

Chapitre IV

Systemes dynamiques en temps continu

IV.1 Définitions et propriétés générales

IV.1.1 Champ de vecteurs

On considère un point dans un espace à d dimensions. Ce point peut-être un point matériel dans un espace physique à d dimensions, ou plus généralement un ensemble de n coordonnées généralisées décrivant un ensemble de points matériels. On utilisera indifféremment dans la suite la notation d ou n pour désigner le nombre de coordonnées scalaires qui sont les degrés de liberté du système. L'état du système à un instant t peut être représenté par un vecteur $x(t)$ dans \mathbb{R}^d . Dans ce chapitre, on n'indiquera pas explicitement les vecteurs par une flèche pour alléger les notations, mais cette nature vectorielle est implicite. On définit un champ de vecteurs \mathcal{V} comme la fonction

$$\mathcal{V} : \quad \mathbb{R}^d \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^d$$
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_d \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{V}(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1(x) \\ \cdots \\ \mathcal{V}_d(x) \end{pmatrix}$$

On définit la loi du mouvement par

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{V}(x)$$

Au cours de l'évolution temporelle, le point x "suit" donc le champ de vecteurs dans l'espace \mathbb{R}^d . La solution $x(t)$ de la dynamique à un temps t à partir d'une condition initiale $x(t=0) = x_0$, *i.e.* la trajectoire du point $x(t)$ entre les instants $t=0$ et t , est donnée par le flot $\phi^t(x)$ au temps t , défini comme la fonction

$$\phi^t : \quad \mathbb{R}^d \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^d$$
$$x(0) \quad \longrightarrow \quad x(t)$$

Le flot est donc une fonction du temps t et de la condition initiale x_0 . On suppose que le flot est continûment dérivable (*i.e.* $\phi \in \mathcal{C}^1$). Il satisfait donc l'équation différentielle

$$\frac{d\phi^t(x)}{dt} = \mathcal{V}(\phi^t(x)).$$

Le champ de vecteur vérifie la relation $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi^t(x) = \mathcal{V}(x)$. Il découle de ces définitions que $\phi^{t=0}(x) = x$ et que le flot satisfait la relation de composition $\phi^{t_2}(\phi^{t_1}(x)) = \phi^{t_1+t_2}(x)$. L'inverse de ϕ^t est ϕ^{-t} , qui décrit la trajectoire renversée dans le temps. L'expression du champ de vecteur

est donnée par les équations de la dynamique, et découle pour un système physique de l'analyse des forces s'exerçant sur le système.

Si le champ de vecteurs est linéaire dans les composantes x_i , alors on peut obtenir l'expression explicite du flot.

► exemple en $d = 2$

Soit le champ de vecteurs $\mathcal{V}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$. Les équations du mouvement sont donc données par

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \mathcal{V}_1(x_1, x_2) = x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \mathcal{V}_2(x_1, x_2) = -2x_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

La solution de cette équation s'obtient explicitement dans ce cas simple et le flot s'écrit

$$\phi^t(x) = \begin{pmatrix} e^t x_1 \\ e^{-2t} x_2 \end{pmatrix}$$

La trajectoire issue de x_0 est obtenue à partir du flot comme $x(t) = \phi^t(x_0)$. L'origine est donc ici un point selle.

De façon générale, si le champ de vecteurs est linéaire, alors il peut être représenté par une matrice A . Les équations de la dynamique peuvent être découplées en passant dans la base propre $A = SDS^{-1}$ où D est la matrice diagonale des valeurs propres et S la matrice de passage construite à partir des vecteurs propres. Le flot s'écrit alors dans la base propre $\phi^t(z) = \exp(tD)z$.

Lorsque le champ de vecteurs est non-linéaire, il est très difficile en général de déterminer l'expression exacte du flot pour des temps longs. La théorie des systèmes dynamiques consiste en l'étude des propriétés de ce flot.

IV.1.2 Existence et unicité des solutions

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{V}(x)$$

Géométriquement, la solution de cette équation, *i.e.* la trajectoire $x(t)$, est une courbe dans \mathbb{R}^d dont le vecteur tangent en chaque point est $\mathcal{V}(x)$. L'existence de cette solution requiert que le champ de vecteur soit bien défini et suffisamment régulier.

► Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si le champ de vecteur $\mathcal{V}(x) \in \mathbb{R}^d$ est continûment dérivable, *i.e.* $\mathcal{V} \in \mathcal{C}^1$, alors pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ autour de t_0 tel que la solution de l'équation $\dot{x} = \mathcal{V}(x)$ satisfaisant $x(t_0) = x_0$ existe et est unique sur cet intervalle.

► Corrolaire

Au-delà de l'existence et l'unicité des solutions, un résultat corrolaire important est que ces solutions dépendent continûment des conditions initiales. Il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^d$ de x_0 et une constante K tel que si $y_0 \in U$ alors

$$|y(t) - x(t)| \leq K|y_0 - x_0| \exp(K(t - t_0)).$$

Les deux trajectoires partant de points voisins restent proches, et ne divergent pas plus qu'exponentiellement au cours du temps. Il en résulte en particulier que le flot ϕ est une fonction continue de x . Par extension, si le champ de vecteur \mathcal{V} dépend d'un paramètre a et qu'il est continûment dérivable en x et a , alors les solutions dépendent continûment de ce paramètre. Il suffit de considérer le système en $d+1$ dimension en ajoutant la coordonnée a et l'équation $\dot{a} = 0$ pour le démontrer.

▷ Remarque 1 : La solution n'existe pas forcément sur \mathbb{R}^d . Par exemple, le champ de vecteur à une dimension $\mathcal{V}(x) = 1 + x^2$ est bien \mathcal{C}^1 , mais la solution de l'équation $x' = \mathcal{V}(x)$ est $x(t) = \tan(t + c)$ où c est une constante, et elle n'existe que sur l'intervalle maximal $] -c - \frac{\pi}{2}, -c + \frac{\pi}{2}[$.

▷ Remarque 2 : Considérons un autre exemple simple en une dimension : le champ de vecteur $\mathcal{V}(x) = \text{sg}(x)|x|^h$ avec $h < 1$ et la condition initiale $x(0) = x_0$. Ce champ possède une singularité à l'origine. L'équation différentielle $\dot{x} = \mathcal{V}(x)$ admet une infinité de solutions satisfaisant cette condition initiale, donnée par

$$x(t) = \pm \left[(1-h)(t-t_0) + x_0^{1-h} \right]^{\frac{1}{1-h}} \equiv \pm \left[(1-h)(t-\tau) \right]^{\frac{1}{1-h}}$$

L'unicité est brisée car le champ de vecteur est non-dérivable en $x = 0$.

Note : La non-unicité a des conséquences importantes, elle est à la source de ce qui est dénommé la stochasticité spontanée. Considérons l'équation déterministe précédente à laquelle on ajoute un bruit Gaussien η (obtenant ainsi une équation de type Langevin)

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{V}(x) + \sqrt{2D}\eta(t)$$

avec $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t-t')$. Cette équation (ou sa généralisation à deux ou trois dimensions) peut s'interpréter physiquement comme l'équation du mouvement d'un traceur Brownien dans un fluide turbulent (*i.e.* la trajectoire Lagrangienne d'une particule transportée par le fluide turbulent), où \mathcal{V} correspond au champ de vitesse du fluide et D à la diffusivité moléculaire du traceur. Pour un fluide turbulent, h est l'exposant de Hölder du champ de vitesse, typiquement $h = 1/3$ dans la théorie de Kolmogorov. On observe que dans la limite où le bruit s'annule $\eta \rightarrow 0$, le caractère stochastique persiste. La solution n'est pas unique, et il s'avère que sont sélectionnées les deux trajectoires dites extrémales qui correspondent à $\tau = 0$, avec probabilité 1/2 pour chacune. L'existence de solutions stochastiques à une équation déterministe est le phénomène de stochasticité spontanée. Il est conjecturé que les équations de Navier-Stokes présentent ce phénomène, ce qui justifie les approches théoriques de type statistique de la turbulence.

IV.1.3 Points fixes et stabilité

La première analyse consiste à déterminer les points d'équilibre possibles du système dynamique. Ces points d'équilibre correspondent aux zéros du champ de vecteur, et donc aux points fixes du flot.

► Le point x_* est un point fixe, ou point d'équilibre, du système dynamique $\dot{x} = \mathcal{V}(x)$ si

$$\mathcal{V}(x_*) = 0 \quad \text{ou de façon équivalente} \quad \phi^t(x_*) = x_* \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

La stabilité de ce point d'équilibre peut être déterminée à partir de la différentielle du flot (ou du champ de vecteur) sur l'espace tangent au point fixe, ce qui consiste à linéariser le flot au voisinage du point fixe.

Soit $M = D\mathcal{V}|_{x^*} = \left(\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{x^*}$ la matrice Jacobienne du flot évaluée au point fixe x^* . Pour de petits écarts $y = (x - x^*)$ au point fixe, le champ de vecteur s'écrit

$$\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}(x^*) + D\mathcal{V}|_{x^*}(x - x^*) + \mathcal{O}((x - x^*)^2) = 0 + My + \mathcal{O}(y^2)$$

et la dynamique se met sous la forme d'équations différentielles linéarisées couplées

$$\frac{dy}{dt} = My .$$

Supposons que M est diagonalisable, soit $M = SDS^{-1}$ où $D = (\delta_{ij} \lambda_i)$ est la matrice diagonale des valeurs propres $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et S la matrice de passage. Dans la base propre, soit pour $z = S^{-1}y$, l'équation d'évolution devient simplement

$$\frac{dz}{dt} = Dz ,$$

c'est-à-dire qu'on obtient un ensemble d'équations différentielles linéaires découplées

$$\frac{dz_k}{dt} = \lambda_k z_k .$$

dont la solution est

$$z(t) = e^{Dt} z(0) \quad \text{soit} \quad \forall k \quad z_k(t) = e^{\lambda_k t} z_k(0) .$$

Le flot linéarisé s'écrit alors simplement $\phi^t = e^{tD} = (e^D)^t$.

La nature des valeurs propres permet de classifier les comportements à l'ordre linéaire au voisinage du point fixe. Si on note $\lambda_k = a_k + ib_k$, alors

$$|z_k(t)| = e^{a_k t} |z_k(0)| .$$

Ainsi, le point fixe x^* est

- stable si $\Re(\lambda_k) < 0 \quad \forall k$
- instable s'il existe une valeur propre telle que $\Re(\lambda_k) > 0$

En outre, les points fixes instables peuvent être de différentes natures, selon les caractéristiques de la partie réelle

- expansif si $\Re(\lambda_k) > 0 \quad \forall k$
- elliptique si $\Re(\lambda_k) = 0 \quad \forall k$
- hyperbolique si $\Re(\lambda_k) \neq 0 \quad \forall k$

Pour un point fixe hyperbolique, on définit les variétés (hyper-surfaces) stables et instables correspondant aux sous-espaces sous-tendus au voisinage du point fixe par les vecteurs propres des directions stables et instables respectivement. Ainsi, la variété stable est définie comme

$$\mathcal{W}_s = \left\{ x \text{ tel que } \phi^t(x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} x^* \right\} .$$

Elle admet comme espace tangent au point fixe l'espace linéaire \mathcal{E}_s dont la base est formée par les vecteurs propres associés aux directions stables. De même, la variété instable peut être définie comme

$$\mathcal{W}_i = \left\{ x \text{ tel que } \phi^t(x) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} x^* \right\}$$

dont l'espace tangent au point fixe est l'espace linéaire instable \mathcal{E}_i qui a pour base les vecteurs propres des directions instables.

Dans le plan, la nature des points fixes possibles peut être complètement classifiée à partir du déterminant et de la trace de la matrice du flot linéarisée, comme illustré sur la Fig. IV.1 (voir TD). Au-delà de deux dimensions, il peut exister des comportements plus complexes.

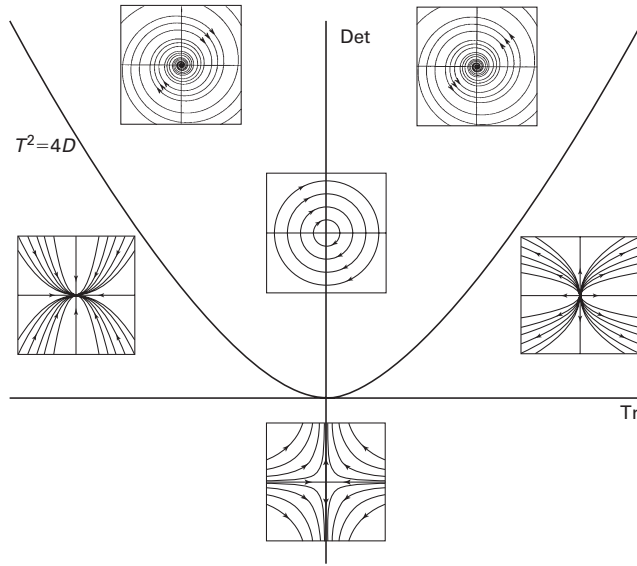


FIGURE IV.1 – Classification des points fixes d'un système dynamique bi-dimensionnel selon la trace et le déterminant, figure issue de [7].

Isoclines de niveau zéro

Les isoclines de niveau zéro sont les courbes (ou sous-espaces) où une dérivée temporelle s'annule. Il est particulièrement instructif de considérer les isoclines définies par

$$\dot{x}_j = \mathcal{V}_j(x) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Les intersections de toutes les isoclines constituent bien sûr des points fixes. En dimension $d = 2$, ces isoclines forment une partition du plan en secteurs dans lesquels la direction globale du champ de vecteurs est fixée. Ceci offre une visualisation complète de l'espace des phases, et permet en particulier de déterminer de façon directe la stabilité des points fixes.

► exemple en $d = 2$

Soit le champ de vecteur défini par

$$\mathcal{V}(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1^2 \\ x_1 - 2 \end{pmatrix}$$

L'isocline x_1 est donnée par $x_2 = x_1^2$ qui est donc une parabole. Sur cette parabole, la composante x_1 du champ de vecteur s'annule, ce qui implique que le signe de cette composante est fixé de part et d'autre de la parabole, il est positif à l'intérieur (pointe vers la droite), et négatif à l'extérieur (pointe vers la gauche).

L'isocline x_2 est donnée par $x_1 = 2$ qui est donc une droite. De même, la composante x_2 du champ de vecteur s'annule sur cette droite, ce qui implique que le signe de cette composante est fixé de part et d'autre de la droite, il est positif à gauche (pointe vers le haut), et négatif à droite (pointe vers le bas).

L'intersection des deux isoclines en $(2, 4)$ est un point fixe. On peut déduire des orientations globales du champ de vecteurs dans les quatre secteurs qu'il est instable.

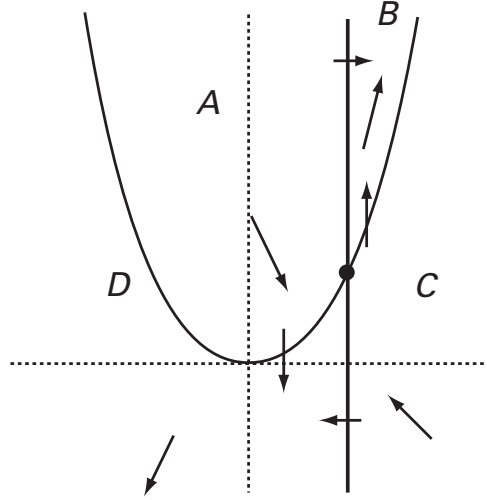


FIGURE IV.2 – Isoclines et orientation du champ de vecteurs pour l'exemple donné en $d = 2$ (figure tirée de [7]).

IV.1.4 Divergence du champ de vecteurs.

La divergence d'un champ de vecteurs est définie comme

$$\operatorname{div} \mathcal{V}(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \mathcal{V}_d}{\partial x_d}$$

La divergence du champ de vecteur quantifie l'évolution d'un volume, ou d'un ensemble de points, par le flot. Dans l'exemple (IV.1) en $d = 2$, on a $\operatorname{div} \mathcal{V}(x) = -1$. Considérons un volume élémentaire à $t = 0$, rectangle de côté $\delta x_1(0)$, $\delta x_2(0)$. Ce rectangle est transformé par le flot selon $\phi^t(\delta x(0)) = \delta x_1(0)e^t e_1 + \delta x_2(0)e^{-2t} e_2$ où e_1 et e_2 sont les vecteurs unitaires sur les axes x_1 et x_2 . Le rectangle est donc exponentiellement aplati dans la direction e_2 et étiré dans la direction e_1 , devenant tel un fil. Son volume diminue au cours du flot.

Plus généralement, on peut établir le résultat suivant. Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble de points transportés par le flot.

$$\phi^t(U) = \{x = \phi^t(y), \quad y \in U\}$$

Le volume de cet ensemble de points est donné par

$$\operatorname{Vol}(\phi^t(U)) = \int_{x \in \phi^t(U)} d^d x = \int_{x \in \phi^t(U)} dx_1 \cdots dx_d$$

Alors, la variation de volume à $t = 0$ par le flot est donnée par

$$\left. \frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(\phi^t(U)) \right|_{t=0} = \int_{x \in U} \operatorname{div} \mathcal{V}(x) d^d x$$

Ainsi, si

- $\operatorname{div} \mathcal{V}(x) < 0 \quad \forall x$: le flot est dissipatif, il contracte les volumes
- $\operatorname{div} \mathcal{V}(x) > 0 \quad \forall x$: le flot est expansif, il dilate les volumes

► $\operatorname{div}\mathcal{V}(x) = 0 \ \forall x$: le flot est conservatif, il préserve les volumes

Ce dernier cas contient la classe importante des systèmes Hamiltoniens.

▷ démonstration

Il suffit d'introduire la fonction caractéristique du sous-ensemble U , soit $f_U(x) = 1$ si $x \in U$, $f_U(x) = 0$ si $x \notin U$. Alors l'ensemble des points $x \in \phi^t(U)$ sont les points tels que $\phi^{-t}(x)$ était dans U , soit

$$\int_{x \in \phi^t(U)} d^d x = \int_{x \in \mathbb{R}^d} f_U(\phi^{-t}(x)) d^d x.$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(\phi^t(U)) &= \frac{d}{dt} \int_{x \in \mathbb{R}^d} f_U(\phi^{-t}(x)) d^d x = \int_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^d \frac{d\phi_i^{-t}(x)}{dt} \frac{\partial f_U}{\partial x_i}(\phi^{-t}(x)) d^d x \\ &= \int_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^d (-\mathcal{V}_i(x)) (\phi^{-t}) \frac{\partial f_U}{\partial x_i}(\phi^{-t}(x)) d^d x \\ &= \int_{x \in \mathbb{R}^d} f_U(\phi^{-t}(x)) \operatorname{div}\mathcal{V}(\phi^{-t}(x)) d^d x \end{aligned}$$

où pour passer à la deuxième ligne on a utilisé l'équation dynamique vérifiée par le flot, et pour passer à la troisième on a effectué une intégration par parties. En évaluant l'expression précédente à $t = 0$, on obtient le résultat annoncé car $\phi^{t=0}(x) = x$ et la présence de la fonction caractéristique restreint l'intégrale à U .

IV.1.5 Fonction de Lyapunov

L'étude de la stabilité linéaire n'est pas toujours suffisante pour déterminer la nature d'un équilibre. Une méthode plus globale pour montrer qu'un équilibre est stable ou asymptotiquement stable a été élaborée par Lyapunov. Cette méthode permet aussi d'estimer la taille du bassin d'attraction, c'est-à-dire l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles les solutions tendent vers ce point d'équilibre.

Considérons un système $\dot{x} = \mathcal{V}(x)$, avec $x \in \mathbb{R}^d$, qui admet un point d'équilibre x^* ou plus généralement un ensemble attracteur \mathcal{A} . L'idée est de construire une fonction dérivable définie sur un sous-ensemble $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ autour de x^* qui vérifie

$$\begin{cases} L(x^*) = 0 & \text{et} & L(x) > 0 & \forall x \in \mathcal{O} \neq x^* \\ \dot{L}(x) \leq 0 & \forall x \in \mathcal{O} \neq x^* \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

Ainsi, si $\dot{L} \leq 0$, ceci implique que la fonction L , appelée fonction de Lyapunov, décroît le long des trajectoires solutions passant par x^* . On en déduit que x^* est stable, ou asymptotiquement stable si $\dot{L} < 0$. L'avantage de cette méthode est qu'elle ne requiert pas de résoudre les équations dynamiques. Par contre, il n'existe pas de méthode systématique pour trouver une fonction de Lyapunov. Une forme quadratique, de type énergie, se révèle souvent appropriée.

En particulier, l'existence d'une fonction de Lyapunov exclut celle d'un cycle limite. C'est donc aussi une méthode pour exclure l'existence de tels cycles.

► exemple dans \mathbb{R}^3 .

Soit le système dynamique dépendant d'un paramètre ϵ

$$\dot{x} = \mathcal{V}(x) \quad \mathcal{V}(x) = \begin{pmatrix} (\epsilon x_1 + 2x_2)(x_3 + 1) \\ (-x_1 + \epsilon x_2)(x_3 + 1) \\ -x_3^3 \end{pmatrix}$$

Le seul point d'équilibre est l'origine $x^* = 0$, et la matrice Jacobienne s'écrit

$$D\mathcal{V}(x)\big|_{x^*} = \begin{pmatrix} \epsilon & 2 & 0 \\ -1 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont 0 et $\epsilon \pm \sqrt{2}i$. Si $\epsilon > 0$, l'origine est instable, mais si $\epsilon \leq 0$, on ne peut pas conclure quant à sa stabilité. Cherchons une fonction de Lyapunov de la forme $L(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2$ avec $a_i > 0$. Alors

$$\dot{L} = 2 \sum_{i=1}^3 a_i x_i \dot{x}_i \tag{IV.3}$$

$$= 2 \left(\epsilon(a_1x_1^2 + a_2x_2^2)(x_3 + 1) + (2a_1 - a_2)x_1x_2(x_3 + 1) - a_3x_3^4 \right) \tag{IV.4}$$

Choisissons $a_1 = a_3 = 1$ et $a_2 = 2$. Si $\epsilon = 0$, alors $\dot{L} = -2x_3^4 \leq 0$ et on en déduit que l'origine est stable. Si $\epsilon < 0$, alors

$$\dot{L} = 2 \left(\epsilon(x_1^2 + 2x_2^2)(x_3 + 1) - x_3^4 \right)$$

et $\dot{L} < 0$ dans la région \mathcal{O} définie par $x_3 > -1$. Cette région est donc asymptotiquement stable, toutes les solutions telles que $x_0 \in \mathcal{O}$ convergent vers l'origine à temps long.

IV.1.6 Section de Poincaré

Un outil très utile dans l'étude des systèmes dynamiques est la section de Poincaré. Soit un système à n dimensions dont la dynamique est régie par l'équation

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{V}(x)$$

On considère une surface \mathcal{S} à $n - 1$ dimensions, transverse au flot, telle que la trajectoire $x(t)$ traverse \mathcal{S} à des instants successifs discrets t_k . On note x_k les intersections successives de la trajectoire sur \mathcal{S} , comme illustré sur la Fig. IV.3. La section de Poincaré est l'application

$$\begin{array}{ccc} P : & \mathcal{S} & \longrightarrow \mathcal{S} \\ & x_k & \longrightarrow x_{k+1} \end{array}$$

qui est donc une application à temps discret.

Cette approche est particulièrement importante pour étudier la stabilité de cycles limites, pour lesquels il n'existe pas d'équivalent de la linéarisation. Une orbite fermée $x(t)$ de la trajectoire devient un point fixe de l'application P . Sa stabilité peut être étudiée à partir de la section linéarisée à ce point fixe $DP(x^*)$, qui est une matrice $(n - 1) \times (n - 1)$. On appelle ses valeurs propres λ_k les caractéristiques, ou multiplicateurs de Floquet, de l'orbite périodique. Pour les

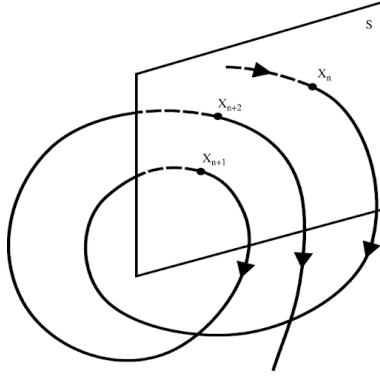


FIGURE IV.3 – Schéma de la section de Poincaré sur la surface S d'une trajectoire $x(t)$ à 3 dimensions.

systèmes Hamiltoniens, qui font l'objet du chapitre suivant, la section de Poincaré préserve les volumes.

► exemple dans le plan.

On considère le champ de vecteur en coordonnées polaires

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \mathcal{V}(r, \theta) = \begin{pmatrix} r(1 - r^2) \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut définir pour cette dynamique une section de Poincaré en considérant les intersections de la trajectoire avec la surface S choisie comme le demi-axe $x > 0$. Soit r_0 le point initial sur S . Comme $\dot{\theta} = 1$, le premier retour r_1 à la section de Poincaré se produit pour $t = 2\pi$. Alors $r_1 = P(r_0)$ satisfait

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r(1 - r^2)} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

On déduit de l'évaluation de l'intégrale l'expression de la section de Poincaré :

$$P(r) = \left[1 + e^{-4\pi} \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) \right]^{-1/2}.$$

La résolution graphique montre que le point fixe $r^* = 1$ est stable et unique. On en déduit l'existence d'un cycle limite stable qui est le cercle unité.

Dans ce cas, les dynamiques des composantes radiale et angulaire sont découplées. Il est immédiat d'obtenir que la dynamique radiale admet un point fixe $r^* = 0$ instable et un point fixe $r^* = 1$ stable. Toutes les trajectoires, à l'exception de $r_0 = 0$, convergent effectivement en spirale vers le cercle unité. En général, il est impossible de calculer exactement la section de Poincaré. Cependant, celle-ci peut être construite géométriquement ou numériquement et permet une visualisation très informative du flot.

IV.2 Caractéristique du chaos

Nous avons déjà esquissé au chapitre II une définition possible du chaos déterministe, bien qu'il n'en existe pas une universellement acceptée. Rappelons que trois ingrédients sont néanmoins essentiels

- **apériodicité à temps longs** : absence de points fixes, orbites périodiques ou quasi-périodiques lorsque $t \rightarrow \infty$. En pratique, il suffit que ces trajectoires occupent une mesure non nulle de l'espace des phases
- **sensibilité dans les conditions initiales** : des trajectoires voisines se séparent exponentiellement vite.
- **mélange** : la dynamique est mélangeante, aboutissant à un brouillage rapide des trajectoires.

Nous élaborons dans la suite sur ces aspects pour un système n -dimensionnel.

IV.2.1 Ensembles attracteurs

Nous avons essentiellement discuté l'existence et la stabilité de *points* d'équilibre, mais il existe d'autres types de solutions asymptotiques, telles les solutions périodiques ou les orbites fermées, et de façon plus générale des ensembles attracteurs, non ponctuels. La définition d'un attracteur, comme celle du chaos, n'est pas universelle. On peut choisir comme définition un sous-ensemble fermé \mathcal{A} de l'espace des phases qui vérifie

- \mathcal{A} est compact et invariant par le flot. Toute trajectoire partant de $x_0 \in \mathcal{A}$ y reste à tout temps ultérieur $x(t) \in \mathcal{A}$.
- Il existe un voisinage ouvert U autour de \mathcal{A} qui est attiré par \mathcal{A} , *i.e.* si $x_0 \in U$, alors la distance de la trajectoire issue de x_0 à \mathcal{A} tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. Le plus grand sous-ensemble U forme le bassin d'attraction de \mathcal{A} .
- \mathcal{A} est minimal, *i.e.* il ne peut pas être décomposé en deux sous-ensembles invariants et attracteurs.

Précisons la subtilité du dernier point sur un exemple. Soit le système

$$\dot{x} = \mathcal{V}(x) \quad \mathcal{V}(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_1^3 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Ce système admet deux points fixes stables $(\pm 1, 0)$ et un point selle à l'origine. L'intervalle $I = [-1, 1]$ de l'axe x_1 est un ensemble compact invariant (en fait tout l'axe x_1 l'est). Il attire un ensemble ouvert de conditions initiales (toutes les trajectoires du plan). Cependant, I n'est pas un attracteur car il n'est pas minimal. Les points fixes $(\pm 1, 0)$ sont des sous-ensembles de I qui satisfont les 2 premières conditions. Ces deux points sont donc les seuls attracteurs de ce système.

IV.2.2 Exposants de Lyapunov

La définition des exposants de Lyapunov peut être généralisée à un système à n dimensions dont la dynamique est définie par $\dot{x} = \mathcal{V}(x)$. Considérons deux trajectoires partant de conditions initiales proches x_0 et $x_0 + \delta x_0$ et définissons la distance entre ces deux trajectoires au cours du temps comme la norme euclidienne du vecteur $\delta x(x_0, t)$, soit $d(x_0, t) = |\delta x(x_0, t)|$. Le taux moyen de divergence exponentielle des deux trajectoires est défini comme

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{d(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{d(x_0, t)}{d(x_0, 0)}.$$

L'existence de cette limite peut être démontrée sous des conditions assez générales. Cette quantité ne dépend pas du choix de la condition initiale x_0 pour toutes les trajectoires dans le bassin d'un même attracteur, *i.e.* c'est une caractéristique de l'attracteur.

En outre, on peut définir un spectre de n exposants de Lyapunov que l'on peut ordonner $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. La définition précise de ces n exposants est assez technique en général, mais on peut en donner une interprétation intuitive : la somme $S_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i$ mesure le taux moyen d'expansion ou contraction exponentielle d'un volume de dimension k . Ainsi, $S_1 = \lambda_1 = \lambda$ car le volume est simplement dans ce cas la trajectoire dans l'espace des phases, qui est donc contrôlée par le plus grand exposant. S_2 mesure le taux de divergence d'une surface, et S_n celui de tout l'espace des phases.

Remarque : On peut étendre la définition des exposants de Lyapunov à une application discrète $x_{n+1} = \mathcal{V}(x_n)$. On peut montrer en particulier que les $(n-1)$ exposants de Lyapunov associés à la section de Poincaré d'un flot sont proportionnels aux exposants de Lyapunov correspondants du système continu $\lambda_i^{\text{Poincaré}} = \tau \lambda_i$ où τ est le temps moyen entre deux intersections successives de la surface de section. Pour un système linéaire, les exposants de Lyapunov se déduisent des valeurs propres de la matrice du flot.

Systèmes conservatifs

Pour les systèmes Hamiltoniens conservatifs, le flot conserve les volumes, $S_n = 0$, ce qui contraint sa géométrie. En outre, on peut montrer qu'il existe une symétrie entre les exposants de Lyapunov, reliés par paire selon $\lambda_i = -\lambda_{n-i}$. Un mouvement chaotique implique qu'une région limitée de l'espace des phases soit contractée et étirée dans autant de directions. Après un temps d'ordre $1/\lambda$, la distance entre deux trajectoires initialement proches peut atteindre la taille de l'espace des phases accessibles, et la prédiction n'est plus possible. Le chaos dans les systèmes Hamiltoniens est étudié au chapitre V.

Systèmes dissipatifs

Pour un système dissipatif $S_n < 0$, le volume occupé par le flot dans l'espace des phases se contracte continuellement au cours du temps, même si la contraction n'est pas nécessairement uniforme. Il doit donc se confiner sur une surface de plus basse dimension.

► $d = 1$

On a alors $S_n = S_1 < 0$, donc un flot dissipatif à une dimension ne peut pas générer de mouvements chaotiques, le mouvement est nécessairement régulier.

► $d = 2$

Le volume de l'espace des phases se contractant, les trajectoires finissent par être confinées dans un sous-espace borné. Alors, le théorème de Poincaré-Bendixson assure qu'elles convergent sur une orbite fermée. Un flot dissipatif en deux dimensions ne peut pas non plus générer de chaos.

► $d \geq 3$

Au-delà de deux dimensions, le mouvement peut être régulier. Tous les exposants de Lyapunov sont alors négatifs, l'attracteur est simplement un point fixe, ou une orbite périodique (cycle limite).

S'il existe au moins un exposant de Lyapunov positif, celui-ci génère une sensibilité aux conditions initiales. Comme le flot se contracte, les trajectoires finissent néanmoins confinées sur un sous-espace de dimension plus petite que celle de l'espace des phases initial, souvent fractale. Ce sous-espace est en général une structure géométrique compliquée, et forme ce qu'on appelle un attracteur étrange. Sa caractéristique essentielle est qu'il montre une sensibilité aux conditions

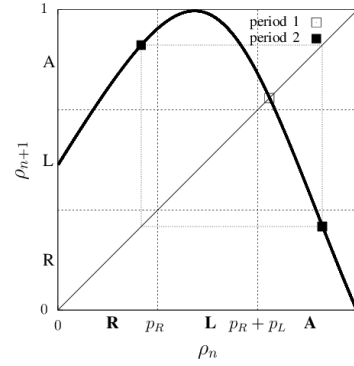
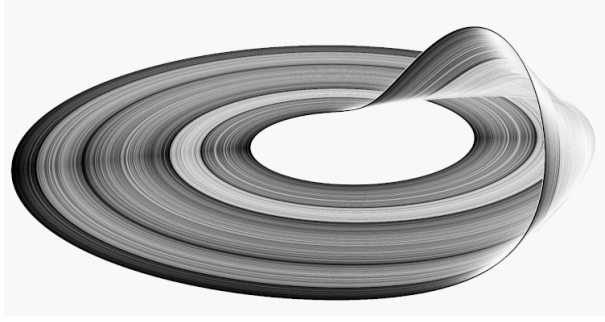


FIGURE IV.4 – Attracteur étrange de Rössler et sa réduction en une application unidimensionnelle, images issues de Wikipédia.

initiales, *i.e.* des orbites initialement proches divergent exponentiellement, bien qu'elles soient confinées sur l'attracteur. Un attracteur étrange supporte donc des mouvements chaotiques.

Les processus d'étirement et de mélange sont fondamentaux dans la formation des attracteurs étranges. On peut imaginer un attracteur étrange pour un flot tri-dimensionnel comme une couche formée d'une infinité de surfaces bi-dimensionnelles. Cette structure résulte d'étirements puis de repliements successifs de couches de l'espace des phases.

► exemple en $d = 3$

L'exemple le plus simple est l'attracteur de Rössler (1976), qui correspond au système dynamique

$$\dot{x} = \mathcal{V}(x) \quad \mathcal{V}(x) = \begin{pmatrix} -(x_2 + x_3) \\ x_1 + ax_2 \\ b + x_3(x_1 - \mu) \end{pmatrix}$$

Des valeurs typiquement choisies sont $a = b = 1/5$. Pour $\mu = 2.5$, l'attracteur de ce flot est simplement un cycle limite. Pour $\mu = 3.5$, le cycle se dédouble, puis il se produit lorsque μ croît une séquence de doublement de périodes du cycle, analogue à celle de l'application logistique mais pour une application continue (ceci n'est possible qu'en trois dimensions au moins pour que les enroulements de cycles ne s'intersectent pas). Cette séquence précède une transition vers le chaos se produisant pour $\mu_\infty = 4.20$. L'attracteur étrange pour $\mu > \mu_\infty$ est représenté sur la Fig. IV.4. Cet attracteur a la topologie simple d'une bande, étirée, puis repliée une fois en joignant les bords opposés.

Il est possible de visualiser ce flot en une dimension, en le projetant tout d'abord dans le plan (x_1, x_2) ($x_3 = \text{cste}$), puis en construisant la section de Poincaré sur le plan $x_2 = 0$, *i.e.* en enregistrant les intersections successives du flot projeté avec la section $x_2 = 0$. On obtient ainsi une application qui à $x_{1,k}$ associe $x_{1,k+1}$, reproduite à droite de la Fig. IV.4. Ce n'est pas une application au sens stricte, car la courbe possède en fait une certaine épaisseur. Cependant, le flot est tellement contracté dans cette direction qu'elle apparaît quasi-unidimensionnelle dans les simulations numériques. Ceci ne peut se produire que pour des attracteurs extrêmement plats, quasi-bidimensionnels, donc pour des flots très dissipatifs. Cette application n'est pas inversible, et dévoile une allure très proche de l'application logistique, ce qui reflète la nature chaotique du mouvement.

IV.2.3 Entropie de Kolmogorov

Pour quantifier la notion de mélange, ou désordre, Kolmogorov formula le concept d'entropie métrique, analogue à l'entropie thermodynamique, ou plus précisément inspirée de l'entropie de Shannon en théorie de l'information. Ceci permet de substituer à la description mécanique une description statistique en terme de mesure. Cette notion est fondamentale, elle aboutira à la mesure de Ruelle-Sinai-Bowen.

L'idée est d'introduire une partition de l'espace des phases \mathcal{M} en m sous-ensembles disjoints \mathcal{M}_i . La probabilité de présence de la trajectoire à un instant dans un de ces sous-ensembles est associée à la mesure $\mu(\mathcal{M}_i)$ de ce sous-ensemble. On définit alors l'entropie de la partition comme

$$H(\mathcal{M}) = - \sum_{i=1}^m \mu(\mathcal{M}_i) \ln \mu(\mathcal{M}_i)$$

On évolue alors cette partition par le flot inverse ϕ^{-t} , en remontant le temps, et on considère l'intersection des partitions obtenues après k itérations du flot renversé ϕ^{-t}

$$\mathcal{M}^{(k)} = \mathcal{M} \cap (\phi^{-t}(\mathcal{M})) \cap (\phi^{-2t}(\mathcal{M})) \dots \cap (\phi^{-kt}(\mathcal{M}))$$

La prolifération avec k des éléments de cette nouvelle partition quantifie la vitesse à laquelle la dynamique fragmente la partition initiale \mathcal{M} , la rendant de plus en plus fine. Le degré de stochasticité, ou mélange, peut être défini comme l'information moyenne produite entre deux itérations

$$H(\mathcal{M}, \phi^{-t}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[H(\mathcal{M}^{(k+1)}) - H(\mathcal{M}^{(k)}) \right]$$

L'entropie métrique de Sinai-Kolmogorov est finalement définie comme la borne supérieure de cette quantité sur toutes les partitions

$$h(\phi^{-t}) = \sup_{\mathcal{M}} H(\mathcal{M}, \phi^{-t})$$

Cette entropie est un indicateur de la nature intrinsèque de la dynamique. Lorsque $h = 0$, le mouvement est régulier (par exemple périodique). Lorsque $h = \infty$, la dynamique est complètement non-déterministe (aléatoire), et pour $0 < h < \infty$, la dynamique est chaotique déterministe. De façon remarquable, cette entropie peut s'exprimer en terme de la somme des exposants de Lyapunov positifs

$$h = \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad \lambda_m > 0 > \lambda_{m+1}$$

