

# 随机过程

教授：吴明燕

笔记由 Dafu Zhu 编写

基于 2025 春季厦大数院《随机过程》

最后修改：2025/03/12

## 目录

准备知识	2
0.1 事件概率	3
0.1.1 事件域	3
0.1.2 概率测度	4
0.2 独立性	7
0.3 条件概率与条件独立	11
0.4 期望与条件期望	13
0.4.1 离散随机变量的期望	13
0.4.2 条件期望	15
0.5 随机过程	23
0.5.1 什么是随机过程	23
0.5.2 随机过程的分布	23
0.5.3 随机过程的存在性	24
0.5.4 随机过程的基本类型	25
1 马氏链	26
1.1 离散时间马氏链	26
1.2 时齐马氏链与转移概率	29
1.3 多步转移概率与矩阵乘法	33
1.3.1 Chapman-Komolgorov 方程	33
2 泊松过程	35

成绩：平时（作业 + 考勤）+ 期中论文 + 期末

## 概率论准备知识

概率论中，随机变量的本质是可测函数。

$$X : \Omega \rightarrow S$$

$S$  的  $\sigma$ -代数记为  $\mathcal{S}$ ，是个 Borel  $\sigma$ -代数（由开集/闭集生成）

Q: 为什么要给  $\Omega$  一个  $\sigma$ -代数？

A: 样本空间是抽象的，给它  $\sigma$ -代数赋予它结构，相当于对信息进行重整/提取  
概率测度的本质是集函数，

集合  $\rightarrow$  函数

将信息具象化，

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

$$A \rightarrow \mathbb{P}(A)$$

随机过程：一族随机变量  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$

其中  $\mathbb{T}$  为指标集， $X_t : \Omega \rightarrow S$

### Example 1

$\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$ : 时间离散； $\mathbb{T} = [0, T]$ : 时间连续

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (S, \mathcal{S}, \mu_X)$$

思考：什么是随机过程的分布  $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ ？

## 0.1 事件概率

### 0.1.1 事件域

#### Definition 1 (样本空间、事件)

样本点、样本空间、事件和事件的运算：

- 样本点  $\omega$ ：一次试验的结果
- 样本空间  $\Omega$ ：全体样本点
- 事件： $\Omega$  的子集
- 事件的运算：集合的运算，即交并补 ( $A \cap B, A \cup B, A^c$ )

#### Definition 2

若  $A \cap B = \emptyset$ ，则称  $A$  与  $B$  不相交，更一般地，若  $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ ，则称  $\{A_i\}_{i \geq 1}$  互不相交

#### Definition 3

称  $\mathcal{F} \subset 2^\Omega = \{A | A \subset \Omega\}$  是一个  $\sigma$  代数/事件域 (其中  $2^\Omega$  表示所有  $\Omega$  的子集构成的集合，是一个集类) 若

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$
2. (对补封闭)  $A \in \mathcal{F} \rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. (对可列并封闭)  $A_n \in \mathcal{F}, n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

$\sigma$  代数是满足以上特定条件的集类，是由  $\Omega$  的子集构成的集合

注： $\sigma$  代数对有限交/有限并/可列交封闭

现在给出了一个定义，我们会想“为什么定义会这样给呢”，现在要举一些例子说明“定义有意义”

#### Example 2

最小的  $\sigma$  代数： $\{\emptyset, \Omega\}$

最大的  $\sigma$  代数： $2^\Omega$

以上这两个例子一个太小、一个太大，似乎没意义，所以叫它们“平凡的”

#### Example 3

$A \subset \Omega, \sigma(\{A\}) = \sigma(A) = \{A, A^c, \Omega, \emptyset\} = \sigma(A^c)$

这是由  $A$  生成的  $\sigma$  代数

#### Definition 4 (划分/分割)

称  $\Pi_\Omega := \{\Lambda_n, n \geq 1\}$  是  $\Omega$  的一个分划，若  $\Omega = \sum_{n \geq 1} \Lambda_n$

1.  $\Omega = \bigcup_{n \geq 1} \Lambda_n$
2.  $\{\Lambda_n\}_{n \geq 1}$  互不相交

#### Example 4

$$\Omega = \sum_{n \geq 1} \Lambda_n, \Pi_\Omega := \{\Lambda_n\}_{n \geq 1}$$

$$\sigma(\Pi_\Omega) = \left\{ \sum_{k \in J} \Lambda_k, J \subset \mathbb{N} \right\}$$

#### Problem 1 (作业 1-1)

证明:

1.  $\sigma(\Pi_\Omega)$  是一个  $\sigma$  代数
2.  $\sigma(\Pi_\Omega)$  是包含集类  $\Pi_\Omega$  的最小  $\sigma$  代数

$(S, \mathcal{S}) = (S, 2^S)$ :  $S$  可列时, 取  $2^S$  为  $\sigma$  代数

$(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ :  $S$  为实数集时, 取博雷尔集  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  为  $\sigma$  代数

#### 0.1.2 概率测度

##### Definition 5 (概率测度)

$(\Omega, \mathcal{F})$  称  $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  是概率测度

1. 非负性
2. 归一性
3. 可列可加性 \*

##### Property 1

$\mathbb{P}$  满足有限可加性 (可列可加一定有限可加, 如果既不是可列可加、也不是有限可加, 则不可测)

##### Corollary 1

1.  $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$
2. 若  $A \subset B$ , 则  $\mathbb{B} = \mathbb{A} + \mathbb{P}(BA^c) \geq \mathbb{P}(A)$
3.  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

**Remark 1.** 引用知乎上[三维之外](#)的大白话解释可列可加性:

首先, 在我们总是习惯于处理有限相加, 而很少遇到无限相加的情况。从测度论内容理解, 有限相加与事实 (数学的) 不符, 比如  $(0, 1)$  区间有不可数个点, 每个点的测度 (理解为直径吧) 是 0, 按照习惯想法 (有限相加), 直径的加和 (总宽度) 应该为 0, 显然,  $(0, 1)$  区间的宽度不可能是 0;

如果规定为 “只要是无穷多个点相加, 其宽度就不再是 0” 的话, 还是存在矛盾, 我们知道, 区间  $(0, 1)$  上的有理数是有无穷多个的 (而且是可列的), 那么其宽度就应该为 1, 可是无理数还是不可数的呢——理解为无理数是有理数的无穷大量或无理数是无理数的无穷小量, 那么无理数的宽度是多少呢? 即使还是 1, 显然  $(0, 1)$  区间的宽度不可能是 2 吧!?

于是，勒贝格说道：在测量长度、面积、体积时，我们采用可列可加性，即可列个点相加，规定其宽度（测度）为 0，如果点的个数超过了可列个（这时必是连续统的），那么，就不满足了——即这些点的总宽度就不是 0 了，而是具有了非 0 的宽度（正测度），当然，具有测度的这些点是紧挨在一起的，否则不一定有测度，比如康托大师制造的三分集就很诡异。

到这里，可列可加性事实上讲完了，再啰嗦一下次可列可加性。这是因为不论作为集合，还是概率上的事件（也是集合），一般是存在公共元素的，因此，一般情形下，当然满足次可列可加性的性质了，可列可加性只有在集合之间的距离大于 0 或事件之间完全独立的情形下，才会满足。

### Property 2 (次可列可加性)

$$A_n \subset \mathcal{F}, n \geq 1$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$$

证明： $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \sum_{n \geq 1} B_n$ ，其中  $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \cap (A_1)^c, \dots, B_n = A_n \cap A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c$   
 $B_n \subset A_n$ ，由可列可加性和推论 1(2)

### Problem 2 (作业 1-2)

证明  $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \sum_{n \geq 1} B_n$

证明：

1. 先证  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \subseteq \sum_{n \geq 1} B_n$ 。

假设  $x \in \bigcup_{n \geq 1} A_n$ ，

若  $x \in A_1$ ，则  $x \in B_1$ ，

若  $x \in A_2$  且  $x \notin A_1$ ，则  $x \in B_2$

...

若  $x \in A_n$  且  $x \notin A_1, x \notin A_2, \dots, x \notin A_{n-1}$ ，则  $x \in B_n$

$\forall x \in \bigcup_{n \geq 1} A_n$ ，都有  $x \in \sum_{n \geq 1} B_n$

$\because B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j, \therefore \bigcup_{n \geq 1} B_n = \sum_{n \geq 1} B_n, x \in \sum_{n \geq 1} B_n$ 。

2. 再证  $\sum_{n \geq 1} B_n \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n$

假设  $x \in \sum_{n \geq 1} B_n$ ，则  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ ，使得  $x \in B_{n_0}$ ，

由  $B$  的定义

$$B_{n_0} = A_{n_0} \cap \left( \bigcap_{k=1}^{n_0-1} A_k^c \right)$$

$$\therefore x \in A_{n_0} \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

$$\therefore \bigcup_{n \geq 1} A_n = \sum_{n \geq 1} B_n$$

□

**Property 3 (连续性)**

- (1)  $A_n \uparrow$  单调上升, 即  $A_n \subset A_{n+1}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ , 则  $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$   
 (2)  $B_n \downarrow$  单调下降, 即  $B_n \supset B_{n+1}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \bigcap_{n \geq 1} B_n$ , 则  $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n)$

证明: (1)  $\bigcup_{n \geq 1} A_n = A_1 + A_2 \setminus A_1 + A_3 \setminus A_2 + \dots$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) &= \mathbb{P}(A_1) + \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_{n+1} \setminus A_n) \\
 &= \mathbb{P}(A_1) + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mathbb{P}(A_{n+1} \setminus A_n) \\
 &= \mathbb{P}(A_1) + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m [\mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(A_n)] \\
 &= \mathbb{P}(A_1) + \lim_{m \rightarrow \infty} [\mathbb{P}(A_{m+1}) - \mathbb{P}(A_1)] \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_{m+1}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \quad \square
 \end{aligned}$$

(2)  $B_n \downarrow B \Rightarrow \forall n, B_{n+1} \subseteq B_n \Rightarrow \forall B_n^c \subseteq B_{n+1}^c$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\bigcap_{n \geq 1} B_n) = 1 - \mathbb{P}((\bigcap_{n \geq 1} B_n)^c) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 1} B_n^c) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(B_1^c \cup (\bigcup_{n \geq 2} (B_n^c \setminus B_{n-1}^c))) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(B_1^c) - \sum_{n \geq 2} (\mathbb{P}(B_n^c) - \mathbb{P}(B_{n-1}^c)) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(B_1^c) - \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^m (\mathbb{P}(B_n^c) - \mathbb{P}(B_{n-1}^c)) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(B_1^c) - \lim_{m \rightarrow \infty} (\mathbb{P}(B_m^c) - \mathbb{P}(B_1^c)) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(B_1^c) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n^c) + \mathbb{P}(B_1^c) \\
 &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n^c) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) \quad \square
 \end{aligned}$$

第二个等式用到 De Morgan's Law

## 0.2 独立性

### Definition 6 (事件间的独立性)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $A, B \in \mathcal{F}$ , 称  $A$  与  $B$  独立, 若  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ , 记为  $A \perp B$

### Definition 7 (事件间的相互独立)

$\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ , 称其相互独立, 若  $\forall J \subset \mathbb{N}, \#J \geq 2$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) = \prod_{k \in J} \mathbb{P}(A_k)$$

### Property 4

$A \perp B \Rightarrow A \perp B^c, A^c \perp B, A^c \perp B^c$

### Definition 8 ( $\sigma$ 代数间的独立性)

$(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}), (\Omega, \mathcal{F}_2, \mathbb{P})$  称  $\mathcal{F}_1$  与  $\mathcal{F}_2$  独立, 若  $\forall A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$ , 有  $A_1 \perp A_2$ , 记为  $\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_2$

### Definition 9 ( $\sigma$ 代数间相互独立)

$(\Omega, \mathcal{F}_k, \mathbb{P}) (k \geq 1)$  称  $\{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 1}$  相互独立, 若  $\forall J \subset \mathbb{N}, \#J \geq 2, \forall A_k \in \mathcal{F}_k (k \in J)$ , 有

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) = \prod_{k \in J} \mathbb{P}(A_k)$$

### Property 5

$\{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 1}$  相互独立  $\Leftrightarrow \forall A_k \in \mathcal{F}_k, \mathbb{P}(\cap_{k \geq 1} A_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$

证明:  $\Rightarrow$  显然,  $J$  取  $\mathbb{N}$  即可,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$

$\Leftarrow$  注意到右侧  $\forall A_k \in \mathcal{F}$  对于左侧条件  $\forall A_k \in \mathcal{F} (k \in J)$  更加一般, 所以证  $\Leftarrow$  的过程也是从一般到特殊。从  $\cap_{k \geq 1} A_k \rightarrow \cap_{k \in J} A_k$  即从  $k \in \mathbb{N} \rightarrow k \in J$ 。思路是把  $k \in \mathbb{N}$  分成  $k \in J$  和  $k \in J^c$ , 在  $k \in J^c$  上取  $A_k = \Omega$ , 再利用性质  $\Omega \perp A$ 。

对于  $\forall J \subseteq \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \bigcap_{k \geq 1} A_k &= \left( \bigcap_{k \in J} A_k \right) \cap \left( \bigcap_{k \in J^c} \Omega \right) \\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq 1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) \cap \left(\bigcap_{k \in J^c} \Omega\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in J^c} \Omega\right) \quad [\Omega \perp A_k] \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) \end{aligned}$$

$$\prod_{k \geq 1} \mathbb{P}(A_k) = \prod_{k \in J} \mathbb{P}(A_k) \cdot \prod_{k \in J^c} \mathbb{P}(\Omega) = \prod_{k \in J} \mathbb{P}(A_k)$$

又因为  $\mathbb{P}(\cap_{k \geq 1} A_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$

$$\mathbb{P}(\cap_{k \in J} A_k) = \prod_{k \in J} \mathbb{P}(A_k) \quad \square$$

### Definition 10 (离散随机变量)

令取值空间  $S = \{x_k\}_{k \geq 1}$  ( $x_k$  互不相同),  $\Omega = \sum_{k \geq 1} \Lambda_k$  (划分), 则称

$$X(\omega) = \sum_{k \geq 1} x_k \mathbb{I}_{\Lambda_k}(\omega), \omega \in \Omega$$

为离散随机变量。其中

$$\mathbb{I}_{\Lambda_k}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } \omega \in \Lambda_k \\ 0 & \text{if } \omega \notin \Lambda_k \end{cases}$$

这个定义的核心思想是：

- 对于每个样本点  $\omega \in \Omega$ ,  $X(\omega)$  的取值是  $x_k$ , 当且仅当  $\omega \in \Lambda_k$
- 因此,  $X$  的取值由样本点  $\omega$  所在的划分  $\Lambda_k$  决定

由于随机变量是个可测函数

$$X : (\Omega, ?) \rightarrow (S, 2^S)$$

那么  $X$  生成的  $\sigma$  代数表示为  $\sigma(X) := X^{-1}(2^S) = \{X^{-1}(A) | A \in 2^S\}$

### Property 6

$\sigma(X) := X^{-1}(2^S)$ , 则

1.  $\sigma(X) = \sigma(\Pi_\Omega)$  故称  $\sigma(X)$  为由  $X$  生成的  $\sigma$  代数。其中  $\Pi_\Omega = \{\Lambda_k, k \geq 1\}, \Lambda_k = \{X = x_k\}$
2.  $X : (\Omega, \sigma(X)) \rightarrow (S, 2^S)$ . 这个记号的解释是  $\forall A \in 2^S, X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\} \in \sigma(X)$

证明：要证  $\sigma(X) = \sigma(\Pi_\Omega)$ , 即证两个集合互相包含

$\sigma(\Pi_X) = \{\sum_{k \in J} \Lambda_k | J \subseteq \mathbb{N}\}$  由划分生成,  $\sigma(X) = X^{-1}(2^S)$  由  $X$  生成

下证  $\sigma(X) \subseteq \sigma(\Pi_X)$



$$\begin{aligned}
\forall A \in 2^S, X^{-1}(A) &= \{\omega | X(\omega) \in A\} \\
&= \sum_{x_k \in A} \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_k\} \\
&= \sum_{x_k \in A} \{X = x_k\} \\
&= \sum_{x_k \in A} \Lambda_k \in \sigma(\Pi_X)
\end{aligned}$$

第二个等式用到离散 r.v. 定义10

下证  $\sigma(\Pi_X) \subseteq \sigma(X)$

$$\begin{aligned}
J \subseteq \mathbb{N}, \quad \sum_{k \in J} \Lambda_k &= \sum_{k \in J} \{\omega | X(\omega) = x_k\} \\
&= \{\omega | X(\omega) \in \{x_k, k \in J\}\} \\
&= X^{-1}(\{x_k, k \in J\}) \in \sigma(X)
\end{aligned}$$

最后一个等式中  $\{x_k, k \in J\} \in 2^S$

□

#### Example 5

$X = \mathbb{I}_A$  由划分的定义  $\Pi_X = \{\Lambda_k\}_{k \geq 1}, \Lambda_k = \{X = x_k\}$ , 知道划分将全集分成两部分

$$\begin{aligned}
\Pi_X &= \{\{X = 1\}, \{X = 0\}\} \\
&= \{\{\omega \in \Omega | X(\omega) = 1\}, \{\omega \in \Omega | X(\omega) = 0\}\} \\
&= \{A, A^c\}
\end{aligned}$$

$$\sigma(\Pi_A) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\} = \sigma(A) = \sigma(A^c)$$

其中  $\sigma(\Pi_A)$  由划分生成,  $\sigma(A)$  由  $A$  生成, 两者相等

另外,  $\sigma(X) = \sigma(\mathbb{I}_A) = \sigma(\Pi_X) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\} = \sigma(A) \Rightarrow \sigma(\mathbb{I}_A) = \sigma(A)$

#### Definition 11 (离散随机变量间的独立性)

$X : \Omega \rightarrow S_1, Y : \Omega \rightarrow S_2$  为两离散随机变量, 称  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , 若  $\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \sigma(Y)$  [定义8], 即  $X^{-1}(2^{S_1}) \perp\!\!\!\perp X^{-1}(2^{S_2})$  即  $\forall E_1 \subseteq S_1, E_2 \subseteq S_2$ , 有  $\mathbb{P}(X \in E_1, Y \in E_2) = \mathbb{P}(X \in E_1)\mathbb{P}(Y \in E_2)$

$S_1, S_2$  分别为  $X, Y$  的取值空间,  $E_1 \subseteq S_1$  为  $X$  的一个取值,  $X \in E_1 := \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in E_1\}$ ,  $E_2$  同理

#### Theorem 1

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \forall x \in S_X, y \in S_Y \text{ 有 } \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

证明:  $\Rightarrow$  一般到特殊, 取  $E_1 = \{x\}, E_2 = \{y\}$ , 由  $\{x\} \in S_X, \{y\} \in S_Y$  易证

$\Leftarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in E_1, Y \in E_2) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in E_1} \{X = x\} \cap \{Y \in E_2\}\right) \\
&= \sum_{x \in E_1} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \sum_{y \in E_2} \{Y = y\}) \\
&= \sum_{x \in E_1} \sum_{y \in E_2} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_{x \in E_1} \left( \sum_{y \in E_2} \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y) \right) \\
&= \sum_{x \in E_1} \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y \in E_2) \\
&= \mathbb{P}(X \in E_1) \mathbb{P}(Y \in E_2)
\end{aligned}$$

第一个等式中,  $\{X = x\} \cap \{Y \in E_2\}$  看作一整个集合  $\subseteq \{X = x\}$ , 因为离散、每个  $x$  不相交, 所以这是个不交并, 由练习2, 可以改写成加法形式。

第四个等式由条件  $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y)$  成立。  $\square$

### Theorem 2

$X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \forall x \in S_X, y \in S_Y, \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) \mathbb{P}(Y \leq y)$

用定理1证明

$\Rightarrow$  已知  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , 由定义11,  $\forall E_1 \subseteq S_1, E_2 \subseteq S_2$ , 有  $\mathbb{P}(X \in E_1, Y \in E_2) = \mathbb{P}(X \in E_1) \mathbb{P}(Y \in E_2)$ 。取  $E_1 = \{\omega | X(\omega) \leq x\}, E_2 = \{\omega | Y(\omega) \leq y\}$

$\Leftarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = x, Y = y) &= \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x^-, Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y^-) + \mathbb{P}(X \leq x^-, Y \leq y^-) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x) \mathbb{P}(Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x^-) \mathbb{P}(Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x) \mathbb{P}(Y \leq y^-) + \mathbb{P}(X \leq x^-) \mathbb{P}(Y \leq y^-) \\
&= [\mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq x^-)] [\mathbb{P}(Y \leq y) - \mathbb{P}(Y \leq y^-)] \\
&= \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y)
\end{aligned}$$

其中  $x^-, y^-$  为小于  $x, y$  的最大值, 由于离散,  $\{X \leq x\} - \{X \leq x^-\} = \{X = x\}, \{Y \leq y\} - \{Y \leq y^-\} = \{Y = y\}$

### Definition 12

称一列离散随机变量  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  相互独立, 若  $\sigma(X_n), n \geq 1$  相互独立

### Theorem 3

$\{A_n\}_{n \geq 1}$  事件列下列等价

1.  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  相互独立
2.  $\sigma(A_n), n \geq 1$  相互独立
3.  $\mathbb{I}_{A_n}, n \geq 1$  相互独立

证明:

1. 由例5,  $\sigma(\mathbb{I}_{A_n}) = \sigma(A_n)$ , 所以 (2)  $\Leftrightarrow$  (3)
2. 下证 (2)  $\rightarrow$  (1), 一般到特殊,  $A_n \subseteq \sigma(A_n)$
3. 下证 (1)  $\rightarrow$  (2),  $\sigma(A_n) = \{A_n, A_n^c, \emptyset, \Omega\}$ ,  $\emptyset \perp A_n, \Omega \perp A_n$ , 由性质4,  $\emptyset \perp A_n^c, \Omega \perp A_n^c$   
由定理5,  $\forall A_k \in \sigma(A_n), \mathbb{P}(\cap_{k \geq 1} A_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$   
由于条件 (1), 上面等式成立  $\Rightarrow$  满足  $\sigma$  代数相互独立的定义 □

### 0.3 条件概率与条件独立

#### Definition 13 (条件概率)

$B \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(B) > 0$  定义

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} =: \mathbb{P}_B(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

#### Theorem 4 (乘法公式)

$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$ ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n|\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k)$$

#### Theorem 5 (全概公式)

(1)  $\Omega = \sum_{k \geq 1} \Lambda_k$  划分  $\mathbb{P}(\Lambda_k) > 0$ , 则  $\forall A \in \mathcal{F}$ ,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A|\Lambda_k)\mathbb{P}(\Lambda_k)$$

(2) \* 一般地,  $\{B_n\}_{n \geq 1}$  互不相交,  $\mathbb{P}(B) > 0, \mathbb{P}(\sum_{n \geq 1} B_n) = 1$ , 则  $\forall A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n)$$

注:  $\mathbb{P}(\cdot) = 1$  不一定是全集, 但概率测度是 1。同样,  $\mathbb{P}(\cdot) = 0$  不一定是  $\emptyset$ , 而是叫零测集

证明:

(1) 由  $A = A \cap \Omega = A \cap (\sum_{k \geq 1} \Lambda_k) = \sum_{k \geq 1} (A \cap \Lambda_k)$ ,  $A$  被划分成若干不相交的集合  $A \cap \Lambda_k$ , 根据可列可加性, 得到

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A \cap \Lambda_k) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A|\Lambda_k)\mathbb{P}(\Lambda_k)$$

(2)  $\Omega = (\sum_{n \geq 1} B_n) + (\sum_{n \geq 1} B_n)^c = \sum_{n \geq 0} B_n$ , 其中  $B_0 = (\sum_{n \geq 1} B_n)^c$

$\mathbb{P}(B_0) = 1 - \mathbb{P}(\sum_{n \geq 1} B_n) = 0 \rightarrow 0 \leq \mathbb{P}(AB_0) \leq \mathbb{P}(B_0) = 0$

左边不等号成立是因为概率测度非负, 右边不等号成立是因为  $AB_0 \subseteq B_0$ , 所以  $\mathbb{P}(AB_0) = 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(AB_n) \quad [\text{可列可加性}] \\
&= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(AB_n) \quad [\mathbb{P}(AB_0) = 0] \\
&= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n) \quad [\text{全概公式}] \quad \square
\end{aligned}$$

### Theorem 6

$\mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{P}(B) > 0$

$$A \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

$\mathbb{P}(A|B)$  见定义13

### Theorem 7

$\mathbb{P}_B : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  也是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的概率测度 [定义5]

### Property 7

$\mathbb{P}(C) > 0, \mathbb{P}(B) > 0$ , 则

$$\mathbb{P}_B(\cdot|C) = \mathbb{P}(\cdot|BC) = \mathbb{P}_{BC}(\cdot)$$

$\mathbb{P}_B(\cdot|C)$  见定义13

### Definition 14

称  $C$  条件发生下,  $A$  与  $B$  独立, 若

$$\mathbb{P}_C(AB) = \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B)$$

记为  $A \perp\!\!\!\perp_C B$  (条件独立)

### Theorem 8

$\mathbb{P}(C) > 0, \mathbb{P}(BC) > 0$  则  $A \perp\!\!\!\perp_C B \Leftrightarrow \mathbb{P}_C(A|B) = \mathbb{P}_C(A)$

证明: 由  $A \perp\!\!\!\perp_C B$ ,  $\mathbb{P}_C(AB) = \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B)$

$$\mathbb{P}_C(A|B) = \frac{\mathbb{P}_C(AB)}{\mathbb{P}_C(B)} = \mathbb{P}_C(A)$$

## 0.4 期望与条件期望

### 0.4.1 离散随机变量的期望

#### Definition 15 ( $X$ 的期望)

$X : \Omega \rightarrow S$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X)$$

当此求和绝对收敛

注:  $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X)$  强调这是在概率测度  $\mathbb{P}$  下的期望

#### Definition 16 ( $g(X)$ 的期望)

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}g(X) = \sum_{x \in S} g(x) \mathbb{P}(X = x)$$

当此求和绝对收敛

关于“求和绝对收敛”的讨论:

#### Example 6

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = \mathbb{P}(A), A \in \mathcal{F}$$

#### Example 7

$X$  是离散随机变量, 由定义10,  $X = \sum_{x \in S} x \mathbb{I}_{A_x}$ , 其中  $A_x := \{X = x\}$ 。  $B$  是任意的, 求  $\mathbb{E}(\mathbb{I}_B X)$

**Remark 2.** 对于  $A_x := \{X = x\}$  应这样理解,  $A_x$  是样本空间  $\Omega$  的一个子集, 包含了所有使得  $X(\omega) = x$  的样本点  $\omega$ 。

根据离散随机变量的定义,  $X(\omega) = x_k$  当且仅当  $\omega \in A_{x_k}$ 。因此对于每个  $x_k \in S$ , 有

$$A_{x_k} = \{X = x_k\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_k\} = A_{x_k}$$

所以  $A_x = \{A_{x_k}\}_{k \geq 1}$  就是离散随机变量的划分

对于  $X = \sum_{x \in S} x \mathbb{I}_{A_x}$  可以这样理解。对于每个  $x \in S$ ,  $\mathbb{I}_{A_x}(\omega)$  是事件  $A_x = \{X = x\}$  的指示函数

$$\mathbb{I}_{A_x}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } X(\omega) = x \\ 0 & \text{if } X(\omega) \neq x \end{cases}$$

**Solution.** 要先求  $\mathbb{E}(|\mathbb{I}_B X|) < \infty$  说明期望存在

对  $\forall \omega \in B$

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_B X(\omega) &= \mathbb{I}_B(\omega) \sum_{x \in S} (x \cdot \mathbb{I}_{A_x}(\omega)) \\ &= \sum_{x \in S} x \mathbb{I}_{A_x \cap B}(\omega) \end{aligned}$$

其中  $\mathbb{I}_{A_x \cap B}$  也可记为  $\mathbb{I}_{A_x B}$

$\{A_x B, x \in S\} \cup \{B^c\}$  构成了样本空间  $\Omega$  的一个划分。因为  $A_x$  本身是对  $\Omega$  的一个划分，其与  $B$  的交是对  $B$  的划分。并上  $B^c$ ，则满足划分的定义4

对于  $\omega \in \Omega$ ，由划分

$$\mathbb{I}_B X(\omega) = 0 \cdot \mathbb{I}_{B^c}(\omega) + \sum_{x \in S} x \mathbb{I}_{A_x \cap B}$$

$$\therefore \mathbb{E}|\mathbb{I}_B X| = \sum_{x \in S} |x| \mathbb{P}(A_x B) \leq \sum_{x \in S} |x| \mathbb{P}(A_x) = \mathbb{E}|x| < \infty$$

最后一个等号参考期望的定义15

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_B X) = \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(A_x B) = \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(\{X = x\} \cap B)$$

### Theorem 9

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$$

离散随机变量有两种表达形式，如定义10和练习7所示

$$X = \sum_{x \in S} x \mathbb{I}_{\{X=x\}} = \sum_{k \geq 1} x_k \mathbb{I}_{\Lambda_k}$$

$$\sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = x_k)$$

只有在“求和绝对收敛”（见定义15）的条件下，等式才成立

### Remark 3.

1.  $\sum_{x \in S}$  (1) 级数的重排 (2) 可和族
2.  $X$  是离散随机变量， $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，则

$$g(X) = \sum_{x \in S} g(x) \mathbb{I}_{X=x}$$

是一个离散随机变量，且  $\sigma(g(X)) \subseteq \sigma(X)$ 。下面说明这个结论

当  $x_1 \neq x_2$  时可能  $g(x_1) = g(x_2)$ ，因此

$$\Pi_X = \{\{X = x\} | x \in S\} \neq \Pi_{g(X)}$$

其实  $\Pi_{g(X)} \subseteq \sigma(\Pi_X)$ ，因为对于  $x_1 \neq x_2$  但  $g(x_1) = g(x_2)$  的情况，比如在  $\Pi_X$  上  $x_1, x_2$  对应的样本空间是  $\Omega_1, \Omega_2$ ，但在  $\Pi_{g(X)}$  上是  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ 。这一项在  $\Pi_X$  里有，因为  $\sigma$  代数对可列并封闭。但  $\Omega_1, \Omega_2$  分别在  $\Pi_{g(X)}$  上没有。把  $\sigma$  代数理解成信息，则  $g(X) = y$  提供的信息是比直接提供  $x$  的值要少的（在  $g(\cdot)$  已知的情况下）。

3.  $X \perp\!\!\!\perp Y$ ,  $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，则  $g(X) \perp\!\!\!\perp h(Y)$ 。因为  $\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \sigma(Y)$ ，而  $\sigma(g(X)) \subseteq \sigma(X), \sigma(h(Y)) \subseteq \sigma(Y)$  如果  $X, Y$  是连续随机变量，则对  $g, h$  有其他要求。特殊地，结论3对  $g, h$  连续时成立。

**Theorem 10**

- (1)  $X \perp\!\!\!\perp Y, \mathbb{E}|X| < \infty, \mathbb{E}|Y| < \infty$ , 则  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$   
 (2)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 则  $\mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = \mathbb{E}X_1 \cdots \mathbb{E}X_n$   
 (3)  $X \perp\!\!\!\perp Y, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{E}|g(X)| < \infty, \mathbb{E}|h(Y)| < \infty$

$$\Rightarrow g(X) \perp\!\!\!\perp h(Y), \mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y))$$

**Theorem 11**

若  $X \geq 0$  取整数值, 则  $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k)$

证明:

**0.4.2 条件期望**

1° 关于“给定集合”的条件期望

**Definition 17**

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), X: \Omega \rightarrow S, A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{E}|X| < \infty$ , 定义  $X$  关于  $A$  的条件期望

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|A) &:= \sum_{x \in S} \mathbb{P}(X = x|A) \\ &= \sum_{x \in S} x \mathbb{P}_A(X = x) \\ &= E^{\mathbb{P}_A}(X) \end{aligned}$$

**Property 8 (线性性)**

$$\mathbb{E}(aX + bY|A) = a\mathbb{E}(X|A) + b\mathbb{E}(Y|A)$$

证明: (用期望的性质)

**Example 8**

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_B|A) = 1 \cdot \mathbb{P}(B|A) + 0 \cdot \mathbb{P}(B^c|A) = \mathbb{P}(B|A)$$

**Example 9**

$$B \perp\!\!\!\perp A \Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{I}_B|A) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_B)$$

**Property 9**

$$\mathbb{E}|X| < \infty, \mathbb{P}(A) > 0, X \perp\!\!\!\perp \mathbb{I}_A \Rightarrow \mathbb{E}(X|A) = \mathbb{E}(X)$$

证明:

$$\because X \perp\!\!\!\perp \mathbb{I}_A, \therefore \{X = x\} \perp\!\!\!\perp A$$

$$\mathbb{E}(X|A) = \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x|A) = \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}(X)$$

其中

$$\sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x|A) = \sum_{x \in S} x \frac{\mathbb{P}(\{X = x\} \cap A)}{P(A)} = \mathbb{E}(X \mathbb{I}_A) / \mathbb{P}(A)$$

最后一个等号由例题7

至此没有用到独立性, 可以得到以下推论

### Corollary 2

$$\mathbb{E}(X|A) = \mathbb{E}(X \mathbb{I}_A) / \mathbb{P}(A)$$

### Problem 3 (作业 2-1)

$Y$  在  $A$  上取常数  $c$ , 证明:  $\mathbb{E}(XY|A) = c\mathbb{E}(X|A)$

2° 关于“给定划分生成的  $\sigma$  代数”的条件期望

### Definition 18

设  $\Pi = \{\Lambda_k\}_{k \geq 1}$  是  $\Omega$  的划分,  $X$  为离散随机变量,  $\mathbb{E}|X| < \infty$ , 定义

$$\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi))(\omega) := \mathbb{E}(X|\Lambda_k)$$

当  $\omega \in \Lambda_k$ , 即

$$\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi)) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{\Lambda_k} \mathbb{E}(X|\Lambda_k)$$

期望的本质是积分, 现在因为数分里的积分不够用了, 我们要定义新积分, 希望它也能保留原先的好性质

### Property 10 (线性性)

$$\mathbb{E}(aX + bY|\sigma(\Pi)) = a\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi)) + b\mathbb{E}(Y|\sigma(\Pi))$$

证明:  $\omega \in \Lambda_k$ ,  $LHS = \mathbb{E}(aX + bY|\Lambda_k) = a\mathbb{E}(X|\Lambda_k) + b\mathbb{E}(Y|\Lambda_k)$

第二个等号由性质8成立。



### Example 10

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X|\{\emptyset, \Omega\}) &= \mathbb{E}(X|\sigma(\Omega)) \\ &= \mathbb{I}_\Omega \mathbb{E}(X|\Omega) \quad [\text{定义(18)}] \\ &= \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x|\Omega) \quad [\text{定义(17), } \Omega \perp\!\!\!\perp X] \\ &= \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x) \\ &= \mathbb{E}(X)\end{aligned}$$

独立可以理解为：什么信息也没提供

### Example 11

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{I}_B|\sigma(A)) &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_B|\{A, A^c, \Omega, \emptyset\}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_B|\sigma(A, A^c)) \\ &= \mathbb{I}_A \mathbb{E}(\mathbb{I}_B|A) + \mathbb{I}_{A^c} \mathbb{E}(\mathbb{I}_B|A^c)\end{aligned}$$

更进一步，若  $A \perp\!\!\!\perp B$ ，由  $\sigma(B) \perp\!\!\!\perp \sigma(A) \rightarrow \sigma(\mathbb{I}_B) \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathbb{I}_A) \Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{I}_B|\sigma(A)) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_B)$

可以把这个结果推广：

### Property 11

$\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \sigma(\Pi)$ ，则  $\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi)) = \mathbb{E}(X)$

证明： $\Pi_X = \{\{X = x\} | x \in S\}$ ，默认  $x$  不相同

$\sigma(X) = \sigma(\Pi_X) = \{\{X = x\} | x \in S\}$

不妨设  $\Pi = \{\Lambda_k, k \geq 1\}$

则  $\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \sigma(\Pi) \Rightarrow \forall x \in S, k \geq 1, \{X = x\} \perp\!\!\!\perp \Lambda_k$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi)) &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{\Lambda_k} \mathbb{E}(X|\Lambda_k) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{\Lambda_k} \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x|\Lambda_k) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{\Lambda_k} \sum_{x \in S} x \mathbb{P}(X = x) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{\Lambda_k} \mathbb{E}(X) \\ &= \mathbb{I}_\Omega \mathbb{E}(X) \\ &= \mathbb{E}(X)\end{aligned}$$

### Example 12

$$\mathbb{E}(X|\sigma(X)) = X$$

$\sigma(X)$  作为条件相当于知道了与  $X$  相关的所有信息，即提取已知量

证明:  $\sigma(X) = \sigma(\Pi_X)$ , 其中  $\Pi_X = \{\{X = x\} | x \in S\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|\sigma(X)) &= \sum_{x \in S} \mathbb{I}_{\{X=x\}} \mathbb{E}(X|X=x) \\ &= \sum_{x \in S} \mathbb{I}_{\{X=x\}} \mathbb{E}(X \mathbb{I}_{\{X=x\}}) / \mathbb{P}(X=x) \quad [\text{推论(2)}] \\ &= \sum_{x \in S} \mathbb{I}_{\{X=x\}} \cdot \frac{x \cdot \mathbb{P}(X=x) + 0 \cdot \mathbb{P}(X \neq x)}{\mathbb{P}(X=x)} \\ &= \sum_{x \in S} x \mathbb{I}_{\{X=x\}} = X \quad \square \end{aligned}$$

### Property 12 (提取已知量)

设  $\Pi = \{\Lambda_k, k \geq 1\}$  为  $\Omega$  的划分,  $\mathbb{E}|X| < \infty, \mathbb{E}|XY| < \infty$ , 则当  $\sigma(X) \subseteq \sigma(\Pi)$  时, 有

1.  $\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi)) = X$
2.  $\mathbb{E}(XY|\sigma(\Pi)) = X \mathbb{E}(Y|\sigma(\Pi))$

特别地, 取  $X = \mathbb{I}_A, A \in \sigma(\Pi)$ , 则

1.  $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A|\sigma(\Pi)) = \mathbb{I}_A$
2.  $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A Y|\sigma(\Pi)) = \mathbb{I}_A \mathbb{E}(Y|\sigma(\Pi))$

证明: 只需证 (2), 因为从 (2)  $\rightarrow$  (1) 即  $Y = \mathbb{I}_\Omega$

$X = \sum_{x \in S} x \mathbb{I}_{A_x}$ , 其中  $A_x := \{X = x\}$

(Step 1)  $\sigma(X) = \{\sum_{x \in S'_X} A_x | S'_X \subseteq S_X\}$

$\sigma(X) = \{\sum_{k \in J} \Lambda_k | J \subseteq \mathbb{N}\}$

已知:  $\sigma(X) \subseteq \sigma(\Pi) \Rightarrow \exists$  一族  $\{x_k\}_{k \geq 1}$  (可能有相同元素), 使得  $X = \sum_{k \geq 1} x_k \mathbb{I}_{\Lambda_k}$ , 其中  $\cup_{k \geq 1} \{x_k\} = S_x$  ( $S_x$  为取值空间)

注:  $\Pi$  是  $\Pi_X = \{A_x | x \in S\}$  的加细划分

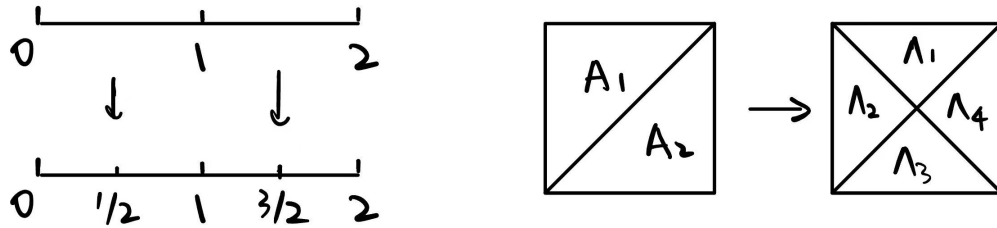


图 1: 加细划分

(Step 2) 对于  $\omega \in \Lambda_j, \forall j \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY|\sigma(\Pi))(\omega) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k \geq 1} x_k \mathbb{I}_{\Lambda_k} Y | \sigma(\Pi)\right)(\omega) \quad [X = \sum_{k \geq 1} x_k \mathbb{I}_{\Lambda_k}] \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k \geq 1} x_k \mathbb{I}_{\Lambda_k} Y | \Lambda_j\right) \quad [\sigma(\Pi) \text{ 定义}] \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k \geq 1} x_k \mathbb{I}_{\Lambda_k} Y \mathbb{I}_{\Lambda_j}\right) / \mathbb{P}(\Lambda_j) \quad [\text{推论 (2)}] \\
&= \mathbb{E}(Y x_j \mathbb{I}_{\Lambda_j}) / \mathbb{P}(\Lambda_j) \quad [\mathbb{I}_{\Lambda_k} \mathbb{I}_{\Lambda_j} \text{ 当 } \Lambda_k \neq \Lambda_j \text{ 时} = 0] \\
&= x_j \mathbb{E}(Y \mathbb{I}_{\Lambda_j}) / \mathbb{P}(\Lambda_j) \\
&= x_j \mathbb{E}(Y | \mathbb{I}_{\Lambda_j}) \\
&= X(\omega) \mathbb{E}(Y | \mathbb{I}_{\Lambda_j})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(XY|\sigma(\Pi)) = X \sum_{j \geq 1} \mathbb{I}_{\Lambda_j} \mathbb{E}(Y | \Lambda_j) = X \mathbb{E}(Y | \sigma(\Pi))$$

数学上有种现象叫“法国人的伎俩”，即把定理当定义用。严格地讲，这么做有时会出现存在性和唯一性不满足的问题。下面介绍一个常被当做定义用的定理：

### Theorem 12

$\Pi = \{\Lambda_k, k \geq 1\}$  为  $\Omega$  的划分， $\mathbb{E}|X| < \infty$ 。记  $Y := \mathbb{E}(X|\sigma(\Pi)) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{I}_{\Lambda_k} \mathbb{E}(X|\Lambda_k)$ ，则

1.  $Y$  仍是一个离散随机变量，且  $\mathbb{E}|Y| \geq \mathbb{E}|X| < \infty$
2.  $\sigma(Y) \subseteq \sigma(\Pi)$  (记作  $Y \in \sigma(\Pi)$ ，即  $Y$  的所有信息都在  $\sigma(\Pi)$  里)
3.  $\forall A \in \sigma(\Pi)$ ，有  $\mathbb{E}(Y \mathbb{I}_A) = \mathbb{E}(X \mathbb{I}_A)$

证明：(1)  $\mathbb{E}|X| = \sum_{x \in S_x} |x| \mathbb{P}(X = x) < \infty$

$$\mathbb{E}|Y| = \sum_{k \geq 1} |\mathbb{E}(X|\Lambda_k)| \mathbb{P}(\Lambda_k) \geq \sum_{k \geq 1} \sum_{x \in S} |x| \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \Lambda_k)$$

逻辑上，现在第一个等号不成立，但之后  $< \infty$  一写出来，之前的所有等号立刻成立，此处只为书写简便

$$\mathbb{E}|X| = \sum_{x \in S_x} |x| \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in S} |x| \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\Lambda_k \cap \{X = x\})$$

我们知道  $\sum_{x \in S} |x| \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(\Lambda_k \cap \{X = x\})$  绝对收敛，若求和次序交换后的  $\sum_{k \geq 1} \sum_{x \in S} |x| \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \Lambda_k)$  也绝对收敛，则  $\mathbb{E}|Y| < \infty$  得证。有一个引理可以保证绝对收敛：

### Lemma 1 (菲赫金哥尔茨《微积分学教程》(2).P280. 推论)

从 273-280

**Corollary 3 (来自定理12(1))** 1. (重期望公式)  $\mathbb{E}|\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi))| = \mathbb{E}|X|, \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi))) = \mathbb{E}(X)$

2.  $|\mathbb{E}(X|\Lambda_k)| \leq \mathbb{E}(|X| | \Lambda_k), |\mathbb{E}(X|\sigma(\Pi))| \leq \mathbb{E}(|X| | \sigma(\Pi))$

(2) 由定义,  $Y = \sum_{k \geq 1} y_k \mathbb{I}_{\Lambda_k}$ , 其中  $y_k := \mathbb{E}(X|\Lambda_k)$   
 记  $S_Y = \cup_{k \geq 1} \{y_k\}$ , 注意到, 可能  $\exists i \neq j$ , 但  $y_i = y_j$   
 故  $J_y = \{k | y_k = y\} (y \in S_Y)$  中个数可能大于 1

$$Y = \sum_{y \in S_Y} y \mathbb{I}_{\sum_{k \in J_y} \Lambda_k}$$

$$\{Y = y\} = \sum_{k \in J_y} \Lambda_k \in \sigma(\Pi)$$

$$\sigma(Y) \subseteq \sigma(\Pi) \quad \square$$

$$(3) \mathbb{E}(Y \mathbb{I}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A \mathbb{E}(X|\sigma(\Pi)))$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y \mathbb{I}_A) &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_A \mathbb{E}(X|\sigma(\Pi))) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mathbb{I}_A | \sigma(\Pi))) \quad [A \in \sigma(\Pi), \text{性质(12)}] \\ &= \mathbb{E}(X \mathbb{I}_A) \quad [\text{重期望-推论(3)}] \end{aligned}$$

3° 关于离散随机变量的条件期望

#### Definition 19

概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $X, Y$  为离散随机变量,  $\mathbb{E}|X| < \infty$ 。定义  $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|\sigma(Y)) = \mathbb{E}(X|\sigma(\Pi_Y))$ , 称为  $X$  关于  $Y$  的条件期望

注:  $\omega = \{Y = y\} \in \Pi_Y$  或  $Y(\omega) = y$ ,  $\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \mathbb{E}(X|Y = y)$

#### Example 13

$$\mathbb{E}(X|\Pi_\Omega) = \mathbb{E}(X|\sigma(\Omega)) = \mathbb{E}(X)$$

#### Example 14

$$\mathbb{I}_A \perp\!\!\!\perp \mathbb{I}_B \Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{I}_A|\mathbb{I}_B) = [\text{Exa(11)}] \mathbb{E}(\mathbb{I}_A)$$

#### Example 15

$$\mathbb{E}(X|X) = \mathbb{E}(X|\sigma(X)) = X [\text{Exa 12}]$$

### Property 13

假设以下期望、条件期望都有意义

1.  $\mathbb{E}(aX + bY|Z) = a\mathbb{E}(X|Z) + b\mathbb{E}(Y|Z)$
2.  $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X)$
3.  $\sigma(X) \subseteq \sigma(Z) \Rightarrow \mathbb{E}(XY|Z) = X\mathbb{E}(Y|Z)$
4.  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)) = \mathbb{E}(X)$
5.  $|\mathbb{E}(X|Z)| \leq \mathbb{E}(|X| | Z)$

4° 关于多个离散随机变量的条件期望

$\mathbb{E}(Y|X_1, \dots, X_n)$

1. 由  $X_1, \dots, X_n$  生成的  $\sigma$  代数  $\sigma(X_1, \dots, X_n)$
2.  $:= \mathbb{E}(Y|\sigma(X_1, \dots, X_n))$

怎样生成  $\sigma$  代数可以包含  $X_1, \dots, X_n$  尽可能多的信息?

直觉是  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k)$ , 然而它不一定是  $\sigma$  代数, 因为它对可列并不封闭。

每个  $\sigma(X_k)$  是一个  $\sigma$  代数, 因此它对可列并封闭。

然而,  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k)$  只是将每个  $\sigma(X_k)$  中的集合简单地并在一起, 并没有保证这些集合的可列并仍然在  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k)$  中。

例如, 假设  $X_k \in \sigma(X_k)$ , 那么  $X_k$  在  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k)$  中, 但  $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$  可能不在  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k)$  中, 因为它可能不属于任何一个单独的  $\sigma(X_k)$ 。问题出在  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k)$  缺少  $\{\sigma(X_k)\}_{k \geq 1}$  交互的部分

怎样把  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_k)$  变成  $\sigma$  代数?

### Definition 20 (多个离散随机变量的条件期望)

定义由离散随机变量  $X_1, \dots, X_n$  生成的  $\sigma$  代数

$$\begin{aligned}
 \sigma(X_1, \dots, X_n) &:= (X_1, \dots, X_n)^{-1}(2^{S_1} \times \dots \times 2^{S_n}) \\
 &:= \underbrace{\{(X_1, \dots, X_n)^{-1}(A_1 \times \dots \times A_n) \mid A_1 \times \dots \times A_n \subseteq \underbrace{S_1 \times \dots \times S_n}_{\text{乘积空间}}\}}_{\text{柱集}} \\
 &= \left\{ \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k^{-1}(A_k) \mid A_k \in 2^{S_k}, 1 \leq k \leq n \right\}
 \end{aligned}$$

**Theorem 13**

令  $x_k = \sum_{i \geq 1} x_{k,i} \mathbb{I}_{\Lambda_{k,i}}, 1 \leq k \leq n$ , 为离散随机变量, 对每一个  $k$ ,  $\Pi_k := \{\Lambda_{k,i} | i \geq 1\}$  为  $\Omega$  的划分, 定义

$$\Pi_{(X_1, \dots, X_n)} := \{\Lambda_{1,i_1} \cap \dots \cap \Lambda_{n,i_n} | i_k \geq 1, 1 \leq k \leq n\}$$

则

1.  $\Pi_{(X_1, \dots, X_n)}$  是  $\Omega$  的划分, 且

$$\sigma(\Pi_{(X_1, \dots, X_n)}) = \left\{ \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_n) \\ \in J_1 \times \dots \times J_n}} (\Lambda_{1,i_1} \cap \dots \cap \Lambda_{n,i_n}) | J_k \subseteq \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n \right\}$$

2.  $\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(\Pi_{(X_1, \dots, X_n)})$  (即定义20是有意义的, well-defined, make sense, 良定义)

**Problem 4 (作业 2-2)**

证明定理13在  $n = 2$  时成立

**Definition 21**

$\mathbb{E}|Z| < \infty$  定义

$$\mathbb{E}(Z | X_1, \dots, X_n) = \mathbb{E}(Z | \sigma(X_1, \dots, X_n)) := \mathbb{E}(Z | \sigma(\Pi_{(X_1, \dots, X_n)}))$$

**Definition 22**

$\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, Y : \Omega \rightarrow S_Y, X_1 : \Omega \rightarrow S_1, X_2 : \Omega \rightarrow S_2$  为离散随机变量, 称  $Y$  和  $(X_1, X_2)$  独立, 若  $\sigma(Y) \perp \sigma(X_1, X_2)$ .  $[\sigma(Y) = Y^{-1}(2^{S_Y}), \sigma(X_1, X_2) = (X_1, X_2)^{-1}(2^{S_1} \times 2^{S_2})]$

即  $\forall A \subseteq S_Y, B \subseteq 2^{S_1} \times 2^{S_2}, B = B_1 \times B_2$ , 有

$$\mathbb{P}(Y \in A, (X_1, X_2) \in B) = \mathbb{P}(Y \in A) \mathbb{P}((X_1, X_2) \in B)$$

其中  $\mathbb{P}((X_1, X_2) \in B) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2)$

**Problem 5 (作业 2-3)**

证明:

$$\begin{aligned} Y \perp (X_1, X_2) &\Leftrightarrow \forall y \in S_Y, x_1 \in S_1, x_2 \in S_2 \\ &\text{有 } \mathbb{P}(Y = y, (X_1, X_2) = (x_1, x_2)) \\ &= \mathbb{P}(Y = y) \mathbb{P}((X_1, X_2) = (x_1, x_2)) \end{aligned}$$

有了上述定义, 可以推广:

1.  $(Y_1, \dots, Y_n) \perp (X_1, \dots, X_n)$
2.  $Y \perp_A (X_1, \dots, X_n) (A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) > 0)$

### Property 14

$$Y \perp\!\!\!\perp (X_1, X_2) \Rightarrow Y \perp\!\!\!\perp X_1, Y \perp\!\!\!\perp X_2$$

证明：在定义 22 中取  $B_2 = \Omega$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \in A, X_1 \in B_1) &= \mathbb{P}(Y \in A, X_1 \in B_1, X_2 \in S_2) \\ &= \mathbb{P}(Y \in A) \mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in S_2) \quad [Y \perp\!\!\!\perp (X_1, X_2)] \\ &= \mathbb{P}(Y \in A) \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \end{aligned}$$

注：看到  $\Rightarrow$  要自然地问，反过来  $\Leftarrow$  成立吗？做数学要多问自己一些问题，即便没有答案

### Corollary 4

$$(Y_1, \dots, Y_n) \perp\!\!\!\perp (X_1, \dots, X_n) \Rightarrow Y_k \perp\!\!\!\perp X_j, 1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq n$$

## 0.5 随机过程

### 0.5.1 什么是随机过程

#### Definition 23 (随机过程)

设  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  为概率空间， $(S, \mathcal{S})$  为可测空间， $\mathbb{T}$  为指标集/参数集，称随机变量族

$$\{X_t : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (S, \mathcal{S}) | t \in \mathbb{T}\}$$

为  $(S)$  值随机过程  $X$ 。其中  $(S, \mathcal{S})$  称为  $X$  的状态空间

注：

1.  $\forall t \in \mathbb{T}$ ,  $X_t$  为随机变量
2.  $\mathbb{T}$  为时间集， $X_t$  为过程  $X$  在时刻  $t$  的状态

$\mathbb{T} \setminus S \subseteq \mathbb{R}$	离散(e.g. $\mathbb{N}$ )	连续(e.g. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$ )
可数集(e.g. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ )	离散时间/参数的随机过程	
连续统(e.g. $[0, T], \mathbb{R}^+$ )	连续时间/参数的随机过程	

### 0.5.2 随机过程的分布

1.  $\forall t \in \mathbb{T}, X_t : \Omega \rightarrow S$  为随机变量/可测映射
2.  $X : \mathbb{T} \times \Omega \rightarrow S$  二元映射
3.  $X : \Omega \rightarrow S^{\mathbb{T}}$  其中  $S^{\mathbb{T}} = \{f | f : \mathbb{T} \rightarrow S\}$ ,  $X : \omega \rightarrow X(\omega) = X(\cdot, \omega)$

分布可用有限维分布族刻画

**Definition 24**

固定样本点  $\omega$ , 则  $X(\omega)$  为  $\mathbb{T} \rightarrow S$  的映射, 即  $X(\omega) \in S^{\mathbb{T}}$ , 称  $X(\omega)$  是过程  $X$  的一个实现/样本路径/样本函数

**Definition 25**

$\forall n \geq 1, t_1, t_2, \dots, t_n$  称

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$$

为  $X$  的  $n$  维分布

**Definition 26 (过程的有限维分布族)**

定义

$$\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n} | n \geq 1, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}\}$$

**0.5.3 随机过程的存在性**

1. (抽象的) 从概率论/测度论出发去证明随机过程存在性, 不写出具体形式, 满足随机过程符合给定的有限维分布族即可
2. (具体的) 构造性证明

**Property 15**

随机过程的有限维分布族具有以下两个性质

1. (对称性) 重排, 设  $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  为双射, 则

$$F_{t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$$

2. (相容性)  $m \geq n$

$$F_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_m}(x_1, \dots, x_n, +\infty, \dots, +\infty) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$$

注: 相容性类比从高维向低维的投影,  $\mathbb{P}(X \leq +\infty) = F_X(+\infty) = 1$

这两个性质是随机过程存在的必要条件

**Theorem 14 (Kolmogorov 定理)**

设分布函数族

$$\{F_{t_1, \dots, t_n} | t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}, n \geq 1\}$$

满足对称性, 相容性, 则必存在一个随机过程  $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$  使得上述分布函数族  $F$  是  $X$  的有限维分布族



#### 0.5.4 随机过程的基本类型

1. 离散时间马氏链（由条件概率定义）
2. Poisson 过程
3. 更新过程
4. 连续时间马氏链
5. 离散时间 Martingale（由条件期望定义）
6. 布朗运动

##### Definition 27

对连续时间的随机过程  $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$

1. 若对一切的  $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$  有  $X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  相互独立，则过程  $X$  是独立增量过程（e.g. 布朗运动）
2. 若对每一个  $S \in \mathbb{T}$ ,  $X_{t+s} - X_t$  对一切的  $t$  都有相同分布，称  $X$  为平稳增量过程

# 1 马氏链

## 1.1 离散时间马氏链

马尔可夫性  $\leftrightarrow$  已知现在，过去与未来不相干/独立

### Definition 28 ((离散时间) 马氏链)

称  $S$  值随机过程  $\{X_n, n \geq 0\}$  为马氏链，若  $X$  满足以下马氏性：  $\forall n \geq 0, x_0, x_1, \dots, x_n, y \in S$ ,

$$\mathbb{P}(\underbrace{X_{n+1} = y}_{\text{未来}} | \underbrace{X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}}_{\text{过去}}, \underbrace{X_n = x_n}_{\text{现在}}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x_n) \quad (M_1)$$

其中  $X_0$  的分布称为  $X$  的初始分布

### Definition 29

当  $S$  为有限集，称链为有限链，当  $S$  为无限集，称链为无限链

注：改写  $(M_1)$

$$LHS = \mathbb{P}_{X_n = x_n}(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})$$

$$RHS = \mathbb{P}_{X_n = x_n}(X_{n+1} = y)$$

$$M_1 \Leftrightarrow \{X_{n+1} = y\} \perp\!\!\!\perp_{\{X_n = x_n\}} \{X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}\}$$

$$\Leftrightarrow X_{n+1} \perp\!\!\!\perp_{\{X_n = x_n\}} (X_0, \dots, X_{n-1})$$

$(M_1)$  未来  $\perp\!\!\!\perp_{\text{现在}}$  过去

$$\mathbb{P}_{\text{现在}}(\text{未来} | \text{过去}) = \mathbb{P}_{\text{现在}}(\text{未来})$$

### Lemma 2 (马氏性的等价表示)

[G S] 下面三个命题等价

1.  $(M_1)$  马氏性

2.  $\forall k \geq 0, 0 \leq n_1 < \dots < n_k \leq n$ , 对于  $y, x_{n_1}, \dots, x_{n_k} \in S$ ,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_{n_1} = x_{n_1}, \dots, X_{n_k} = x_{n_k}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_{n_k} = x_{n_k}) \quad (M_2)$$

即

$$\{X_{n+1} = y\} \perp\!\!\!\perp_{\{X_{n_k} = x_{n_k}\}} \{X_{n_1} = x_{n_1}, \dots, X_{n_{k-1}} = x_{n_{k-1}}\}$$

3. 对  $\forall m \geq 1, n \geq 0, \{y, x_i, 0 \leq i \leq n\} \subseteq S$ , 有

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = y | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+m} = y | X_n = x_n) \quad (M_3)$$

即

$$\{X_{n+m} = y\} \perp\!\!\!\perp_{\{X_n = x_n\}} \{X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}\}$$

证明: (2)  $\rightarrow$  (1), 取  $n_1 = 0, \dots, n_k = n - 1$ , 显然

(2)  $\rightarrow$  (3), (3) 的  $n$  对应 (2) 的  $n_k$

(3)  $\rightarrow$  (1) 显然

只需证 (3)  $\rightarrow$  (2), (1)  $\rightarrow$  (3)

这里回顾独立的三种写法

1.  $A \perp\!\!\!\perp_B C$  记号
2.  $\mathbb{P}_B(A, C) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}_B(C)$  定义
3.  $\mathbb{P}_B(A|C) = \mathbb{P}_B(A)$  定理

(Step 1) 证明 (3)  $\rightarrow$  (2)

对  $\forall k \geq 2, 0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k = n$

令  $J = \{0, 1, \dots, n_k\} \setminus \{n_1, \dots, n_k\}$ ,  $\tilde{\mathbb{P}}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | X_{n_1} = x_{n_1}, \dots, X_{n_k} = x_{n_k})$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}(X_{n+1} = y) &= \sum_{x_j \in S, j \in J} \tilde{\mathbb{P}}(X_{n+1} = y | X_j = x_j, j \in J) \cdot \tilde{\mathbb{P}}(X_j = x_j, j \in J) \quad [\text{全概公式}] \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_{n_k} = x_{n_k}) \sum_{x_j \in S, j \in J} \tilde{\mathbb{P}}(X_j = x_j, j \in J) \quad [(3), \mathbb{P}_C(\cdot | A) = \mathbb{P}_C(\cdot)] \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_{n_k} = x_{n_k}) \end{aligned}$$

其中, 记号  $\sum_{x_j \in S, j \in J}$  中的下标意为: 假设  $J$  中元素个数为  $\#J = u$ , 则  $(x^{(1)}, \dots, x^{(u)}) \in S^u$ 。从简单的开始,  $\sum_{x \in S} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\Omega)$ ,  $\sum_{(x, y) \in S^2} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(\Omega)$ ,  $\dots$ ,  $\sum_{(x^{(1)}, \dots, x^{(u)}) \in S^u} \mathbb{P}(X^{(1)} = x^{(1)}, \dots, X^{(u)} = x^{(u)}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

(Step 2) 下证 (1)  $\rightarrow$  (3)

1.  $m = 1$  时, 即 (1)
2. 假设  $m = k$  时 (3) 成立, 即  $\forall n \geq 1, \{y, x_i, n \geq i \geq 0\} \subseteq S$ ,

$$\{X_{n+k} = y\} \perp\!\!\!\perp_{\{X_n = x_n\}} \{X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}\} \xrightarrow{\text{性质(14)}} \{X_{n+k} = y\} \perp\!\!\!\perp_{\{X_n = x_n\}} \{X_{n-1} = x_{n-1}\}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+k} = y | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= \mathbb{P}(X_{n+k} = y | X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+k} = y | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}) \end{aligned} \quad (*)$$

当  $m = k + 1$  时, 对  $\forall \{y, x_i, n \geq i \geq 0\} \subseteq S$

令  $\tilde{\mathbb{P}}_n(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_n(X_{n+k+1} = y) &= \sum_{x_{n+1} \in S} \tilde{\mathbb{P}}_n(X_{n+k+1} = y | X_{n+1} = x_{n+1}) \cdot \tilde{\mathbb{P}}_n(X_{n+1} = x_{n+1}) \\ &= \sum_{x_{n+1} \in S} \mathbb{P}(X_{n+k+1} = y | X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n) \cdot \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \quad [\text{by } (*)] \\ &= \sum_{x_{n+1} \in S} \mathbb{P}(X_{n+k+1} = y, X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n) / \mathbb{P}(X_n = x_n) \quad [\text{乘法公式-定理(4)}] \\ &= \mathbb{P}(X_{n+k+1} = y, X_n = x_n) / \mathbb{P}(X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+k+1} = y | X_n = x_n) \end{aligned}$$

即  $m = k + 1$  得证 □

### Corollary 5

若  $X$  时马氏链, 则  $\forall n \geq 1, \{x_i, n \geq i \geq 0, y\} \subseteq S$ , 有

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1})$$

补充记号:

- 乘积空间

$$S^n := \underbrace{S \times \dots \times S}_{n \uparrow}$$

- 乘积  $\sigma$  代数

$$\bigotimes_n 2^S := \underbrace{2^S \times \dots \times 2^S}_{n \uparrow}$$

### Property 16 (马氏性的等价条件)

下列三个命题等价

1. 马氏性 ( $M_1$ )
2. 对  $\forall n \geq 1, m \geq 1, A \in \bigotimes_n 2^S, B \in \bigotimes_m 2^S$ , 即  $(A \subseteq S^n, B \subseteq S^m)$ , 有

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\{X_n = x_n\}}((X_0, \dots, X_{n-1}) \in A, (X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) \in B) \\ &= \mathbb{P}_{\{X_n = x_n\}}((X_0, \dots, X_{n-1}) \in A) \cdot \mathbb{P}_{\{X_n = x_n\}}((X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) \in B) \end{aligned}$$

即  $(X_0, \dots, X_{n-1}) \perp\!\!\!\perp_{\{X_n = x_n\}} (X_{n+1}, \dots, X_{n+m})$  的定义

3.  $\mathbb{P}_{\{X_n = x_n\}}((X_{n+1}, \dots, X_{n+k+1}) \in B | (X_0, \dots, X_{n-1}) \in A) = \mathbb{P}_{\{X_n = x_n\}}((X_{n+1}, \dots, X_{n+k+1}) \in B)$

证明: (2)  $\Leftrightarrow$  (3), 独立的定义和定理, 显然

(3)  $\rightarrow$  (1), 取  $k = 0$  显然

只需证 (1)  $\rightarrow$  (3)

只需证 (3) 对简单事件  $A, B$  (单点集合) 成立, 即  $\forall n \geq 1, m \geq 1, \{x_0, x_1, \dots, x_{n+m} \subseteq S\}$ , 有

$$\mathbb{P}_{\{X_n = x_n\}}((X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) = x_{n+1}^{n+m} | (X_0, \dots, X_{n-1}) = x_0^{n-1}) = \mathbb{P}_{\{X_n = x_n\}}((X_{n+1}, \dots, X_{n+m}) = x_{n+1}^{n+m})$$

其中  $x_{n+1}^{n+m} = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m}), x_0^{n-1} = (x_0, \dots, x_{n-1})$

\* 只要对单点集合成立, 对一般情况也成立, 证明见独立性部分

只证  $m = 2$ , 令

$$\tilde{\mathbb{P}}_n(\cdot) := \mathbb{P}_{\{X_n = x_n\}}(\cdot | (X_0, \dots, X_{n-1}) = x_0^{n-1}) = \mathbb{P}(\cdot | (X_0, \dots, X_n) = x_0^n)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}_n((X_{n+1}, X_{n+2}) = (x_{n+1}, x_{n+2})) &= \tilde{\mathbb{P}}_n(X_{n+1} = x_{n+1}) \cdot \tilde{\mathbb{P}}_n(X_{n+2} = x_{n+2} | X_{n+1} = x_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \cdot \mathbb{P}(X_{n+2} = x_{n+2} | X_{n+1} = x_{n+1}) \quad [M_1] \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \cdot \mathbb{P}(X_{n+2} = x_{n+2} | X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n) \quad [\text{推论(5)}] \\
&= \mathbb{P}_{\{X_n = x_n\}}(X_{n+1} = x_{n+1}) \cdot \mathbb{P}_{\{X_n = x_n\}}(X_{n+2} = x_{n+2} | X_{n+1} = x_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}_{\{X_n = x_n\}}((X_{n+1}, X_{n+2}) = (x_{n+1}, x_{n+2})) \quad [\text{乘法公式-定理(4)}]
\end{aligned}$$

### Corollary 6

设  $X$  为马氏链, 则对每一个  $n \geq 1, m \geq 1, u_k < u_{k+1}, 0 \leq k \leq n+m-1$ , 有

$$(X_{u_0}, \dots, X_{u_{n-1}}) \perp\!\!\!\perp_{\{X_{u_n} = x_{u_n}\}} (X_{u_{n+1}}, \dots, X_{u_{n+m}})$$

## 1.2 时齐马氏链与转移概率

### Definition 30 (时间齐次马氏链)

称马氏链  $X: \{X_n, n \geq 0\}$  为时齐的或时间齐次马氏链, 若对  $\forall n \geq 0, i, j \in S$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i)$$

### Definition 31

$X$  是时齐马氏链, 称

$$p_{ij} := p_{i,j} = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) \quad i, j \in S$$

为  $X$  从状态  $i$  到  $j$  的 (一步) 转移概率, 并称矩阵

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

为 (一步) 转移 (概率) 矩阵

若不加说明, 则默认讨论的马氏链都是时齐的

注:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(x_{n+1} = y) &= \sum_{x \in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) \cdot \mathbb{P}(X_n = x) \\
&= \sum_{x \in S} p_{xy} \cdot \mathbb{P}(X_n = x)
\end{aligned}$$

**Theorem 15 (转移矩阵的刻画)**

转移矩阵是一个随机矩阵, 即

1.  $\forall i, j \in S, p_{ij} \geq 0$
2.  $\forall i \in S, \sum_{j \in S} p_{ij} = 1$

即转移矩阵的每一行  $(p_{ij})_{j \in S}$  为  $S$  上的一个概率分布

注: 另一种随机矩阵是指元素为随机变量的矩阵, 和这里讲的没有关系

证明:

$$\sum_{j \in S} \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) = \mathbb{P}(X_1 \in S | X_0 = i) = \mathbb{P}(\Omega | X_0 = i) = 1$$

**Definition 32 (时齐马氏链)**

设  $X = \{X_n, n \geq 0\}$  为一随机过程, 若

1. 初值  $X_0$  满足分布  $\mu = (\mu_i)_{i \in S}$ , 即  $\mathbb{P}(X_0 = i) = \mu_i, i \in S$
2. 存在一个随机矩阵  $P = (p_{ij})_{i, j \in S}$  使得  $\forall n \geq 1, i_n, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = p_{ij}$$

则称  $X$  具有初始分布  $\mu$  和转移矩阵  $P$  的 (时齐) 马氏链, 记作  $X \sim \text{Markov}(\mu, P)$

上述定义与  $(M_1)$  马氏链定义 28 等价

证明:  $(2) \rightarrow (M_1)$

$$\mathbb{P}_{\{X_n = x_n\}}(X_{n+1} = j) = \sum_{(i_0, \dots, i_{n-1}) \in S^n} \mathbb{P}_{\{X_n = x_n\}}(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1})$$

$$\mathbb{P}_{\{X_n = x_n\}}(X_0 = i_0, X_{n-1} = i_{n-1}) \stackrel{(2)}{=} p_{ij} \sum_{(i_0, \dots, i_{n-1}) \in S^n} \mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1} | X_n = i) = p_{ij}$$

即然有  $(M_1)$ , 为什么还要定义 32? 因为该定义决定了马氏链的有限维分布

**Example 16 (Gambler's Ruin)**

[Durrett, 3rd ed] P1

*Example 1.1 (Gambler's Ruin).* Consider a gambling game in which on any turn you win \$1 with probability  $p = 0.4$  or lose \$1 with probability  $1 - p = 0.6$ . Suppose further that you adopt the rule that you quit playing if your fortune reaches  $\$N$ . Of course, if your fortune reaches  $\$0$  the casino makes you stop.

Let  $X_n$  be the amount of money you have after  $n$  plays. Your fortune,  $X_n$  has the “Markov property.” In words, this means that given the current state,  $X_n$ , any other information about the past is irrelevant for predicting the next state  $X_{n+1}$ . To check

图 2: Gambler's Ruin

**Claim 1.**  $\{X_n, n \geq 0\}$  为（时齐）马氏链

1. 对于  $0 < i_0, \dots, i_{n-1} < N, n \geq 0$  有

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n+1} = i+1 | X_n = i, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = i+1 | X_n = i) = 0.4 = \mathbb{P}(\text{第 } n+1 \text{ 次赌局赢一元}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n+1} = i-1 | X_n = i, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = i-1 | X_n = i) = 0.6 = \mathbb{P}(\text{第 } n+1 \text{ 次赌局输一元}) \end{aligned}$$

2.  $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = 1 = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0)$

$\mathbb{P}(X_{n+1} = N | X_n = N, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = 1 = \mathbb{P}(X_{n+1} = N | X_n = N)$

最后一个等号是由题目设定得到，从  $0 \rightarrow 0$  或  $N \rightarrow N$  的概率都为 1，因为游戏结束

综上， $p(i, i+1) = 0.4, 0 < i < N, p(i, i-1) = 0.6, 0 < i < N, p(0, 0) = p(N, N) = 1$

e.g.

When  $N = 5$  the matrix is

	0	1	2	3	4	5
0	1.0	0	0	0	0	0
1	0.6	0	0.4	0	0	0
2	0	0.6	0	0.4	0	0
3	0	0	0.6	0	0.4	0
4	0	0	0	0.6	0	0.4
5	0	0	0	0	0	1.0

图 3:  $N=5$

### Example 17 (Two-Stage Markov Chains)

[Durrett, 3rd ed] P7

*Example 1.10 (Two-Stage Markov Chains).* In a Markov chain the distribution of  $X_{n+1}$  only depends on  $X_n$ . This can easily be generalized to case in which the distribution of  $X_{n+1}$  only depends on  $(X_n, X_{n-1})$ . For a concrete example consider a basketball player who makes a shot with the following probabilities:

- 1/2 if he has missed the last two times
- 2/3 if he has hit one of his last two shots
- 3/4 if he has hit both of his last two shots

图 4: Two-Stage Markov Chains

1.  $\mathbb{P}(X_{n+1} = H | X_n = M, X_{n-1} = M) = 1/2$

2.  $\mathbb{P}(X_{n+1} = H|X_n = M, X_{n-1} = H) = \mathbb{P}(X_{n+1} = H|X_n = H, X_{n-1} = M) = 2/3$
3.  $\mathbb{P}(X_{n+1} = H|X_n = H, X_{n-1} = H) = 3/4$

**Claim 2.**  $Y_n = (X_n, X_{n-1}), n \geq 1$  则  $\{Y_n, n \geq 1\}$  是 (时齐) 马氏链,  $Y_n : \Omega \rightarrow \{HH, HM, MH, MM\}$

证明:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(Y_{n+1} = HH|Y_n = HH, Y_j = (x_j, x_{j-1}), 1 \leq j \leq n-1) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = H, X_n = H|X_n = H, X_{n-1} = H, X_j = x_j, X_{j-1} = x_{j-1}, 0 \leq j \leq n-1) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = H|X_n = H, X_{n-1} = H) \\
&= 3/4 \quad [3.]
\end{aligned}$$

对 1.2. 同理 □

**Claim 3.** 设  $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$  为随机矩阵,  $\mu = (\mu_i)_{i \in S}$  为概率分布,  $X = \{X_n, n \geq 0\}$  为  $S$  值离散时间的随机过程, 则  $X \sim \text{Markov}(\mu, P)$  当且仅当  $X$  有有限维分布,

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \mu_{i_0} P_{i_0, i_1} P_{i_1, i_2} \cdots P_{i_{n-1}, i_n} \quad (\forall n \geq 0, i_j \in S)$$

证明:  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) &= \mathbb{P}(X_0 = i_0) \mathbb{P}(X_1 = i_1|X_0 = i_0) \cdots \mathbb{P}(X_n = i_n|X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \quad [\text{乘法公式}] \\
&= \mathbb{P}(X_0 = i_0) \mathbb{P}(X_1 = i_1|X_0 = i_0) \cdots \mathbb{P}(X_n = i_n|X_{n-1} = i_{n-1}) \quad [\text{Markov}] \\
&= \mu_{i_0} P_{i_0, i_1} \cdots P_{i_{n-1}, i_n}
\end{aligned}$$

严格地讲,  $\mathbb{P}(\cdot|A)$  需保证  $\mathbb{P}(A) > 0$ 。对  $\mathbb{P}(A) = 0$  情况的分类讨论, 见 Adventures in stochastic processes, prop 2.1.1

$\Leftarrow$

1.  $n = 0, \mathbb{P}(X_0 = i_0) = \mu_{i_0} \Rightarrow X_0 \sim (\mu_i)_{i \in S}$
- 2.

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}|X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = \frac{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n+1} = i_{n+1})}{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)} = P_{i_n, i_{n+1}}$$

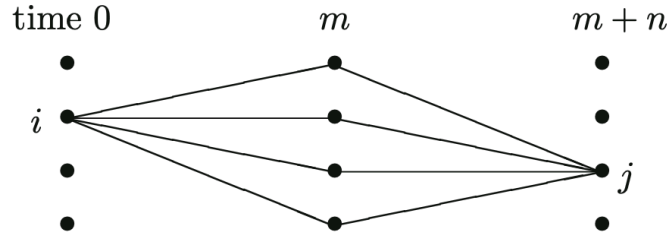
由时齐马氏链定义, 初始分布和转移矩阵都符合定义32

$$\therefore X \sim \text{Markov}(\mu, P)$$

对于  $\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n)$ , 如果我们想把  $X_1$  挖掉, 即

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n) &= \sum_{i_1 \in S} \mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) \\
&= \mu_{i_0} \sum_{i_1 \in S} (P_{i_0, i_1} P_{i_1, i_2}) \cdots P_{i_{n-1}, i_n}
\end{aligned}$$





## 1.3 多步转移概率与矩阵乘法

### Definition 33

设  $X = \{X_n, n \geq 0\}$  为马氏链，称

$$p_{ij}(m, m+n) := \mathbb{P}(X_{m+n} = j | X_m = i) \quad (i, j \in S, m, n \geq 0)$$

为  $X$  的  $n$  步转移概率，并称  $P(m, m+n) = (p_{ij}(m, m+n))_{i,j \in S}$  为  $X$  的  $n$  步转移（概率）矩阵，其中

$$p_{i,j}(0, 0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

当  $X$  时齐， $P(m, m+1) = (p_{ij}(m, m+1))_{i,j \in S} = (p_{ij}(0, 1))_{i,j \in S} = (p_{ij})_{i,j \in S}$

可见  $n=1$  时， $P(m, m+1)$  与  $m$  无关。那  $n > 1$  时呢？

### 1.3.1 Chapman-Komolgorov 方程

#### Theorem 16 (C-K 方程)

设  $\{X_n, n \geq 0\}$  为马氏链

$$p_{ij}(m, m+n+r) = \sum_{k \in S} p_{ik}(m, m+n) p_{kj}(m+n, m+n+r)$$

其中  $i, j \in S, m, n, r \geq 0$ ，即

$$P(m, m+n+r) = P(m, m+n)P(m+n, m+n+r)$$

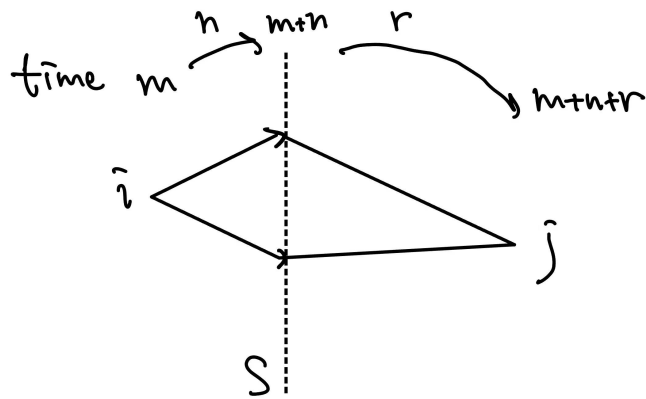


图 5: Multi-steps

证明:

$$\begin{aligned}
 p_{ij}(m, m+n+r) &= P(X_{m+n+r} = j | X_m = i) \\
 &= \sum_{k \in S} P(X_{m+n+r} = j, X_{m+n} = k | X_m = i) \\
 &= \sum_{k \in S} \mathbb{P}_{\{X_m=i\}}(X_{m+n+r} = j | X_{m+n} = k) \mathbb{P}_{\{X_m=i\}}(X_{m+n} = k) \quad [\text{乘法公式}] \\
 &= \sum_{k \in S} p_{ik}(m, m+n) p_{kj}(m+n, m+n+r) \quad [\text{Markov}]
 \end{aligned}$$

### Corollary 7

设  $X$  为时齐马氏链, 则  $P(m, m+n) = P^n(m, n \geq 0)$ . 其中,  $n=0$  时,  $P(m, m) = P^0 := I$  (单位矩阵)  
 从而, 可记  $p_{ij}^{(n)} := p_{ij}(n) := p_{ij}(m, m+n)$ ,  $P(n) := P(m, m+n) = P^n$   
 由 C-K 方程,  $P(m+n) = P(m)P(n)$ ,  $p_{ij}(m+n) = \sum_{k \in S} p_{ik}(m) p_{kj}(n)$

证明:

$$\begin{aligned}
 P(m, m+n) &= P(m, m+1) \cdot P(m+1, m+n) \quad [C-K] \\
 &= P \cdot P(m+1, m+n) \quad [\text{时齐}] \\
 &= P^n \quad \square
 \end{aligned}$$

## 2 泊松过程