

VERSUCH NUMMER 101

## Das Trägheitsmoment

Ksenia Klassen  
ksenia.klassen@udo.edu

Dag-Björn Hering  
dag.hering@udo.edu

Durchführung: 01.12.2015

Abgabe: 08.12.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>4</b>
2.1	Bestimmung der Winkelrichtgröße $D$ und des Eigenträgheitsmomentes $I_D$ der Drillachse . . . . .	4
2.1.1	Statistische Methode . . . . .	5
2.1.2	Dynamische Methode . . . . .	5
2.2	Trägheitsmoment von geometrischen Figuren . . . . .	5
2.3	Trägheitsmoment einer Puppe . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Fehlerrechnung</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>7</b>
4.1	Statische Methode . . . . .	7
4.2	Dynamische Methode . . . . .	7
4.3	Trägheitsmoment von geometrischen Figuren . . . . .	9
4.3.1	Zylinder . . . . .	9
4.3.2	Kugel . . . . .	10
4.4	Trägheitsmoment einer Puppe . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>12</b>
	<b>Literatur</b>	<b>13</b>

# 1 Theorie

Die Charakteristika von Rotationsbewegungen sind das Drehmoment, die Winkelbeschleunigung und das Trägheitsmoment. Das Gesamtträgheitsmoment, mit den Masselementen  $m_i$  und dem Abstand  $r_i$  der Massen zur Drehachse, ergibt sich zu:

$$I = \sum_i r_i^2 \cdot m_i. \quad (1)$$

Dementsprechend gilt für infinitesimale Massen  $dm$ :

$$I = \int r^2 dm. \quad (2)$$

Entspricht die Drehachse nicht einer der Schwerpunktsachsen des Körpers, sondern ist parallel um den Abstand  $a$  versetzt, so kann das Trägheitsmoment mit dem Satz von Steiner berechnet werden. Dieser setzt sich zusammen aus dem Trägheitsmoment  $I_s$  bezüglich der Drehachse durch den Schwerpunkt, der Gesamtmasse  $m$  und dem Abstand  $a$  zu:

$$I = I_s + m \cdot a^2. \quad (3)$$

Für das Drehmoment für einen drehbaren Körper gilt:

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}. \quad (4)$$

$\vec{F}$  ist dabei die greifende Kraft im Abstand  $\vec{r}$  zur Achse. Ist das System schwingungsfähig, so wirkt ein rücktreibendes Drehmoment der Auslenkung um  $\varphi$  entgegen. Dies führt zu harmonischen Schwingungen mit der Schwingdauer:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{ges}}}{D}}. \quad (5)$$

Für  $D$  die Winkelrichtgröße gilt die Beziehung  $M = D \cdot \varphi$ , hieraus lässt sich, durch Umstellen, das Trägheitsmoment berechnen. Es gilt:

$$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2} - I_D. \quad (6)$$

$I_D$  ist das Trägheitsmoment der Drillachse und  $I_{\text{ges}}$  setzt sich in diesem Versuch zusammen aus dem Trägheitsmoment des Körpers und dem der Drillachse. Die Winkelrichtgröße bestimmt sich nach:

$$D = \left| \frac{F \cdot r}{\varphi} \right|. \quad (7)$$

Der Betrag darf verwendet werden, da die Winkelrichtgröße immer positiv ist. Beispiele

für Trägheitsmomente verschiedener Körper:

$$I_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} m \left( \frac{D}{2} \right)^2. \quad (8)$$

$$I_{\text{Zylinder}\parallel} = \frac{m \left( \frac{D}{2} \right)^2}{2}. \quad (9)$$

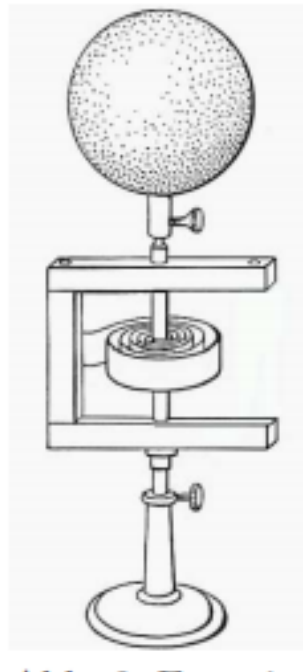
$$I_{\text{Zylinder}\perp} = m \left( \frac{\left( \frac{D}{2} \right)^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right). \quad (10)$$

## 2 Durchführung

Zu Beginn werden alle Figuren mehrmals vermessen und gewogen, anschließend wird der Mittelwert bestimmt.

### 2.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße $D$ und des Eigenträgheitsmomentes $I_D$ der Drillachse

Ein als masselos angenommener Stab wird in folgende Apparatur eingespannt:



**Abbildung 1:** Apparatur zur Vermessung der Trägheitsmomente.[1]

### 2.1.1 Statistische Methode

Der Stab wird mit einer Federwaage um verschiedene Winkel  $\varphi$  senkrecht zum Bahnradius ausgelenkt. Notiert werden der Abstand  $r$  zur Drehachse, die gemessene Kraft  $F$  und der Winkel  $\varphi$ . Die Messung wird für zehn verschiedene Auslenkwinkel durchgeführt.

### 2.1.2 Dynamische Methode

Zur Bestimmung von  $I_D$  werden zwei ähnliche Gewichte auf den Stab gespannt. Der Stab wird dann ausgelenkt und die Schwingungsdauer für fünf Schwingungsperioden wird mit einer Stoppuhr erfasst. Dies geschieht für 10 verschiedene Abstände der Gewichte zur Drehachse.

## 2.2 Trägheitsmoment von geometrischen Figuren

Das Trägheitsmoment für die weiße Kugel und den schwarzen Zylinder werden nach dem dynamischen Verfahren bestimmt. Dazu werden die Figuren jeweils auf die Drillachse gespannt, dann wird die Figur ausgelenkt und die Schwingungsdauer für fünf Schwingungsperioden gestoppt. Diese Messung wird zehn mal durchgeführt.

## 2.3 Trägheitsmoment einer Puppe

Für die Messung wird die Puppe in zwei verschiedene Positionen gebracht und die Schwingungsdauer für fünf Perioden aufgenommen. Jeweils zehn mal wird die Schwingungsdauer vermessen für beide Positionen. Die Puppe wird zum einen mit anliegenden Armen und runtergeklappten Füßen auf die Drillachse gespannt und zum anderen mit seitlich ausgestreckten Armen, sodass sie ein Kreuz beschreibt, eingespannt.

## 3 Fehlerrechnung

Die Mittelwerte bestimmen sich in der Auswertung nach:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (11)$$

Für die Standardabweichung ergibt sich:

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (v_j - \bar{v}_i)^2} \quad (12)$$

mit  $v_j$  mit  $j = 1, \dots, n$  als Wert mit zufällig behafteten Fehlern.

Diese werden mit Hilfe von Numpy 1.9.2, einer Erweiterung von Python 3.2.0, berechnet. Die Fehlerfortpflanzung wird mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet (13).

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \dots} \quad (13)$$

Diese wird von der Erweiterung Uncertainties 2.4.6.1 von Python 3.2.0 übernommen.

Desweiteren wird in der Auswertung Lineare Regression benutzt, um die Konstanten A und B aus einer Gleichung der Form

$$y(x) = A + B \cdot x \quad (14)$$

zu berechnen. B errechnet sich hierbei aus der Formel

$$B = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (15)$$

und A durch die Gleichung

$$A = \bar{y} - B \cdot \bar{x}. \quad (16)$$

$$A = \bar{y} - B \cdot \bar{x}. \quad (17)$$

Die Ungenauigkeit von A und B ergibt sich aus der mittleren Streuung:

$$(18)$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \cdot \sum_{i=1}^N (y_i - A - B \cdot x_i)^2} \quad (19)$$

Für die Ungenauigkeit von B gilt:

$$(20)$$

$$s_B = s_y \cdot \sqrt{\frac{1}{N \cdot (\overline{x^2} - (\bar{x})^2)}} \quad (21)$$

Für die Ungenauigkeit von A gilt:

$$(22)$$

$$s_A = s_B \cdot \sqrt{\overline{x^2}} \quad (23)$$

Für die Lineare Regression wird die Erweiterung Scipy 0.15.1 für Python 3.2.0 benutzt. Abweichungen von den Theoriewerten werden mit der Formel

$$a = \frac{|a_{\text{gemessen}} - a_{\text{theorie}}|}{a_{\text{theorie}}} \quad (24)$$

berechnet.

## 4 Auswertung

### 4.1 Statische Methode

Aus den gemessenen Werten der statischen Methode bestimmt sich die Winkelrichtgröße nach Formel (7), zu finden in Tabelle 1.

Der Abstand von der Drehachse beträgt:

$$r = 0,1375 \text{ m.} \quad (25)$$

Desweiteren wurden ein Fehler von  $5^\circ$  für die Winkelmessung angenommen, da der Winkel nur durch fehlerbehaftetes Ablesen gemessen wurde. Der in rad ungefähr  $0,09$  rad beträgt. Die errechneten Werte werden gemittelt und es ergibt sich eine Winkelrichtgröße von:

$$D = (0,044 \pm 0,010) \text{ N m} \quad (26)$$

**Tabelle 1:** Messwerte für die Federkonstante  $D$

Auslenkwinkel $\varphi$ / rad	$F$ / kg m s <sup>-2</sup>	$D$ / kg m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup>
0,52±0,09	0,09±0,03	0,024±0,008
0,87±0,09	0,37±0,03	0,058±0,005
1,05±0,09	0,38±0,03	0,050±0,004
1,22±0,09	0,50±0,03	0,056±0,003
1,57±0,09	0,52±0,03	0,046±0,003
2,09±0,09	0,70±0,03	0,046±0,002
2,62±0,09	0,75±0,03	0,039±0,002
3,14±0,09	0,85±0,03	0,037±0,001
3,67±0,09	0,95±0,03	0,036±0,001
4,19±0,09	1,45±0,03	0,048±0,001

### 4.2 Dynamische Methode

Die Messwerte für die Dynamische Methode sind in dem Abb.2 in der Form  $T^2$  gegen  $a^2$  aufgetragen. Es besteht ein linearer Zusammenhang zwischen  $T^2$  und  $a^2$  wie in der Formel (29).

$$I = 2(I_z + m \cdot a^2) \quad (27)$$

$$D \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} - I_D = 2(I_z + m \cdot a^2) \quad (28)$$

durch einsetzen der Formel (6) und umformen nach  $a^2$  ergibt sich

$$a^2 = D_{\text{dyn}} \cdot \frac{T^2}{8\pi^2 m} - \frac{I_D}{2m} - \frac{I_z}{m} \quad (29)$$

Durch die Lineareregression lässt sich mit dem Y-Achsenabschnitt  $a$  berechnen und somit durch Umformen  $I_D$  bestimmen:

$$a = -\frac{I_z}{m} - \frac{I_D}{2m} \quad (30)$$

$$I_D = -2ma - 2I_z \quad (31)$$

Durch einsetzen des Trägheitsmoments des Zylinders (10) ergibt sich

$$I_D = -2ma - 2m \left( \frac{\left(\frac{d_z}{2}\right)^2}{4} + \frac{h_z^2}{12} \right) \quad (32)$$

Durch Einsetzen der gemittelten gemessenen Größen

$$m = (0,2225 \pm 0,000005) \text{ kg} \quad (33)$$

$$d_{z1} = (0,03494 \pm 0,00003) \text{ meter} \quad (34)$$

$$H_z = 0,0300 \pm 0,00006 \text{ meter} \quad (35)$$

ergibt sich für das Trägheitsmoment der Drillachse

$$I_D = (0,0027454 \pm 0,0000002) \text{ kg m}^2 \quad (36)$$

Ebenfalls lässt sich mit Hilfe der aus der Linearenregression berechneten Steigung  $b$  die dynamische Winkelrichtgröße  $D_{\text{dyn}}$  bestimmen:

$$b = \frac{D_{\text{dyn}}}{8\pi^2 m}. \quad (37)$$

$$D_{\text{dyn}} = 8a\pi^2 m. \quad (38)$$

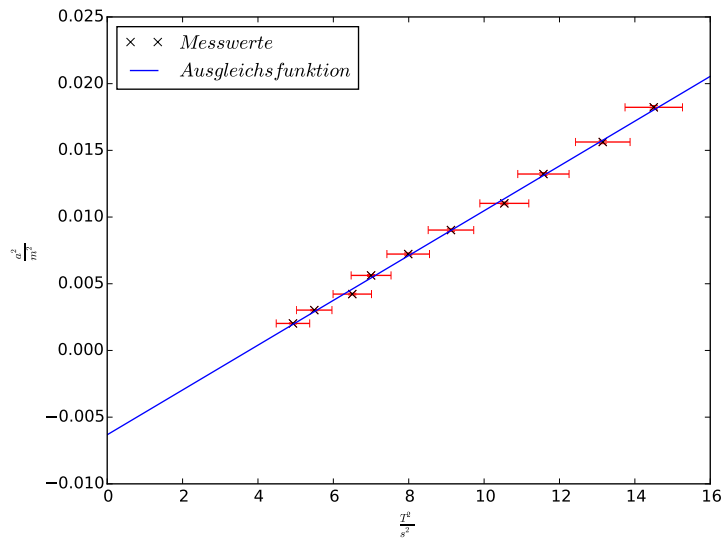
Durch einsetzen der Werte ergibt sich

$$D_{\text{dyn}} = (0,0295 \pm 0,0004) \text{ kg}. \quad (39)$$

$$(40)$$

Da sich die dynamische Winkelrichtgröße von der statisch gemessenen Winkelrichtgröße unterscheidet, wird die dynamische Winkelrichtgröße im folgendem Teil als Winkelrichtgröße verwendet, da die folgenden Trägheitsmoment ebenfalls mit der Dynamischen Methode bestimmt werden.





**Abbildung 2:** Das Abstandsquadrat  $a^2$  in Abhängigkeit von dem Periodendauerquadrat  $T^2$

### 4.3 Trägheitsmoment von geometrischen Figuren

#### 4.3.1 Zylinder

Nun werden die Werte für das Trägheitsmoment eines Zylinder, mit der Masse

$$m = (1,9739 \pm 0,00005) \text{ m}$$

einmal mit der Formel (6) aus den Messwerten berechnet. Dafür werden die gemessenen Zeiten gemittelt,

$$\overline{T} = (1,455 \pm 0,016) \text{ s}$$

und es ergibt sich ein

$$I_{\text{gemessen}} = -(0,00116 \pm 0,00004) \text{ kg m}^2.$$

Das gemessene Trägheitsmoment ist laut der Formel (6) negativ, da dies Physikalisch nicht möglich ist, wird auf das Abziehen des Trägheitsmoment der Drillachse verzichtet. Im Folgenden wird nun immer auf das Abziehen von  $I_D$  verzichtet, da alle Trägheitsmomente sonst negativ werden. Ohne Abziehen von  $I_D$  ergibt sich für das Trägheitsmoment der Zylinders:

$$I_{\text{gemessen}} = (0,00158 \pm 0,00004) \text{ kg m}^2.$$

Aus der Theoretischenformel (9) für einen Zylinder der parallel zur Drehachse verläuft mit dem Durchmesser

$$d_{z2} = (0,08019 \pm 0,00011) \text{ m},$$

ergibt sich ein theoretisches Trägheitsmoment

$$I_{\text{theorie}} = 0.0003011 \pm 0.0000006 \text{ kg m}^2.$$

Somit beträgt die Abweichung von Theoriewerte die mit der Formel (24) berechnet wird

$$a = (425 \pm 13) \text{ } \%$$

#### 4.3.2 Kugel

Dies mal wird das Trägheitsmoment eine Kugel, die die Masse

$$m = (0,8125 \pm 0,00005) \text{ m}$$

besitzt, berechnet. Zuerst wird dieses wieder mit der Formel (6) aus den Messwerten bestimmt. Dafür werden wieder die gemessenen Zeiten gemittelt,

$$\overline{T} = (1,486 \pm 0,007) \text{ s}$$

und es ergibt sich ein

$$I_{\text{gemessen}} = 0,00165 \pm 0,00003 \text{ kg m}^2.$$

Aus der Theoretischenformel (8) für eine Kugel mit dem Durchmesser

$$d_k = (0,1365 \pm 0,0019) \text{ m}$$

ergibt sich ein theoretisches Trägheitsmoment von

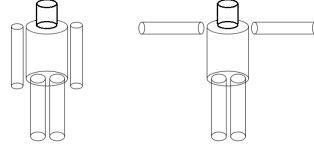
$$I_{\text{theorie}} = (0,00151 \pm 0,00004) \text{ kg m}^2.$$

Die relative Abweichung nach der Formel (24) beträgt somit:

$$a = (8,9 \pm 3,5) \text{ } \%$$

#### 4.4 Trägheitsmoment einer Puppe

Der Körper der Puppe wird mit verschiedenen Zylindern genähert, wie in Abbildung 3 zu sehen ist. Die gemessenen Werte werden gemittelt und es ergeben sich folgende Werte



**Abbildung 3:** Darstellung der Puppe mit Zylindern [1]

für die einzelnen Zylinder:

**Tabelle 2:** Gemittelter Durchmesser und gemittelte Länge der einzelnen Zylinder

	Höhe/m	Durchmesser/m
Beine	$0.2327 \pm 0.0003$	$0.021 \pm 0.004$
Arme	$0.181 \pm 0.002$	$0.016 \pm 0.003$
Kopf	$0.0772 \pm 0.0005$	$0.03 \pm 0.01$
Torso	$0.122 \pm 0.001$	$0.045 \pm 0.008$

Mit der Masse der Puppe

$$m_{\text{ges}} = (0,3407 \pm 0,0005) \text{ kg}$$

und dem gesamt Volumen

$$V_{\text{ges}} = (0,0005 \pm 0,0001) \text{ m}^3$$

ergibt sich mit

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (41)$$

eine Dichte von

$$\rho = (7,4 \pm 1,6) \text{ kg m}^{-3}$$

Mit diesen Ergebnissen lässt sich das theoretische Gesamtträgheitsmoment  $I_{\text{gesTheo}}$  bestimmen. Dies ergibt sich aus den einzelnen Trägheitsmomenten der Zylinder, diese lassen sich mit Hilfe der Formel (9) und des Steinerschen Satzes bestimmen. Das Gesamtträgheitsmoment ergibt sich aus:

$$I_{\text{GesTheo}} = I_{\text{Kopf}} + I_{\text{Torso}} + 2 \cdot I_{\text{Arm}} + 2 \cdot I_{\text{Bein}} \quad (42)$$

Die einzelnen Trägheitsmomente der Zylinder werden mit Hilfe der Formel (9) berechnet. Nur für die ausgestreckten Arme wird die Formel (10) benötigt. Somit folgt für die einzelnen Trägheitsmomente mit angelegten Armen

$$\begin{aligned} I_{\text{Kopf}} &= (0,0000022 \pm 0,0000041) \text{ kg m}^2, \\ I_{\text{Torso}} &= (0,000037 \pm 0,000022) \text{ kg m}^2, \\ I_{\text{Arm}} &= (0,000026 \pm 0,000012) \text{ kg m}^2, \\ I_{\text{Bein}} &= (0,0000093 \pm 0,0000057) \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

und somit ein Gesamtträgheitsmoment bei angelegten Armen von

$$I_{\text{GesTheoAn}} = (0,000109 \pm 0,000030) \text{ kg m}^2.$$

Bei ausgestreckten Armen unterscheidet sich nur das Trägheitsmoment der Arme

$$I_{\text{Arm}} = (0,00010 \pm 0,00004) \text{ kg m}^2$$

und als Gesamtträgheitsmoment mit ausgestreckten Armen ergibt sich

$$I_{\text{GesTheoAus}} = (0,00089 \pm 0,00030) \text{ kg m}^2$$

Für das gemessene Gesamtträgheitsmoment müssen für beide Fälle die gemessenen Zeiten gemittelt werden.

$$\begin{aligned} \overline{T}_{\text{an}} &= (0,65 \pm 0,04) \text{ s} \\ \overline{T}_{\text{aus}} &= (1,099 \pm 0,014) \text{ s} \end{aligned}$$

Diese Zeiten werden wieder in die Formel (6) eingesetzt und es ergibt sich für den Fall das die Arme angelegt sind eine Trägheitsmoment von:

$$I_{\text{GesMessAn}} = (0,00032 \pm 0,00004) \text{ kg m}^2$$

Für den Fall das die Puppe die Arme aussteckt:

$$I_{\text{GesMessAus}} = (0,000903 \pm 0,000026) \text{ kg m}^2.$$

Der gemessenen Werte für den Fall, dass die Puppe die Arme angelegt hat, weicht um

$$a_{\text{An}} = 190 \%$$

ab. Im Fall, dass die Puppe die Arme ausstreckt, ergibt sich eine Abweichung von dem Theoriewerten von:

$$a_{\text{Aus}} = 2 \%$$

## 5 Diskussion

Bei den Messwerte von den einzelnen Trägheitsmomentn sind deutliche Abweichungen zu den Theoriewerten zu erkennen. Desweiteren sind alle gemessenen Trägheitsmomente negativ, dies lässt sich durch ein zu großes Eigenträgheitsmoment der Drillachse im Verhältnis zu den zu messenden Trägheitsmoment begründen. Die weitere Abweichungen entstehen, da bei der Bestimmung des Trägheitsmomentes der Drillachse die Stange zur befestigung der Zylinder nicht masselos ist, wie in der Auswertung angenommen. Außerdem wurde die Periodendauer manuell gemessen, was ebenfalls zu Ungenauigkeiten führt. Die Näherung der Puppe in der Auswertung ist zu grob um genau Theoriewerte zu liefern. Und die Drehachse der Puppe in dem Versuch ist nicht wie angenommen genau in der Mitte der Puppe. All diese Faktoren führen dazu, dass der Satz von Steiner nicht mit dem Versuch als Bestätigt angesehen werden kann.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Skript zum Versuch Nr.101 Das Trägheitsmomente*. 2015.