Lem:AA01 **引理 1.4.21 (马氏性的小推广).** 若 X 为马氏链, 则对任意 $n,m \geqslant 0$, $x_n \in S$, $A \in \otimes_{n+1}2^S, B \in \otimes_{m+1}2^S$ (即 $A \subset S^{n+1}, B \subset S^{m=1}$), 有

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left((X_0,\cdots,X_n)\in A,(X_n,\cdots,X_{n+m})\in B\right)\\ =&\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left\{(X_0,\cdots,X_n)\in A\right\}\times\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left\{(X_n,\cdots,X_{n+m})\in B\right\}. \end{aligned} \tag{1.4.87}$$ Eq:AA03

即 $(X_0,\cdots,X_n) \perp\!\!\!\perp_{\{X_n=x_n\}} (X_n,\cdots,X_{n+m})$ 的定义.

证明. 回顾马氏性:

回顾. 对任意 $n,m \geqslant 1, x_n \in S, A \in \otimes_n 2^S, B \in \otimes_m 2^S$ (即 $A \subset S^n, B \subset S^m$), 有

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left((X_0,\cdots,X_{n-1})\in A,(X_{n+1},\cdots,X_{n+m})\in B\right)\\ =&\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left\{(X_0,\cdots,X_{n-1})\in A\right\}\times\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left\{(X_{n+1},\cdots,X_{n+m})\in B\right\}. \end{aligned} \tag{M2}$$

即 $(X_0,\cdots,X_{n-1}) \perp\!\!\!\perp_{\{X_n=x_n\}} (X_{n+1},\cdots,X_{n+m})$ 的定义.

不妨设 $A = A_0 \times \cdots \times A_n$, $B = B_m \times \cdots \times B_{n+m}$.

(Case 1) 若 $x_n \notin A_n$ 或 $x_n \notin B_n$, 则

$$\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left\{(X_0,\cdots,X_n)\in A\right\}=0 \text{ 或 } \mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left\{(X_n,\cdots,X_{n+m})\in B\right\}=0, \tag{1.4.88}$$

且

$$\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left((X_0,\cdots,X_n)\in A,(X_n,\cdots,X_{n+m})\in B\right)=0. \tag{1.4.89}$$

从而, (Eq:AA03 1.4.87)得证.

(Case 2) 设 $x_n \in A_n$, 且 $x_n \in B_n$. 若 $n=0, m=0$, 则显然有

$$\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left\{(X_0,\cdots,X_n)\in A\right\}=\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left\{(X_n,\cdots,X_{n+m})\in B\right\}=1, \tag{1.4.90}$$

$$\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left\{(X_0,\cdots,X_n)\in A,(X_n,\cdots,X_{n+m})\in B\right\}=1, \tag{1.4.91}$$

此时, 显然有(Eq:AA03 1.4.87)成立. 若 $n \geqslant 1, m \geqslant 1$, 则

$$\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left\{(X_0,\cdots,X_n)\in A\right\}=\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left\{X_j\in A_j, 0\leqslant j\leqslant n-1\right\}, \tag{1.4.92}$$

$$\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left\{(X_n,\cdots,X_{n+m})\in B\right\}=\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left\{X_j\in B_j, n+1\leqslant j\leqslant n+m\right\}, \tag{1.4.93}$$

且

$$\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left((X_0,\cdots,X_n)\in A,(X_n,\cdots,X_{n+m})\in B\right) \tag{1.4.94}$$

$$=\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left\{X_j\in A_j, 0\leqslant j\leqslant n-1, X_k\in B_k, n+1\leqslant k\leqslant n+m\right\} \tag{1.4.95}$$

$$\overset{\text{(M2)}}{=\!=\!=}\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left\{X_j\in A_j, 0\leqslant j\leqslant n-1\right\}\mathbb{P}_{\{X_n=x_n\}}\left\{X_k\in B_k, n+1\leqslant k\leqslant n+m\right\}, \tag{1.4.96}$$

故而, (Eq:AA03 1.4.87)得证. 对于其他情形 $n \geqslant 1, m=0$ 或 $n=0, m \geqslant 1$, 可类似证明.

证毕. □

qmsx1 **命题 1.4.22 (强马氏性,Norris).** 设 $\{X_n, n \geqslant 0\} \sim \text{Markov}(\mu, \mathbf{P})$, 其中 $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j\in S}$. τ 为关于 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 的停时. 则

(1) 在 $\{\tau < \infty\}$ 和 $\{X_\tau = x\}$ 条件下, $\{X_{\tau+n}, n \geqslant 0\} \sim \text{Markov}(\delta_x, \mathbf{P})$, 其中

$$\delta_x = (\delta_{xy})_{y\in S};$$

(2) 对任意的 $J \subset \mathbb{N}_0$, $\#J < \infty$, 有

$$\sigma(X_{\tau+n}, n \in J) \perp\!\!\!\perp_{\{\tau<\infty, X_\tau = x\}} \mathscr{F}_\tau.$$

注 1.4.13. B 是由随机变量 $X_0, \cdots, X_\tau$ 决定的事件, 即 $B \cap \{\tau = m\} \in \sigma(X_0, \cdots, X_m$.

证明. (1) 回顾一个命题:

回顾 (初见马氏链的有限维分布). 设 $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j\in S}$ 为随机矩阵, $\mu = (\mu_i)_{i\in S}$ 为概率分布, $X = \{X_n, n \geqslant 0\}$ 为 S 值离散时间随机过程. 则过程 $X \sim \text{Markov}(\mu, \mathbf{P})$ 当且仅当则对任意的 $n \geqslant 0$, $i_0, i_1, \cdots, i_n \in S$, X 有有限维分布:

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) = \mu_{i_0} \prod_{k=0}^{n-1} p_{i_k i_{k+1}}. \tag{1.4.97}$$

根据此结论, 我们只需考察链 $\{X_{\tau+n}, n \geqslant 0\}$ 的有限维分布.

(Step 1) 设 $j_0 \neq x$. 则对任意的 $n \geqslant 1$, $m \geqslant 0$, 有

$$\mathbb{P}(X_{\tau+0} = j_0, \cdots, X_{\tau+n} = j_n, \tau = m, X_\tau = x) = 0. \tag{1.4.98}$$

关于 $m \geqslant 0$ 求和, 并注意到 $\{\tau < \infty\} = \sum_{m=0}^{\infty} \{\tau = m\}$, 得:

$$\mathbb{P}(X_{\tau+0} = j_0, \cdots, X_{\tau+n} = j_n, \tau < \infty, X_\tau = x) = 0. \tag{1.4.99}$$

两边同除 $\mathbb{P}(\tau < \infty, X_\tau = x)$, 有

$$\mathbb{P}(X_{\tau+0} = j_0, \cdots, X_{\tau+n} = j_n \mid \tau < \infty, X_\tau = x) = 0 = \delta_{x,j_0} \prod_{k=0}^{n-1} p_{j_k j_{k+1}}. \tag{1.4.100}$$

(Step 2) 设 $j_0 = x$. 注意到, 对任意的 $m \geqslant 0$, 有

$$\{\tau = m\} \in \sigma(X_0, \cdots, X_m), \tag{1.4.101}$$

故而, 由 Lem:AA01 引理 1.4.21（马氏性）知: 对任意的 $n \geqslant 1$, $m \geqslant 0$, 有

$$\{\tau = m\} \perp\!\!\!\perp_{\{X_m = x\}} \{X_m = j_0, X_{m+1} = j_1, \cdots, X_{m+n} = j_n\}. \tag{1.4.102}$$ Eq:AA02

从而, 对任意的 $m \geqslant 0$, 有

$$\mathbb{P}(X_{\tau+0}=j_0,\tau=m,X_\tau=x)=\mathbb{P}(X_{m+0}=j_0,\tau=m,X_m=x) \tag{1.4.103}$$

$$\xlongequal{\text{乘法公式}} \mathbb{P}(X_{m+0}=j_0,\tau=m \mid X_m=x)\times\mathbb{P}(X_m=x) \tag{1.4.104}$$

$$\xlongequal[\text{Eq:AA02(1.4.102)}]{\text{马氏性}} \mathbb{P}(X_{m+0}=j_0 \mid X_m=x)\times\mathbb{P}(\tau=m \mid X_m=x) \tag{1.4.105}$$

$$\times\mathbb{P}(X_m=x) \tag{1.4.106}$$

$$\xlongequal{\text{乘法公式}} 1\times\mathbb{P}(\tau=m,X_m=x)=\delta_{xx}\mathbb{P}(\tau=m,X_m=x), \tag{1.4.107}$$

以及, 对任意的 $n \geqslant 1, m \geqslant 0$, 有

$$\mathbb{P}(X_{\tau+0}=j_0,X_{\tau+1}=j_1,\cdots,X_{\tau+n}=j_n,\tau=m,X_\tau=x) \tag{1.4.108}$$

$$=\mathbb{P}(X_{m+1}=j_1,\cdots,X_{m+n}=j_n,\tau=m,X_m=x) \tag{1.4.109}$$

$$\xlongequal{\text{乘法公式}} \mathbb{P}(X_{m+1}=j_1,\cdots,X_{m+n}=j_n,\tau=m \mid X_m=x)\times\mathbb{P}(X_m=x) \tag{1.4.110}$$

$$\xlongequal[\text{Eq:AA02(1.4.102)}]{\text{马氏性}} \mathbb{P}(X_{m+1}=j_1,\cdots,X_{m+n}=j_n \mid X_m=x)\times\mathbb{P}(\tau=m \mid X_m=x) \tag{1.4.111}$$

$$\times\mathbb{P}(X_m=x) \tag{1.4.112}$$

$$=\frac{\mathbb{P}(X_{m+1}=j_1,\cdots,X_{m+n}=j_n,X_m=x)}{\mathbb{P}(X_m=x)}\times\mathbb{P}(\tau=m \mid X_m=x) \tag{1.4.113}$$

$$\times\mathbb{P}(X_m=x) \tag{1.4.114}$$

$$\xlongequal{\text{马氏链 }X\text{ 的有限维分布}} \frac{\mu_x^{(m)}p_{x,j_1}p_{j_2,j_3}\cdots p_{j_{n-1},j_n}}{\mu_x^{(m)}}\times\mathbb{P}(\tau=m,X_m=x) \tag{1.4.115}$$

$$=\delta_{xx}p_{x,j_1}p_{j_2,j_3}\cdots p_{j_{n-1},j_n}\times\mathbb{P}(\tau=m,X_\tau=x), \tag{1.4.116}$$

其中, $\mu_x^{(m)} := \mathbb{P}(X_m=x)$. 综上, 关于 $m \geqslant 0$ 求和（注意到 $\{\tau<\infty\}=\sum_{m=0}^{\infty}\{\tau=m\}$）, 再两边同除以 $\mathbb{P}(\tau<\infty,X_\tau=x)$, 得: 当 $j_0=x$, 对任意的 $n \geqslant 0$, 有

$$\mathbb{P}(X_{\tau+0}=j_0,\cdots,X_{\tau+n}=j_n \mid \tau<\infty,X_\tau=x)=\delta_{x,j_0}\prod_{k=0}^{n-1}p_{j_kj_{k+1}}. \tag{1.4.117}$$

(Step 3) 综上, 链的 $(X_{\tau+n})_{n\geqslant 0}$ 的有限维分布为

$$\mathbb{P}(X_{\tau+0}=j_0,\cdots,X_{\tau+n}=j_n \mid \tau<\infty,X_\tau=x)=\delta_{x,j_0}\prod_{k=0}^{n-1}p_{j_kj_{k+1}}. \tag{1.4.118}$$

即有 $(X_{\tau+n})_{n\geqslant 0} \sim \mathrm{Markov}(\delta_x,\mathbf{P})$.

(2) 作业. □