VERSUCH NUMMER 355 (Korrektur)

Gekoppelte Schwingungen

Ksenia Klassen
ksenia.klassen@udo.edu

Dag-Björn Hering
dag.hering@udo.edu

Durchführung: 17.11.2015 Abgabe: 24.11.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

1.1 Ziel

Ziel des Versuchs ist die Untersuchung der Fundamentalfrequenzen und Schwebung von gekoppelten Schwingkreisen.

1.2 Gekoppelte Systeme

Ein gekoppeltes System beinhaltet zwei Systeme die so miteinander verbunden sind, dass sie auf einander einwirken und durch die Kopplung Energie austauschen können. Die Energie von System 1 nimmt ab und gleichzeitig steigt die Energie von System 2. Das Bestimmen von Frequenz und Amplitude in einem Schwingkreis fällt leichter, deshalb wird einer in dem Versuch verwendet und nicht Systeme wie gekoppelte Pendel.

1.3 Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise

Wie in Abbildung 1 zu sehen, werden zwei identische Schwingkreise die durch einen Koppelkondensator gekoppelt sind, also der Kapazität C_k, betrachtet.

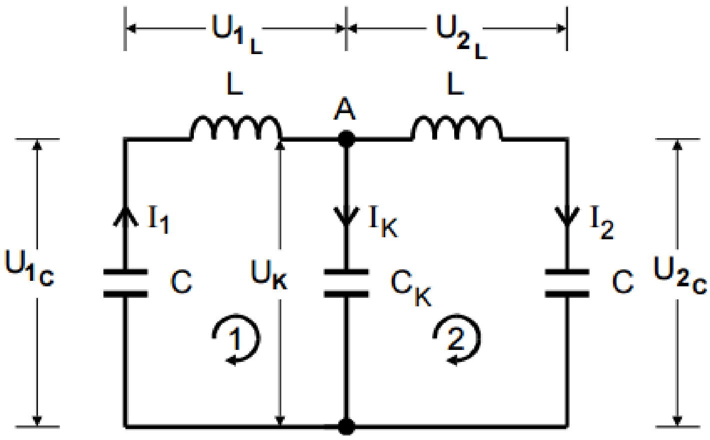

Abbildung 1: Schaltbild von zwei kapazitiv gekoppelten Schwingkreisen.[1]

Am Knotenpunkt A gilt laut Kirchhoffscher Knotenregel:

$$I_k = I_1 - I_2 \tag{1}$$

Für die Maschen 1 und 2 gilt:

$$0 = U_{1_C} + U_{1_L} + U_K \tag{2}$$
$$0 = U_{2_C} + U_{2_L} + U_K. \tag{3}$$

Mit $U_L = L\dot{I}$ und $U_C = \frac{1}{C}\int I\,\mathrm{d}t$ erhält man, nach Einsetzten und Differenzieren nach t, zwei Differentialgleichungen:

$$L\ddot{I}_1 + \frac{1}{C}I_1 + \frac{1}{C}(I_1 - I_2) = 0 \tag{4}$$
$$L\ddot{I}_2 + \frac{1}{C}I_2 + \frac{1}{C}(I_1 - I_2) = 0. \tag{5}$$

Um die Dgln lösen zu können, werden sie zunächst entkoppelt, dies geschieht durch Addition bzw. Subtraktion der Gleichungen voneinander, ebenfalls werden die Summe bzw. die Differenz der Ströme als neue Variablen eingeführt:

$$L\frac{d^2}{dt^2}(I_1 + I_2) + \frac{1}{C}(I_1 + I_2) = 0 \tag{6}$$
$$L\frac{d^2}{dt^2}(I_1 - I_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)(I_1 - I_2) = 0. \tag{7}$$

Die Lösungen der Gleichungen lauten:

$$(I_1 + I_2)(t) = (I_{1_0} + I_{2_0})\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \tag{8}$$
$$(I_1 - I_2)(t) = (I_{1_0} - I_{2_0})\cos\left(\frac{t}{\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)^{-1}}}\right). \tag{9}$$

Die Schwingungsfrequenzen sind hierbei:

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{10}$$
$$\nu^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)^{-1}}}. \tag{11}$$

Durch Addition und Subtraktion von (8) und (9) erhält man für die ursprünglichen Ströme I_1 und I_2:

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(I_{1_0} + I_{2_0}) \cos(2\pi\nu^+ t) + \frac{1}{2}(I_{1_0} - I_{2_0}) \cos(2\pi\nu^- t) \tag{12}$$
$$I_2(t) = \frac{1}{2}(I_{1_0} + I_{2_0}) \cos(2\pi\nu^+ t) - \frac{1}{2}(I_{1_0} - I_{2_0}) \cos(2\pi\nu^- t). \tag{13}$$

In dem System von gekoppelten Oszillatoren gibt es zwei Spezialfälle. Im ersten Fall werden beide Schwingkreise mit gleicher Amplitude und in Phase ausgelenkt, so gilt $I_{1_0} = I_{2_0}$. Die beiden Schwingkreise schwingen dann mit ν^+. Da sich die Ströme I_1 und I_2 ständig kompensieren, liegt am Koppelkondensator zu keiner Zeit eine Spannung an. Im zweiten Fall sind beide Schwingkreise mit der gleichen Amplitude aber entgegengesetzter Phase ausgelenkt, somit folgt $I_{1_0} = -I_{2_0}$. Die beiden Schwingkreise schwingen gegenphasig mit ν^- und am Koppelkondensator liegt eine maximale Spannung an. Diese beiden Fälle werden als Fundamentalschwingungen bezeichnet.

Im Gegensatz dazu stehen die Schwebungen; diese ergeben sich durch Auslenken von nur einem Schwingkreis. Es gilt zum Beispiel ($I_{1_0} \neq I_{2_0} = 0$) für eine Auslenkung des ersten Schwingkreises. Durch Umformungen von den Gleichungen (12) und (13) ergeben sich anschließend folgende Gleichungen:

$$I_1(t) = I_{1_0} \cos\left(\frac{1}{2} 2\pi(\nu^+ + \nu^-)t\right) \cos\left(\frac{1}{2} 2\pi(\nu^+ - \nu^-)t\right) \tag{14}$$
$$I_2(t) = I_{2_0} \sin\left(\frac{1}{2} 2\pi(\nu^+ + \nu^-)t\right) \sin\left(\frac{1}{2} 2\pi(\nu^+ - \nu^-)t\right). \tag{15}$$

Die Abbildung 2 zeigt den Verlauf der Ströme, das System schwingt mit der Frequenz $\frac{1}{2}(\nu^+ + \nu^-) \approx \nu^+$ und die Amplitude verändert sich mit der Schwebungsfrequenz $\nu^- - \nu^+$ zwischen den Extremwerten 0 und I_{1_0}. Für das Verhältnis gilt:

$$n = \frac{\nu^+ + \nu^-}{2(\nu^- - \nu^+)}. \tag{16}$$

Hier muss die Bedingung $\nu^+ \approx \nu^-$ erfüllt sein.

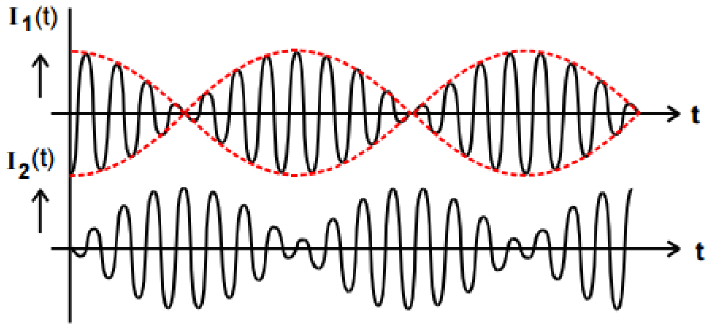

Abbildung 2: Verlauf der Ströme im Fall der Schwebung[1].

Ist die Amplitude von Oszillator 1 maximal und von Oszillator 2 null, so steckt die gesammte Energie im Oszillator 1. Mit der Zeit geht diese Energie in Oszillator 2 über, die Verhältnisse kehren sich um. Die Energie schwingt zwischen den beiden Oszillatoren mit der Schwebungsfrequenz hin und her.

1.4 Strom in Abhängigkeit von der Frequenz

Werden zwei gekoppelte Schwingkreise durch eine Sinusspannung zum Schwingen angeregt, so ergeben sich nach Abbildung 3 und mit Hilfe der Kirchhoffschen Maschenregel die folgende Gleichungen:

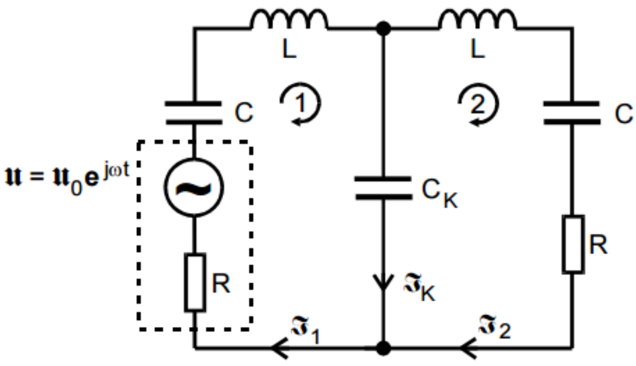

Abbildung 3: Gekoppelte Schwingkreise mit Sinusgenerator[1]

$$\text{Kreis 1:}\quad U = (Z_C + Z_L + Z_{C_R} + Z_R)I_1 - Z_{C_K}I_2 \tag{17}$$
$$\text{Kreis 2:}\quad 0 = (Z_C + Z_L + Z_{C_R} + Z_R)I_2 - Z_{C_K}I_1. \tag{18}$$

Für die Impedanzen gilt:

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C}, \quad Z_L = j\omega L, \quad Z_{C_K} = -j\frac{1}{\omega C_K}, \quad ZC = R.$$

Nach Elimination von I_1 und weiteren Rechnungen wie die Trennung in Real- und Imaginärteil, ergibt sich folgendes für den Betrag von I_2:

$$|I_2| = |U|\frac{1}{\sqrt{4\omega^2 C_K^2 R^2 Z(\omega)^2 + \left(\frac{1}{\omega C_K} - \omega C_K Z(\omega)^2 + \omega R^2 C_K\right)^2}}. \tag{19}$$

Anhand dieser Gleichung lässt sich erkennen, dass I_2 für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ gegen null läuft. Dazwischen liegen bei den Fundamentalfrequenzen ν^+ und ν^- die beiden Maxima der Leitwerte Λ_2. Für die Maxima gilt:

$$|\Lambda(\nu^+)| = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_k^2}{LC}}} \tag{20}$$
$$|\Lambda(\nu^-)| = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_k^2}{LC}\left(1 + \frac{C}{C_K}\right)}}. \tag{21}$$

Für diese gilt die Näherung $|\Lambda_2(\omega^{+/-})| \approx \frac{1}{2R}$. Der Stromverlauf erreicht an den Fundamentalfrequenzen ebenfalls Maxima.

2 Aufbau und Durchführung

2.1 Vorbereitung

Bevor der Versuch durchgeführt werden kann, ist es notwendig das die Resonanzfrequenzen der beiden Schwingkeise aufeinander abgestimmt werden. Bei dem Versuchsaufbau existiert ein Schwingkreis mit konstanter(1) und einer mit variablen(2) Kapazität. Zu erst muss die Resonanzfrequenz des ersten Schwingkreises gemessen werden. Dafür wird die Schaltung wie in Abbildung 4 aufgebaut.

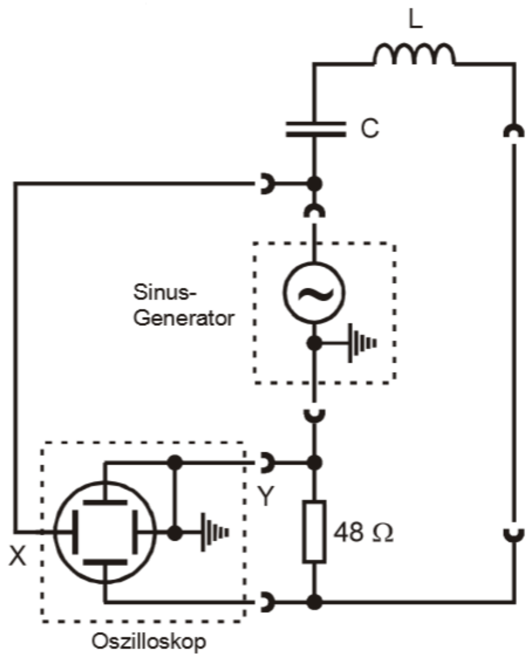

Abbildung 4: Schaltung zur bestimmung der Resonanzfrequenz eines Schwingkreis.[1]

Desweiteren wird das Oszilloskop in den X-Y-Betrieb geschaltet und die Frequenz am Sinus-Generator so geregelt, dass die Lissajous-Figur eine Gerade ergibt; dies bedeutet das die Frequenz der Resonanzfrequenz des Schwingkreises entspricht. Die Messung wird nun für den anderen Schwingkreis wiederholt mit dem Unteschied, dass die Frequenz am Sinus-Generator, die zuvor eingestellt wurde, konstant bleibt und nur die Kapazität so verändert wird, so dass wieder die Lissajous-Figur eine Gerade ist. Nun sind beide Resonanzfrequenzen aufeinander abgestimmt und es kann mit dem Versuch begonnen werden.

2.2 Durchführung

Für die Versuchsdurchführung wird nun die Schaltung wie in Abbildung 5 aufgebaut.

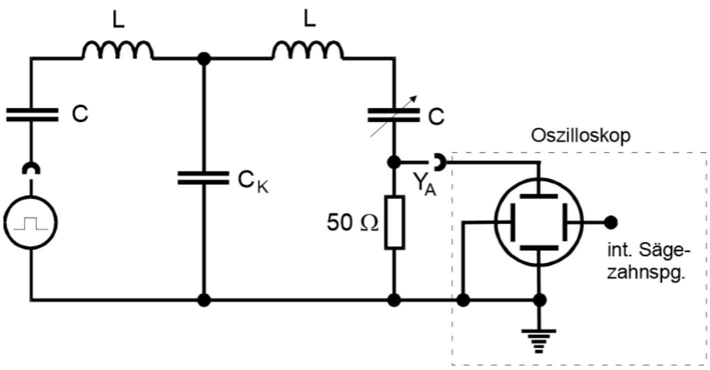

Abbildung 5: Schaltung zur Untersuchung von Schwebungen bei gekoppelten Schwingkreisen [1]

Nun wird mit einer Rechteckspannung der Schwingkreis 1 erregt; hier bei ist die anregende Frequenz deutlich geringer als die Resonanzfrequenzen. Dieser ist über den Koppelkondensator, variabler KapazitätC_k, mit dem anderen Schwingkreis 2 verbunden. Am Schwingkreis 2 wird mit Hilfe eines Ozilloskopes die Spannung aufgezeichnet. Das Ozilloskop zeigt eine Schwebung, wo nun das Verhältnis zwischen Schwingugs- und Schwebungsfrequenz aufgenommen wird. Dies wird für unterschiedliche C_k wiederholt.

Desweiteren werden die Fundamentalfrequenzen in Abhängigkeit von C_k des gekoppelten Schwingkreises gemessen. Hier für wird der Rechteck- durch eine Sinusgenerator ausgetauscht und außerdem noch mit anderen Eingang des Oszilloskop verbunden(6). Die Frequenz des Sinusgenerators wird um die in dem Kapitel 2.1 gemessenen Frequenzen variiert. Das Oszilloskop wird wieder im X-Y-Betrieb benutzt und eine Fundamentalfrequenz lässt sich messen , wenn die Lissajous-Figur eine Gerade ist. Dies geschied zweimal, da es einmal ν^+ und ν^- gibt. Dies wurde hierbei aber nicht mit den Lissajour-Figuren gemessen sondern in dem durch leichtes Verstellen der Frequenz, die Frequenzen ausgewählt wurde wo die Amplitude maximal war.

Die Fundamentalfrequenzen lassen sich ebenfalls durch das Frequenzspektrum ermitteln. Dafür wird der Sinus-Generator aus Abbildung 6 in den Sweepmodus geschaltet. Der Sweep wird so eingestellt, dass dieser unterhalb der in der Vorbereitung 2.1 gemessenen Frequenzen anfängt und oberhalb aufhört. Das Oszilloskop nimmt den Spannungsverlauf des 2. Schwingkreises auf. Die zwei Hochpunkte sind die beiden Fundamentalfrequenzen, wo der zeitlich Abstand zum Sweepanfang gemessen wird. Dies wird für die anderen Kapazitäten wiederholt.

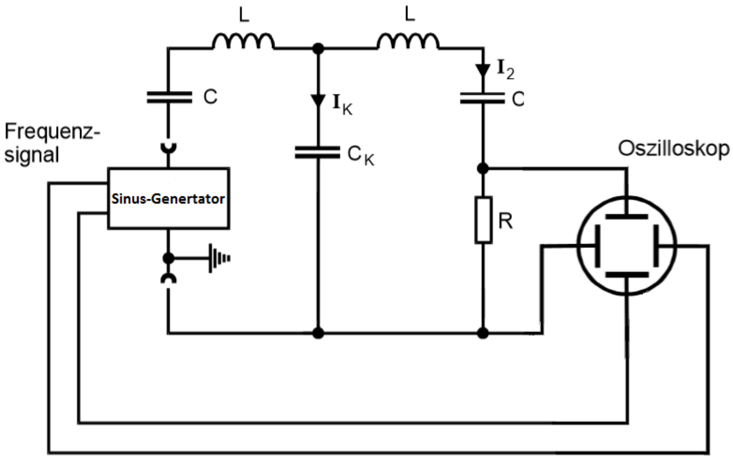

Abbildung 6: Schaltung zur Untersuchung von Fundamentalfrequenzen bei gekoppelten Schwingkreisen [1]

2.3 Eigenschaften der Bauteile

Für die Messungen werden Bauteile mit folgenden Eigenschaften eingesetzt:

Induktivität der Spule:

$$L = (24,0 \pm 1,2)\mathrm{mH}.$$

Kapazität des Kondensators:

$$C = (0,79 \pm 0,04)\mathrm{nF}.$$

Kapazität der Spule:

$$C_{Sp} = (28,0 \pm 1,4)\mathrm{pF}.$$

In der Tabelle 1 sind die einstellbaren Kapazitäten des Koppelkondensators aufgelistet.

Tabelle 1: Kapazitäten des Koppelkondensators

C_k in nF
1,0 ±0,2
2,2 ±0,4
2,7 ±0,5
4,7 ±0,9
6,8 ±1,4
8,2 ±1,6
10,0±2,0
12,0±2,4

3 Fehlerrechnung

Bei dem Versuch entstehen Messfehler; diese gilt es im Folgenden zu erörtern. Bei der Messung weicht die Kapazität des Koppelkondensators C_k laut Gerät um ±20% ab. Für die Werte C, L und C_{sp} gilt ein abgeschätzter Fehler von ±5%. Bei der Messung der Frequenz bei jeder Messreihe wird diese mit Hilfe des Ozilloskopes gemessen, da diese nicht explizit am Generator abgelesen werden konnte. Dadurch entsteht ein Fehler, da die Frequenzen nur durch Positionieren von Cursorn bestimmt werden, die nicht genau einzustellen sind. Dieser Fehler beträgt ±5kHz.
Die Fehlerfortpflanzung für die aus der Theorie berechneten einzelnen Frequenzen wird mitdem Programm Python mit Hilfe von der Bibliothek uncertainties durchgeführt.

4 Auswertung

4.1 Abstimmung der Resonanzfrequenz

Der Theoriewert für die Resonanzfrequenz ist gegeben durch Gleichung (10); diese muss angepasst werden, da die Spule ebenfalls eine geringe Kapazität C_{Sp} besitzt.
Es gilt somit:

$$\nu^{+} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC + C_{Sp}}} = (35,9 \pm 1,2) kHz. \tag{22}$$

Bei der Messung ist es nicht möglich beide Schwingkreise auf die gleiche Resonanzfrequenz abzustimmen, deshalb folgen zwei Messwerte:

$$f_1 = (32,89 \pm 5)\,\mathrm{kHz} \tag{23}$$
$$f_2 = (33,11 \pm 5)\,\mathrm{kHz} \tag{24}$$

4.2 Verhältnis von Schwingung und Schwebung

Der theoretische Wert für das Verhältnis ergibt sich nach Gleichung (16). Mit der Anpassung, bedingt durch die Kapazität C_{Sp} der Spule, gilt für ν^{+} und ν^{-}:

$$\nu^{+} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC + LC_{Sp}}} \tag{25}$$
$$\nu^{-} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)^{-1} + LC_{Sp}}}. \tag{26}$$

Die relative Abweichung von dem Verhältnis nach der Theorie n und dem gemessenen Verhältnis n_M errechnet sich nach:

$$a = \frac{|n_M - n|}{n}. \tag{27}$$

Für n_M wird, durch die geringe Ausprägung der Wellen, ein Ablesefehler von ± 1 angenommen.
Die errechneten Werte für das Verhätnis, nach Theorie und Messung, und die Abweichung finden sich in Tabelle 2

Tabelle 2: Verhältnis von Schwingungs- und Schwebungfrequenz von Theorie und Messwerten

C_k in nF	n_M	n	a
1,0		2,2 ±0,2	
2,2		3,8 ±0,6	
2,7	2 ±2	4,5 ±0,7	0,56
4,7	6 ±2	7,1 ±1,2	0,16
6,8	6 ±2	9,9 ±1,8	0,39
8,2	8 ±2	11,7 ±2,2	0,32
10,0	10±2	14,1 ±2,7	0,29
12,0	12±2	16,7 ±3,2	0,28

4.3 Bestimmung der Fundamentalfrequenzen

In Tabelle 3 werden die gemessenen Fundamentalfrequenzen f_n mit den theoretischen Frequenzen $\nu^{+/-}$ verglichen. Dies geschieht mit zwei unterschiedlichen Verfahren. Die theoretischen Frequenzen berechnen sich nach Gleichung (25) und (26). Ein Ablesefehler von ±5kHz wird abgeschätzt.

4.3.1 Ohne Sweep

In der Tabelle 3 sind die Messwerte der Fundamentalfrequenzen für die unterschiedlichen Koppelkondensatoren, die mit Hilfe von Lissajousfiguren und Spannungsmaxima gemessen werden, und die entsprechenden Theoriewerte aufgelistet.

Tabelle 3: Theorie und Messwerte der Fundamentalfrequenzen mit Aufbau 6 ohne Sweep

C_k in nF	f_1 in kHz	ν^+ in kHz	f_2 in kHz	ν^- in kHz
1,0±0,2	33,1±5	35,9 ±1,2	79,3±5	56,2±3,5
2,2±0,4	33,1±5	35,9 ±1,2	59,5±5	46,5±2,3
2,7±0,5	32,6±5	35,9 ±1,2	56,8±5	44,8±2,0
4,7±0,9	33,7±5	35,9 ±1,2	48,0±5	41,3±1,6
6,8±1,4	33,7±5	35,9 ±1,2	43,8±5	39,7±1,4
8,2±1,6	32,8±5	35,9 ±1,2	41,8±5	39,1±1,4
10,0±2,0	32,8±5	35,9 ±1,2	39,3±5	38,5±1,4
12,0±2,4	33,1±5	35,9 ±1,2	40,0±5	38,1±1,3

4.3.2 Mit Sweep

Nun wird eine Aufnahme des Frequenzspektrums mit Hilfe vom Sweep erstellt. Um aus dem gemessenen Freqzenzspektrum die Fundamentalfrequenzen zu errechnen, wird die

Gleichung (28) genutzt:

$$f_n = f_{start} + (f_{end} - f_{start})\frac{t_n}{T}. \tag{28}$$

Hierbei ist f_{start} die Startfrequenz, f_{end} die Endfrequenz und T die Dauer des Sweeps. f_{start} beträgt an dieser Stelle $(19,23 \pm 5)$kHz, $f_{end} = (97,66 \pm 5)$kHz und $T = 1s$. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 4 dargestellt. Die gemessenen Werte ähnenln denen aus

Tabelle 4: Theorie und Messwerte der Fundamentalfrequenzen mit Aufbau 6 mit Hilfe von Sweep.

	Zeitlicher Abstand t_n vom Sweepanfang					
C_k in nF	t_1 in s	t_2 in s	f_1 in kHz	ν^+ in kHz	f_2 in kHz	ν^- in kHz
1,0 ±0,2	180±5	784±5	33,3±4,2	35,9±1,2	80,7 ±4,1	56,2±3,5
2,2 ±0,4	176±5	524±5	33,0±4,2	35,9±1,2	60,3 ±3,6	46,5±2,3
2,7 ±0,5	180±5	476±5	33,3±4,2	35,9±1,2	56,6 ±3,6	44,8±2,0
4,7 ±0,9	176±5	368±5	33,0±4,2	35,9±1,2	48,1 ±3,7	41,3±1,6
6,8 ±1,4	188±5	324±5	33,9±4,2	35,9±1,2	44,6 ±3,8	39,7±1,4
8,2 ±1,6	180±5	300±5	33,3±4,2	35,9±1,2	42,8 ±3,8	39,1±1,4
10,0±2,0	180±5	276±5	33,3±4,2	35,9±1,2	40,9 ±3,9	38,5±1,4
12,0±2,4	176±5	260±5	33,0±4,2	35,9±1,2	39,6 ±3,9	38,1±1,3

der Messung ohne Sweep gemessenen Fundamentalfrequenzen.

5 Diskussion

Bei der Anpassung der Resonanzfrequenzen lassen sich die beiden Schwingkreise nicht genau auf die gleiche Resonanzfrequenz eichen. Es besteht eine Abweichung zwischen den Werten

$$f_1 = (32,89 \pm 5)\,\text{kHz} \tag{29}$$
$$f_2 = (33,11 \pm 5)\,\text{kHz} \tag{30}$$

von

$$Ab = 0,22\,\text{kHz}. \tag{31}$$

Diese Abweichung wirkt sich auf den gesamten Versuch aus und entsteht dadurch, dass sich zum einen die Kapazität nicht auf den benötigten Wert einstellen lässt, dies ist dem verwendeten Gerät geschuldet, und zum anderen führen die Ableseungenauigkeiten zu einer noch größeren Abweichung der beiden Resonanzfrequenzen.

Die Fehler bei den Verhältnissen von Schwingung und Schwebung ist ebenfalls durch

Ablesefehler und Justagefehler erklärbar, da bei manchen Kapazitäten keine oder nur eine ungenaue Periode erkennbar war. Dies lässt sich durch die Dämpfung erklären. Trotzdem kann gesagt werden, dass die Formel (16) zutrifft.

Bei den unterschiedlichen Messungen der Fundamentalfrequenzen ν^+ und ν^- stimmen die beiden gemessenen Werte der beiden Messvarianten fast überein. Werden nun die Theoriewerte hinzugezogen, liegen nur für ν^+ die Theoriewerte noch im Fehler der gemessenen Werte. Bei den Werten von ν^- weichen die gemessenen Werte bei geringeren Kapazitäten deutlich von der Theorie ab. Aber bei steigender Kapazität liegen wieder die Theoriewerte im Feher der gemessenen Werte. Diese Abweichung lässt sich durch einen nicht genau nachvollziehbaren systematischen Fehler erklären und variert ungefähr zwischen 2 % und 44 %. Aus dem Versuch lässt sich die Formel für ν^+ (25) und für ν^- (26) bestätigen. Für ν^- gilt dies nur ab höheren Kapazitäten. Die Messung mit Hilfe von Sweep lieferte genauere Messwerte als die ohne Sweep. Folglich ist die Messung mit Sweep geeigeneter für die Messung der Fundamentalfrequenzen eines gekoppelten Schwingkreises.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuch 355 Gekoppelte Schwingkreise*. 2015.