

VERSUCH NUMMER 355

## **Gekoppelte Schwingungen**

Ksenia Klassen  
ksenia.klassen@udo.edu

Dag-Björn Hering  
dag.hering@udo.edu

Durchführung: 17.11.2015

Abgabe: 24.11.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

## Inhaltsverzeichnis



Am Knotenpunkt A gilt laut Kirchhoffscher Knotenregel:

$$I_k = I_1 - I_2 \quad (1)$$

Für die Maschen 1 und 2 gilt:

$$0 = U_{1_C} + U_{1_L} + U_K \quad (2)$$

$$0 = U_{2_C} + U_{2_L} + U_K. \quad (3)$$

Mit  $U_L = L\dot{I}$  und  $U_C = \frac{1}{C} \int I dt$  erhält man, nach Einsetzen und Differenzieren nach  $t$ , zwei Differentialgleichungen:

$$L\ddot{I}_1 + \frac{1}{C}I_1 + \frac{1}{C}(I_1 - I_2) = 0 \quad (4)$$

$$L\ddot{I}_2 + \frac{1}{C}I_2 + \frac{1}{C}(I_1 - I_2) = 0. \quad (5)$$

Um die Dgln lösen zu können, werden sie zunächst entkoppelt, dies geschieht durch Addition bzw. Subtraktion der Gleichungen voneinander, ebenfalls werden die Summe bzw. die Differenz der Ströme als neue Variablen eingeführt:

$$L\frac{d^2}{dt^2}(I_1 + I_2) + \frac{1}{C}(I_1 + I_2) = 0 \quad (6)$$

$$L\frac{d^2}{dt^2}(I_1 - I_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)(I_1 - I_2) = 0. \quad (7)$$

Die Lösungen der Gleichungen lauten:

$$(I_1 + I_2)(t) = (I_{1_0} + I_{2_0}) \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad (8)$$

$$(I_1 - I_2)(t) = (I_{1_0} - I_{2_0}) \cos\left(\frac{t}{\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)^{-1}}}\right). \quad (9)$$

Die Schwingungsfrequenzen sind hierbei:

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (10)$$

$$\nu^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)^{-1}}}. \quad (11)$$

Durch Addition und Subtraktion von (8) und (9) erhält man für die ursprünglichen Ströme  $I_1$  und  $I_2$ :

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(I_{1_0} + I_{2_0}) \cos(2\pi\nu^+t) + \frac{1}{2}(I_{1_0} - I_{2_0}) \cos(2\pi\nu^-t) \quad (12)$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2}(I_{1_0} + I_{2_0}) \cos(2\pi\nu^+t) - \frac{1}{2}(I_{1_0} - I_{2_0}) \cos(2\pi\nu^-t). \quad (13)$$

In dem System von gekoppelten Oszillatoren gibt es zwei Spezialfälle. Im ersten Fall werden beide Schwingkreise mit gleicher Amplitude und in Phase ausgelenkt, so gilt  $I_{1_0} = I_{2_0}$ . Die beiden Schwingkreise schwingen dann mit  $\nu^+$ . Da sich die Ströme  $I_1$  und  $I_2$  ständig kompensieren, liegt am Koppelkondensator zu keiner Zeit eine Spannung an. Im zweiten Fall sind beide Schwingkreise mit der gleichen Amplitude aber entgegengesetzter Phase ausgelenkt, somit folgt  $I_{1_0} = -I_{2_0}$ . Die beiden Schwingkreise schwingen gegenphasig mit  $\nu^-$  und am Koppelkondensator liegt eine maximale Spannung an. Diese beiden Fälle werden als Fundamentalschwingungen bezeichnet.

Im Gegensatz dazu stehen die Schwebungen; diese ergeben sich durch Auslenken von nur einem Schwingkreis. Es gilt zum Beispiel ( $I_{1_0} \neq I_{2_0} = 0$ ) für eine Auslenkung des ersten Schwingkreises. Durch Umformungen von den Gleichungen (12) und (13) ergeben sich anschließend folgende Gleichungen:

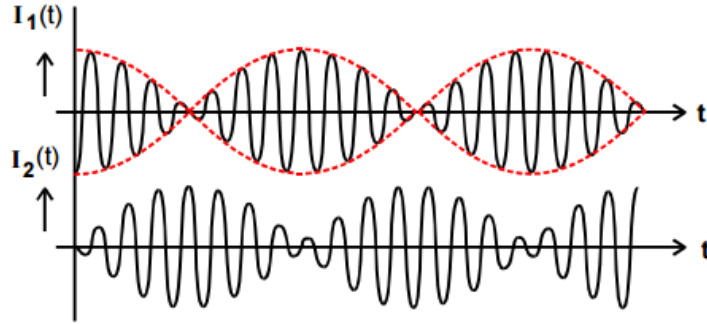
$$I_1(t) = I_{1_0} \cos\left(\frac{1}{2}2\pi(\nu^+ + \nu^-)t\right) \cos\left(\frac{1}{2}2\pi(\nu^+ - \nu^-)t\right) \quad (14)$$

$$I_2(t) = I_{2_0} \sin\left(\frac{1}{2}2\pi(\nu^+ + \nu^-)t\right) \sin\left(\frac{1}{2}2\pi(\nu^+ - \nu^-)t\right). \quad (15)$$

Die folgende Abbildung 2 zeigt den Verlauf der Ströme, das System schwingt mit der Frequenz  $\frac{1}{2}(\nu^+ + \nu^-) \approx \nu^+$  und die Amplitude verändert sich mit der Schwebungsfrequenz  $\nu^- - \nu^+$  zwischen den Extremwerten 0 und  $I_{10}$ . Für das Verhältnis gilt:

$$n = \frac{\nu^+ + \nu^-}{2(\nu^- - \nu^+)}. \quad (16)$$

Hier muss die Bedingung  $\nu^+ \approx \nu^-$  erfüllt sein.

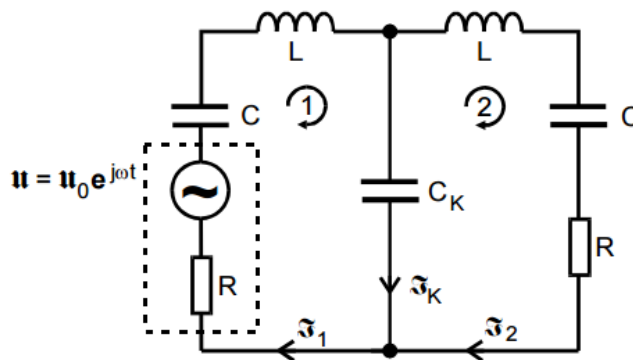


**Abbildung 2:** Verlauf der Ströme im Fall der Schwebung[1].

Ist die Amplitude von Oszillator 1 maximal und von Oszillator 2 null, so steckt die gesamte Energie im Oszillator 1. Mit der Zeit geht diese Energie in Oszillator 2 über, die Verhältnisse kehren sich um. Die Energie schwingt zwischen den beiden Oszillatoren mit der Schwebungsfrequenz hin und her.

## 1.4 Strom in Abhängigkeit von der Frequenz

Werden zwei gekoppelte Schwingkreise durch eine Sinusspannung zum Schwingen angeregt, so ergeben sich nach Abbildung 3 und mit Hilfe der Kirchhoffschen Maschenregel die folgende Gleichungen:



**Abbildung 3:** Gekoppelte Schwingkreise mit Sinusgenerator[1]

$$\text{Kreis 1: } U = (Z_C + Z_L + Z_{C_R} + Z_R)I_1 - Z_{C_K}I_2 \quad (17)$$

$$\text{Kreis 2: } 0 = (Z_C + Z_L + Z_{C_R} + Z_R)I_2 - Z_{C_K}I_1. \quad (18)$$

Für die Impedanzen gilt:

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C}, \quad Z_L = j\omega L, \quad Z_{C_K} = -j\frac{1}{\omega C_K}, \quad Z_C = R.$$

Nach Elimination von  $I_1$  und weiteren Rechnungen wie die Trennung in Real- und Imaginärteil, ergibt sich folgendes für den Betrag von  $I_2$ :

$$|I_2| = |U| \frac{1}{\sqrt{4\omega^2 C_K^2 R^2 Z(\omega)^2 + \left(\frac{1}{\omega C_K} - \omega C_K Z(\omega)^2 + \omega R^2 C_K\right)^2}}. \quad (19)$$

Anhand dieser Gleichung lässt sich erkennen, dass  $I_2$  für  $\omega \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow \infty$  gegen null läuft. Dazwischen liegen bei den Fundamentalfrequenzen  $\nu^+$  und  $\nu^-$  die beiden Maxima der Leitwerte  $A_2$ . Für die Maxima gilt:

$$|A(\nu^+)| = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC}}} \quad (20)$$

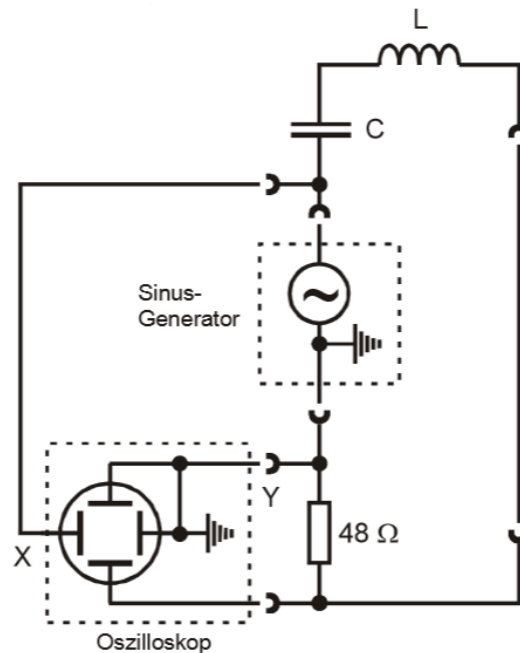
$$|A(\nu^-)| = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC} \left(1 + \frac{C}{C_K}\right)}}. \quad (21)$$

Für diese gilt die Näherung  $|A_2(\omega^{+/-})| \approx \frac{1}{2R}$ . Der Stromverlauf erreicht an den Fundamentalfrequenzen ebenfalls Maxima.

## 2 Aufbau und Durchführung

### 2.1 Vorbereitung

Bevor der Versuch durchgeführt werden kann, ist es notwendig, dass die Resonanzfrequenzen der beiden Schwingkreise aufeinander abgestimmt werden. Bei dem Versuchsaufbau existiert ein Schwingkreis mit konstanter(1) und einer mit variablen(2) Kapazität. Zuerst muss die Resonanzfrequenz des ersten Schwingkreises gemessen werden. Dafür wird die Schaltung wie in Abbildung 4 aufgebaut.



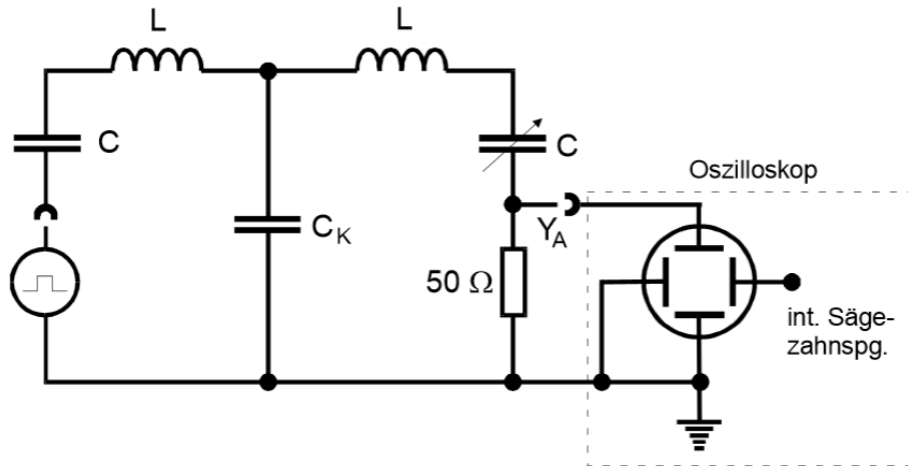
**Abbildung 4:** Schaltung zur Bestimmung der Resonanzfrequenz eines Schwingkreises.[1]

Desweiteren wird das Oszilloskop in den X-Y-Betrieb geschaltet und die Frequenz am Sinus-Generator so geregelt, dass die Lissajous-Figur eine Gerade ergibt; dies bedeutet, dass die Frequenz der Resonanzfrequenz des Schwingkreises entspricht. Die Messung wird nun für den anderen Schwingkreis wiederholt mit dem Unterschied, dass die Frequenz am Sinus-Generator, die zuvor eingestellt wurde, konstant bleibt und nur die Kapazität so verändert wird, so dass wieder die Lissajous-Figur eine Gerade ist. Nun sind beide Resonanzfrequenzen aufeinander abgestimmt und es kann mit dem Versuch begonnen werden.

### 2.2 Durchführung

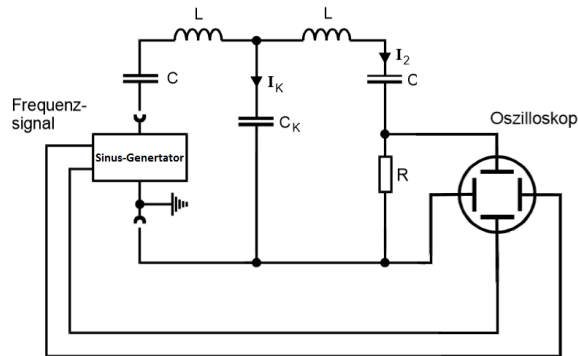
Für die Versuchsdurchführung wird nun die Schaltung wie in Abbildung 5 aufgebaut. Nun wird mit einer Rechteckspannung der Schwingkreis 1 erregt, hier bei ist die an-





**Abbildung 5:** Schaltung zur Untersuchung von Schwebungen bei gekoppelten Schwingkreisen [1]

regende Frequenz deutlich geringer als die Resonanzfrequenzen. Dieser ist über den Koppelkondensator, variabler Kapazität  $C_k$ , mit dem anderen Schwingkreis 2 verbunden. Am Schwingkreis 2 wird mit Hilfe eines Oszilloskopes die Spannung aufgezeichnet. Das Oszilloskop zeigt eine Schwebung, wo nun das Verhältnis zwischen Schwingungs- und Schwebungsfrequenz aufgenommen wird. Dies wird für unterschiedliche  $C_k$  wiederholt. Desweiteren werden die Fundamentalfrequenzen in Abhängigkeit von  $C_k$  des gekoppelten Schwingkreises gemessen. Hier für wird der Rechteck- durch eine Sinusgenerator ausgetauscht und außerdem noch mit anderen Eingang des Oszilloskop verbunden(6)



**Abbildung 6:** Schaltung zur Untersuchung von Fundamentalfrequenzen bei gekoppelten Schwingkreisen [1]

Die Frequenz des Sinusgenerators wird um die in dem Kapitel 2.1 gemessenen Frequenzen variiert. Das Oszilloskop wird wieder im X-Y-Betrieb benutzt und eine Fundamentalfrequenz lässt sich messen , wenn die Lissajous-Figur eine Gerade ist. Dies geschied zweimal,

da es einmal  $\nu^+$  und  $\nu^-$  gibt. Dies wurde hierbei aber nicht mit den Lissajour-Figuren gemessen sondern in dem durch leichtes Verstellen der Frequenz, die Frequenzen ausgewählt wurde wo die Amplitude maximal war. Somit wurde auch deutlich ob es sich um  $\nu^+$  oder  $\nu^-$  handelte.

Die Fundamentalfrequenzen lassen sich ebenfalls durch das Frequenzspektrum ermitteln. Dafür wird der Sinus-Generator aus Abbildung 6 in den Sweepmodus geschaltet. Der Sweep wird so eingestellt, dass dieser unterhalb der in der Vorbereitung 2.1 gemessenen Frequenzen anfängt und oberhalb aufhört. Das Oszilloskop nimmt den Spannungsverlauf des 2. Schwingkreises auf. Die zwei Hochpunkte sind die beiden Fundamentalfrequenzen, wo der zeitlich Abstand zum Sweepanfang gemessen wird. Dies wird für die anderen Kapazitäten wiederholt.

### 2.3 Eigenschaften der Bauteile

Für die Messungen werden Bauteile mit folgenden Eigenschaften eingesetzt:

Induktivität der Spule:

$$L = (24,0 \pm 1,2) \text{mH}$$

Kapazität des Kondensators:

$$C = (0,79 \pm 0,04) \text{nF}$$

Kapazität der Spule:

$$C_{Sp} = (28,0 \pm 1,4) \text{pF}$$

**Tabelle 1:** Kapazitäten des Koppelkondensators

$C_k$ in nF
1,0 $\pm$ 0,2
2,2 $\pm$ 0,4
2,7 $\pm$ 0,5
4,7 $\pm$ 0,9
6,8 $\pm$ 1,4
8,2 $\pm$ 1,6
10,0 $\pm$ 2,0
12,0 $\pm$ 2,4

### 3 Fehlerrechnung

Bei dem Versuch entstehen Messfehler; diese gilt es im Folgenden zu erörtern. Bei der Messung weicht die Kapazität des Koppelkondensators  $C_k$  laut Gerät um  $\pm 20\%$  ab. Für die Werte  $C$ ,  $L$  und  $C_{sp}$  gilt ein abgeschätzter Fehler von  $\pm 5\%$ . Bei der Messung der Frequenz bei jeder Messreihe wird diese mit Hilfe des Oszilloskopes gemessen, da diese nicht explizit am Generator abgelesen werden kann. Dadurch entsteht ein Fehler, da die Frequenzen nur durch Positionieren von Cursors bestimmt werden, die nicht genau einzustellen sind. Dieser Fehler beträgt  $\pm 5\text{kHz}$ .

Die Fehlerfortpflanzung für die aus der Theorie berechneten einzelnen Frequenzen wird mit dem Programm Python mit Hilfe von der Bibliothek `uncertainties` ausgeführt.

## 4 Auswertung

### 4.1 Abstimmung der Resonanzfrequenz

Der Theoriewert für die Resonanzfrequenz ist gegeben durch Gleichung (10); diese muss angepasst werden, da die Spule ebenfalls eine geringe Kapazität  $C_{Sp}$  besitzt.

Es gilt somit:

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC + C_{Sp}}} = (35,9 \pm 1,2) \text{ kHz}. \quad (22)$$

Der Fehler errechnet sich mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung (??). Bei der Messung ist es nicht möglich beide Schwingkreise auf die gleiche Resonanzfrequenz abzustimmen, deshalb folgen zwei Messwerte:

$$f_1 = (32,89 \pm 5) \text{ kHz} \quad (23)$$

$$f_2 = (33,11 \pm 5) \text{ kHz} \quad (24)$$

### 4.2 Verhältnis von Schwingung und Schwebung

Der theoretische Wert für das Verhältnis ergibt sich nach Gleichung (16). Mit der Anpassung, bedingt durch die Kapazität  $C_{Sp}$  der Spule, gilt für  $\nu^+$  und  $\nu^-$ :

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC + LC_{Sp}}} \quad (25)$$

$$\nu^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)^{-1} + LC_{Sp}}}. \quad (26)$$

Die relative Abweichung von dem Verhältnis nach der Theorie  $n$  und dem gemessenen Verhältnis  $n_M$  errechnet sich nach:

$$a = \frac{|n_M - n|}{n} \quad (27)$$

Für  $n_M$  wird, durch die geringe Ausprägung der Wellen, ein Ablesefehler von  $\pm 1$  angenommen.

Die errechneten Werte für das Verhältnis, nach Theorie und Messung, und die Abweichung finden sich in Tabelle ??

### 4.3 Bestimmung der Fundamentalfrequenzen

In Tabelle ?? werden die gemessenen Fundamentalfrequenzen  $f_n$  mit den theoretischen Frequenzen  $\nu^{+/-}$  verglichen. Dies geschieht mit zwei unterschiedlichen Verfahren. Die theoretischen Frequenzen berechnen sich nach Gleichung (25) und (26). Ein Ablesefehler von  $\pm 5 \text{ kHz}$  wird abgeschätzt.

**Tabelle 2:** Verhältnis von Schwingungs- und Schwebungsfrequenz von Theorie und Messwerten

$C_k$ innF	$n_M$	$n$	$a$
1,0		$2,2 \pm 0,2$	
2,2		$3,8 \pm 0,6$	
2,7	$2 \pm 2$	$4,5 \pm 0,7$	0,56
4,7	$6 \pm 2$	$7,1 \pm 1,2$	0,16
6,8	$6 \pm 2$	$9,9 \pm 1,8$	0,39
8,2	$8 \pm 2$	$11,7 \pm 2,2$	0,32
10,0	$10 \pm 2$	$14,1 \pm 2,7$	0,29
12,0	$12 \pm 2$	$16,7 \pm 3,2$	0,28

#### 4.3.1 Ohne Sweep

In der Tabelle ?? sind die Messwerte der Fundamentalfrequenzen für die unterschiedlichen Koppelkondensatoren, die mit Hilfe von Lissajousfiguren und Spannungsmaxima gemessen werden, und die entsprechenden Theoriewerte aufgelistet.

**Tabelle 3:** Theorie und Messwerte der Fundamentalfrequenzen mit Aufbau 6 ohne Sweep

$C_k$ in nF	$f_1$ in kHz	$\nu^+$ in kHz	$f_2$ in kHz	$\nu^-$ in kHz
$1,0 \pm 0,2$	$33,1 \pm 5$	$35,9 \pm 1,2$	$79,3 \pm 5$	$56,2 \pm 3,5$
$2,2 \pm 0,4$	$33,1 \pm 5$	$35,9 \pm 1,2$	$59,5 \pm 5$	$46,5 \pm 2,3$
$2,7 \pm 0,5$	$32,6 \pm 5$	$35,9 \pm 1,2$	$56,8 \pm 5$	$44,8 \pm 2,0$
$4,7 \pm 0,9$	$33,7 \pm 5$	$35,9 \pm 1,2$	$48,0 \pm 5$	$41,3 \pm 1,6$
$6,8 \pm 1,4$	$33,7 \pm 5$	$35,9 \pm 1,2$	$43,8 \pm 5$	$39,7 \pm 1,4$
$8,2 \pm 1,6$	$32,8 \pm 5$	$35,9 \pm 1,2$	$41,8 \pm 5$	$39,1 \pm 1,4$
$10,0 \pm 2,0$	$32,8 \pm 5$	$35,9 \pm 1,2$	$39,3 \pm 5$	$38,5 \pm 1,4$
$12,0 \pm 2,4$	$33,1 \pm 5$	$35,9 \pm 1,2$	$40,0 \pm 5$	$38,1 \pm 1,3$

#### 4.3.2 Mit Sweep

Nun wird eine Aufnahme des Frequenzspektrums mit Hilfe vom Sweep erstellt. Um aus dem gemessenen Frequenzspektrum die Fundamentalfrequenzen zu errechnen, wird die Gleichung (??) genutzt:

$$f_n = f_{start} + (f_{end} - f_{start}) \frac{t_n}{T}. \quad (28)$$

Hierbei ist  $f_{start}$  die Startfrequenz,  $f_{end}$  die Endfrequenz und  $T$  die Dauer des Sweeps.  $f_{start}$  beträgt an dieser Stelle  $(19,23 \pm 5)$  kHz,  $f_{end} = (97,66 \pm 5)$  kHz und  $T = 1$  s. Die Ergebnisse sind in der Tabelle ?? dargestellt.

**Tabelle 4:** Theorie und Messwerte der Fundamentalfrequenzen mit Aufbau 6 mit Hilfe von Sweep.

$C_k$ in nF	Zeitlicher Abstand $t_n$ vom Sweepanfang		$f_1$ in kHz	$\nu^+$ in kHz	$f_2$ in kHz	$\nu^-$ in kHz
	$t_1$ in s	$t_2$ in s				
1,0 $\pm$ 0,2	180 $\pm$ 5	784 $\pm$ 5	33,3 $\pm$ 4,2	35,9 $\pm$ 1,2	80,7 $\pm$ 4,1	56,2 $\pm$ 3,5
2,2 $\pm$ 0,4	176 $\pm$ 5	524 $\pm$ 5	33,0 $\pm$ 4,2	35,9 $\pm$ 1,2	60,3 $\pm$ 3,6	46,5 $\pm$ 2,3
2,7 $\pm$ 0,5	180 $\pm$ 5	476 $\pm$ 5	33,3 $\pm$ 4,2	35,9 $\pm$ 1,2	56,6 $\pm$ 3,6	44,8 $\pm$ 2,0
4,7 $\pm$ 0,9	176 $\pm$ 5	368 $\pm$ 5	33,0 $\pm$ 4,2	35,9 $\pm$ 1,2	48,1 $\pm$ 3,7	41,3 $\pm$ 1,6
6,8 $\pm$ 1,4	188 $\pm$ 5	324 $\pm$ 5	33,9 $\pm$ 4,2	35,9 $\pm$ 1,2	44,6 $\pm$ 3,8	39,7 $\pm$ 1,4
8,2 $\pm$ 1,6	180 $\pm$ 5	300 $\pm$ 5	33,3 $\pm$ 4,2	35,9 $\pm$ 1,2	42,8 $\pm$ 3,8	39,1 $\pm$ 1,4
10,0 $\pm$ 2,0	180 $\pm$ 5	276 $\pm$ 5	33,3 $\pm$ 4,2	35,9 $\pm$ 1,2	40,9 $\pm$ 3,9	38,5 $\pm$ 1,4
12,0 $\pm$ 2,4	176 $\pm$ 5	260 $\pm$ 5	33,0 $\pm$ 4,2	35,9 $\pm$ 1,2	39,6 $\pm$ 3,9	38,1 $\pm$ 1,3

Die gemessenen Werte ähneln denen aus der Messung ohne Sweep gemessenen Fundamentalfrequenzen.

## 5 Diskussion

Bei der Anpassung der Resonanzfrequenzen lassen sich die beiden Schwingkreise nicht genau auf die gleiche Resonanzfrequenz eichen. Es besteht eine Abweichung zwischen den Werten

$$f_1 = (32,89 \pm 5) \text{ kHz} \quad (29)$$

$$f_2 = (33,11 \pm 5) \text{ kHz} \quad (30)$$

von

$$Ab = 0,22 \text{ kHz}. \quad (31)$$

Diese Abweichung wirkt sich auf den gesamten Versuch aus und entsteht dadurch, dass sich zum einen die Kapazität nicht auf den benötigten Wert einstellen lässt, dies ist dem verwendeten Gerät geschuldet, und zum anderen führen die Ableseungenauigkeiten zu einer noch größeren Abweichung der beiden Resonanzfrequenzen.

Die Fehler bei den Verhältnissen von Schwingung und Schwebung ist ebenfalls durch Ablesefehler und Justagefehler erklärbar, da bei manchen Kapazitäten keine oder nur eine ungenaue Periode erkennbar war. Dies lässt sich durch die Dämpfung erklären. Trotzdem kann gesagt werden, dass die Formel (16) zutrifft.

Bei den unterschiedlichen Messungen der Fundamentalfrequenzen  $\nu^+$  und  $\nu^-$  stimmen die beiden gemessenen Werte der beiden Messvarianten fast überein. Werden nun die Theoriewerte hinzugezogen, liegen nur für  $\nu^+$  die Theoriewerte noch im Fehler der gemessenen Werte. Bei den Werten von  $\nu^-$  weichen die gemessenen Werte bei geringeren Kapazitäten deutlich von der Theorie ab. Aber bei steigender Kapazität liegen wieder die Theoriewerte im Fehler der gemessenen Werte. Diese Abweichung lässt sich durch einen nicht genau nachvollziehbaren systematischen Fehler erklären und variiert ungefähr zwischen 2 % und 44 %. Aus dem Versuch lässt sich die Formel für  $\nu^+$  (25) und für  $\nu^-$  (??) bestätigen. Für  $\nu^-$  gilt dies nur ab höheren Kapazitäten. Die Messung mit Hilfe von Sweep lieferte genauere Messwerte als die ohne Sweep. Folglich ist die Messung mit Sweep geeigneter für die Messung der Fundamentalfrequenzen eines gekoppelten Schwingkreises.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 355 Gekoppelte Schwingkreise*. 2015.