T_{n+1} > t_1 + s, s \geq T_n) \\ &= \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t_1 + s - T_n, T_n \leq s) \\ &\stackrel{T_n \perp\!\!\!\perp \tau_{n+1}}{=} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t_1 + s - u, u \leq s) f_{T_n}(u) du \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{I}_{\{u \leq s\}} \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t_1 + s - u) f_{T_n}(u) du \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_0^{+\infty} \mathbb{I}_{\{u \leq s\}} \mathbb{P}(\tau_{n+1} > s - u) f_{T_n}(u) du \cdot \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t_1) \\ &= \mathbb{P}(\tau_{n+1} > s - T_n, T_n \leq s) \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t_1) \\ &= \mathbb{P}(T_{n+1} > s \geq T_n) \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t_1) \\ &= \mathbb{P}(N(s) = n) \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t_1) \end{aligned}$$

(*) 处用了指数分布的无记忆性,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t_1 + s - u) &= \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t_1 + s - u | \tau_{n+1} > t_1) \cdot \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t_1) \\ &= \mathbb{P}(\tau_{n+1} > s - u) \cdot \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t_1) \end{aligned}$$

最后关于 n 求和,

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\tau_1^s > t_1, N(s) = n) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(N(s) = n) \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t_1)$$

其中 $\text{LHS} = \mathbb{P}(\tau_1^s > t_1)$. 因为 $\mathbb{P}(\tau_{n+1} > t_1) \stackrel{iid}{=} \mathbb{P}(\tau_1 > t_1)$, $\Rightarrow \text{RHS} = \mathbb{P}(\tau_1 > t_1) \Rightarrow \tau_1^s \sim \text{EXP}(\lambda)$.
代回, 得 $\mathbb{P}(\tau_1 > t_1) = \mathbb{P}(\tau_1^s > t_1)$, 即 $\tau_1^s \perp\!\!\!\perp N(s)$.

注: $\mathbb{P}(T_{n+1} - s > t | N(s) = n) = \mathbb{P}(\tau_1^s > t | N(s) = n) = \mathbb{P}(\tau_1 > t)$. $\Rightarrow T_{n+1} - s \sim \text{EXP}(\lambda)$ under $\mathbb{P}(\cdot | N(t) = n)$.

(2) $k \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} A_n &:= \{N(s) = n, \tau_1^s > t_1, \tau_2^s > t_2, \dots, \tau_k^s > t_k\} \\ &= \{T_n \leq s, T_{n+1} > t_1 + s\} \cap \left\{ \bigcap_{i=2}^k \{\tau_{n+i} > t_i\} \right\} \\ \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(T_n \leq s, T_{n+1} > t_1 + s) \prod_{i=2}^k \mathbb{P}(\tau_{n+i} > t_i) \\ &\stackrel{k=1}{=} \mathbb{P}(N(s) = n) \mathbb{P}(\tau_1 > t_1) \prod_{i=2}^k \mathbb{P}(\tau_{n+i} > t_i) \end{aligned}$$

在概率测度意义下 $\tau_{n+i} \stackrel{(d)}{=} \tau_i$, 关于 n 求和, $(\tau_1^s, \dots, \tau_k^s) \stackrel{(d)}{=} (\tau_1, \dots, \tau_k)$, 即 $\tau_1^s, \dots, \tau_k^s$ 相互独立, 代回前式得 $(\tau_1^s, \dots, \tau_k^s) \perp\!\!\!\perp N(s)$.

(3) 类似前面两步的技巧.

(c) 不妨设 $0 \leq t_1 < \dots < t_k$

$$\begin{aligned} \{N^s(t_1) = m_1, \dots, N^s(t_k) = m_k\} &= \{T_{m_1}^s \leq t_1 < T_{m_1+1}^s, \dots, T_{m_k}^s \leq t_k < T_{m_k+1}^s\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{m_1} \tau_i^s \leq t_1 < \sum_{i=1}^{m_1+1} \tau_i^s, \dots, \sum_{i=1}^{m_k} \tau_i^s \leq t_k < \sum_{i=1}^{m_k+1} \tau_i^s \right\} \end{aligned}$$

由 (b), $\tau_i^s \sim \text{EXP}(\lambda), \forall i \geq 0$. 由 Def 3.5, $N^s(t_i), \forall i \geq 0$ 为速率 λ 的泊松过程.

□

Proposition 3.2

Def 3.4 \Rightarrow Def 3.5

证明. $\{N(t), t \geq 0\}$ 是计数过程, $T_n = \min\{t | N(t) \geq n\}, \tau_n = T_n - T_{n-1}$.

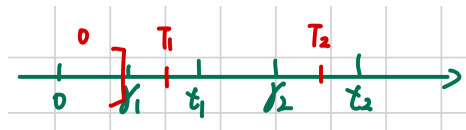
1. $t \neq 0$,

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{N(t) \geq n\}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{T_n \leq t\}} = \max\{n | T_n \leq t\}$$

2. 下面只需证 $(\tau_k)_{k \geq 1} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{EXP}(\lambda)$

(a) $k = 1, \mathbb{P}(\tau_1 > t) = \mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^0 / (0!) = e^{-\lambda t}$, 故 $\tau_1 \sim \text{EXP}(\lambda)$.

(b) 考察 $(T_1, T_2), S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x_1 < x_2\}$. 设 $0 < r_1 < t_1 < r_2 < t_2$



$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(r_1 \leq T_1 < t_1, r_2 \leq T_2 < t_2) \\
&= \mathbb{P}(N(r_1) = 0, N(r_2) - N(t_1) = 0, N(t_1) - N(r_1) = 1, N(t_2) - N(r_2) \geq 1) \\
&= e^{-\lambda r_1} \cdot e^{-\lambda(r_2-t_1)} \cdot e^{-\lambda(t_1-r_1)} \cdot \frac{\lambda(t_1-r_1)}{1!} \cdot [1 - e^{-\lambda(t_2-r_2)}] \\
&= \lambda(t_1-r_1)[e^{-\lambda r_2} - e^{-\lambda t_2}] = \lambda \int_{r_1}^{t_1} dx_1 \int_{r_2}^{t_2} \lambda e^{-\lambda x_2} dx_2
\end{aligned}$$

$N(t_2) - N(r_2) \geq 1$ 是因为要求第二个事件 T_2 必须落在 $[r_2, t_2)$ 内, 但并不限制该区间内后续事件的数量. 联合密度函数 $\lambda^2 e^{-\lambda x_2}$ 在区域 S (即 $0 < x_1 < x_2$) 上, 所以 $f_{(T_1, T_2)}(x_1, x_2) = \lambda^2 e^{-\lambda x_2} \mathbb{I}_{\{(x_1, x_2) \in S\}}$.

$$\mathbb{P}(\tau_1 > t_1, \tau_2 > t_2) = \mathbb{P}(\tau_1 > t_1, T_2 - T_1 > t_2) = \int_{x_1 > t_1} \int_{x_2 - x_1 > t_2} \lambda^2 e^{-\lambda x_2} dx_2 dx_1 = e^{-\lambda(t_1+t_2)}$$

又 $\mathbb{P}(\tau_1 > t_1) = e^{-\lambda t_1}$, 所以 $\tau_2 \sim \text{EXP}(\lambda)$ 且 $\tau_1 \perp \tau_2$. 对 $k \geq 3$ 同理.

□

Definition 3.6 (Def 3.4 推广, 非齐次的泊松过程)

称计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一个速率为 $\lambda(r)$ 的非齐次泊松过程, 若

1. $N(0) = 0$
2. 独立增量性
3. 增量的分布

$$N(t+s) - N(s) \sim \text{Poisson}\left(\int_s^{t+s} \lambda(r) dr\right)$$

Proposition 3.3

非齐次泊松过程的到达间隔时间列 τ_1, τ_2, \dots 不再服从指数分布, 不再相互独立.

证明. 同上计算联合分布即可.

□

3.3 复合泊松过程

Definition 3.7

$\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个泊松过程, $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ 独立同分布且 $\{Y_i\}_{i \geq 1} \perp\!\!\!\perp (N(t))_{t \geq 0}$. 令

$$S(t) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i & N(t) \neq 0 \\ 0 & N(t) = 0 \end{cases}$$

则 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 称为一个复合泊松过程.

Theorem 3.5

$\{Y_i\}_{i \geq 1}$ 为独立同分布 r.v. 列, N 为取非负整数值的 r.v., $\{Y_i\}_{i \geq 1} \perp\!\!\!\perp N$. 令

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^N Y_i & N \neq 0 \\ 0 & N = 0 \end{cases}$$

则

1. $\mathbb{E}S = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}Y_i$
2. $\text{Var}(S) = \mathbb{E}N \text{Var}(Y_i) + \text{Var}(N)(\mathbb{E}Y_i)^2$
3. 特别地, 若 $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, 则 $\mathbb{E}S = \lambda \mathbb{E}Y_i$, $\text{Var}(S) = \lambda[\text{Var}(Y_i) + (\mathbb{E}Y_i)^2] = \lambda \mathbb{E}Y_i^2$.

注:

1. 若 $N = n$ 非随机, 则 $\mathbb{E}S = n\mathbb{E}Y_i$
2. 若 $N = n$ 非随机, $\text{Var}(S) = n \text{Var}(Y_i)$. 若 Y_i 非随机, $\text{Var}(S) = \text{Var}(Y \cdot N) = Y^2 \text{Var}(N)$.

证明. 1. 由重期望公式(1.4),

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}(\mathbb{E}(S|N)) = \mathbb{E} \left[\sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(S|N=n) \mathbb{I}_{\{N=n\}} \right] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(S|N=n) \mathbb{P}(N=n)$$

其中 $\sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(S|N=n) \mathbb{I}_{\{N=n\}}$ 为一个离散随机变量. $\mathbb{E}(S|N=n)$ 是一个数, 不具有随机性.

$$\mathbb{E}(S|N=n) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^n Y_i | N=n) \stackrel{\{Y_i\} \perp\!\!\!\perp N}{=} \mathbb{E}(\sum_{i=1}^n Y_i) = n\mathbb{E}Y_i$$

所以 $\mathbb{E}S = \mathbb{E}N\mathbb{E}Y_i$.

2. $\mathbb{E}(S^2|N=n) = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n Y_i]^2 = \text{Var}(\sum_{i=1}^n Y_i) + [\mathbb{E} \sum_{i=1}^n Y_i]^2 = n \text{Var}(Y_i) + n^2 [\mathbb{E}Y_i]^2$. $\mathbb{E}S^2 = \mathbb{E}N \cdot \text{Var}(Y_i) + \mathbb{E}N^2 \cdot (\mathbb{E}Y_i)^2$. $\text{Var}(S) = \mathbb{E}S^2 - (\mathbb{E}S)^2 = \mathbb{E}N \text{Var}(Y_i) + \text{Var}(N)(\mathbb{E}Y_i)^2$

□

3.4 泊松过程的变换

1. 稀释 (thinning): 把一个泊松过程拆分成若干个独立的泊松过程
2. 叠加 (superposition): 把若干个独立的泊松过程合并成一个泊松过程

3.4.1 稀释/可分解性

Theorem 3.6

$(N(t))_{t \geq 0} \sim \text{PP}(\lambda)$, $(Y_i)_{i \geq 1}$ 为 iid 的离散随机变量列, $(Y_i)_{i \geq 1} \perp\!\!\!\perp (N(t))_{t \geq 0}$. $\mathbb{P}(Y_i = j) = p_j, 1 \leq j \leq m$. 令

$$N_j(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} \mathbb{I}_{\{Y_i=j\}}, 1 \leq j \leq m$$

约定 $\sum_a^b(\cdot) = 0, b < a$. 则

1. $N(t) = \sum_j N_j(t)$
2. $\{N_j(t), t \geq 0\}, 1 \leq j \leq m$ 为相互独立的泊松过程, 且速率分别为 λp_j

注: $m = 2$ 时, $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p, \mathbb{P}(Y_i = 2) = 1 - p$. e.g. $N_1(t)$: $[0, t]$ 之间性别 1 的顾客数; $N_2(t)$: $[0, t]$ 之间性别 2 的顾客数.

证明. 下面证明 $N_1(t)$ 服从泊松过程, 且速率为 λp_1 .

1. $N(0) = N_1(0) + N_2(0) = 0$
2. (Step 1) Claim: $N_1(t) \sim \text{Poisson}(\lambda p t), p_1 = p$

$$\mathbb{P}(N_1(t) = n) = \sum_{m \geq 0} \mathbb{P}(N_1(t) = n | N(t) = n + m) \mathbb{P}(N(t) = n + m) \quad (3.9)$$

$(Y_i)_{i \geq 1} \stackrel{\text{iid}}{\sim} (N(r))_{r \geq 0} \Rightarrow (\mathbb{I}_{\{Y_i=1\}})_{i \geq 1} \perp\!\!\!\perp (N(r))_{r \geq 0}$. 因为

$$\left\{ \sum_{i=1}^m Y_i = n \right\} = \left\{ (Y_1, \dots, Y_m) \in \{(X_1, \dots, X_m) \in S^m \mid \sum_{i=1}^m X_i = n\} \right\} \quad (3.10)$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n+m} \mathbb{I}_{\{Y_i=1\}} = n \perp\!\!\!\perp (N(r))_{r \geq 0} \quad (3.11)$$

由 (3.11),

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} \mathbb{I}_{\{Y_i=1\}} = n | N(t) = n + m\right) \stackrel{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n+m} \mathbb{I}_{\{Y_i=1\}} = n\right) \stackrel{\text{iid}}{=} \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m \quad (3.12)$$

其中 $\mathbb{I}_{\{Y_i=1\}} \sim \text{Bernoulli}(p)$. 将 (3.12) 代回 (3.9), 得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_1(t) = n) &= \sum_{m \geq 0} \frac{(n+m)!}{n!m!} p^n (1-p)^m e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} \\ &= \frac{(\lambda p t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \sum_{m \geq 0} \frac{(\lambda t (1-p))^m}{m!} \\ &= \frac{(\lambda p t)^n}{n!} e^{-\lambda t} e^{\lambda t (1-p)} \\ &= e^{-\lambda p t} \frac{(\lambda p t)^n}{n!}\end{aligned}$$

(Step 2)

$$N_1(t+s) - N_1(s) = \sum_{i=N(s)+1}^{N(t+s)} \mathbb{I}_{\{Y_i=1\}} = \sum_{\tilde{i}=1}^{N(t+s)-N(s)} \mathbb{I}_{\{Y_{N(s)+\tilde{i}}=1\}}$$

由 (Step 1) 的证明步骤知, 需要条件 $(Y_{N(s)+i})_{i \geq 1} \perp\!\!\!\perp (N(t+s) - N(s))_{t \geq 0}$ 使得 $N(t+s) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda p t)$

Lemma 3.2

令 $Y_i^s := Y_{N(s)+i}$, $N_1^s(t) := \sum_{i=1}^{N^s(t)} \mathbb{I}_{\{Y_i^s=1\}}$, 则

(a) $N_1^s(t) = N_1(t+s) - N_1(s)$

(b) $1^\circ (Y_i^s)_{i \geq 1}$, iid, $Y_i^s \stackrel{(d)}{=} Y_i$

$2^\circ (Y_i^s)_{i \geq 1} \perp\!\!\!\perp (N^s(t))_{t \geq 0}$

(c) $N_1^s(t) \sim \text{Poisson}(\lambda p t)$

证明. (a) 因为 $N^s(t) = N(t+s) - N(s)$

$$\begin{aligned}N_1^s(t) &= \sum_{i=1}^{N^s(t)} \mathbb{I}_{\{Y_i^s=1\}} = \sum_{i=1}^{N(t+s)-N(s)} \mathbb{I}_{\{Y_{N(s)+i}=1\}} \\ &\stackrel{\tilde{i}=N(s)+i}{=} \sum_{\tilde{i}=N(s)+1}^{N(t+s)} \mathbb{I}_{\{Y_{\tilde{i}}=1\}} = N_1(t+s) - N_1(s)\end{aligned}$$

(b) 1° 牢记 $(Y_i)_{i \geq 1}$ 是 iid 的

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{N(s)+i_1} = j_1, Y_{N(s)+i_2} = j_2) &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(Y_{N(s)+i_1} = j_1, Y_{N(s)+i_2} = j_2 | N(s) = n) \mathbb{P}(N(s) = n) \\ &\stackrel{\text{iid}}{=} \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(Y_{i_1} = j_1) \mathbb{P}(Y_{i_2} = j_2) \mathbb{P}(N(s) = n) \\ &= \mathbb{P}(Y_{i_1} = j_1) \mathbb{P}(Y_{i_2} = j_2)\end{aligned}$$

故 $(Y_{i_1}^s, Y_{i_2}^s) \stackrel{(d)}{=} (Y_{i_1}, Y_{i_2})$, $(Y_i^s)_{i \geq 1}$ 相互独立

2° Y_i^s 中存在 $N(s)$, 先将其固定.

$$\begin{aligned} & \sum_{m \geq 0} \mathbb{P}(Y_{N(s)+i} = j | N^s(t_1) = m_1, \dots, N^s(t_k) = m_k, N(s) = m) \mathbb{P}(N(s) = m) \\ &= \mathbb{P}(Y_{m+i} = j) \stackrel{1^\circ}{=} \mathbb{P}(Y_i^s = j) \end{aligned}$$

(c) 由 (Step 1) 步骤, (b) 独立性满足时, $N_1(t+s) - N_1(s) \sim \text{Poisson}(\lambda pt)$. 由 (a), $N_1(t+s) - N_1(s)$ 就是 $N_1^s(t)$, 所以 $N_1^s(t) \sim \text{Poisson}(\lambda pt)$.

□

由 Lem 3.2 (c) 知, $N_1(t+s) - N_1(s) \sim \text{Poisson}(\lambda pt)$

3. (独立增量性) $0 = t_0 < t_1 < t_2, 0 = n_0 < n_1 < n_2$.

$$\begin{aligned} A &:= \mathbb{P}(N_1(t_j) - N_1(t_{j-1}) = m_j, 1 \leq j \leq 2 | (N(t_1), N(t_2)) = (n_1, n_2)) \\ &= \mathbb{P} \left(\sum_{i=N(t_{j-1})+1}^{N(t_j)} \mathbb{I}_{\{Y_i=1\}} = m_j, 1 \leq j \leq 2 \middle| (N(t_1), N(t_2)) = (n_1, n_2) \right) \\ &\stackrel{\mathbb{I}_{\{Y_i=1\}} \perp\!\!\!\perp (N(t))_{t \geq 0}}{=} \mathbb{P} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \mathbb{I}_{\{Y_i=1\}} = m_j, 1 \leq j \leq 2 \right) \\ &= \prod_{j=1}^2 \mathbb{P} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \mathbb{I}_{\{Y_i=1\}} = m_j \right) \end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为, $j = 1, 2$ 时, 求和的区间分别为 $[n_0 + 1, n_1], [n_1 + 1, n_2]$, 因此相互独立.

$$\begin{aligned} & \sum_{n_2 \geq n_1 \geq 0} A \cdot \mathbb{P}(N(t_1) = n_1, N(t_2) = n_2) \\ &= \sum_{n_2 \geq n_1 \geq 0} \prod_{j=1}^2 \mathbb{P} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \mathbb{I}_{\{Y_i=1\}} = m_j \right) \cdot \mathbb{P}(N(t_1) - N(t_0) = n_1) \cdot \mathbb{P}(N(t_2) - N(t_1) = n_2 - n_1) \\ &= \sum_{n_2 \geq n_1 \geq 0} \prod_{j=1}^2 \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^{n_j - n_{j-1}} \mathbb{I}_{\{Y_i^{t_{j-1}}=1\}} = m_j \right) \underbrace{\mathbb{P}(N(t_j) - N(t_{j-1}) = n_j - n_{j-1})}_{N^{t_{j-1}}(t_j - t_{j-1})} \\ &= \sum_{n_2 \geq n_1 \geq 0} \prod_{j=1}^2 \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^{N^{t_{j-1}}(t_j - t_{j-1})} \mathbb{I}_{\{Y_i^{t_{j-1}}=1\}} = m_j, N(t_j) - N(t_{j-1}) = n_j - n_{j-1} \right) \\ &= \sum_{n_2 \geq n_1 \geq 0} \prod_{j=1}^2 \mathbb{P}(N_1^{t_{j-1}}(t_j - t_{j-1}) = m_j, N(t_j) - N(t_{j-1}) = n_j - n_{j-1}) \\ &= \sum_{n_1 \geq 0} \sum_{n_2 \geq 0} \mathbb{I}_{\{n_2 \geq n_1\}} \cdot \mathbb{P}(N_1(t_1) = m_1, N(t_1) = n_1) \cdot \mathbb{P}(N_1(t_2) - N_1(t_1) = m_2, N(t_2) - N(t_1) = n_2 - n_1) \\ &= \sum_{n_1 \geq 0} \mathbb{P}(N_1(t_1) = m_1, N(t_1) = n_1) \mathbb{P}(N_1(t_2) - N_1(t_1) = m_2) \\ &= \mathbb{P}(N_1(t_1) = m_1) \cdot \mathbb{P}(N_1(t_2) - N_1(t_1) = m_2) \end{aligned}$$

也就是

$$\mathbb{P}(N_1(t_j) - N_1(t_{j-1}) = m_j, 1 \leq j \leq 2) = \mathbb{P}(N_1(t_1) = m_1) \cdot \mathbb{P}(N_1(t_2) - N_1(t_1) = m_2)$$

所以 $N_1(t_j) - N_1(t_{j-1}), j = 1, 2$ 相互独立.

□

3.4.2 叠加

Theorem 3.7

$\{N_j(t), t \geq 0\} \sim \text{PP}(\lambda_j), 1 \leq j \leq k$, 相互独立.

$$\left(\sum_{j=1}^k N_j(t) \right)_{t \geq 0} \sim \text{Poisson} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \right) \quad (3.13)$$

证明. $k = 2$, 令 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$.

1. $N(0) = 0$
2. $(N_1(t))_{t \geq 0} \perp\!\!\!\perp (N_2(t))_{t \geq 0}$. 故 $\forall 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, 有 $(N_1(t_1), \dots, N_1(t_n)) \perp\!\!\!\perp (N_2(t_1), \dots, N_2(t_n))$.

$$\begin{aligned} & (N_1(t_1), N_1(t_2) - N_1(t_1), \dots, N_1(t_n) - N_1(t_{n-1})) \\ & \perp\!\!\!\perp (N_2(t_1), N_2(t_2) - N_2(t_1), \dots, N_2(t_n) - N_2(t_{n-1})) \end{aligned}$$

$\Rightarrow N_1(t_j) - N_1(t_{j-1}), N_2(t_j) - N_2(t_{j-1}), 1 \leq j \leq n$ 相互独立.

$\Rightarrow (N_1(t_j) - N_1(t_{j-1}), N_2(t_j) - N_2(t_{j-1})), 1 \leq j \leq n$ 相互独立

$\Rightarrow N(t_j) - N(t_{j-1}) = (N_1(t_j) - N_1(t_{j-1})) + (N_2(t_j) - N_2(t_{j-1})), 1 \leq j \leq n$ 相互独立

3. $N(t+s) - N(s) = (N_1(t+s) - N_1(s)) + (N_2(t+s) - N_2(s)) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 t + \lambda_2 t)$

□

Example 3.1 (Durrett Exa 2.12, A Poisson Race)

Given a Poisson process of red arrivals with rate λ and an independent Poisson process of green arrivals with rate μ , what is the probability that we will get 6 red arrivals before a total of 4 green ones?

解. $(N_r(t))_{t \geq 0} \sim \text{PP}(\lambda), (N_g(t))_{t \geq 0} \sim \text{PP}(\mu)$ 相互独立, 问: $\mathbb{P}(T_4^g > T_6^r)$?

$N(t) = N_r(t) + N_g(t) \sim \text{PP}(\lambda + \mu)$.

(Step 1) $A = \{T_4^g > T_6^r\}, B = \{[0, T_9] \text{ 之间至少有6个红队队员}\}$. Claim: $A = B$.

1. $(B \subseteq A)$ $[0, T_9]$ 之间红 ≥ 6 个, 绿 ≤ 3 个. $T_6^r \leq T_9 \leq T_4^g$.
2. $(A \subseteq B, B^c \subseteq A^c)$ $[0, T_9]$ 之间红 ≤ 5 个, 绿 ≥ 4 个. $T_6^r \geq T_9 \geq T_4^g$.

以上用叠加. 便于下面使用稀释的定理.

(Step 2) 将 $(N(t))_{t \geq 0}$ 按照 $(Y_i)_{i \geq 1}$ 稀释. 其中 $(Y_i)_{i \geq 1}$ iid 且 $(Y_i)_{i \geq 1} \perp\!\!\!\perp (N(t))_{t \geq 0}, \mathbb{P}(Y_i = r) = \lambda/(\lambda + \mu)$. 得到

1. $\tilde{N}_r(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \mathbb{I}_{\{Y_i=r\}} \sim \text{PP}(\lambda), \tilde{N}_g(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \mathbb{I}_{\{Y_i=g\}} \sim \text{PP}(\mu)$. 两者相互独立.
2. $N(t) = \tilde{N}_r(t) + \tilde{N}_g(t)$

于是 $(T_4^g, T_6^r) \stackrel{(d)}{=} (\tilde{T}_4^g, \tilde{T}_6^r)$. 由 $\{T_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}$, 将 T 改写成 N , 则 T, \tilde{T} 同分布, N, \tilde{N} 同分布.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\tilde{T}_4^g > \tilde{T}_6^r) \\ &= \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\tilde{N}_r(T_9) \geq 6) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N(T_9)=9} \mathbb{I}_{\{Y_i=r\}} \geq 6\right) \\ &= \sum_{k=6}^9 \binom{9}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{9-k}\end{aligned}$$

□

3.4.3 条件分布

Theorem 3.8 (到达时刻的条件分布)

$\{N(t), t \geq 0\} \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\{T_k, k \geq 1\}$ 为其的到达时刻序列, 则 $\forall n \geq 1$, 有

$$(T_1, \dots, T_n | N(t) = n) \stackrel{(d)}{=} (V_1, \dots, V_n) \quad (3.14)$$

其中 $V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V_n$ 是 $\{U_k, 1 \leq k \leq n\} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Uniform}[0, t]$ 的重排.

证明. Claim:

$$f_{(T_1, \dots, T_n | N(t)=n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{n!}{t^n} \cdot \mathbb{I}_{\{0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n\}} \quad (3.15)$$

为了让 $T_1 = t_1, T_2 = t_2, \dots, T_n = t_n, N(t) = n$, 则 $\tau_1 = t_1, \tau_2 = t_2 - t_1, \dots, \tau_n = t_n - t_{n-1}, \tau > t - t_n$.

$$f_{T_1, \dots, T_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n \lambda e^{-\lambda \tau_k} \cdot e^{-\lambda(t-t_n)} = \lambda^n e^{-\lambda t}$$

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

相除得到 (3.15).

$$f_{(V_1, \dots, V_n)}(y_1, \dots, y_n) = \frac{n!}{t^n} \cdot \mathbb{I}_{\{0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n\}} \quad (3.16)$$

$S_n := \{\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} | \sigma \text{ 双射}\}$, $A_k := (x_k, y_k], k = 1, 2, \dots, n$.

其中 $0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_n < y_n \leq t$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_1 \in A_1, \dots, V_n \in A_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathbb{P}(V_1 \in A_1, \dots, V_n \in A_n | U_1 \in A_{\sigma(1)}, \dots, U_n \in A_{\sigma(n)}) \\ &\quad \times \mathbb{P}(U_1 \in A_{\sigma(1)}, \dots, U_n \in A_{\sigma(n)}) \\ &\stackrel{\text{iid}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \mathbb{P}(U_1 \in A_{\sigma(1)}) \cdots \mathbb{P}(U_n \in A_{\sigma(n)}) \\ &= n! \prod_{k=1}^n \left(\frac{y_k - x_k}{t}\right) \stackrel{?}{\rightarrow} f_{(V_1, \dots, V_n)}(y_1, \dots, y_n)\end{aligned}$$

得到 (3.16).

□

Theorem 3.9

若 $0 < s < t, 0 \leq m \leq n$, 则

$$\mathbb{P}(N(s) = m | N(t) = n) = \binom{n}{m} \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m} \quad (3.17)$$

即 $(N(s) | N(t) = n) \sim \text{Binomial}(n, \frac{s}{t})$

证明. $N(s) = \max\{n | T_n \leq s\} = \sum_{k=1}^{N(s)} \mathbb{I}_{\{T_k \leq s\}}.$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(s) = m | N(t) = n) &= \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{N(s)} \mathbb{I}_{\{T_k \leq s\}} = m | N(t) = n\right) \\ &\stackrel{(i)}{=} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{V_k \leq s\}} = m\right) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \binom{n}{m} \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m} \end{aligned}$$

其中

(i) 由 $(\mathbb{I}_{\{T_1 \leq s\}}, \dots, \mathbb{I}_{\{T_n \leq s\}} | N(t) = n) \stackrel{(d)}{\underset{\text{Thm (3.8)}}{=}} (\mathbb{I}_{\{V_1 \leq s\}}, \dots, \mathbb{I}_{\{V_n \leq s\}}).$

(ii) 由 $\mathbb{I}_{\{V_k \leq s\}} \sim \text{Bernoulli}(s/t)$ 相互独立. □

4 更新过程

4.1 定义

Definition 4.1

设 $\{\tau_k, k \geq 1\} \stackrel{\text{iid}}{\sim} F(\cdot)$ 为非负随机变量列, 即 $\mathbb{P}(\tau_1 \leq t) = F(t)$, 其中 $F(0) = \mathbb{P}(\tau_1 \leq 0) = 0$ 则 $0 < \mathbb{E}\tau_1 < \infty$. 令 $T_n = \sum_{k=1}^n \tau_k, n \geq 1, T_0 = 0$, 则称由 $N(t) = \max\{n | T_n \leq t\}, t > 0$ 定义的计数过程为更新过程.

注:

1. τ_k : 第 k 个灯泡的寿命/更新时间间隔序列
2. T_n : 第 n 个灯泡损坏的时刻/第 n 次更新的时刻
3. $N(t)$: $[0, t]$ 中灯泡的损坏个数/更新的次数

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{I}_{\{N(t)=n\}} = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{I}_{[T_n, T_{n+1})}(t)$$

Lemma 4.1

$\forall t \geq 0$, 有 $N(t) < \infty$ a.s. (almost surely/几乎必然/几乎处处), 即存在零测集 $\tilde{\Omega}^c$, s.t. $\forall \omega \in \tilde{\Omega}$, 有 $N(t)(\omega) < +\infty$, 即 $\mathbb{P}(N(t) < +\infty) = 1$.

注: 这样写的前提是 $N(t) < \infty$ 是可测集. 因为 $N(t)$ 是随机变量, 该前提成立.

注:

$$\mathbb{P}(N(t) = +\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\mathbb{P}(N(t) \geq n)}_{\iff T_n \leq t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} F^{*n}(t)$$

其中 F^{*n} 为 F 的 n 重卷积.

Theorem 4.1 (强大数定律)

$\{X_k, k \geq 1\}$ iid, $\mathbb{E}|X_1| < +\infty$, 令 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, 则 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \mathbb{E}X_1$, 即存在零测集 $\tilde{\Omega}^c$, s.t. $\forall \omega \in \tilde{\Omega}$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \mathbb{E}X_1$, 即 $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}X_1) = 1$.

注: 可列 r.v. 的极限也是 r.v., 而不可列 r.v. 的极限不一定是 r.v.

证明 Lem 4.1. 应用 SLLN 知, $T_n/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \mathbb{E}\tau_1 \in (0, +\infty]$.

存在零测集 $\tilde{\Omega}^c$, s.t. $\forall \omega \in \tilde{\Omega}$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n}(\omega) = \mathbb{E}\tau_1$$

$\because \mathbb{E}\tau_1 > 0, T_n(\omega) \approx n\mathbb{E}\tau_1. \therefore 0 \leq T_n \uparrow \Rightarrow \forall \omega \in \tilde{\Omega}$, 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(\omega) = +\infty$.

$N_t(\omega) = \max\{n \geq 0 | T_n(\omega) \leq t\}$, 由于 $T_n(\omega) \rightarrow +\infty, \therefore \forall \omega \in \tilde{\Omega}, \forall t \geq 0$, 至多只有有限个 n , 使 $T_n(\omega) \leq t$, 即至多只有有限个 $T_n(\omega)$ 落在 $[0, t]$ 上.

$\Rightarrow \forall \omega \in \tilde{\Omega}, \forall t \geq 0, N_t(\omega) < +\infty, \Rightarrow \forall t \geq 0, N(t) < +\infty$ (a.s.) □

4.2 极限定理

4.2.1 更新过程的大数定律

先讲一下过程本身的极限.

Lemma 4.2

$$N(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} +\infty$$

即存在零测集 $\tilde{\Omega}^c$, s.t. $\forall \omega \in \tilde{\Omega}$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t)(\omega) = +\infty$. 即 $\mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = +\infty) = 1$.

注: $N(t)$ 非可列 r.v., 但 $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$ 仍为 r.v., 因为 $N(t)$ 关于 t 右连左极 (cadlag), 即右连续存在, 左极限存在.

证明. $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) < +\infty$, $N(t)$ 关于 $t \uparrow$ 单调上升.

$\Rightarrow \exists M > 0$, s.t. $\forall t \geq 0, N(t) \leq M \Rightarrow T_M \leq t < T_{M+1}$

$\Rightarrow \forall t \geq 0, T_{M+1} > t$

$\Rightarrow T_{M+1} = +\infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) < +\infty) &\leq \mathbb{P}(\exists n, T_n = +\infty) = \mathbb{P}(\exists n, \tau_n = +\infty) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\tau_n = +\infty) = \sum_{n \geq 1} (1 - \mathbb{P}(\tau_n < +\infty)) \\ &= \sum_{n \geq 1} (1 - \lim_{t_n \rightarrow \infty} F(t_n)) = 0 \end{aligned}$$

□

Theorem 4.2 (更新过程的 LLN)

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \frac{1}{\mathbb{E}\tau_1}$$

即 $\mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}\tau_1}) = 1$, (因 $\frac{N(t)}{t}$ cadlag).

证明. 当 $N(t) < +\infty$ 时, $T_{N(t)} \leq t < T_{N(t)+1}$

当 $0 < N(t) < +\infty$ 时,

$$\begin{aligned} \boxed{\frac{T_{N(t)}}{N(t)}} &\leq \frac{t}{N(t)} < \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)} \\ &= \boxed{\frac{T_{N(t)+1}}{N(t+1)}} \cdot \frac{N(t+1)}{N(t)} \end{aligned} \quad (*)$$

方框内极限相同.

1. 由 Lem 4.2 知, $\exists \tilde{\Omega}_1^c, \mathbb{P}(\tilde{\Omega}_1^c) = 0$, s.t. $\forall \omega \in \tilde{\Omega}_1, \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)(\omega) = +\infty$.

$$\omega \in \tilde{\Omega}_1, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)+1}{N(t)}(\omega) = 1$$

2. 由 SLLN 知, $\frac{1}{n}T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \mathbb{E}\tau_1$
 $\Rightarrow \exists \tilde{\Omega}_2^c, \mathbb{P}(\tilde{\Omega}_2^c) = 0, \text{ s.t. } \forall \omega \in \tilde{\Omega}_2, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n}(\omega) = \mathbb{E}\tau_1$
 $\Rightarrow \forall \omega \in \tilde{\Omega}_1 \cap \tilde{\Omega}_2 = (\tilde{\Omega}_1^c \cup \tilde{\Omega}_2^c)^c$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T_{N(t)}}{N(t)}(\omega) = \mathbb{E}\tau_1$$

(这里用 $\epsilon - \delta$ 语言自己写一下)

由 1, 2, (*) 知, $\frac{t}{N(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \mathbb{E}\tau_1$. □

4.2.2 更新报酬过程及 LLN

Definition 4.2

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一更新过程. $\{\tau_k, k \geq 1\}$ 为其时间间隔序列, 设 $\{r_k, k \geq 1\}$ 为一 iid 随机变量列, 则称由 $R(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} r_k$ 定义的过程 $\{R(t), t \geq 0\}$ 为更新报酬过程.

注:

1. r_k : 第 k 次更新时刻 (T_k) 的报酬/花费
2. $R(t)$: $[0, t]$ 中总报酬 ($[0, T_{N(t)}]$, 忽略 $(T_{N(t)}, t]$).

Theorem 4.3 (更新报酬过程的 LLN)

设 $\mathbb{E}|r_1| < \infty, \mathbb{E}|\tau_1| \in (0, +\infty)$, 则

$$\frac{R(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \frac{\mathbb{E}r_1}{\mathbb{E}\tau_1}$$

证明.

$$\frac{R(t)}{t} = \frac{\sum_{k=1}^{N(t)} r_k}{N(t)} \cdot \frac{N(t)}{t} \quad (*)$$

1. 由 SLLN 知, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \mathbb{E}r_1$. 又 Lem 4.2 知, $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \frac{1}{\mathbb{E}\tau_1}$. 所以 $\sum_{k=1}^{N(t)} r_k / N(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \mathbb{E}r_1$
2. 由 Thm 4.2 知,

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \frac{1}{\mathbb{E}\tau_1}$$

由 1, 2, (*) 知

$$\frac{R(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \frac{\mathbb{E}r_1}{\mathbb{E}\tau_1}$$
□

Example 4.1 (长远看汽车的费用)

1. 一辆车的寿命 (首次发生故障的事件) X_k : 密度函数 h , $\{X_k, k \geq 1\}$ iid
 2. 更新间隔时间 (买新车): $\tau_k = X_k \wedge T$
 3. 第 k 次更新产生的花费: $r_k = A(\text{买新车}) + B\mathbb{I}_{\{\tau_k \leq T\}}$
- 问: 长远来看, 单位时间的花费是多少? (用 LLN)

$$\frac{\sum_{k=1}^{N(t)} r_k}{t} \leq \frac{[0, t] \text{ 间的花费}}{t} \leq \frac{\sum_{k=1}^{N(t)+1} r_k}{t}$$

从左到右分别对应时间 $[0, T_{N(t)}], [0, t], [0, T_{N(t)+1}]$

解. 令 $R(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} r_k$, 其中 $N(t) = \max\{n | \sum_{k=1}^n \tau_k \leq t\}$ (买新车的更新过程). 欲求 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\tau_1 &= \mathbb{E}(X_1 \wedge T) = \int_0^{+\infty} (x \wedge T)h(x)dx \\ &= \int_0^T xh(x)dx + \int_T^{+\infty} Th(x)dx \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}r_1 = A + B\mathbb{E}\mathbb{I}_{\{\tau_1 < T\}} = A + B\mathbb{E}\mathbb{I}_{\{X_1 < T\}} = A + B \int_0^T h(x)dx$$

由 Thm 4.3 知,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{A + B \int_0^T h(x)dx}{\int_0^{+\infty} (x \wedge T)h(x)dx}, \text{ a.s.}$$

□

Theorem 4.4 (Ross, Thm 3.6.1)

设 $\{(r_k, \tau_k), k \geq 1\}$ 是 iid 的,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}R(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}r_1}{\mathbb{E}\tau_1}$$

LHS 是数的极限, 不是随机变量的极限. 其中 $\frac{\mathbb{E}R(t)}{t}$ 被称为更新报酬函数.

注: $\{(\tau_k, r_k), k \geq 1\}$ 相互独立 \Rightarrow

1. $\{\tau_k, k \geq 1\}$ 相互独立, $\{r_k, k \geq 1\}$ 相互独立
2. $\{\tau_k, 1 \leq k \leq n\} \perp \{r_k, k \geq n+1\}$
3. $\{\tau_k\} \perp \{r_j, j \neq k\}$ (r_k 取全集即可)

4.2.3 交替更新过程及 LLN

Definition 4.3

设 $\{(s_k, u_k), k \geq 1\}$ 为 iid 的随机变量向量列, $s_k \geq 0, u_k \geq 0, \forall k \geq 1$. 令 $\tau_k := s_k + u_k, k \geq 1$. 定义

$$N(t) = \begin{cases} \max\{n | \sum_{k=1}^n \tau_k \leq t\} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为交替更新过程.

Theorem 4.5 (交替更新过程的 LLN)

设存在分布函数 H 使得 $\tau_k \sim H, \mathbb{E}s_1 \in (0, +\infty), \mathbb{E}u_1 \in (0, +\infty)$, 则

1. $\frac{\sum_{k=1}^{N(t)} s_k}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \frac{\mathbb{E}s_1}{\mathbb{E}s_1 + \mathbb{E}u_1}$
2. $\frac{[0, t] \text{中系统处于状态 1 的时长}}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \frac{\mathbb{E}s_1}{\mathbb{E}s_1 + \mathbb{E}u_1}$, 即系统处于状态 1 的事件比例的极限为 $\frac{\mathbb{E}s_1}{\mathbb{E}s_1 + \mathbb{E}u_1}$

证明. 1. Thm 4.3 中取 $r_k = s_k$.

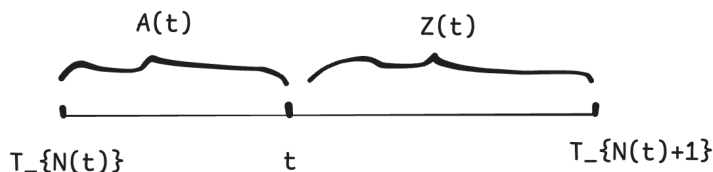
2. 令 $U(t) := [0, t]$ 中系统处于状态 1 的时长

$$\frac{\sum_{k=1}^{N(t)} s_k}{t} \leq \frac{u(t)}{t} \leq \frac{\sum_{k=1}^{N(t)+1} s_k}{t} = \frac{\sum_{k=1}^{N(t)+1} s_k}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}$$

由 Thm 4.3 得到想要的结果.

□

4.2.4 使用年龄和剩余寿命



$A(t)$ 为使用年龄, $A(t) = t - T_{N(t)}$. $Z(t)$ 为剩余寿命, $Z(t) = T_{N(t)+1} - t$.

Example 4.2

某零件按更新过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 替换, 其更新间隔时间序列 $\{\tau_k, k \geq 1\}$. 设 $\mathbb{E}\tau_1^2 < \infty$, 且 $0 < \mathbb{E}\tau_1 < \infty$, 则零件的长程平均使用年龄

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t A(s) ds = \frac{\mathbb{E}\tau_1^2}{2\mathbb{E}\tau_1}$$

若是长程平均寿命即把 $A(s)$ 换成 $Z(s)$.

注: $\int_0^t A(s) ds$ 有无意义? 有的, 因为 $N(t)$ 是几乎处处右连左极, 在 $[0, t]$ 内有有限多跳. 并非闭区间内的连续函数才可积 (参考梅加强 [6]).

定义 6.1.1 (Riemann 积分). 设 f 如上, 如果存在实数 I , 使得任给 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$, 对任何分割 π , 只要 $\|\pi\| < \delta$, 就有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon, \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n,$$

则称 f 在 $[a, b]$ 上 *Riemann* 可积或可积, I 为 f 在 $[a, b]$ 上的 (定) 积分, 记为

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

其中 f 称为被积函数, $[a, b]$ 称为积分区间, a, b 分别称为积分下限与积分上限.

图 10: 定义 6.1.1-Riemann 积分

证明. 由 $T_{N(t)} \leq t$,

$$\begin{aligned} \int_0^t A(s) ds &\geq \int_0^{T_{N(t)}} A(s) ds \\ &= \sum_{k=1}^{N(t)} \int_{T_{k-1}}^{T_k} (s - T_{N(s)}) ds \\ &= \sum_{k=1}^{N(t)} \int_{T_{k-1}}^{T_k} (s - T_{k-1}) ds \\ &= \sum_{k=1}^{N(t)} \frac{1}{2} (s - T_{k-1})^2 \Big|_{T_{k-1}}^{T_k} \\ &= \sum_{k=1}^{N(t)} \frac{1}{2} (T_k - T_{k-1})^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N(t)} \tau_k^2 \end{aligned}$$

由 Thm 4.3 知,

$$\frac{1}{2t} \sum_{k=1}^{N(t)} \tau_k^2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \frac{\mathbb{E} \tau_1^2}{2\mathbb{E} \tau_1}$$

同理,

$$\begin{aligned} \int_0^t A(s) ds &\leq \int_0^{T_{N(t)+1}} A(s) ds \\ &= \sum_{k=1}^{N(t)+1} \frac{1}{2} (T_k - T_{k-1})^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N(t)+1} \tau_k^2 \end{aligned}$$

由 Thm 4.3 知,

$$\frac{1}{2t} \sum_{k=1}^{N(t)} \tau_k^2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{a.s.}} \frac{\mathbb{E} \tau_1^2}{2\mathbb{E} \tau_1}$$

□

5 连续时间马氏链

5.1 定义

S 至多为可数集 ($S \subseteq \mathbb{N}$)

Definition 5.1 (马氏性)

称 S 值的过程 $\{X_t, t \geq 0\}$ 具有马氏性, 若对 $\forall n \geq 1, i, j, i_0, \dots, i_n \in S, 0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_n < s, t > 0$, 有

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s = i, X_{s_k} = i_k, 0 \leq k \leq n) = \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s = i) \quad (5.1)$$

其中, 称 $\mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s = i) = p_{s, s+t}(i, j)$ 为转移概率.

Definition 5.2 (马氏链)

称 $\{X_t, t \geq 0\}$ 是一个连续时间马氏链 (CTMC), 若其具有马氏性, 且轨道右连续.

Definition 5.3 (时齐性)

若 CTMC, $\{X_t, t \geq 0\}$ 的转移概率具有时齐性,

$$p_{s, s+t}(i, j) = p_{0, t}(i, j) \quad \forall i, j \in S, s, t \geq 0$$

称过程是时齐的, 并简记 $p_t(i, j) := p_{s, s+t}(i, j)$.

Definition 5.4 (正则性/标准的)

称 $\{X_t, t \geq 0\} \sim \text{CTMC}$ 具有正则性, 若

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} p_t(i, j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

DTMC 的最小步长为 1, 因此称一步转移概率矩阵为转移概率矩阵. 但 CTMC 不存在最小步长, 转移概率矩阵如何给出?

Definition 5.5

称矩阵族 $\{P_t = (p_t(i, j))_{i, j \in S}, t \geq 0\}$ 为过程的“转移半群”.

Theorem 5.1

$\{P_t, t \geq 0\}$ 为随机半群, 即

1. $\lim_{t \rightarrow 0^+} P_t = P_0 = \mathbb{I}_{S \times S}$ (单位阵)
2. 对每一个 P_t 都是一个随机矩阵
3. (C-K 方程/半群性质) 对 $\forall s, t \geq 0, P_{s+t} = P_s P_t$, 即

$$p_{s+t}(i, j) = \sum_{k \in S} p_s(i, k) p_t(k, j)$$

证明. 证明结论 (3).

$$\begin{aligned} p_{t+s}(i, j) &= \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_{t+s} = j, X_s = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s = k, X_0 = i) \mathbb{P}(X_s = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} p_s(i, k) p_t(k, j) \end{aligned}$$

□

Example 5.1

Poisson 过程是时齐 CTMC.

$$\mathbb{P}(N_{t+s} = j | N_s = i) = \mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = j - i | N_s = i) = \mathbb{P}(N_t = j - i)$$

$$p_t(i, j) = \begin{cases} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & j \geq i \\ 0 & j < i \end{cases}$$

Example 5.2

$\{N(t), t \geq 0\} \sim \text{PP}(\lambda) \perp \{Y_n, n \geq 1\} \sim \text{DTMC}((u(i, j))_{i, j \in S}), \{X_t := Y_{N(t)}, t \geq 0\} \sim \text{CTMC}$

证明. Claim 1: $\mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s = i) = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot u^{(n)}(i, j)$

先固定 $N(t)$. $\mathbb{P}(X_{t+s} = j, X_s = i | N(s) = m, N(t+s) = \tilde{m}) = \mathbb{P}(Y_{\tilde{m}} = j, Y_m = i), 0 \leq m \leq \tilde{m}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{t+s} = j, X_s = i) &= \sum_{0 \leq m \leq \tilde{m}} \mathbb{P}(Y_{\tilde{m}} = j, Y_m = i) \cdot \mathbb{P}(N(s) = m, N(t+s) = \tilde{m}) \\
&= \sum_{0 \leq m \leq \tilde{m}} \mathbb{P}(Y_{\tilde{m}} = j | Y_m = i) \mathbb{P}(Y_m = i) \mathbb{P}(N(s) = m) \mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = \tilde{m} - m) \\
&= \sum_{0 \leq m \leq \tilde{m}} \left[u^{(\tilde{m}-m)}(i, j) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\tilde{m}-m}}{(\tilde{m}-m)!} \right] \mathbb{P}(Y_{N(s)} = i, N(s) = m) \\
&= \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{n \geq 0} u^{(n)}(i, j) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \right) \mathbb{P}(Y_{N(s)} = i, N(s) = m) \\
&= \sum_{n \geq 0} u^{(n)}(i, j) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathbb{P}(X_s = i)
\end{aligned}$$

Claim 2: $\forall n \geq 1, i, j, i_0, \dots, i_n \in S, 0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_n < s, t > 0$, 有

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_s = i, X_{s_k} = i_k, 0 \leq k \leq n) = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} u^{(n)}(i, j)$$

□

5.2 转移速率矩阵与转移概率的计算

5.2.1 转移概率的连续性

Proposition 5.1

设 $\{P_t, t \geq 0\}$ 是 S 上的随机半群, 则

1. $\forall t \geq 0, i \in S$, 有 $p_t(i, i) > 0$
2. 若 $\exists s > 0$, 使 $p_s(i, i) = 1$, 则 $\forall t \geq 0, p_t(i, i) = 1$
3. 若 $\exists s > 0$, 使 $p_s(i, j) > 0$, 则 $\forall t \geq s, p_t(i, j) > 0$

证明. 1. $\lim_{t \rightarrow 0^+} p_t(i, i) = 1 \Rightarrow \exists \delta > 0$, s.t. $\forall t \in [0, \delta], p_t(i, i) > 0$
对 $\forall t \geq 0, \exists s \in [0, \delta], n \in \mathbb{N}$, 有 $t = s + n\delta$. 故由 C-K 方程,

$$\begin{aligned} p_t(i, i) &\geq p_{n\delta}(i, i)p_s(i, i) \\ &\stackrel{\text{C-K}}{\geq} (p_\delta(i, i))^n p_s(i, i) > 0 \end{aligned}$$

2. $p_s(i, i) = 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, 有 $p_{ns}(i, i) \stackrel{\text{C-K}}{\geq} (p_s(i, i))^n = 1$ (*1)
(反证法) 假设 $\exists t > 0$, s.t. $p_t(i, i) < 1 \Rightarrow \sum_{k \neq i} p_t(i, k) > 0. \exists j \neq i$, s.t. $p_t(i, j) > 0$ (*2).
取 n 使 $ns \geq t$, 则

$$\begin{aligned} p_{ns}(i, i) &= 1 - \sum_{k \neq i} p_{ns}(i, k) \\ &\leq 1 - p_{ns}(i, j) \\ &\stackrel{\text{C-K}}{\leq} 1 - p_t(i, j) \underbrace{p_{ns-t}(j, j)}_{>0, \text{ by (1)}} \\ &< 1 \quad \text{by (*2), (1)} \end{aligned}$$

与 (*1) 矛盾.

3. $p_s(i, j) > 0, p_t(i, j) \geq p_s(i, j)p_{t-s}(j, j) \stackrel{(1)}{>} 0, t \geq s$.

□

Theorem 5.2

$p_t(i, j)$ 关于 $t \geq 0$ 一致连续, 且对 $t \geq s \geq 0, i, j \in S$.

$$|p_t(i, j) - p_s(i, j)| \leq 1 - p_{t-s}(i, i) \quad (5.2)$$

证明.

$$\begin{aligned} p_t(i, j) - p_s(i, j) &\stackrel{\text{C-K}}{=} \sum_{k \in S} p_{t-s}(i, k)p_s(k, j) - p_s(i, j) \\ &= \sum_{k \neq i} p_{t-s}(i, k)p_s(k, j) - [1 - p_{t-s}(i, i)]p_s(i, j) \\ &=: I_1 - I_2 \end{aligned}$$

$$I_1 \leq \sum_{k \neq i} p_{t-s}(i, k) = 1 - p_{t-s}(i, i). \quad I_2 \leq 1 - p_{t-s}(i, i).$$

因为 I_1, I_2 非负 $\Rightarrow |\text{LHS}| = |I_1 - I_2| \leq I_1 \vee I_2 \leq 1 - p_{t-s}(i, i)$ □

5.2.2 转移概率的可微性与 Kolmogorov 方程

由 Prop 5.1 和 Thm 5.2 可证可微性, 但即便如此证明也不是件简单的事, 因此只需要知道下述定理存在即可.

Theorem 5.3

P_t 在 $t = 0$ 处右导数存在, 具体地,

1. $\forall i \in S$, 下列极限存在.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_t(i, i) - 1}{t} = q(i, i) := -\sup_{t \geq 0} \frac{1 - p_t(i, i)}{t} \in [-\infty, 0]$$

2. $\forall j \neq i$, 下列极限存在

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_t(i, j)}{t} = q(i, j) \in [0, +\infty)$$

3. $\forall i \in S, \sum_{k \neq i} q(i, k) \leq -q(i, i)$

Definition 5.6 (密度矩阵/Q 矩阵)

称 S 上的矩阵 $Q = (q(i, j))_{i, j \in S}$ 为密度矩阵, 若

1. $\forall i \in S, q_i := -q(i, i) \in [0, +\infty]$
2. $\forall i, j \in S, q(i, j) \in [0, +\infty)$
3. $\forall i \in S, \sum_{k \neq i} q(i, k) \leq q_i$

Definition 5.7

由 Thm 5.3 知, $\{P_t, t \geq 0\}$ 在 0 处的右导数矩阵. $Q := P'_0 = (p'_0(i, j))_{i, j \in S}$ 存在且其为密度矩阵. 称此 Q 为 $\{P_t, t \geq 0\}$ 或 X 的转移速率矩阵/无穷小生成元.

Definition 5.8

若 $\forall i, q_i = |q(i, i)| = \sum_{k \neq i} q(i, k) < \infty$ 称密度矩阵 Q 为保守的.

CTMC \rightarrow 转移半群 \rightarrow 转移速率矩阵. 问: 已知 Q , 能否得到 CTMC? 这个问题类比 DTMC 则为: 已知转移矩阵, 能否得到 MC?

Theorem 5.4 (Kolmogorov 向前/向后方程)

对具有保守的 Q 的随机半群 $\{P_t, t \geq 0\}$ 有

$$\begin{cases} P'_t = QP_t & \text{向后} \\ P_0 = I \end{cases} \quad \begin{cases} P'_t = P_t Q & \text{向前} \\ P_0 = I \end{cases}$$

注: $AB \neq BA$, but $QP_t = P_t Q$.

$$\text{CTMC} \xLeftrightarrow{+\mu_0} \{P_t, t \geq 0\} \xRightarrow{P'_0} Q \text{ (保守的)}$$

反之, 保守的 $Q \Rightarrow \{P_t, t \geq 0\}$

Kolmogorov 方程存在唯一性的解, 可以由 Q 构造 CTMC. 侯氏定理.

Theorem 5.5

在适当的正则性条件下, 有 Q 的向对方程与向后方程存在唯一解, 即 CTMC, $\{P_t, t \geq 0\}$ + 初始分布 μ_0 , Q 一一对应.

Example 5.3 (例 4.7)

$\{N(t), t \geq 0\} \sim \text{PP}(\lambda)$.

$$p_t(i, j) = \begin{cases} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & j \geq i \\ 0 & j < i \end{cases}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & -\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

即 $Q(i, i) = -\lambda, Q(i, i+1) = \lambda$.

此前并未限定状态空间有限, 当状态空间有限时:

Corollary 5.1

设状态空间 S 有限, 则

$$P_t = e^{tQ} = \sum_{n \geq 0} \frac{(tQ)^n}{n!}$$

Example 5.4 (两状态的 MC)

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$\lambda, \mu > 0$, 求 P_t .

解. 由 Kolmogorov 方程, $P'_t = QP_t$, 即

$$\begin{pmatrix} p'_t(1,1) & p'_t(1,2) \\ p'_t(2,1) & p'_t(2,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_t(1,1) & p_t(1,2) \\ p_t(2,1) & p_t(2,2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} p'_t(1, 1) = -\lambda p_t(1, 1) + \lambda p_t(2, 1) \\ p'_t(2, 1) = \mu p_t(1, 1) - \mu p_t(2, 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p_t(1, 1) - p_t(2, 1))' = -(\lambda + \mu)(p_t(1, 1) - p_t(2, 1)) \\ p_0(1, 1) - p_0(2, 1) = 1 - 0 = 1 \end{cases}$$

$p_t(1, 1) - p_t(2, 1) = e^{-(\lambda+\mu)t}$. 代回

$$\begin{cases} p'_t(1, 1) = -\lambda e^{-(\lambda+\mu)t} \\ p_0(1, 1) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} p'_t(2, 1) = -\mu e^{-(\lambda+\mu)t} \\ p_0(2, 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p_t(1, 1) &= \int_0^t -\lambda e^{-(\lambda+\mu)s} ds + 1 \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)s} \Big|_0^t + 1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \\ p_t(2, 1) &= \int_0^t \mu e^{-(\lambda+\mu)s} ds + 0 \\ &= \frac{-\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)s} \Big|_0^t = \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \end{aligned}$$

□

5.2.3 轨道的跳跃性质

探讨 Q 表示了马氏链的什么.

Theorem 5.6

设 S 值右连续马氏链 $X := \{X_t, t \geq 0\}$ 具有保守的转移速率矩阵 $Q = (q(i, j))_{i, j \in S}$. 定义首跳时间 $\eta := \inf\{t > 0 | X_t \neq X_0\}$. 其中 $\inf \emptyset = +\infty$. 那么, 对 $\forall t \geq 0$, 有 $\mathbb{P}_i(\eta > t) = \mathbb{P}(\eta > t | X_0 = i) = e^{-q_i \cdot t}$, 即在 $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}(\cdot | X_0 = i)$ 下, $\eta \sim \text{EXP}(q_i)$, 其中 $q_i = -q(i, i)$.

Corollary 5.2

若 $q(i, i) = 0$, 则 $\mathbb{P}_i(\eta > t) = 1, \forall t \geq 0$.

由 $\{\eta = \infty\} = \cap_{n \geq 1} \{\eta > n\}$, $\mathbb{P}_i(\eta = \infty) = 1$.

$$1 = \mathbb{P}_i(\eta = \infty) = \mathbb{P}(X_t = X_0, \forall t > 0 | X_0 = i) = \mathbb{P}(X_t = i, \forall t \geq 0 | X_0 = i)$$

即 i 为吸收态.

证明 Thm 5.6. (Step 1)

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0^+} (p_{st}(i, i))^{1/s} &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{\ln p_{st}(i, i)}{st} \cdot t\right) \\ &= \frac{\ln x \sim x-1}{x \rightarrow 1} \exp\left(\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{p_{st}(i, i) - 1}{st} \cdot t\right) \\ &= \exp(tq(i, i)) = e^{-q_i t}\end{aligned}$$

(Step 2) Claim: $\mathbb{P}(\eta > t | X_0 = i) = \mathbb{P}(X_s = i, \forall s \in [0, t] | X_0 = i)$

“ \Rightarrow ” $t < \eta = \inf\{t > 0 | X_t \neq i\}, X_0 = i, \forall s \in [0, t], X_s = i$

“ \Leftarrow ” $X_s = i, \forall s \in [0, t] \Rightarrow X_t = i \xrightarrow{\text{右连续}} \exists \delta > 0, \forall u \in [t, t + \delta], \text{s.t. } X_u = i, \eta \geq t + \delta > t.$

(Step 3)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_i(\eta > t) &= \mathbb{P}_i(X_s = i, \forall s \in [0, t]) \\ &\stackrel{\text{右连续}}{=} \mathbb{P}_i\left(\bigcap_{n \geq 1} \{X_{kt/2^n} = i, k = 0, 1, \dots, 2^n\}\right) \quad (*) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_i(X_{kt/2^n} = i, k = 0, 1, \dots, 2^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (p_{t/2^n}(i, i))^{2^n} = e^{-q_i t}\end{aligned}$$

(*) 是一个数分结论, 回去证明. $\forall s$ 可找到一列 n 逼近. □

令 $T_0 = 0$, 归纳定义 $T_n := \inf\{t > 0 | X_t \neq X_{T_{n-1}}\}, n \geq 1$. T_1 即上面的 η .

T_n : 第 n 次跳跃时间 ($T_1 = \eta$)

Lemma 5.1

设右连续马氏链 X 具有保守的 Q , 则

1. 在 $[0, \lim_{n \rightarrow \infty} T_n)$ 上, X 的轨道为阶梯函数, 即 $X_t = X_{T_n}, t \in [T_n, T_{n+1}]$.
2. 若 $q_i > 0$, 则 $\{X_{T_n}, n \geq 1\} \sim \text{DTMC}(\hat{P})$, 其中

$$(\hat{P})_{ij} = \hat{p}_{ij} = \frac{q(i, j)}{q(i)}(1 - \delta_{ij})$$

称 $\{X_{T_n}, n \geq 1\}$ 为 X 的嵌入链.

(走神)

5.2.4 过程的构造

设 $Q = (q(i, j))_{i, j \in S}$ 为保守的密度矩阵, 其中

$$q_i = -q(i, i) = \sum_{k \neq i} q(i, k)$$

假定 $q(i, i) > 0, \forall i \in S$, 假设没有吸收态. (实际上无需此假设也成立, 但此处为了和教材一致)

定义 $\hat{P} := (\hat{p}_{i, j})_{i, j \in S}$, 其 $\hat{p}_{ij} = \frac{q(i, j)}{q(i)}(1 - \delta_{ij})$, 则 \hat{P} 为随机矩阵, 并称其路径矩阵.

两种看过程的角度:

1. $X(t, \cdot)$ r.v. $\forall t \geq 0$

2. $X(\cdot, \omega) \in C([0, +\infty))$

设

1. $\{Y_n, n \geq 0\} \sim \text{DTMC}(\mu_0, \hat{P})$
2. $\tau_0, \tau_1, \dots \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{EXP}(1)$, 注: $\tau_n/q_i \sim \text{EXP}(q_i)$
3. $\{\tau_k, k \geq 0\} \perp \{Y_n, n \geq 0\}$

下面构造 CTMC.

1. $t = n$ 时, 处于状态 Y_0 , $\eta_1 = \tau_0/q(Y_0) \sim \text{EXP}(q(Y_0))$ 在 $\mathbb{P}(\cdot|Y_0 = i)$, 记 $\eta_1 \sim \text{EXP}(Y_0)$.
2. $t = T_1 = \eta_1$ 时, 跳到状态 Y_1 , 在 Y_1 待了 $\eta_2 = \tau_1/q(Y_1) \sim \text{EXP}(Y_1)$
3. $t = T_2 = \eta_1 + \eta_2$ 时, 跳到状态 Y_2 , 在 Y_2 待了 $\eta_3 = \tau_2/q(Y_2) \sim \text{EXP}(Y_2)$

由此类推, $\eta_n = \tau_{n-1}/q(Y_{n-1}), \forall n \geq 1, T_n = \sum_{k=1}^n \eta_k, T_0 = 0$.

令 $X_t = Y_n$ (当 $t \in [T_n, T_{n+1})$), 若

$$\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = +\infty | X_0 = Y_0 = i) = 1 \quad (5.3)$$

称 X 为以 Q 为速率矩阵的跳过程, 称 Y 为 X 的嵌入链, $\{\eta_k, k \geq 1\}$ 为 X 的等待时间序列, T_n 为第 n 次跳的时刻.

注: $\forall t \geq 0$, 至多有限个 n , s.t. $T_n \leq t$.

Lemma 5.2

以 Q 为速率矩阵的跳过程 X 是一个 CTMC, 且 $X \sim \text{CTMC}(Q)$ 以及 $P'_t = QP_t, P'_t = P_tQ$. 其中 $\{P_t, t \geq 0\}$ 是 X 的转移半群.

注: $X \sim \text{CTMC}(\mu_0, (P_t)_{t \geq 0})$ (有限维分布族)

$\Rightarrow X \sim \text{CTMC}(\mu_0, Q)$

\Leftarrow Kolmogorov 方程的适定性

$\tilde{X} \sim \text{跳过程}(\mu_0, Q) \sim \text{CTMC}(\mu_0, (\tilde{P}_t)_{t \geq 0})$

且 Kolmogorov 方程 $\tilde{P}'_t = \tilde{P}_t Q = Q \tilde{P}_t, \Rightarrow P_t = \tilde{P}_t$, 即 $X \stackrel{(d)}{=} \tilde{X}$.

(5.3) 不好验证, 有什么好验证的充分条件使其成立吗?

Lemma 5.3

若 $\{q_i, i \in S\}$ 有界, 则条件 (5.3) 成立. 特别地, S 有限, 则条件 (5.3) 成立.

Example 5.5 (纯生过程)

$S = \{1, 2, 3, \dots\}, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ 为一列正数. 令 $q_i = q(i, i+1) = \lambda_i, \forall i \geq 1$, 称出生速率.

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \lambda_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

转移速率图:

$$1 \xrightarrow{\lambda_1} 2 \xrightarrow{\lambda_2} 3 \xrightarrow{\lambda_3} 4 \dots$$

Claim: (5.3) 成立 $\iff \sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$.

1. Poisson 过程 $PP(\lambda)$ 为纯生过程
2. (Durrett Exa 4.5) $q_i = q(i, i+1) = \lambda i^p, \forall i \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} < \infty & p > 1 \\ \infty & p \leq 1 \end{cases}$$

$p \in [0, 1]$ 时, 可定义由 Q 为速率矩阵的跳过程. $p = 0$ 时为 Poisson 过程. 特别地, $p = 1$ 时称为 Yule 过程.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$ 时, 嵌入链 $\{Y_n, n \geq 0\} \sim \text{DTMC}(\hat{P})$, 其中

$$(\hat{P})_{i,j} = \hat{p}_{ij} = \frac{q(i,j)}{q(i)}(1 - \delta_{ij}) \Rightarrow \hat{p}_{i,i+1} = 1$$

Example 5.6 (生灭过程)

$S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 令 $q(i, i+1) = \lambda_i, \forall i \geq 0$ (出生速率). $q(i, i-1) = \alpha_i, \forall i \geq 1$ (死亡速率), 其他为 0.

$$q_i = -q(i, i) = \sum_{k \neq i} q(i, k) = \begin{cases} \lambda_i + \alpha_i & i \geq 1 \\ \lambda_i & i = 0 \end{cases}$$

转移速率图:

$$0 \xrightleftharpoons[\lambda_0]{\alpha_1} 1 \xrightleftharpoons[\lambda_1]{\alpha_2} 2 \xrightleftharpoons[\lambda_2]{\alpha_3} 3$$

Claim: 若 $\exists c > 0$, 使 $\lambda_i \vee \alpha_i \leq c_i (\forall i \geq 1)$, 则 (5.3) 成立. 故而此时可定义 $Q = (q(i, j))_{i,j \in S}$ 对应的跳过程, 称其为生灭过程. (证明不是件容易的事, 因此只记结论)

嵌入链 $\{Y_n, n \geq 0\} \sim \text{DTMC}(\hat{P})$, 其中

$$(\hat{P})_{i,j \in S} =: \hat{p}_{ij} = \frac{q(i,j)}{q(i)}(1 - \delta_{ij}) = \begin{cases} \lambda_0/\lambda_0 = 1 & i = 0, j = 1 \\ \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \alpha_i} & j = i + 1, i \geq 1 \\ \frac{\alpha_i}{\lambda_i + \alpha_i} & j = i - 1, i \geq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

转移概率图

$$0 \xrightarrow[1]{\alpha_1/(\lambda_1 + \alpha_1)} 1 \xrightarrow[\lambda_1/(\lambda_1 + \alpha_1)]{\alpha_2/(\lambda_2 + \alpha_2)} 2 \xrightarrow[\lambda_2/(\lambda_2 + \alpha_2)]{\alpha_3/(\lambda_3 + \alpha_3)} 3 \Leftarrow \dots$$

$\{Y_n, n \geq 1\}$ 是生灭链.

Example 5.7 (排队系统)

描述 t 时刻系统里的顾客数/队列长度 (= 在等待的顾客数 + 正在被服务的顾客)

1. 要素

- 到达过程/到达速率
- 服务时长/服务速率 (指数分布时)
- 服务台数/窗口/服务员

2. 队列容量

3. 服务规则

- (a) 先到先得 (FCFS)
- (b) 服务时长相互独立

4. M/M/S

- (a) M: Markovian/Memoryless, 到达过程 $\sim PP(\lambda)$
- (b) M: Memoryless, 服务时长 $\sim EXP(\alpha)$
- (c) S: 服务台数 $\in [1, +\infty) \cap \mathbb{N}$

1. M/M/1.

$$S = \{0, 1, 2, \dots\}, q(n, n+1) = \lambda(\forall n \geq 0), q(n, n-1) = \alpha(\forall n \geq 1)$$

由前例知, M/M/1 排队系统是生灭过程.

(a) $q(i)$

$$q(i) = -q(i, i) = \begin{cases} \lambda & i = 0 \\ \sum_{k \neq i} q(i, k) = \lambda + \alpha & \forall i \geq 1 \end{cases}$$

(b) 嵌入链 $\{Y_n, n \geq 1\} \sim DTMC(\hat{P})$, 其中 $(\hat{P})_{i,j} =: \hat{p}_{ij} = \frac{q(i,j)}{q(i)}(1 - \delta_{ij})$.

$$\Rightarrow \hat{p}_{0,1} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1, \hat{p}_{i,i+1} = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} (\forall i \geq 1), \hat{p}_{i,i-1} = \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} (\forall i \geq 1).$$

记 $p = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha}, 1 - p = \frac{\alpha}{\lambda + \alpha}$, 看出 $\{Y_n, n \geq 1\}$ 是带反射壁的随机游动.

2. M/M/S

$$S = \{0, 1, 2, \dots\}, q(n, n+1) = \lambda(\forall n \geq 0)$$

$$q(n, n-1) = \begin{cases} s\alpha & n \geq s \\ n\alpha & n \leq s \end{cases}$$

由前例知, M/M/S 也是生灭过程

3. M/M/ ∞

$$S = \{0, 1, 2, \dots\}, q(n, n+1) = \lambda(\forall n \geq 0), q(n, n-1) = n\alpha(\forall n \geq 1)$$

由前例知, M/M/ ∞ 也是生灭过程

5.3 平稳分布与极限行为

5.3.1 平稳分布

$d(i) := \gcd\{n \geq 1 | p_{ii}(n) > 0\}$. (正则) CTMC $\Rightarrow t \geq 0, i \in S, p_t(i, i) > 0 \Rightarrow$ 非周期

Definition 5.9 (不可约)

称 CTMC 不可约, 若 $\forall i, j \in S$, 存在一个状态序列 $k_0 = i, k_1, \dots, k_n = j$, 使 $q(k_{m-1}, k_m) > 0 (1 \leq m \leq n)$.

Lemma 5.4

$q(i, j) > 0, \forall i \neq j \Rightarrow p_t(i, j) > 0, \forall t > 0$.

证明.

$$0 < q(i, j) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_h(i, j)}{h}$$

$\exists \delta > 0, \forall s \in (0, \delta], \text{ s.t. } p_s(i, j) > 0$.

由 Prop 5.1 知, $p_t(i, j) > 0, \forall t > 0, i \neq j$. □

Lemma 5.5

若 X 不可约, 则 $p_t(i, j) > 0 (\forall t > 0, i, j \in S)$

证明. X 不可约 \Rightarrow 对 $i \neq j$, 存在一个状态序列 $k_0 = i, k_1, \dots, k_n = j$, 使 $q(k_{m-1}, k_m) > 0 (1 \leq m \leq n)$ $\xrightarrow{\text{Lem 5.4}} p_t(k_{m-1}, k_m) > 0, (1 \leq m \leq n)$

$$p_t(i, j) \stackrel{\text{C-K}}{\geq} p_{t/n}(k_0, k_1) p_{t/n}(k_1, k_2) \cdots p_{t/n}(k_{n-1}, k_n) > 0, \forall t > 0$$

□

回忆平稳分布

- DTMC: $\pi P = \pi \iff \pi P^n = \pi (\forall n \geq 1)$
- CTMC: 没有最小步长 (实数轴不稀疏)

因此 CTMC 的平稳分布是这样定义的:

Definition 5.10 (平稳分布)

称概率分布 π 为本群 $\{P_t, t \geq 0\}$ 的平稳分布, 若 $\pi P_t = \pi (\forall t \geq 0)$

然而, 这个条件难以验证. 除了转移半群, 还可以用转移速率 Q 刻画.

$$Q = \begin{cases} q(i, j) & i \neq j \\ q(i, i) = -q(i) & i = j \end{cases}$$

其中, $q(i) = \sum_{k \neq i} q(i, k)$ 状态 i 的总转移速率

Lemma 5.6

π 是平稳分布 $\iff \pi Q = 0$, 故而 π 是 Q 的平稳分布.

证明. “ \Rightarrow ” $\pi P_t = \pi (\forall t \geq 0) \Rightarrow \frac{d}{dt}(\pi P_t) = 0 \Rightarrow \pi P'_t = 0$. 又 $P'_t = P_t Q$, 故 $\pi P_t Q = 0 \Rightarrow \pi Q = 0$

“ \Leftarrow ” $\pi Q = 0 \Rightarrow (\pi P_t)' = \pi P'_t = \pi(Q P_t) = 0$

$\pi P_t = \pi P_0 = \pi$ □

5.3.2 极限行为

回顾 (DTMC): 不可约, 非周期, 则存在平稳分布 π

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(i, j) = \pi(j) \quad \forall i, j \in S$$

Theorem 5.7 (Convergence to Equilibrium)

设 $\{X_t, t \geq 0\}$ 为 CTMC, 转移速率矩阵 Q , 不可约. 存在平稳分布 $\pi \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} p_t(i, j) = \pi(j), \forall i, j \in S$.

注: 存在 π 则唯一 (极限的唯一性)

证明. (Step 1) Q 不可约 $\xrightarrow{\text{Lem 5.6}} \boxed{p_t(i, j) > 0} (\forall t > 0, i, j \in S)$. 固定 $h > 0$ (步长), 考虑 h-骨架 $\{Z_n := X_{nh}, n \geq 0\}$. 根据定义验证 $Z \sim \text{DTMC}(P_h)$ 且不可约 (方框), 非周期, π 也是 Z 的平稳分布.

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_{nh}(i, j) = \pi(j)$. (海涅原理?)

(Step 2)

$$\begin{aligned} |p_t(i, j) - \pi(j)| &\leq |p_t(i, j) - p_{nh}(i, j)| + |p_{nh}(i, j) - \pi(j)| \\ &\leq 1 - p_{|t-nh|}(i, i) + |p_{nh}(i, j) - \pi(j)| \end{aligned}$$

$\forall \epsilon > 0, \exists h > 0, \text{s.t. } \forall s \in [0, h], 1 - p_s(i, i) < \epsilon/2$

对同一个 $h, \exists N > 0, \text{s.t. } \forall n > N, |p_{nh}(i, j) - \pi(j)| < \epsilon/2$

$\forall t \geq Nh, \exists n \geq N, \text{s.t. } nh \leq t < (n+1)h$, 则 $|t - nh| < h$

$$|p_t(i, j) - \pi(j)| \leq 1 - p_{|t-nh|}(i, i) + |p_{nh}(i, j) - \pi(j)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} p_t(i, j) = \pi(j)$. □

5.3.3 细致平衡条件 (DBC)**Definition 5.11**

π 为概率分布, 若 $\forall j \neq k$ 有 $\pi(j)q(j, k) = \pi(k)q(k, j)$, 则称 π 与 Q 满足 DBC.

Theorem 5.8

若 π 与 Q 满足 DBC $\Rightarrow \pi$ 平稳分布

注: 反例 4.10

证明. $DBC \Rightarrow \pi(k)q(k, j) = \pi(j)q(j, k), \forall k, j \in S$. 关于 k 求和

$$\begin{aligned}\sum_{k \in S} \pi(k)q(k, j) &= \pi(j) \sum_{k \in S} q(j, k) \\ &= \pi(j) \sum_{k \neq j} q(j, k) + \pi(j)q(j, j) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\therefore \pi Q = 0$. □

Example 5.8 (生灭链)

$S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ 或 $\{0, 1, 2, \dots\}$. $q(n, n+1) = \lambda_n (\forall n \geq 0)$, $q(n, n-1) = \alpha_n (\forall n \geq 1)$. 设所有 $\lambda_n, \alpha_n > 0$ (即不考虑纯生过程), 故不可约. 求满足 DBC 的平稳分布 π .

解. $DBC \Rightarrow \pi(n-1)q(n-1, n) = \pi(n)q(n, n-1), \forall n \geq 1$.

$$\pi(n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\alpha_n} \pi(n-1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k}{\prod_{k=1}^n \alpha_k} \pi(0) =: c_n \pi(0), c_0 = 1$$

$$1 = \sum_{n=0}^N \pi(n) = \sum_{n=0}^N c_n \pi(0) \iff \pi(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^N c_n} > 0$$

记 $c := \sum_{n=0}^N c_n < \infty$. $\pi(n) = c_n/c (\forall n \geq 0)$ 满足 DBC 的平稳分布. □

Example 5.9 (M/M/ ∞ 排队系统)

$S = \{0, 1, 2, \dots\}$, $q(n, n+1) = \lambda (\forall n \geq 0)$, $q(n, n-1) = n\alpha (n \geq 1)$.

令 $c_0 = 1$,

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \lambda}{\prod_{k=1}^n (k\alpha)} = \frac{\lambda^n}{n! \alpha^n} (\forall n \geq 1) \\ c &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n! \alpha^n} = e^{\lambda/\alpha} < \infty\end{aligned}$$

$\pi = (c_0/c, c_1/c, \dots)$ 为 M/M/ ∞ 的平稳分布且满足 DBC. $\pi(n) = c_n/c = \frac{\lambda^n}{n! \alpha^n} e^{-\lambda/\alpha}$ 即 $\pi \sim \text{Poisson}(\lambda/\alpha)$.

Example 5.10 (有止步的 M/M/S 排队系统)

S 个服务员, 服务时长 $\sim \text{EXP}(\alpha)$. 顾客到达过程 $\sim \text{PP}(\lambda)$. $q(n, n+1) = \lambda a_n (\forall n \geq 0)$,

$$q(n, n-1) = \begin{cases} n\alpha & 0 \leq n \leq s \\ s\alpha & n \geq s \end{cases}$$

Theorem 5.9

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则存在一平稳分布

证明. 令 $c_0 := 1, c_n = \prod_{k=0}^{n-1} (\lambda_k) / \prod_{k=0}^n (\alpha_k), \forall n \geq 1$. 若 $c := \sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$, 则由例 5.8, 存在平稳分布 $\pi = (c_0/c, c_1/c, \dots)$

下证: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow c < \infty$.

对 $n > s$,

$$c_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\lambda a_k)}{(\prod_{k=0}^s k\alpha)(\prod_{k=s+1}^n s\alpha)} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda a_k}{s\alpha} \right) \cdot \frac{\prod_{k=1}^s (s\alpha)}{\prod_{k=1}^s (k\alpha)} =: \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda a_k}{s\alpha} \right) \cdot A$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow$ 取 $\epsilon = 1/2$, 则 $\exists N > 0, \forall n > N, \text{s.t. } \frac{\lambda a_n}{s\alpha} < 1/2$. 对 $\forall n > N \vee s$, 有 $0 \leq c_n \leq A \cdot (\frac{1}{2})^n$.
 $c = \sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$. \square

5.3.4 访问频率/渐进频率

回顾 DTMC. 设 X 不可约, π 是平稳分布, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(y)}{n} = \pi(y) = \frac{1}{\mathbb{E}_y T_y}$$

其中 $T_y := \min\{n \geq 1 | X_n = y\}, N_n(y) = \sum_{k=0}^n \mathbb{I}_{\{X_k=y\}}$.

对于 CTMC, $\sigma_i := \inf\{t > 0 | X_t = i\}$, 其中 $\eta := \inf\{t \geq 0 | X_t \neq X_0\}$ 为首次跳跃时刻.

Theorem 5.10 (访问频率)

X 不可约, π 是平稳分布, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \mathbb{I}_{\{X_s=i\}} ds}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \int_0^t \mathbb{I}_{\{X_s=i\}} ds}{t} = \pi(i) = \frac{1}{\mathbb{E}_i \sigma_i q_i}$$

注: CTMC 下的测度是用积分定义的, $\int_0^t \mathbb{I}_{\{X_s=i\}} ds$ 为 $[0, t]$ 内落到状态 i 的时长.

Example 5.11 (理发店: 有止步的 M/M/1 系统)

$S = \{0, 1, 2, 3\}$, 到达过程 $\sim \text{PP}(\lambda), \lambda = 2$, 服务时长 $\sim \text{EXP}(\alpha), \alpha = 3$ 个/h. 均值 $\frac{1}{3}h = 20\text{min}$. $q(n, n+1) = \lambda(0 \leq n \leq 2), q(n, n-1) = \alpha(1 \leq n \leq 3)$.

- (a) 求均衡分布.
- (b) 未接受服务的顾客.

解. (a) S 不可约, 故若存在平稳分布, 则唯一. 由例 5.8 知, 有平稳分布 $\pi = (c_0/c, \dots, c_3/c)$. 其中 $c_0 = 1, c_n = \prod_{k=0}^{n-1} \lambda / \prod_{k=1}^n \alpha = (\frac{\lambda}{\alpha})^n = (\frac{2}{3})^n, 1 \leq n \leq 3$.

$$c = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1 \cdot (1 - (2/3)^4)}{1 - 2/3} = \frac{65}{27}$$

(b)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t \mathbb{I}_{\{X_s=3\}} ds}{t} = \pi(3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 / \frac{65}{27} = \frac{8}{65}$$

\square

6 离散鞅

6.1 定义

Definition 6.1 (流)

称一系列 σ 代数 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ 为 Ω 上的流, 若 $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_3 \subseteq \dots$

Definition 6.2 (适应过程)

称一系列随机变量 $(X_n)_{n \geq 0}$ 关于流 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 适应的, 若 $\sigma(X_n) \subseteq \mathcal{F}_n$, 即 $X_n \in \mathcal{F}_n$, X_n 关于 \mathcal{F}_n 可测.

注: 离散 \Rightarrow 默认 σ -代数由划分生成, 一系列性质在 Chap 1 中被严格证明.

Example 6.1

设 $(X_n)_{n \geq 0}$ 为一列随机变量列, 对 $\forall n \geq 0$, 令 $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \dots, X_n) = (X_0, \dots, X_n)^{-1}(2^{S_1} \times \dots \times 2^{S_n})$, 则 $(\mathcal{F}_n^X)_{n \geq 0}$ 为一个流, 称为 $(X_n)_{n \geq 0}$ 的自然流.

Definition 6.3 (离散鞅)

称随机变量列 $(X_n)_{n \geq 0}$ 关于流 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 的鞅, 若

1. (可积性) $\forall n \geq 0, \mathbb{E}|X_n| < \infty$
2. (适应性) $(X_n)_{n \geq 0}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 适应
3. (鞅性) $\forall n \geq 0, \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \stackrel{\text{a.s.}}{=} X_n$

Theorem 6.1 1. (Durrett, Thm 5.1) 设 $(X_n)_{n \geq 0}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 的鞅, 则 $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0$.

2. 设 $(X_n)_{n \geq 0}$ 为关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 适应的可积随机变量列, 则 $(X_n)_{n \geq 0}$ 为关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 的鞅 $\iff \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) = 0, \forall n \geq 0$.

证明. 1. $\mathbb{E}X_{n+1} = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) \stackrel{\text{鞅性}}{=} \mathbb{E}(X_n) \stackrel{\text{迭代}}{=} \mathbb{E}X_0$

2. “ \Rightarrow ” $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) = X_n - \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_n) \stackrel{X_n \in \mathcal{F}_n}{=} X_n - X_n = 0$. (提取已知量)

“ \Leftarrow ” $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_n) = X_n$

□

Example 6.2

常数列 $\{c_n = c, n \geq 0\}$ 关于任意流都是鞅. $c = c\mathbb{I}_\Omega, \sigma(c) = \{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{F}_n$

Definition 6.4

称 $(X_n)_{n \geq 0}$ 是关于 $(Y_n)_{n \geq 0}$ 的鞅. 若 $(X_n)_{n \geq 0}$ 关于 Y 的自然域流 $\mathcal{F}_n^X = \sigma(Y_0, \dots, Y_n), n \geq 0$ 是鞅.

Definition 6.5

若 Def 6.3 中 (3) 为 “ \leq ” 时, 即 $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$, 称为上鞅. 若为 “ \geq ” 时, 即 $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$, 称为下鞅.

Definition 6.6 1. X 鞅 $\iff X$ 上鞅, 下鞅

2. S 上鞅 $\iff -X$ 下鞅

Theorem 6.2 (Durrett, Thm 5.9& 5.10) 1. 设 $(X_n)_{n \geq 0}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 是一个上鞅, 则 $\mathbb{E}M_{n+1} \leq \mathbb{E}M_n$ (期望 \downarrow)

2. 设 $(X_n)_{n \geq 0}$ 关于 $(\mathcal{S}_n)_{n \geq 0}$ 是一个下鞅, 则 $\mathbb{E}M_{n+1} \geq \mathbb{E}M_n$ (期望 \uparrow)

证明. (1) $\mathbb{E}M_{n+1} = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n)) \leq \mathbb{E}(M_n)$ □

Theorem 6.3

设 $(X_n)_{n \geq 0}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, (\mathcal{S}_n)_{n \geq 0}$ 均适应的, 且关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 是鞅, $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{F}_n (\forall n \geq 0)$, 则

1. $(X_n)_{n \geq 0}$ 关于 $(\mathcal{S}_n)_{n \geq 0}$ 也是鞅 (小流吃大流)

2. 特别地, $(X_n)_{n \geq 0}$ 关于其自然域流 $\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_0, \dots, X_n), n \geq 0$ 是鞅

注: Π_1, Π_2 是 Ω 上的两个划分, $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$, 故 $\sigma(\Pi_1) \subseteq \sigma(\Pi_2)$, 则

$$\mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\underbrace{X|\sigma(\Pi_1)}_{\in \sigma(\Pi_1) \subseteq \sigma(\Pi_2)} \middle| \sigma(\Pi_2) \right) \right) = \mathbb{E}(X|\sigma(\Pi_1))$$

$$\mathbb{E} \left(\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi_1)) \middle| \sigma(\Pi_2) \right) = \mathbb{E} \left(\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi_2)) \middle| \sigma(\Pi_1) \right)$$

证明. (1) (可积性): X 关于 \mathcal{F}_n 是鞅 $\Rightarrow \mathbb{E}|X| < \infty$

(适应性) X 关于 \mathcal{S} 适应

(鞅性) $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{S}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)|\mathcal{S}_n) = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{S}_n) = X_n$ □

6.2 基本性质与例子

Property 6.1 (Durrett, Lem 5.7)

设 $(M_n)_{n \geq 0}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 是一个鞅, 则 $\forall n \geq 0$,

$$\mathbb{E}(M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - M_n^2 = \mathbb{E}(M_{n+1}^2 - M_n^2|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2|\mathcal{F}_n)$$

证明.

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= \mathbb{E}(M_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(M_n^2 | \mathcal{F}_n) - 2\mathbb{E}(M_{n+1} \cdot M_n | \mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(M_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) + M_n^2 - 2M_n \cdot \underbrace{\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n)}_{M_n} \\
&= \mathbb{E}(M_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) - M_n^2
\end{aligned}$$

□

Example 6.3 (独立随机变量之和/随机游动)

设 $(X_n)_{n \geq 1} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathbb{E}X_1 = \mu$, 令 $S_n = s_0 + \sum_{k=1}^n X_k (n \geq 1)$, 其中 $s_0 \in \mathbb{R}$, 则

1. $\{S_n - n\mu, n \geq 1\}$ 关于 $(X_n)_{n \geq 1}$ 是一个鞅 (即关于 $(X_n)_{n \geq 1}$ 的自然流是一个鞅)
2. 记 $M_n := S_n - n\mu$, 若另有 $\text{Var}(X_n) = \sigma^2 < \infty$, 则

$$\tilde{M}_n = M_n^2 - n\sigma^2 = (S_n - n\mu)^2 - n\sigma^2 \quad (n \geq 1)$$

关于 $(X_n)_{n \geq 1}$ 是鞅.

证明. 1. (a) $\mathbb{E}|S_n| \leq s_0 + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|X_k| < \infty$

(b) $\{\sum_{k=1}^n X_k = x\} = \{(X_1, \dots, X_n) \in \{(x_1, \dots, x_n) | \sum_{k=1}^n x_k = x\}\} \in \mathcal{F}_n^X$

(c) $\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n^X) = \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n^X) - \mu \stackrel{X_{n+1} \perp\!\!\!\perp (X_1, \dots, X_n)}{=} \mathbb{E}(X_{n+1}) - \mu = 0$

2. (a) $\mathbb{E}M_n^2 = \mathbb{E}(S_n - n\mu)^2 = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^n (X_k - \mu))^2 \leq (n^{2-1} \vee 1) \mathbb{E}(\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2) < \infty$

数分结论:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right|^p \leq (n^{p-1} \vee 1) \sum_{k=1}^n |a_k|^p, p > 0$$

(b) $M_n^2 \in \mathcal{F}_n^X \Rightarrow \tilde{M}_n \in \mathcal{F}_n^X$

(c) 判断鞅性

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tilde{M}_{n+1} - \tilde{M}_n | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(M_{n+1}^2 - M_n^2 | \mathcal{F}_n) - \sigma^2 \\
&\stackrel{\text{Prt 6.1}}{=} \mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2 | \mathcal{F}_n^X) - \sigma^2 \\
&= \mathbb{E}((X_{n+1} - \mu)^2 | \mathcal{F}_n^X) - \sigma^2 \\
&= \sigma^2 - \sigma^2 = 0
\end{aligned}$$

□

Example 6.4 (简单对称随机游走)

$X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2, \mathbb{E}X_n = 0, \text{Var}(X_n) = \mathbb{E}X_n^2 = 1.$

由例6.3, 故 $\{\sum_{k=1}^n X_k, n \geq 1\}, \{(\sum_{k=1}^n X_k)^2 - n, n \geq 1\}$ 关于 $(X_n)_{n \geq 1}$ 或 $(Y_n = \sum_{k=1}^n X_k)_{n \geq 1}$ 是鞅.

Property 6.2 (Lem 5.8, 鞅增量的正交性)

设 $(M_n)_{n \geq 0}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 为鞅, 则

1. $\mathbb{E}((M_n - M_k)M_j) = 0 (0 \leq j \leq k < n)$
2. $\mathbb{E}((M_n - M_k)(M_j - M_i)) = 0 (0 < i \leq j \leq k < n)$
3. $\mathbb{E}(M_n - M_0)^2 = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(M_k - M_{k-1})^2$

证明. 1. LHS = $\mathbb{E}(\mathbb{E}((M_n - M_k)M_j) | \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(M_j(\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_k) - M_k))$. 其中 $M_j \in \mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_k$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_k) &\stackrel{k \leq n}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) | \mathcal{F}_k) \\ &\stackrel{\text{鞅}}{=} \mathbb{E}(M_{n-1} | \mathcal{F}_k) \\ &\stackrel{\text{迭代}}{=} \mathbb{E}(M_{k+1} | \mathcal{F}_k) = M_k \end{aligned}$$

注: 鞅性 $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n \iff \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_s) = X_s (n \geq s)$

故 LHS = $\mathbb{E}(M_j(M_k - M_k)) = 0$

2. (1) 的直接应用

3.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n - M_0)^2 &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1})\right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(M_k - M_{k-1})^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} \mathbb{E}(M_j - M_{j-1})(M_k - M_{k-1}) \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(M_k - M_{k-1})^2 \end{aligned}$$

□

Example 6.5 (独立随机变量之积 $\mathbb{E}X_n = 1$)

设 $(X_n)_{n \geq 1} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathbb{E}X_1 = 1$, 则 $M_n := \prod_{k=1}^n X_k (n \geq 1)$, 关于 $(X_n)_{n \geq 1}$ 是鞅.

证明. 1. $\mathbb{E}|M_n| \leq \prod_{k=1}^n \mathbb{E}|X_k| < \infty$

2. $(X_1, \dots, X_n) \in \sigma(X_1, \dots, X_n) \Rightarrow \prod_{k=1}^n X_k \in \sigma(X_1, \dots, X_n)$

3. $\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n^X) = \mathbb{E}((X_{n+1} - 1)M_n | \mathcal{F}_n^X) = M_n \mathbb{E}(X_{n+1} - 1) = 0$

□

Example 6.6 (指数鞅)

$(X_n)_{n \geq 1} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \phi(\theta) = \mathbb{E}e^{\theta X_1} < \infty$. 令 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, 则 $M_n := \frac{1}{(\phi(\theta))^n} \exp\{\theta S_n\} (n \geq 1)$ 关于 $(X_n)_{n \geq 1}$ 是鞅. 特别地, $\phi(0) = 1$, 则 $e^{\theta S_n} (n \geq 1)$ 关于 $(X_n)_{n \geq 1}$ 为鞅.

证明. (Step 1) $M_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{\phi(\theta)} e^{\theta X_k}\right)$. 令 $Y_k = \frac{1}{\phi(\theta)} e^{\theta X_k} (k \geq 1)$ 则 $\mathbb{E}Y_k = 1$. 由例 6.5, $(M_n)_{n \geq 1}$ 关于 $(Y_n)_{n \geq 1}$ 是鞅.

(Step 2) Claim: $\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$, 即 $F_n^X = F_n^Y (\forall n \geq 1)$

□

Example 6.7 (赌徒破产)

$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p, \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p, p \in (0, 1), p \neq \frac{1}{2}$

$\theta = \ln(\frac{1-p}{p})$, 则

$$\begin{aligned}\phi(\theta) &= \mathbb{E}e^{\theta X_n} = e^\theta \cdot p + e^{-\theta}(1-p) \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)p + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-1}(1-p) \\ &= (1-p) + p = 1 < \infty\end{aligned}$$

由例 6.6, $e^{\theta S_n} = (\frac{1-p}{p})^{S_n}$ 关于 $(X_n)_{n \geq 1}$ 是鞅.

Lemma 6.1 (Jensen 不等式) 1. $\mathbb{E}(\phi(X)|A) \geq \phi(\mathbb{E}(X|A))$

2.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\phi(X)|\sigma(\Pi)) &= \sum_{\Lambda \in \Pi} \mathbb{E}(\phi(X)|\Lambda) \mathbb{I}_\Lambda \\ &\geq \sum_{\Lambda \in \Pi} \phi(\mathbb{E}(X|\Lambda)) \mathbb{I}_\Lambda \\ &= \phi(\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi)))\end{aligned}$$

注: 可以看出 $\mathbb{E}(\phi(X)|\sigma(\Pi))$ 是随机变量, 因为 \mathbb{I}_Λ 是随机变量.

3. $\mathbb{E}(\phi(X)|\mathcal{F}) \geq \phi(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))$

Property 6.3 (Lem 5.6 凸函数变换)

设 $(X_n)_{n \geq 1}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ 为适应过程, ϕ 为凸函数, 且 $\mathbb{E}|\phi(X_n)| < \infty (\forall n \geq 1)$, 则

1. 若 $(X_n)_{n \geq 1}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ 为鞅, 则 $(\phi(X_n))_{n \geq 1}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ 为下鞅
2. 若 $(X_n)_{n \geq 1}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ 为下鞅, ϕ 非降, 则 $(\phi(X_n))_{n \geq 1}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ 为下鞅

证明. 1. $\mathbb{E}(\phi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) \geq \phi(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) \stackrel{\text{鞅}}{=} \phi(X_n)$

2. $\mathbb{E}(\phi(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) \geq \phi(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) \geq \phi(X_n)$. 第二个不等号成立因为 X 为下鞅且 $\phi \uparrow$

□

Corollary 6.1 1. $(X_n)_{n \geq 1}$ 鞅 $\Rightarrow (|X_n|)_{n \geq 1}$ 为下鞅 $\xrightarrow[p>1]{\mathbb{E}|X_n|^p < \infty} (|X_n|^p)_{n \geq 1}$ 为下鞅

2. $(X_n)_{n \geq 1}$ 下鞅 $\Rightarrow X_n^+ := X_n \vee 0$ 为下鞅

6.3 赌博策略与停时

1. 鞅变换/离散型随机积分
2. 可选停时定理

Definition 6.7 1. 过程 $(H_n)_{n \geq 1}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ 为可料过程 (或赌博策略), 若 $H_n \in \mathcal{F}_{n-1} (\forall n \geq 1)$
 2. 过程 $(H_n)_{n \geq 1}$ 关于过程 $(X_n)_{n \geq 1}$ 为可料的, 若 $(H_n)_{n \geq 1}$ 关于 $\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) (n \geq 0)$ 可料

Theorem 6.4 (鞅变换/离散型随机积分)

设 $(M_n)_{n \geq 0}$ 关于 $(X_n)_{n \geq 0}$ 是上鞅, $(H_n)_{n \geq 1}$ 关于 $(X_n)_{n \geq 0}$ 是可料的. $0 \leq H_n \leq c_n$, 其中 c_n 是只与 n 有关的常数. 设 $W_0 \in \sigma(X_0), \mathbb{E}|W_0| < \infty$, 令 $W_n := W_0 + \sum_{m=1}^n H_m(M_m - M_{m-1}) (n \geq 0)$, 则 $(W_n)_{n \geq 0}$ 关于 $(X_n)_{n \geq 0}$ 的上鞅.

证明. 1. (可积性)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|W_n| &\leq \mathbb{E}|W_0| + \sum_{m=1}^n \mathbb{E}|H_m||M_m - M_{m-1}| \\ &\leq \mathbb{E}|W_0| + \sum_{m=1}^n c_m (\mathbb{E}|M_m| + \mathbb{E}|M_{m-1}|) \\ &< \infty \end{aligned}$$

2. (适应性) 令 $\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n), \forall n \geq 0. H_m \in \mathcal{F}_{m-1}^X$.

Claim: $M_m \in \mathcal{F}_m^X, M_{m-1} \in \mathcal{F}_{m-1}^X \subseteq \mathcal{F}_m^X \Rightarrow M_m - M_{m-1} \in \mathcal{F}_m^X$.

证明.

$$\begin{aligned} \sigma(M_{m-1}, M_m) &= (M_{m-1}, M_m)^{-1}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \\ &= \{(M_{m-1}, M_m)^{-1}(A_1 \times A_2) | A_1 \times A_2 \subseteq \mathbb{Z}^2\} \\ &= \{M_{m-1}^{-1}(A_1) \cap M_m^{-1}(A_2) | A_1 \subseteq \mathbb{Z}, A_2 \subseteq \mathbb{Z}\} \\ &\subseteq \mathcal{F}_m^X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{M_m - M_{m-1} = x\} &= \{(M_{m-1}, M_m) \in \{x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^2 | x_2 - x_1 = x\}\} \\ &= (M_{m-1}, M_m)^{-1}(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} + x)) \\ &\in \sigma(M_{m-1}, M_m) \subseteq \mathcal{F}_m^X \end{aligned}$$

□

$\therefore H_m(M_m - M_{m-1}) \in \mathcal{F}_m^X \Rightarrow W_n \in \mathcal{F}_n^X$.

3. $(M_n)_{n \geq 0}$ 关于 $(X_n)_{n \geq 0}$ 为上鞅 $\Rightarrow \mathbb{E}(M_m - M_{m-1} | \mathcal{F}_{m-1}^X) \leq 0, W_n - W_{n-1} = H_n(M_n - M_{n-1})$.

$$\mathbb{E}(W_n - W_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}^X) \stackrel{H_n \in \mathcal{F}_{n-1}^X}{=} \underbrace{H_n}_{\geq 0} \underbrace{\mathbb{E}(M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}^X)}_{\leq 0} \leq 0$$

注: $(H \cdot M)_n =: W_n$

□

回顾: M 鞅 $\Rightarrow \mathbb{E}M_n = \mathbb{E}M_0$

Q: $\mathbb{E}M_\tau \stackrel{?}{=} \mathbb{E}M_0$

回顾 (离散停时): 设 $\tau : \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{+\infty\}$ 为一随机变量, 称 τ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 为一停时, 若 $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n (0 \leq n < \infty)$.

Property 6.4 1. $\{\tau \geq m\} = \{\tau < m\}^c = \{\tau \leq m-1\}^c = (\cup_{k=0}^{m-1} \{\tau \leq k\})^c \in \mathcal{F}_{m-1}$
 2. $\{\tau > m\} = \{\tau \geq m+1\} \in \mathcal{F}_m$

Theorem 6.5 (可选停时定理)

设 $(M_n)_{n \geq 0}$ 关于 $(X_n)_{n \geq 0}$ 为上鞅, τ 关于 $(X_n)_{n \geq 0}$ 为一个停时, 则

1. 停止过程 $(M_{\tau \wedge n})_{n \geq 0}$ 关于 $(X_n)_{n \geq 0}$ 为上鞅, 故 $\mathbb{E}M_{\tau \wedge n} \leq \mathbb{E}M_0$.
2. 特别地, 若 τ 是有界停时, 即存在常数 K 使 $\tau \leq K$, 则 $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_{\tau \wedge K} \leq \mathbb{E}M_0$.

证明. (1) $M_{\tau \wedge n} = \sum_{k=1}^{\tau \wedge n} (M_k - M_{k-1}) + M_0 = \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{k \leq \tau\}} (M_k - M_{k-1}) + M_0$

令 $H_k := \mathbb{I}_{\{k \leq \tau\}}$, 则 $M_{\tau \wedge n} = (H \cdot M)_n$. 因 Prt 6.4 , $\{\tau \geq k\} \in \mathcal{F}_{k-1}^X \Rightarrow H_k \in \mathcal{F}_{k-1}^X$. 故由鞅变换定理 6.4 知 $(M_{\tau \wedge n})_{n \geq 0}$ 关于 $(X_n)_{n \geq 0}$ 为上鞅.

(2) 为 (1) 的特殊情况. □

练习: 写出下鞅, 鞅版本的定理并证明.

6.4 鞅停时定理及其应用

Theorem 6.6 (鞅停时定理)

设 $(M_n)_{n \geq 0}$ 为关于 $(X_n)_{n \geq 0}$ 的鞅, τ 关于 $(X_n)_{n \geq 0}$ 的停时, $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ (有限停时), 存在常数 $K > 0$, 使得 $|M_{\tau \wedge n}| \leq K (\forall n \geq 0)$, 则 $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0$.

证明. (Step 1) Claim: $|M_\tau| \mathbb{I}_{\{\tau < \infty\}} \leq K \mathbb{I}_{\{\tau < \infty\}}$

$$M_\tau \mathbb{I}_{\{\tau < \infty\}} = \sum_{n=0}^{\infty} M_\tau \mathbb{I}_{\{\tau=n\}} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{\tau \wedge n} \mathbb{I}_{\{\tau=n\}}$$

$$|M_\tau \mathbb{I}_{\{\tau < \infty\}}| \leq K \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{I}_{\{\tau=n\}} = K \mathbb{I}_{\{\tau < \infty\}}$$

(Step 2) 形如 $A = B$ 等式的两种证明思路:

1. $A \geq B, A \leq B$
2. $|A - B| = 0$

由可选停时定理 6.5, $\mathbb{E}M_{\tau \wedge n} = \mathbb{E}M_0$,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}M_\tau - \mathbb{E}M_0| &= |\mathbb{E}M_\tau - \mathbb{E}M_{\tau \wedge n}| \\ &\leq \mathbb{E}|M_\tau - M_{\tau \wedge n}| \\ &\leq \mathbb{E}|M_\tau - M_{\tau \wedge n} \mathbb{I}_{\{\tau \leq n\}}| + \mathbb{E}|M_{\tau \wedge n} \mathbb{I}_{\{\tau > n\}}| \\ &\leq \mathbb{E}|M_\tau - M_\tau \mathbb{I}_{\{\tau \leq n\}}| + K \mathbb{E} \mathbb{I}_{\{\tau > n\}} \\ &= \mathbb{E}|M_\tau \mathbb{I}_{\{\tau > n\}}| + K \mathbb{P}(\tau > n) \\ &\stackrel{(\text{Step 1})}{\leq} 2K \mathbb{P}(\tau > n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2K \mathbb{P}(\tau = \infty) = 0 \end{aligned}$$

□

6.4.1 应用：离出分布

首达时 $V_a := \min\{n \geq 0 | X_n = a\}$. $\tau = \min\{n \geq 0 | X_n \notin (a, b)\} = V_a \wedge V_b$

Example 6.8 (公平游戏中的赌徒破产)

设 $X_1, X_2, \dots \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. 记 $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n), \forall n \geq 1, \mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. 令 $S_n = x + \sum_{k=1}^n X_k (n \geq 0, x \in \mathbb{Z})$, 则 $\mathbb{E}X_1 = 0$.

故由例 6.3 知, $(S_n)_{n \geq 0}$ 在 $\mathbb{P}(\cdot | S_0 = x)$ 下关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 为鞅. (证明作为作业, 方法同例 6.3)

解. (1) 令 $\tau := \min\{n \geq 0 | S_n \notin (a, b)\}$, 其中 $a < x < b, a, b \in \mathbb{Z}$

Claim 1:

1. $\tau = \min\{n \geq 0 | S_n = a \text{ 或 } b\}, S_\tau = a \text{ 或 } b$
2. $\tau = V_a \wedge V_b$, 其中 $V_a = \min\{n \geq 0 | S_n = a\}$

Claim 2: τ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 为停时.

1. $\{\tau = 0\} = \{S_0 = x \notin (a, b)\} = \emptyset \in \mathcal{F}_0$
2. $\forall n \geq 1, \{\tau = n\} = \{S_k \in (a, b), 1 \leq k \leq n-1\} \cap \{S_n \notin (a, b)\} \in \sigma(X_1, \dots, X_n) = \mathcal{F}_n$

Claim 3: $\mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1$, 即 $\mathbb{P}_x(\tau = \infty) = 0$.

注意 $\{\tau = \infty\} = \cap_{n \geq 1} \{\tau \geq n\} = \cap_{n \geq 1} \{\tau \geq nK\}, K \geq 0$

时刻 τ 前, 在 (a, b) 内即 $[a+1, b-1]$ 内移动, 长度为 $|b-a|-1$ 步. 注意到, 无论从 (a, b) 中哪个点出发, 一直往一个方向走 $|b-a|$ 步时, 一定在 (a, b) 外.

考察 $\{\tau > n|b-a|\}$. 因为 $\{S_m \in (a, b)\} \cap \{X_{m+k} = 1, 1 \leq k \leq |b-a|\} \subseteq \{S_{m+|b-a|} \notin (a, b)\} \cap \{S_m \in (a, b)\}$, 所以

1. $n = 1$ 时,

$$\begin{aligned} \{\tau > |b-a|\} &\subseteq \{S_0 \in (a, b)\} \cap \{S_{|b-a|} \in (a, b)\} \\ &\subseteq \{S_0 \in (a, b)\} \cap \{X_k = 1, 1 \leq k \leq |b-a|\}^c \end{aligned}$$

$$A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c, \text{ 即 } \Omega \setminus B \subseteq \Omega \setminus A. A \cap C \subseteq B \cap C \Rightarrow C \setminus (B \cap C) \subseteq C \setminus (A \cap C)$$

2. $n = 2$ 时,

$$\begin{aligned} \{\tau > 2|b-a|\} &\subseteq \{S_{|b-a|} \in (a, b)\} \cap \{S_{2|b-a|} \in (a, b)\} \\ &\subseteq \{S_{|b-a|} \in (a, b)\} \cap \{X_{|b-a|+k} = 1, 1 \leq k \leq |b-a|\}^c \end{aligned}$$

$$\{\tau > 2|b-a|\} \subseteq \{\tau > |b-a|\} \subseteq \{X_k = 1, 1 \leq k \leq |b-a|\}^c$$

3. 迭代得 $\{\tau > n|b-a|\} \subseteq \cap_{m=0}^{n-1} \{X_{m|b-a|+k} = 1, 1 \leq k \leq |b-a|\}^c$

又因 $\mathbb{P}_x(X_{m|b-a|+k} = 1, 1 \leq k \leq |b-a|) = \frac{1}{2^{|b-a|}}$, 故

$$\mathbb{P}_x(\tau > n|b-a|) \leq \prod_{m=0}^{n-1} (1 - \frac{1}{2^{|b-a|}}) = (1 - \frac{1}{2^{|b-a|}})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\mathbb{P}_x(\tau = \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(\tau > n|b-a|) = 0$$

(2) Claim: $\{S_{\tau \wedge n}\}$ 有界, 即存在常数 K , 使 $|S_{\tau \wedge n}| \leq K (\forall n \geq 0)$

证明.

$$\begin{aligned} |S_{\tau \wedge n}| &= |S_{\tau \wedge n} \mathbb{I}_{\{\tau \leq n\}}| + |S_{\tau \wedge n} \mathbb{I}_{\{\tau > n\}}| \\ &= |S_{\tau} \mathbb{I}_{\{\tau \leq n\}}| + |S_n \mathbb{I}_{\{\tau > n\}}| \\ &\leq |a| \vee |b| \end{aligned}$$

□

(3) 求 $\mathbb{P}_x(V_a < V_b), \mathbb{P}_x(V_b < V_a)$. (离出分布)

注意到 $\mathbb{P}_x(V_a < V_b) = \mathbb{P}_x(\tau = V_a) = \mathbb{P}_x(S_{\tau} = a)$. 应用鞅停时定理 6.6 知,

$$x = \mathbb{E}_x S_0 = \mathbb{E}_x S_{\tau} = a\mathbb{P}_x(S_{\tau} = a) + b\mathbb{P}_x(S_{\tau} = b)$$

又 $\mathbb{P}_x(S_{\tau} = a) + \mathbb{P}_x(S_{\tau} = b) = 1$. 联立方程, 解得

$$\mathbb{P}_x(S_{\tau} = a) = \frac{b-x}{b-a}, \quad \mathbb{P}_x(S_{\tau} = b) = \frac{x-a}{b-a}$$

□

Example 6.9 (不公平赌博的赌徒破产)

设 $X_1, X_2, \dots \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathbb{P}(X_1 = 1) = p \neq \frac{1}{2}, \mathbb{P}(X_1 = -1) = q = 1 - p$. 记 $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n), n \geq 1, \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. 令 $S_n = x + \sum_{k=1}^n X_k (n \geq 0, x \in \mathbb{Z})$. $\tau = \min\{n \geq 0 | S_n \notin (a, b)\}, a < x < b, a, b \in \mathbb{Z}$. 求 $\mathbb{P}_x(V_a < V_b), \mathbb{P}_x(V_b < V_a)$. 其中 $V_a = \min\{n \geq 0 | S_n = a\}$.

解. 令 $M_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} (\forall n \geq 0)$. 由例 6.7 知, $(M_n)_{n \geq 0}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 为鞅.

(1) 类比例 6.8 易证 τ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 为停时, 且

1° $S_{\tau} = a$ 或 b

2° $\mathbb{P}_x(\tau > n | b - a) \leq (1 - p^{|b-a|})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\mathbb{P}_x(\tau = \infty) = 0$, 即 τ 为有限停时.

(2) Claim: $(|M_n|)_{n \geq 0}$ 有界.

$\tau \wedge n \leq \tau \Rightarrow S_{\tau \wedge n} \in [a, b]$

$$|M_{\tau \wedge n}| = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{\tau \wedge n}} \leq \sup_{y \in [a, b]} \left(\frac{q}{p}\right)^y \quad \forall n \geq 0$$

(3) $\mathbb{P}_x(V_a < V_b) = \mathbb{P}_x(\tau = V_a) = \mathbb{P}_x(S_{\tau} = a)$

1° 应用鞅停时定理, 得

$$\begin{aligned} \left(\frac{q}{p}\right)^x &= \mathbb{E}_x M_0 = \mathbb{E}_x M_{\tau} \\ &= \mathbb{E}_x \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{\tau}} = \left(\frac{q}{p}\right)^a \mathbb{P}_x(S_{\tau} = a) + \left(\frac{q}{p}\right)^b \mathbb{P}_x(S_{\tau} = b) \end{aligned}$$

2° $\mathbb{P}_x(S_{\tau} = a) + \mathbb{P}_x(S_{\tau} = b) = 1$

$$\mathbb{P}_x(V_a < V_b) = \mathbb{P}_x(S_{\tau} = a) = \frac{(q/p)^b - (q/p)^x}{(q/p)^b - (q/p)^a}$$

$$\mathbb{P}_x(V_b < V_a) = \mathbb{P}_x(S_\tau = b) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^a}{(q/p)^b - (q/p)^a}$$

□

Example 6.10 (赌博的持续时间)

设 $X_1, X_2, \dots \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathbb{P}_x(X_1 = 1) = p, \mathbb{P}_x(X_1 = -1) = q = 1 - p$. 记 $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^X (n \geq 1), \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. 令 $S_n = x + \sum_{k=1}^n X_k (\forall n \geq 0, x \in \mathbb{Z}), \tau = \min\{n \geq 0 | S_n \notin (a, b)\} (a < x < b, a, b \in \mathbb{Z})$. 求 $\mathbb{E}_x \tau$.

解. (Case 1) $p = 1/2$ 时, $\mathbb{E}X_1 = 0, \text{Var}(X_1) = 1$, 故由例 6.3 知 $\tilde{M}_n := (S_n)^2 - n (\forall n \geq 0)$ 在 \mathbb{P}_x 下关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 为鞅. 由例 6.8 知, $\mathbb{P}_x(\tau = \infty) = 0$.

因为无法判断 \tilde{M}_n 的停止过程有界, 不能应用鞅停时定理. 用可选停时定理代替,

$$\mathbb{E}_x \tilde{M}_n \stackrel{\text{Thm 6.5}}{=} \mathbb{E}_x \tilde{M}_{\tau \wedge n} = \mathbb{E}_x (S_{\tau \wedge n}^2 - \tau \wedge n)$$

(Step 1) Claim: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x (S_{\tau \wedge n}^2) = \mathbb{E}_x (S_\tau^2)$. (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x (\tau \wedge n) = \mathbb{E}_x (\tau)$.

注: 由断言, $\mathbb{E}_x \tilde{M}_0 = \mathbb{E}_x \tilde{M}_n$ (用可选停时定理 + 取极限, 实现鞅停时定理的作用)

证明. (1) 先证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x (S_{\tau \wedge n}^2) = \mathbb{E}_x (S_\tau^2)$.

(i) $\tau \leq n$ 时,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x (S_{\tau \wedge n}^2 \mathbb{I}_{\{\tau \leq n\}}) &= \mathbb{E}_x (S_\tau^2 \mathbb{I}_{\{\tau \leq n\}}) \\ &= a^2 \mathbb{P}_x(S_\tau = a, \tau \leq n) + b^2 \mathbb{P}_x(S_\tau = b, \tau \leq n) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^2 \mathbb{P}_x(S_\tau = a) + b^2 \mathbb{P}_x(S_\tau = b) = \mathbb{E}_x (S_\tau^2) \end{aligned}$$

(ii) $\tau > n$ 时,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x (S_{\tau \wedge n}^2 \mathbb{I}_{\{\tau > n\}}) &= \mathbb{E}_x (S_n^2 \mathbb{I}_{\{\tau > n\}}) \\ &\leq (|a| \vee |b|)^2 \mathbb{E}_x \mathbb{I}_{\{\tau > n\}} \\ &= (|a| \vee |b|)^2 \mathbb{P}_x(\tau > n) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} (|a| \vee |b|)^2 \mathbb{P}_x(\tau = \infty) = 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x (\tau \wedge n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(\tau \wedge n \geq k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_x(\tau \wedge n \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_x(\tau \geq k, n \geq k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_x(\tau \geq k) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(\tau \geq k) = \mathbb{E}_x (\tau) \end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为 $\mathbb{P}_x(\tau = \infty) = 0$.

□

(Step 2) 由 (Step 1) 知, $x^2 = \mathbb{E}_x (S_\tau^2) - \mathbb{E}_x (\tau)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \tau &= \mathbb{E}_x (S_\tau^2) - x^2 \\ &= -x^2 + a^2 \mathbb{P}_x(S_\tau = a) + b^2 \mathbb{P}_x(S_\tau = b) \\ &= -x^2 + a^2 \cdot \frac{b-x}{b-a} + b^2 \cdot \frac{x-a}{b-a} = -ab \end{aligned}$$

(Case 2) $p \neq 1/2$ 时, $\mathbb{E}X_1 = p - q =: \mu$. 故由例 6.3 知, $M_n := S_n - n\mu (\forall n \geq 0)$ 在 \mathbb{P}_x 下关于 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ 为鞅. 由例 6.8 知, $\mathbb{P}_x(\tau = \infty) = 0$.

$$x = \mathbb{E}_x M_0 \stackrel{\text{Thm 6.5}}{=} \mathbb{E}_x M_{\tau \wedge n} = \mathbb{E}_x(S_{\tau \wedge n}) - \mu \mathbb{E}_x(\tau \wedge n)$$

类似 (Case 1) 可证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x(S_{\tau \wedge n}) = \mathbb{E}_x(S_\tau)$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x(\tau \wedge n) = \mathbb{E}_x(\tau)$. 故

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x(\tau) &= \frac{\mathbb{E}_x(S_\tau) - x}{p - q} \\ \mathbb{E}_x \tau &= \frac{1}{p - q} [a \cdot \mathbb{P}_x(S_\tau = a) + b \cdot \mathbb{P}_x(S_\tau = b)] - \frac{x}{p - q} \\ &= \frac{1}{p - q} \left[a \cdot \frac{(q/p)^b - (q/b)^x}{(q/p)^b - (q/p)^a} + b \cdot \frac{(q/p)^x - (q/b)^a}{(q/p)^b - (q/p)^a} \right] - \frac{x}{p - q} \end{aligned}$$

□

Theorem 6.7 (Wald 等式)

设 $(X_n)_{n \geq 1} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathbb{E}X_1 = \mu$, T 关于 $(X_n)_{n \geq 1}$ 为停时, 且 $\mathbb{E}T < \infty$, 则

$$\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^T X_k \right) = \mathbb{E}T \cdot \mathbb{E}X_1$$

注: $\{\tau = n\} \in \sigma(X_1, \dots, X_n) \perp\!\!\!\perp \{X_{n+1}, X_{n+2}, \dots\}$

Corollary 6.2

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为更新过程, 其间隔时间序列为 $\{\tau_k, k \geq 1\}$ 更新时间序列 $\{T_n, n \geq 0\}$, 则

$$\mathbb{E}(T_{N(t)+1}) = \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{N(t)+1} \tau_k \right) = \mathbb{E}(\tau_1) \mathbb{E}(N(t) + 1)$$

证明.

$$\begin{aligned} \{N(t) + 1 = n\} &= \{N(t) = n - 1\} = \{T_{n-1} \leq t < T_n\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \leq t < \sum_{k=1}^n \tau_k \right\} \in \sigma(\tau_1, \dots, \tau_n) \end{aligned}$$

$N(t) + 1$ 关于 $(\tau_k)_{k \geq 1}$ 为停时.

应用 Thm 6.7 得到想要的结论.

注: $\{N(t) = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$ 与 τ_{n+1} 有关, 故 $N(t)$ 关于 $(\tau_k)_{k \geq 1}$ 不是停时.

□

6.5 Doob 极大值不等式与鞅收敛定理

Theorem 6.8 (Doob 极大值不等式)

令 $(X_n)_{n \geq 0}$ 为非负上鞅, $\lambda > 0$, 则

$$\mathbb{P}(\sup_{n \geq 0} X_n \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}X_0}{\lambda}$$

注: (1) $X_n \geq 0 (\forall n \geq 0)$ (2) $(X_n)_{n \geq 0}$ 关于自然流 $(\mathcal{F}_n^X)_{n \geq 0}$ 为上鞅.

若用 Markov 不等式放缩, 则

$$\mathbb{P}(\sup_{n \geq 0} X_n \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(\sup_{n \geq 0} X_n)}{\lambda}$$

因为 \sup 是凸函数, 由 Jensen 不等式, $\mathbb{E}X_0 = \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(X_0) \leq \mathbb{E}(\sup_{n \geq 0} X_n)$. 由此可知 Doob 不等式的结论比 Markov 不等式更强.

证明. 令 $T = \min\{n \geq 0 | X_n > \lambda\}$, 则

1. $\{\tau = n\} = \{X_n > \lambda, X_k \leq \lambda, 0 \leq k \leq n-1\} \in \mathcal{F}_n^X (\forall n \geq 0)$, 即 T 关于 $(\mathcal{F}_n^X)_{n \geq 0}$ 为停时.
2. $\mathbb{P}(\sup_{n \geq 0} X_n > \lambda) = \mathbb{P}(\exists n \geq 0, X_n > \lambda) = \mathbb{P}(T < \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T \leq n) (*)$.

(Step 1) 下证: $\mathbb{P}(T \leq n) \leq \mathbb{E}X_0/\lambda (\forall n \geq 0)$

由 Thm 6.5 知, $(X_{\tau \wedge n})_{n \geq 0}$ 也为上鞅.

$$\mathbb{E}X_0 \geq \mathbb{E}X_{\tau \wedge n} = \mathbb{E}(X_T \mathbb{I}_{\{T \leq n\}}) + \mathbb{E}(X_n \mathbb{I}_{\{T > n\}}) \geq \lambda \mathbb{P}(T \leq n)$$

$$\mathbb{P}(T \leq n) \leq \mathbb{E}X_0/\lambda, \forall n \geq 0.$$

(Step 2) 由 (Step 1) 和 (*) 即得 $\mathbb{P}(\sup_{n \geq 0} X_n \geq \lambda) \leq \mathbb{E}X_0/\lambda$ □

Theorem 6.9 (下鞅的 Doob 极大值不等式)

设 $(Y_n)_{n \geq 0}$ 为非负下鞅, $\lambda > 0$, 则对每一个 N , 有

$$\mathbb{P}(\max_{0 \leq k \leq N} Y_k \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(Y_N \mathbb{I}_{\{\max_{0 \leq k \leq N} Y_k \geq \lambda\}}) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(Y_N)$$

注:

$$\mathbb{P}(\max_{0 \leq k \leq N} Y_k \geq \lambda) \leq \mathbb{E} \left(\frac{\max_{0 \leq k \leq N} Y_k}{\lambda} \mathbb{I}_{\{\max_{0 \leq k \leq N} Y_k \geq \lambda\}} \right) =: \zeta$$

而 $\lambda^{-1} \mathbb{E}(Y_N \mathbb{I}_{\{\max_{0 \leq k \leq N} Y_k \geq \lambda\}}) \leq \zeta$, 说明 Doob 不等式是很强的结果.

证明. 只需证第一个不等式. 令 $\tau = \min\{n \geq 0 | Y_n \geq \lambda\}$, 则

1. τ 关于 $(\mathcal{F}_n^Y)_{n \geq 0}$ 为停时 (自己写)

$$2. \{\max_{0 \leq k \leq N} Y_k \geq \lambda\} = \{\tau \leq N\} = \sum_{k=0}^N \{\tau = k\}$$

$$\begin{aligned} \lambda \times \text{RHS} &= \mathbb{E}(Y_N \mathbb{I}_{\{\tau \leq N\}}) = \sum_{k=0}^N \mathbb{E}(Y_N \mathbb{I}_{\{\tau = k\}}) \\ &= \sum_{k=0}^N \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y_N \mathbb{I}_{\{\tau = k\}} | \mathcal{F}_k^Y)) \\ &= \sum_{k=0}^N \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\tau = k\}} \cdot \mathbb{E}(Y_N | \mathcal{F}_k^Y)) \\ &\geq \sum_{k=0}^N \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\tau = k\}} Y_k) \quad (\text{下鞅是下降的}) \\ &\geq \lambda \sum_{k=0}^N \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{\tau = k\}}) = \lambda \mathbb{P}(\tau \leq N) = \lambda \times \text{LHS} \end{aligned}$$

□

Theorem 6.10 (鞅收敛定理)

设 $(X_n)_{n \geq 0}$ 为上鞅 (或下鞅), 且 $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}|X_n| < \infty$ (L^1 有界), 则

1. $X_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n < \infty$ (a.s.), 即极限存在.
2. $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$

Corollary 6.3

设 $(X_n)_{n \geq 0}$ 为非负上鞅, 则

1. $X_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n < \infty$ (a.s.)
2. $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$
3. $\mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_n^X) \leq X_n (\forall n \geq 0)$ (Fatou's lemma)

证明. $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}|X_n| = \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}X_0$.

□

Example 6.11 (罐子)

考虑一个装有红、绿两色的小球.

- 0 时刻: 至少一个红、一个绿, 总计 k ($k \geq 2$) 个球
- n 时刻: 抽取一个球, 记住其颜色, 放回, 再放入一个同色球

故而

- 第 n 次抽球时, 罐中有 $k + (n - 1)$ 个球
- n 时刻动作结束后, 罐中有 $n + k$ 个球

设 X_n ($n \geq 1$) 表示 n 时刻动作结束后, 罐中红球的比例, 则

$$X_n \in \left\{ \frac{1}{n+k}, \dots, \frac{n+k-1}{n+k} \right\} =: S_n, \quad \forall n \geq 0$$

(1) Claim: $(X_n)_{n \geq 0}$ 为非负鞅, 即 $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n^X) = \mathbb{E}(X_n)$, $\forall n \geq 0$. 适应性, 可积性易证, 只证明鞅性.

证明. (Step 1) $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sigma(\Pi_{(X_0, X_1, \dots, X_n)})$. 其中,

$$\Pi_{(X_0, \dots, X_n)} = \left\{ \{(X_0, \dots, X_n) = (x_0, \dots, x_n)\} \mid (x_0, \dots, x_n) \in S_0 \times \dots \times S_n \right\}$$

因此

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n^X) = \sum_{(x_0, \dots, x_n) \in S_0 \times \dots \times S_n} \mathbb{E}(X_{n+1} | (X_0, \dots, X_n) \in (x_0, \dots, x_n)) \mathbb{I}_{\{(X_0, \dots, X_n) = (x_0, \dots, x_n)\}}$$

关于 σ -代数的条件期望是变量; 关于集合的条件期望是实数, 随机性表现在示性函数上.

(Step 2) 设 R_n 表示 n 时刻动作结束后, 罐中红球的个数, 则

$$1^\circ R_n = (n+k)X_n$$

$$2^\circ R_{n+1} = R_n \text{ 或 } 1 + R_n$$

$$X_{n+1} \stackrel{1^\circ}{=} \frac{R_{n+1}}{n+k+1} \stackrel{2^\circ}{=} \frac{R_n}{n+k+1} \mathbb{I}_{\{R_{n+1}=R_n\}} + \frac{1+R_n}{n+k+1} \mathbb{I}_{\{R_{n+1}=1+R_n\}}$$

$$3^\circ \text{ 记 } \tilde{\mathbb{E}} = \mathbb{E}(\cdot | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)$$

$$\tilde{\mathbb{E}}(X_{n+1}) = \tilde{\mathbb{E}}\left(\frac{R_n}{n+k+1} \mathbb{I}_{\{R_{n+1}=R_n\}}\right) + \tilde{\mathbb{E}}\left(\frac{1+R_n}{n+k+1} \mathbb{I}_{\{R_{n+1}=1+R_n\}}\right)$$

其中 $R_n = (n+k)X_n$, 而 $X_n = x_n$ 为条件.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}(X_{n+1}) &= \frac{(n+k)x_n}{n+k+1} \cdot \tilde{\mathbb{E}} \mathbb{I}_{\{R_{n+1}=R_n\}} + \frac{1+(n+k)x_n}{n+k+1} \tilde{\mathbb{E}} \mathbb{I}_{\{R_{n+1}=1+R_n\}} \\ &= \frac{(n+k)x_n}{n+k+1} + \frac{1}{n+k+1} \mathbb{P}(R_{n+1} = 1+R_n | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) \\ &= \frac{(n+k)x_n}{n+k+1} + \frac{x_n}{n+k+1} = x_n \end{aligned} \quad (*)$$

(Step 3) 由 (*) 有

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n^X) = \sum_{(x_0, \dots, x_n) \in S_0 \times \dots \times S_n} x_n \mathbb{I}_{\{(X_0, \dots, X_n) = (x_0, \dots, x_n)\}} = X_n \quad (\forall n \geq 0)$$

□

(2) 由 (1) 知 $X_n (n \geq 0)$ 是非负鞅, 因此是非负上鞅. 故由 Cor 6.3 知, $X_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n < \infty$ (a.s.). 问: 当 $k=2$ 时, 求 X_∞ 的分布.

(Step 1) 考察 X_n 的分布 (n 无穷大)

$$X_n \in \left\{ \frac{1}{n+k}, \dots, \frac{n+k-1}{n+k} \right\} \stackrel{k=2}{=} \left\{ \frac{1}{n+2}, \dots, \frac{n+1}{n+2} \right\}$$

1. 每次都抽到绿球

$$\mathbb{P}(X_n = \frac{1}{n+2}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n}{n+1} = \frac{n!}{(n+1)!}$$

2. 有且仅有一次抽到红球

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_n = \frac{2}{n+2}) &= \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(\text{仅第 } j \text{ 次抽到红球}) \\
 &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{j-1}{j}}_{\text{前 } j-1 \text{ 次}} \times \frac{1}{j+1} \times \underbrace{\frac{j}{j+2} \times \cdots \times \frac{n-1}{n+1}}_{\text{后 } n-j \text{ 次}} \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{1!(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1! \cdot n!}{(n+1)!}
 \end{aligned}$$

3. 有且仅有两次抽到红球

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_n = \frac{3}{n+2}) &= \sum_{j_1 < j_2} \mathbb{P}(\text{仅第 } j_1 \text{ 次和第 } j_2 \text{ 次抽到红球}) \\
 &= \sum_{j_1 < j_2} \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{j_1-1}{j_1} \times \underbrace{\frac{1}{j_1+1}}_{\text{第 } j_1 \text{ 次}} \times \frac{j_1}{j_1+2} \times \cdots \times \frac{j_2-2}{j_2} \times \underbrace{\frac{2}{j_2+1}}_{\text{第 } j_2 \text{ 次}} \times \frac{j_2-1}{j_2+2} \times \cdots \times \frac{n-2}{n+1} \\
 &= \sum_{j_1 < j_2} \frac{2!(n-2)!}{(n+1)!} \\
 &= \binom{n}{2} \frac{2!(n-2)!}{(n+1)!} \\
 &= \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{2!(n-2)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

4. 有且仅有 $j-1$ 次抽到红球 ($1 \leq j \leq n+1$)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_n = \frac{j}{n+2}) &= \mathbb{P}(\text{前 } n \text{ 次中仅有 } j-1 \text{ 次抽到红球}) \\
 &= \binom{n}{j-1} \frac{(j-1)!(n-j+1)!}{(n+1)!} \\
 &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} \cdot \frac{(j-1)!(n-j+1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

(Step 2) $0 \leq X_n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq X_\infty \leq 1$ (a.s.)

$\forall x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_\infty \leq x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j/(n+2) \leq x} \mathbb{P}(X_n = \frac{j}{n+2}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot [x(n+2)] = x
 \end{aligned}$$

即 $X_\infty \sim U_{[0,1]}$.

7 布朗运动

Definition 7.1

称 $(B_t)_{t \geq 0}$ 为方差为 σ^2 的布朗运动, 若

1. $B_0 = 0$, 且 $\forall \omega \in \Omega, t \rightarrow B_t(\omega)$ 连续 (轨道连续)
2. (独立增量性) $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 有 $B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ 相互独立
3. $B_{t+s} - B_t \stackrel{(d)}{=} B_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 s), \forall s > 0$
特别地, $\sigma^2 = 1$ 则称 B 为标准布朗运动.

自行证明下面性质:

Property 7.1

$$\text{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t$$

Property 7.2 (尺度性质)

B 为标准布朗运动,

1. $\forall \alpha > 0, (\alpha B_t)_{t \geq 0}$ 为方差为 α^2 的布朗运动
2. $\forall c > 0, (\sqrt{c} B_t / c)_{t \geq 0}$ 为标准布朗运动
注: \sqrt{c} 为空间尺度变换, $1/c$ 为时间尺度变换
3. $\forall c > 0, (B_{ct})_{t \geq 0}$ 为方差为 c 的布朗运动

参考文献

- [1] 强马氏性 v2. 03 2025. [\[Link\]](#).
- [2] Rick Durrett. Essentials of Stochastic Processes. 01 1999. doi:10.1007/978-1-4614-3615-7.
- [3] Geoffrey Grimmett and David Stirzaker. Probability and random processes. Oxford University Press, Oxford; New York. doi:10.1017/mag.2022.154.
- [4] Sidney I. Resnick. Adventures in stochastic processes. Birkhauser Verlag, CHE, 1992. [\[Link\]](#).
- [5] Sheldon M Ross. Stochastic processes. John Wiley & Sons, 1995.
- [6] 梅加强. 数学分析讲义. 2010.
- [7] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程, volume 2. 高等教育出版社, 北京, 8 edition, 2006.