VERSUCH NUMMER 107

Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler

Ksenia Klassen
ksenia.klassen@udo.edu

Dag-Björn Hering
dag.hering@udo.edu

Durchführung: 15.12.2015

Abgabe: 5.1.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie **3**

2 Durchführung **3**
2.1 Fehlerrechnung 5

3 Auswertung **6**
3.1 Volumen und Dichte 6
3.2 Berechnung der Apparatekonstante 7
3.3 Viskosität bei Temperaturänderung 8
3.4 Bestimmung der Andradeschen Gleichung 8
3.5 Reynoldsche Zahl 10

4 Diskussion **11**

Literatur **11**

1 Theorie

[2] Bewegt sich ein Körper in einer Flüssigkeit, so wirken auf ihn die stokesche Reibungskraft,

$$\vec{F}_{\mathrm{R}} = 6\pi\eta v r, \tag{1}$$

mit η als dynamische Viskosität und v der Kugelgeschwindigkeit, die Schwerkraft $\vec{F}_{\mathrm{G}}$ und die Auftriebskraft $\vec{F}_{\mathrm{A}}$. Die Reibungskraft wirkt entgegen der Bewegungsrichtung, somit stellt sich ein Kräftegleichgewicht ein und der Körper, in diesem Fall eine Kugel, fällt dann mit konstanter Geschwindigkeit. Die Fallvorrichtung ist so ausgelegt, dass beim Eintauchen keine Verwirbelungen entstehen. Eine wirbelfreie Strömung wird als laminar bezeichnet, ein Maß hierfür ist die Reynoldsche Zahl, berechnet nach

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta}[3]. \tag{2}$$

Die Formel für die Reynoldsche Zahl bezieht sich auf Rohrströmungen. ρ ist die Dichte der Flüssigkeit, η die dynamische Viskosität der Flüssigkeit, v die Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit gegenüber des Körpers und d der Durchmesser des Rohrs. Die kritische Reynoldzahl $Re_{\mathrm{krit}} = 2040$ gibt den Übergang zu turbulenten Strömungen an.[1] Die dynamische Viskosität η lässt sich aus der Fallzeit t, Flüssigkeitsdichte ρ_{FL} und Kugeldichte ρ_{PK} bestimmen. K ist dabei eine Apparaturkonstante, die Fallhöhe und und Kugelgeometrie enthält, für η gilt:

$$\eta = K(\rho K - \rho FL) \cdot t \tag{3}$$

Die dynamische Viskösitat ist ebenfalls Temperaturabhängig somit gilt ebenfalls die Beziehung:

$$\eta(T) = Ae^{\frac{B}{T}}, \tag{4}$$

A und B sind hierbei Konstanten.

2 Durchführung

Am Anfang des Versuch werden die zwei Kugeln gewogen und mehrmals vermessen. Zuerst wird der Versuch mit der kleineren Kugel durchgeführt, dafür wird die Röhre des Kugelfall-Viskosimeters siehe Abbildung 1 mit destilliertem Wasser und der kleineren Kugel aufgefüllt und, ohne Luft einzuschließen, verschlossen. Die Messung besteht darin, dass die Zeit mehrmals gemessen wird, die die Kugel in der Flüssigkeit benötigt, um eine makierte Strecke zu sinken, ist die Kugel unten angekommen lässt sich die Röhre um 180° drehen und die Messung wiederholen. Die kleinere Kugel wird nun gegen die größere Kugel ausgetauscht und mit dieser wird ebenfalls die Messung durchgeführt. Nun wir durch ein Thermostat die Temperatur des destillierten Wassers verändert, wieder wird die Messung wie oben beschrieben, für unterschiedliche Temperaturen, wiederholt.

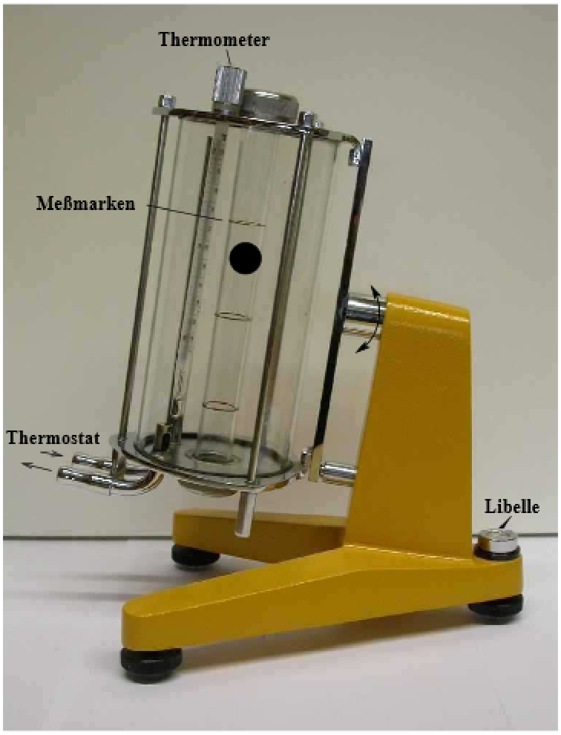

Abbildung 1: Die Abblidung zeigt das verwendete Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler.[2]

2.1 Fehlerrechnung

In der Auswertung müssen Mittelwerte und Standartabweichungen berechnet werden. Die Formel für die Mittelwerte lautet

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{5}$$

und für die Standardabweichung ergibt sich:

$$\tag{6}$$

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(v_j - \bar{v_i})^2} \tag{7}$$

mit v_j mit $j = 1, .., n$ als Wert mit zufällig behafteten Fehlern.

Diese werden mit Hilfe von Numpy 1.9.2, einer Erweiterung von Python 3.2.0, berechnet. Die Fehlerfortpflanzung wird mit der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung berechnet (8).

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 ...} \tag{8}$$

Diese wird xon der Erweiterung Uncertainties 2.4.6.1 von Python 3.2.0 übernommen.

Desweitern wird in der Auswertung Lineare Regression benutzt. um die Konstanten A und B aus einen Gleichung der Form

$$y(x) = A + B \cdot x \tag{9}$$

zu berechnen. B errechnet sich hierbei aus der Formel

$$B = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}. \tag{10}$$

und A durch die Geleichung

$$\tag{11}$$

$$A = \overline{y} - B \cdot \overline{x}. \tag{12}$$

Die Ungenauigkeit von A und B ergibt sich aus der mittleren Streuung:

$$\tag{13}$$

$$s_{\mathrm{y}} = \sqrt{\frac{1}{N-2} \cdot \sum_{i=1}^{N}(y_i - A - B \cdot x_i)^2} \tag{14}$$

Für die Ungenauigkeit von B gilt:

$$\begin{align} \tag{15} \\ s_\mathrm{B} &= s_\mathrm{y} \cdot \sqrt{\frac{1}{N \cdot \left(\overline{x^2} - (\overline{x})^2\right)}} \tag{16} \end{align}$$

Für die Ungenauigkeit von A gilt:

$$\begin{align} \tag{17} \\ s_\mathrm{A} &= s_\mathrm{B} \cdot \sqrt{\overline{x^2}} \tag{18} \end{align}$$

Für die Lineare Regression wird die Erweiterung Scipy 0.15.1 für Python 3.2.0 benutzt.

3 Auswertung

3.1 Volumen und Dichte

Zuerst werden die Mittelwerte aus den gemessenen Werte des Durchmesser der kleineren und der größeren Kugel bestimmt.

$$\begin{align} d_\mathrm{kl} &= (1,546 \pm 0.007)\mathrm{cm} \tag{19} \\ d_\mathrm{gr} &= (1,561 \pm 0.006)\mathrm{cm} \tag{20} \end{align}$$

Dadurch lässt sich nun das Volumen der beiden Kugel mit Hilfe der Formel (21) berechnen:

$$V_\mathrm{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d_\mathrm{Kugel}}{2}\right)^3 \tag{21}$$

Für die kleinere Kugel ergibt sich dann

$$\begin{align} \tag{22} \\ V_\mathrm{kl} &= (1,935 \pm 0,026)\mathrm{cm}^3 \tag{23} \end{align}$$

und für die größere Kugel

$$\begin{align} \tag{24} \\ V_\mathrm{gr} &= (1,991 \pm 0,023)\mathrm{cm}^3 \tag{25} \\ \tag{26} \end{align}$$

Durch das Volumen und die gemessenen Massen der Kugeln kann nun die Dichten der Kugeln mit der Formel (27) bestimmt werden.

$$\rho_\mathrm{Kugel} = \frac{m}{V} \tag{27}$$

Masse der Kugeln:

$$\tag{28}$$
$$m_{\text{kl}} = 4,46\text{g} \tag{29}$$
$$m_{\text{gr}} = 4,96\text{g} \tag{30}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Dichten

$$\tag{31}$$
$$\rho_{\text{kl}} = (2,305 \pm 0,031)\text{g}\,\text{cm}^{-3} \tag{32}$$
$$\rho_{\text{gr}} = (2,492 \pm 0,029)\text{g}\,\text{cm}^{-3} \tag{33}$$

3.2 Berechnung der Apparatekonstante

Nun wird die Apparatekontante für die größere Kugel K_{gr} aus der Formel (3) berechnet. Dafür werden erst die gemessenen Zeiten aus der Tabelle 1 gemittelt.

Tabelle 1: Zeiten der Kugeln bei $294,15\text{K}$.

t_{kl}/s bei einer Strecke von 10cm	t_{gr}/s bei einer Strecke von 5cm
12,44	41,41
12,36	41,13
12,59	41,62
13,10	41,93
12,63	41,25
12,21	42,29
12,56	41,30
12,69	41,89
12,69	41,10
12,44	42,00

Für gemittelten Werte ergibt sich:

$$\bar{t}_{\text{kl}} = (12,57 \pm 0,23)\text{s} \tag{34}$$
$$\bar{t}_{\text{gr}} = (41,59 \pm 0,39)\text{s} \tag{35}$$

Da die größere Kugel bei der Messung nur 5cm zurrücklegt, muss die Zeit verdoppelt werden, damit sich die Apparatekonstante K_{gr} auch auf 10cm bezieht. Dies ist notwendig, damit diese für weitere Rechnungen benutzet werden kann. Folglich wird

$$\tag{36}$$
$$\bar{t}_{\text{gr}} = (83,18 \pm 0,78)\text{s} \tag{37}$$

verwendet. Da die Apparatekonstante

$$ \tag{38} $$
$$K_{\mathrm{kl}} = 0,07640\mathrm{mPa\,cm^3\,g^{-1}} \tag{39}$$
$$ \tag{40} $$

gegebene ist, lässt sich die Viskosität durch einsetzen der gemessenen Werte der kleineren Kugel in die Formel 3 berechen. Für die Viskosität ergibt somit sich:

$$\eta = (1,26 \pm 0,04)\mathrm{mPa\,s}. \tag{41}$$

Wird die Formel (3) nun nach der Apparatekostante umgestellt, ergibt sich

$$ \tag{42} $$
$$\mathrm{K} = \frac{\eta}{(\rho_{\mathrm{K}} - \rho_{\mathrm{Fl}}) \cdot t} \tag{43}$$

Durch die Formel (43) lässt sich nun $\mathrm{K_{gr}}$ bestimmen, indem nun die berechnete Viskosität, Dichte der größeren Kugel und ihrer gemittelten Zeit in die Gleichung einsetzt werden.

$$ \tag{44} $$
$$\mathrm{K_{gr}} = (10.1 \pm 0.4)\mathrm{\mu Pa\,cm^3\,g^{-1}} \tag{45}$$

3.3 Viskosität bei Temperaturänderung

Die gemittelten Zeiten für die unterschiedlichen Temperaturen die in der Tabelle 2 zusehen sind wurden nur mit der großen Kugel gemessen. Bei der Berechnung der Viskositäten wurde angenommen, dass die Dichte des Wassers bei unterschiedlichen Temperaturen ungefähr konstant bleib.

3.4 Bestimmung der Andradeschen Gleichung

Um die Konstanten A und B aus der Andradeschen Gleichung (4) zu bestimmen werden die Werte der Temperatur und der Viskosität in der Form $\ln(\eta)$ gegen $1/T$ in dem Graphen 2 aufgetragen.

Tabelle 2: gemittelte Zeiten für eine Strecke von 10cm bei unterschiedlichen Temperaturen und die sich daraus aus Formel (3) ergebenen Viskositäten.

Temperatur T/K	Zeitmittelwert $\bar{t}$/s	Viskosität η/mPa s
294,15±2,0	83,18±0,79	1,26±0,04
300,65±2,0	70,5 ±0	1,07±0,03
303,65±2,0	65,81±0,09	0,99±0,03
307,15±2,0	61,89±0,23	0,93±0,03
310,15±2,0	58,37±0,12	0,88±0,03
315,15±2,0	53,41±0,04	0,81±0,03
320,15±2,0	48,94±0,17	0,74±0,02
325,15±2,0	44,62±0,12	0,67±0,02
330,65±2,0	41,75±0	0,06±0,02
334,15±2,0	39,69±0,09	0,60±0,02

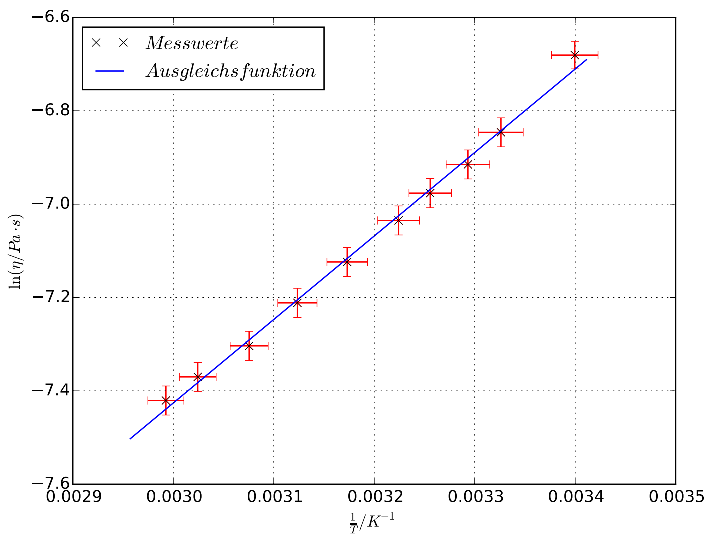

Abbildung 2: $\ln(\eta)$ gegen $1/T$ aus der Tabelle 2 aufgetragen

Die Andradesche Gleichung sieht somit wie folgt aus:

$$\ln(\eta) = \ln\left(A \exp\left(\frac{B}{T}\right)\right). \tag{46}$$

Diese lässt sich nun in die Graden Gleichung

$$\ln(\eta) = B \cdot \frac{1}{T} + \ln(A) \tag{47}$$

unformen. Somit kann nun die Lineare Regression benutzt werden, um die Kostanten B und A zu erhalten. Aus der Linearen Regression ergibt sich für B

$$B = 1788,46 \pm 39,56, \tag{48}$$

für $\ln(A)$

$$\tag{49}$$

$$\ln(A) = 12,79 \pm 0,13 \tag{50}$$

und somit für A

$$\tag{51}$$

$$A = (2,78 \pm 0,35) \cdot 10^{-6}. \tag{52}$$

$$\tag{53}$$

3.5 Reynoldsche Zahl

Als letztes wird durch die Reynoldsche Zahl noch überprüft, ob die hier vorkommene Strömung laminar ist. Dafür wird die Raynoldsche Zahl mit Hilfe der Formel (2) berechnet. Da sich der Durchmesser der Rohre nicht bestimmen ließ, wird der Durchmesser der größeren Kugel verwendet. Außerdem muss für die größere Kugel nur die geringste Zeit überprüft werden, weil alle anderen Werte durch die $1/(\eta \cdot t)$ Abhängigkeit unter diesem Wert liegen. Für die kleinere Kugel ergibt sich

$$Re_{\mathrm{kl}} = 97,29 \pm 4,22 \tag{54}$$

und für die größere Kugel bei der kürzesten Zeit

$$\tag{55}$$

$$Re_{\mathrm{gr}} = 64,59 \pm 2,04. \tag{56}$$

laut dem Kapitel 1 handel es sich bei beiden um eine laminare Strömung, da die Werte der beiden Reynoldschen Zahlen kleiner als 2040 sind.

4 Diskussion

Das Experiment zeigt, dass die Viskosität von Wasser sich bei Erhöhung der Temperatur verringert und sich sowohl durch die Formel (3), als auch durch die Formel (4) berechent lässt. außerdem liegt die berechnete Ausgleichsgrade im Bereich der angenommenen Messfehler, dies bestätigt ebenfalls die Geleichungen. Jedoch weicht die durch den Versuch bestimmten Viskosität bei ungefähr Raumtempertaur(20°)

$$\eta_{\text{exp}} = 1,26\,\text{Pa}\,\text{s} \tag{57}$$

von dem Literaturwert

$$\eta_{\text{lit}} = 1\,\text{Pa}\,\text{s} \tag{58}$$

um 26% ab. Diese relative Abweichung lässt sich durch systematrische Fehler bei der Messung begründen. Zum Beispiel werden die Zeiten bei dem Versuch nur mit einer Stoppuhr gemessen, die per Hand gestoppt werden. Ebenfalls wird die Apparatekonstante nur aus einer Anderen, im Skript gegebenen, berechnet und nicht expliziet für die große Kugel bestimmt. Desweiteren wird die Temperatur des destillierten Wassers nicht explizit in der Röhre gemessen, sondern nur an einem Thermostat abgelesen. Dies führt zur einer ungenauen Temperaturbestimmung. Trotzdem kann gesagt werden, dass der Versuch ,wenn die systematrischen Fehler minimiert werden, sich zur Viskositätbestimmung eignet.

Literatur

[1] *Die Lösung eines alten Rätsels: Der kritische Punkt der Rohrströmung.* URL: `https://www.mpg.de/4804411/Rohrstroemung_kritische_Punkt` (besucht am 03. 01. 2016).

[2] TU Dortmund. *Skript zum Versuch Nr.107 Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler.* 2014.

[3] *Viskosität und Reynaoldszahlen.* URL: `http://www.uni-oldenburg.de/fileadmin/user_upload/physik/ag/physikpraktika/download/GPR/pdf/Viskositaet.pdf` (besucht am 03. 01. 2016).