

VERSUCH NUMMER V204

## **Wärmeleitung von Metallen**

Ksenia Klassen  
ksenia.klassen@udo.edu

Dag-Björn Hering  
dag.hering@udo.edu

Durchführung: 19.01.2016

Abgabe: 26.01.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Aufbau und Durchführung</b>	<b>4</b>
2.1	Aufbau . . . . .	4
2.2	Statische Methode . . . . .	4
2.3	Dynamische Methode . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Fehlerrechnung</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>6</b>
4.1	Statische Methode . . . . .	6
4.2	Dynamische Methode . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>13</b>
	<b>Literatur</b>	<b>13</b>

# 1 Theorie

Temperaturunterschiede in einem Körper können durch Konvektion, Wärmestrahlung oder Wärmeleitung ausgeglichen werden. Mit dem letzteren Fall, den Wärmeleitungen, wird sich in diesem Versuch beschäftigt. Herrscht ein Temperaturunterschied in einem langen Stab, so fließt eine Wärmemenge  $dQ$  vom wärmeren um kälteren Ende. Für die Wärmemenge gilt:

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt \quad (1)$$

mit  $A$  als Querschnittsfläche und  $\kappa$  als materialspezifische Wärmekapazität. Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung und der Stromdichte, für die gilt:

$$j_\omega = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2)$$

ergibt sich für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Diese beschreibt den räumlichen und zeitlichen Verlauf der Temperaturverteilung mit  $\sigma_T = \frac{\kappa}{\rho c}$  als Temperaturleitfähigkeit. Diese ist ein Maß für die Schnelligkeit des Temperatureausgleiches. Wird der Stab periodisch erwärmt und abgekühlt so breitet sich in diesem eine Temperaturwelle der Form:

$$T(x, t) = T_{\max} e^{\left(-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}}\right)} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x\right) \quad (4)$$

aus. Die Phasengeschwindigkeit der Welle lautet:

$$v = \sqrt{\frac{2\omega\kappa}{\rho c}}. \quad (5)$$

Mit dem Amplitudenverhältnis  $A_{\text{nah}}$  und  $A_{\text{fern}}$  an den Stellen  $x_{\text{nah}}$  und  $x_{\text{fern}}$  lässt sich die Dämpfung bestimmen. Weiterhin lassen sich die Beziehungen:

$$\omega = \frac{2\pi}{T^*} \quad T^* \text{ bezeichnet die Periodendauer} \quad (6)$$

$$\phi = \frac{2\pi \Delta t}{T^*} \quad \phi \text{ bezeichnet die Phase} \quad (7)$$

ausnutzen, um die Wärmeleitfähigkeit zu bestimmen:

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2 \Delta t \ln \left( \frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}} \right)}. \quad (8)$$

Hierbei sind  $\Delta x$  die beiden Messstellen (nah und fern) und  $\Delta t$  die Phasendifferenz der Temperaturwelle zwischen den Messstellen.

## 2 Aufbau und Durchführung

### 2.1 Aufbau

Die Wärmeleitfähigkeit lässt sich mit dem Aufbau nach Abbildung ?? bestimmen. Auf einer Platte befinden sich vier unterschiedlich große, rechteckige Probestäbe, zwei davon sind aus Edelstahl und jeweils einer aus Messing und Aluminium. Diese werden von einem Peltierelement simultan geheizt oder gekühlt. Mit Thermoelementen werden Temperaturen an acht Messstellen gemessen und mittels Datenlogger "Xplorer GLX" gespeichert.

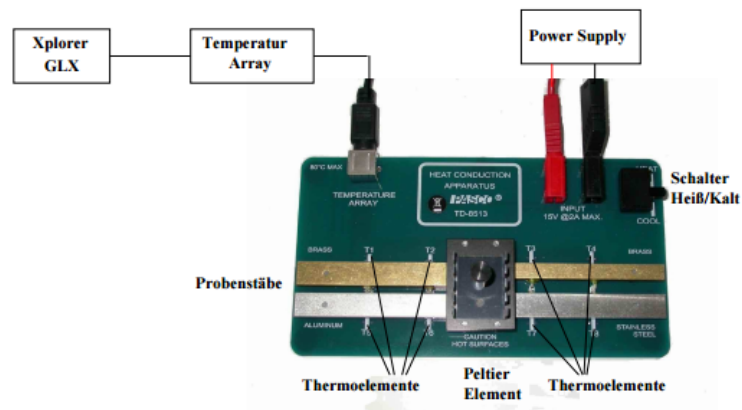


Abbildung 1: Versuchsaufbau.[1]

### 2.2 Statische Methode

Zu Beginn wird die Abtastrate des GLX auf 5s gestellt. Bei maximaler Strom werden 8V Betriebsspannung für das Peltierelement eingestellt. Die Apparatur wird mit Isolierung aufgeheizt. Die Messung wird solange durchgeführt, bis an Thermoelement  $T_7$  eine Temperatur von  $45^{\circ}\text{C}$  erreicht wird. Anschließend wird die Apparatur gekühlt.

### 2.3 Dynamische Methode

In dieser Messung wird die Abtastrate auf 2s und die Betriebsspannung auf 10,5V gesetzt. Alle 40s werden die Stäbe aufgeheizt bzw. gekühlt. Für 10 Perioden werden die Temperaturen erfasst. Anschließend werden die Stäbe runtergekühlt. Dieser Vorgang wird für eine Periode von 200s wiederholt. Dementsprechend wird wieder 100s geheizt und 100s gekühlt.

### 3 Fehlerrechnung

Die Mittelwerte bestimmen sich in der Auswertung nach:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (9)$$

Für die Standardabweichung ergibt sich:

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (v_j - \bar{v}_i)^2} \quad (10)$$

mit  $v_j$  mit  $j = 1, \dots, n$  als Wert mit zufällig behafteten Fehlern.

Diese werden mit Hilfe von Numpy 1.9.2, einer Erweiterung von Python 3.2.0, berechnet.

Die Fehlerfortpflanzung wird mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet (11).

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2 \dots} \quad (11)$$

Diese wird von der Erweiterung Uncertainties 2.4.6.1 von Python 3.2.0 übernommen.

Abweichungen von den Theoriewerten werden mit der Formel

$$a = \frac{|a_{\text{gemessen}} - a_{\text{theorie}}|}{a_{\text{theorie}}} \quad (12)$$

berechnet.

## 4 Auswertung

### 4.1 Statische Methode

In den Abbildungen 2 und 3 ist der Temperatur Verlauf sowohl an den Punkten  $T_1$  und  $T_4$  als auch den Punkten  $T_5$  und  $T_8$  dargestellt die in der Abbildung 1 zu finden sind.

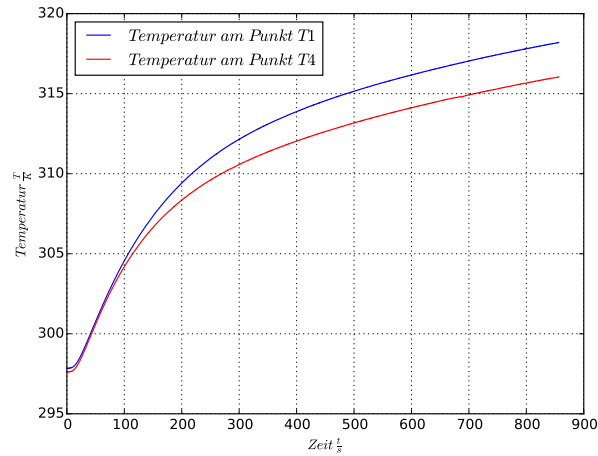


Abbildung 2: Temperaturverlauf am Punkt T1 und T4.

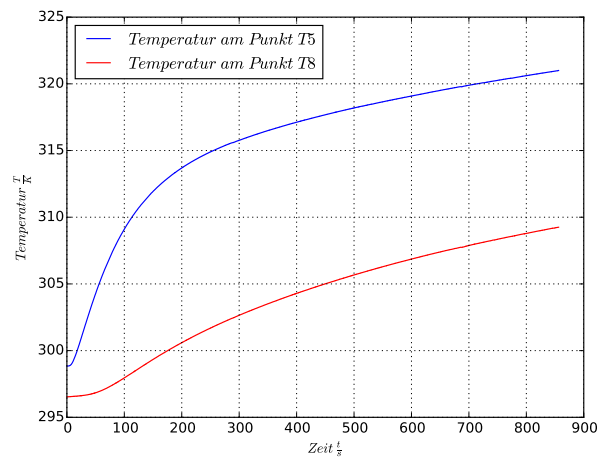


Abbildung 3: Temperaturverlauf am Punkt T5 und T8.

Die vier Kurven die in den Abbildungen 2 und 3 zusehen sind besitzen alle einen ähnlichen Verlauf. Am Anfang ist die Temperatur kurz konstant ehe sie schnell steigt. In der Mitte beginnt sich die Steigung wieder zu verringern, bis sich am Ende eine fast konstante Steigung einstellt. Nur die Kurve von dem Punkt 8 besitzt zu Beginn keine

starke Steigung sondern steigt eher langsam an.

Desweiteren lässt sich eine Aussage über die Wärmeleitfähigkeit der Materialien machen, indem die Temperatur zu einem bestimmten Zeitpunkt<sup>1</sup> von den fernen Thermoelementen verglichen wird. Welches Thermoelement die höchste Temperatur zu diesem Zeitpunkt anzeigt, besitzt die große Wärmeleitfähigkeit da alle Thermoelemente gleich weit von dem Peletierelement entfernt sind und alle bei Raumtemperatur starten. Aus den Messwerte

$$T_1 = 43,89 \text{ K},$$

$$T_4 = 41,78 \text{ K},$$

$$T_5 = 46,75 \text{ K},$$

$$T_8 = 34,73 \text{ K}$$

kann vermutet werden, dass der Aluminiumstab die höchste Wärmeleitfähigkeit besitzt. Danach folgt der breite Messingstab, dann der schmale Messingstab und die geringste Wärmeleitfähigkeit besitzt somit der Edelstahlstab.

Ebenfalls kann mit Hilfe den Literaturwerten[2] der Wärmeleitfähigkeiten

$$k_{\text{Messing}} = 81 \text{ W m}^{-1} \text{ K},$$

$$k_{\text{Aluminium}} = 200 \text{ W m}^{-1} \text{ K},$$

$$k_{\text{Edelstahl}} = 20 \text{ W m}^{-1} \text{ K}$$

kann der Wärmestrom durch umstellen der Formel (1) nach

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = -\kappa A \frac{\delta T}{\delta x} \quad (13)$$

und durch einsetzen der einzelnen Werte für den Querschnitt  $A$

$$A_{\text{Messingbreit}} = A_{\text{Aluminium}} = A_{\text{Edelstahl}} = 0,000048 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{Messingschmal}} = 0,000028 \text{ m}^2$$

und  $\Delta x$

$$\Delta x = 0,03 \text{ meter}$$

und  $\Delta T$

$$\Delta T = T_{\text{nah}} - T_{\text{fern}}$$

berechnet werden. In der Tabelle 1 sind die Werte des Wärmestroms für unterschiedliche Zeiten aufgetragen.

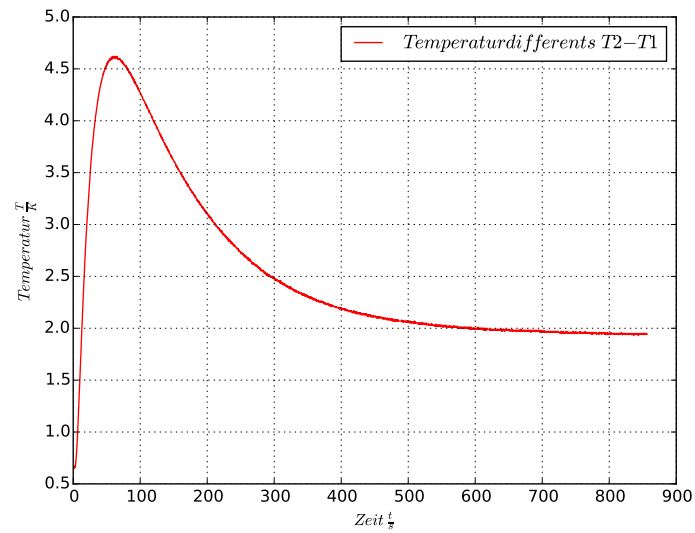
---

<sup>1</sup>hier nach 700 second

**Tabelle 1:** Der Wärmestrom bei unterschiedlichen Zeiten

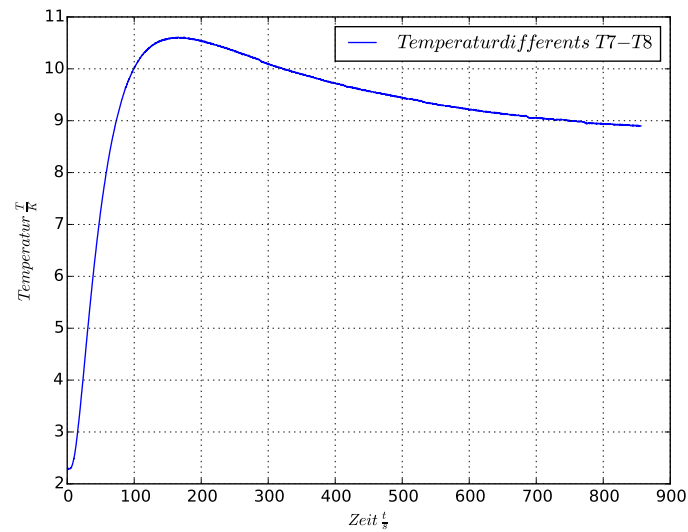
Zeit <i>fracts</i>	Wärmestrom $\frac{\Delta Q}{\Delta t} / \text{J s}^{-1}$			
	Messing breit	Messing schmal	Aluminium	Edelstahl
100	-0,0055	-0,0039	-0,0090	-0,0032
200	-0,0040	-0,0030	-0,0061	-0,0034
300	-0,0032	-0,0027	-0,0051	-0,0032
400	-0,0028	-0,0025	-0,0047	-0,0031
500	-0,0027	-0,0024	-0,0045	-0,0030

In den Abbildung 4 5 ist die Temperaturdifferenz von  $T_2 - T_1$  und  $T_8 - T_7$  aufgetragen.



**Abbildung 4:** Zeitabhängige Temperaturdifferents zwischen  $T_2$  und  $T_1$ .



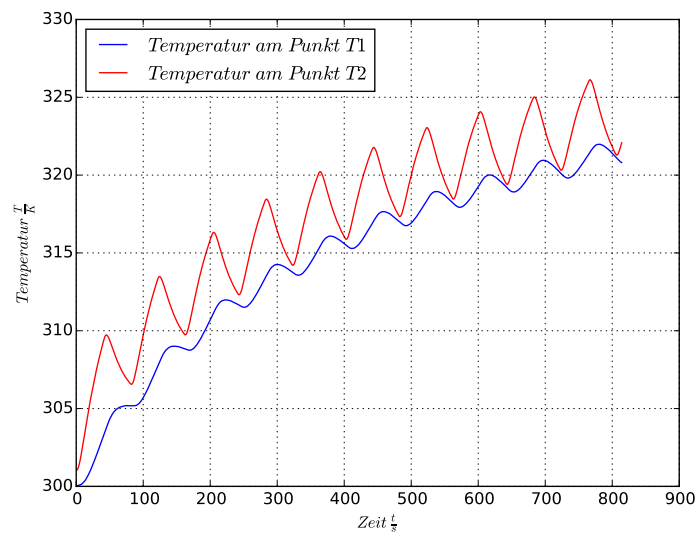


**Abbildung 5:** Zeitabhängige Temperaturdifferents zwischen  $T_7$  und  $T_8$ .

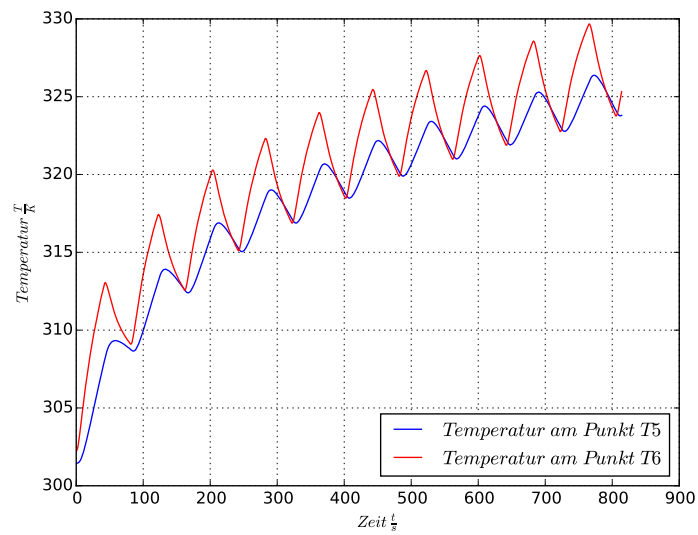
Der Verlauf der Temperaturdifferenz der beiden Kurven ist fast identisch. Die beiden Temperaturdifferenz begin am Anfang stark zu steigen um danach wieder zu sinken und langsam gegen eine konstante Temperaturdifferenz zu konvergieren. Der Unterschied zwischen den beiden Graphen besteht einmal darin, dass bei der Kurve vom Stahl 5 die Endtemperaturdifferenz deutlich höher ist als die von dem Messing 4.

## 4.2 Dynamische Methode

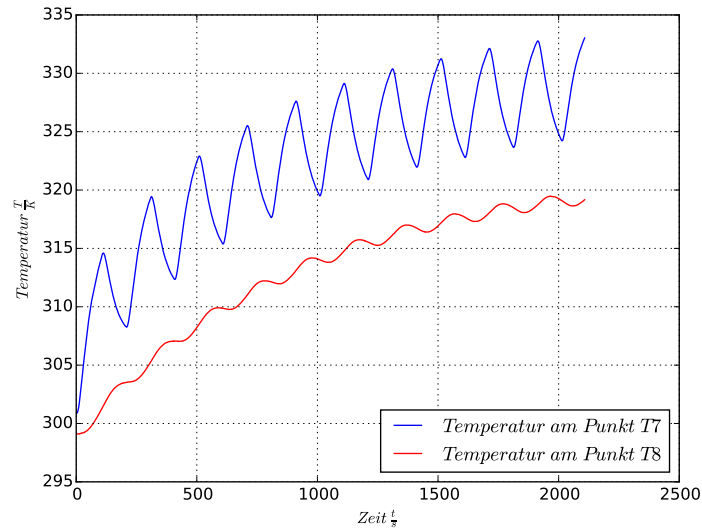
Nun soll die Wärmeleitfähigkeit der einzelnen Materialien durch die Angström-Meßverfahren bestimmt werden. In den Abbildung 6,7 und 8 sind die gemessenen Temperaturwellen dargestellt.



**Abbildung 6:** Temperaturverlauf an den Punkten  $T_1$  und  $T_2$ .



**Abbildung 7:** Temperaturverlauf an den Punkten  $T_5$  und  $T_6$ .



**Abbildung 8:** Temperaturverlauf an den Punkten  $T_7$  und  $T_8$ .

Die Wärmeleitfähigkeit berechnet sich aus der Formel (8). Dafür werden mit Hilfe des Programm PASCO Capstone die Extremstellen der einzelnen Kurven bestimmt und die Amplituden mit Python nach der Formel

$$A = \frac{T_{\text{hoch}} - T_{\text{tief}}}{2} \quad (14)$$

für die die einzeln Temperaturwellen berechnet und gemittelt. Für die einzelnen Wellen ergibt sich somit:

$$A_{T1} = (0,38 \pm 0,19) \text{ K}$$

$$A_{T2} = (2,14 \pm 0,24) \text{ K}$$

$$A_{T5} = (1,04 \pm 0,28) \text{ K}$$

$$A_{T6} = (2,69 \pm 0,28) \text{ K}$$

$$A_{T7} = (4,05 \pm 0,24) \text{ K}$$

$$A_{T8} = (0,23 \pm 0,13) \text{ K}$$

Ebenfalls muss zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit die Phasendifferenz  $\Delta t$  bestimmt zwischen den Nahen- und Fernewärmewellen bestimmt werden. Hierfür wird die Zeit von den Extremstellen der nahen von dem fernen Thermoelementen abgezogen und wieder gemittelt werden. Für  $\Delta t$  zwischen  $T_1$  und  $T_2$  folgt somit

$$\Delta t_{12} = (12,5 \pm 3,6) \text{ s}$$

Zwischen  $T_5$  und  $T_6$

$$\Delta t_{56} = (7,1 \pm 1,3) \text{ s}$$

und zwischen  $T_7$  und  $T_8$

$$\Delta t_{78} = (51,9 \pm 13,1) \text{ s}$$

Der Abstand zwischen allen Messstellen beträgt:

$$\Delta x = 0,03 \text{ m}$$

Die notwendige Dichte  $\rho$  und die spezifische Wärmekapazität  $c$  der einzelnen Materialien wird aus der Tabelle 2 genommen. Durch einsetzen all dieser Werte in die Formel (8)

**Tabelle 2**

Material	Dichte $\rho/\text{kg m}^{-3}$	spe. Wärmekapazität $c/\text{J kg}^{-1} \text{ K}$
Messing	8520	385
Aluminium	2800	830
Edelstahl	8000	400

ergeben sich die Wärmeleitfähigkeiten von:

Messing:

$$\kappa_{\text{Messing}} = (68 \pm 28) \text{ W m}^{-1} \text{ K}$$

Aluminium:

$$\kappa_{\text{Aluminium}} = (160 \pm 60) \text{ W m}^{-1} \text{ K}$$

Edelstahl:

$$\kappa_{\text{Edelstahl}} = (10 \pm 3) \text{ W m}^{-1} \text{ K}$$

Mit Hilfe der Formel (12) lässt sich die relative Abweichungen von den Literaturwerte berechnen.

Die Abweichung für Messing beträgt:

$$a_{\text{Messing}} = 16 \%$$

Für Aluminium:

$$a_{\text{Aluminium}} = 22 \%$$

Für Edelstahl:

$$a_{\text{Edelstahl}} = 51 \%$$

## 5 Diskussion

Das Experiment zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit liefert Ergebnisse, die im Rahmen des Erwarteten liegen. Zwar besitzen die Ergebnisse von Messing und Aluminium eine recht hohe Ungenauigkeit. Diese lassen sich durch die Mittelung der Amplituden und Phasendifferenzen begründen. Am Anfang der Messung sind die Wärmewellen nicht so konstant aufgetreten, was die Ungenauigkeiten bei der Mittelung verursacht. Ein weiteres Problem ist der Vergleich mit Literaturwerten vom Edelstahl, da sich die Wärmeleitfähigkeit schon bei unterschiedlichen Legierungen deutlich ändert.

Die Berechnung vom Wärmestrom zeigt deutlich, dass dieser im Betrag am Anfang höher ist und mit der Zeit auf einen konstanten Wert abfällt. Alles in allem kann gesagt werden, dass mit diesem Experiment die Wärmeleitfähigkeiten von unterschiedlichen Materialien bestimmt werden kann, aber für eine höhere Genauigkeit noch mehr Perioden gemessen werden sollten.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch V204 Wärmeleitung von Metallen*. 2016.
- [2] *Wärmeleitfähigkeit - Metalle*. URL: [http://www.schweizer-fn.de/stoff/wleit\\_metall/wleit\\_metall.php](http://www.schweizer-fn.de/stoff/wleit_metall/wleit_metall.php) (besucht am 22.01.2016).