

VERSUCH NUMMER 104

Der Doppler-Effekt

Ksenia Klassen
ksenia.klassen@udo.edu

Dag-Björn Hering
dag.hering@udo.edu

Durchführung: 8.12.2015

Abgabe: 15.12.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
3	Durchführung	4
3.1	Geschwindigkeit des Wagens	4
3.2	Messung der Wellenlänge	5
3.3	Frequenzmessung	5
3.4	Schwebung	6
4	Fehlerrechnung	8
5	Auswertung	9
5.1	Geschwindigkeit des Wagens	9
5.2	Wellenlänge	9
5.3	Frequenzmessung	10
5.4	Schwebungsmethode	10
5.5	Lineare Ausgleichsrechnung	12
6	Diskussion	15
	Literatur	15

1 Einleitung

In dem Versuch 104 soll der Doppler-Effekt für Schallwellen untersucht werden. Der Doppler-Effekt tritt auf, wenn sich der Sender und der Empfänger von Wellen relativ zueinander bewegen. Es entsteht eine Frequenzverschiebung am Ort des Empfängers gegenüber der vom Sender abgesendeten Welle.

2 Theorie

Sind Wellen an ein Medium gebunden, so muss zwischen einer Bewegung des Senders und des Empfängers differenziert werden. Ohne Bewegung sendet der Sender eine Welle der Frequenz ν und der Empfänger empfängt eine Frequenz ν . Bewegt sich der Empfänger mit der Geschwindigkeit v auf den ruhenden Sender zu, so überstreicht in der Zeit Δt

$$\Delta z = \frac{\Delta t \cdot v}{\lambda_0} \quad (1)$$

Wellenzüge. Im Vergleich zu einem ruhenden Empfänger, an dem $\Delta n = \Delta t \nu$ Schwingungen vorbeilaufen, erfasst der bewegte Empfänger

$$\Delta n + \Delta z = \Delta t \left(\nu_0 + \frac{v}{\lambda_0} \right) \quad (2)$$

Schwingungen, in gleicher Zeit werden also mehr Schwingungen registriert. Unter der Betrachtung der Frequenz als die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit und der Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = \nu_0 \cdot \lambda_0, \quad (3)$$

gilt für die Frequenz eines bewegten Empfängers:

$$\nu_E = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right). \quad (4)$$

Die Frequenzänderung beträgt:

$$\Delta \nu = \nu_0 \frac{v}{c}. \quad (5)$$

Bewegt sich der Empfänger vom Sender fort, so sinkt die Frequenz um (5) unter ν_0 . Im anderen Fall bewegt sich der Sender und der Empfänger ruht. Mit der Wellenlänge als Abstand zweier Punkte mit gleicher Phase, erscheint die Wellenlänge als verkürzt um:

$$\Delta \lambda = \frac{v}{\nu_0}. \quad (6)$$

Unter Berücksichtigung der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \nu_0 \cdot \lambda_0$ folgt für die geänderte Frequenz:

$$\nu_Q = \nu_0 \frac{1}{1 - \frac{v}{c}}. \quad (7)$$

Wird die Formel (7) in einer Reihe nach Potenzen von $\frac{v}{c}$ entwickelt, wie in Formel :

$$\nu_Q = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} + \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \left(\frac{v}{c} \right)^3 \dots \right) = \nu_E + \nu_0 \left(\left(\frac{v}{c} \right)^2 + \dots \right). \quad (8)$$

Hieran lässt sich erkennen, dass für $|v| \ll c$ der Unterschied zwischen ν_Q und ν_E beliebig klein wird. Auch bei elektromagnetischen Wellen tritt der Doppler-Effekt auf, allerdings wird nicht zwischen bewegter Quelle und bewegtem Empfänger unterschieden.

3 Durchführung

3.1 Geschwindigkeit des Wagens

Ein Wagen ist auf einer Schiene angebracht und wird mittels Seilzug von einem Synchronmotor angetrieben. Seine Geschwindigkeit lässt sich mit 10 verschiedenen Gängen variieren. Wie in Abbildung 1 zu sehen. Zur Bestimmung der Geschwindigkeit werden Weg und Laufzeit des Wagens vermessen, letztere fünf mal. Zwei Lichtschranken, bestehend aus Phototransistor und Infrarot-Lichtquelle, sind im Abstand s angebracht.

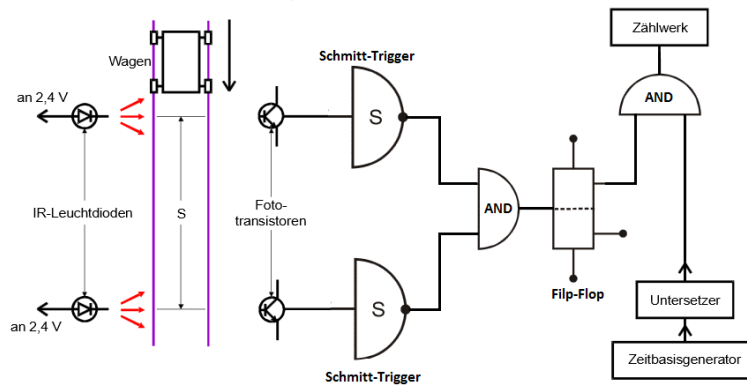


Abbildung 1: Aufbau zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Wagens

Zu Beginn wandeln Schmitt-Trigger die an den Phototransistoren anliegenden Spannungen in TTL-Signale um, dies ist notwendig für die weiteren Komponenten der Schaltung. Unterbricht der Wagen das Signal an der ersten Schranke, so springt das Potential am *AND*-Gatter auf *L*, an diesem sind beide Phototransistoren angeschlossen. Der Zustand der bistabilen Kippstufe ändert sich, sodass am *Q*-Ausgang ein *H*-Potential anliegt. Die Signale vom Zeitbasisgenerator können durch ein *AND*-Gatter in das Zählwerk gelangen. Der Zeitbasisgenerator gibt Impulse mit einer Präzision von 10^{-5} aus, dieser fungiert also als Uhr. Der Unter-setzer vermindert hier nur die Impulse um einen einstellbaren Faktor 10^n . Die Entfernung der beiden Lichtschranke wird mit einem Maßband gemessen.

3.2 Messung der Wellenlänge

Die Abbildung 2 zeigt den Aufbau zur Bestimmung der Wellenlänge.

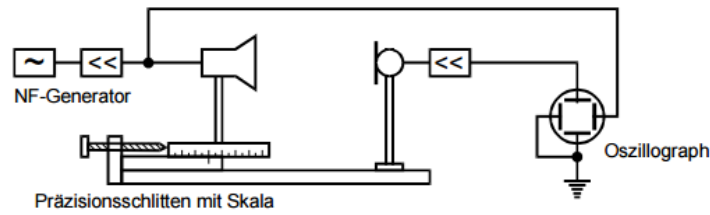


Abbildung 2: Aufbau zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit durch die Wellenlänge. [1]

Ein Lautsprecher wird auf einem Präzisionsschlitten montiert, diesem gegenüber ist das Mikrophon angebracht. Das, über den Lautsprecher ausgegebene, generierte Signal und das Signal des Mikrophons werden auf das Oszilloskop gegeben. Im XY-Betrieb entstehen Lissajous-Figuren. Sind die beiden Signale in Phase oder gegenphasig, so wird am Oszilloskop eine Gerade ausgegeben. Der entsprechende Abstand zwischen zwei identischen Lissajous-Figuren ist dann die Wellenlänge λ .

3.3 Frequenzmessung

Um die Frequenzänderung bei dem Doppler-Effekt zu messen, wird der Versuch wie in Abbildung 3 aufgebaut.

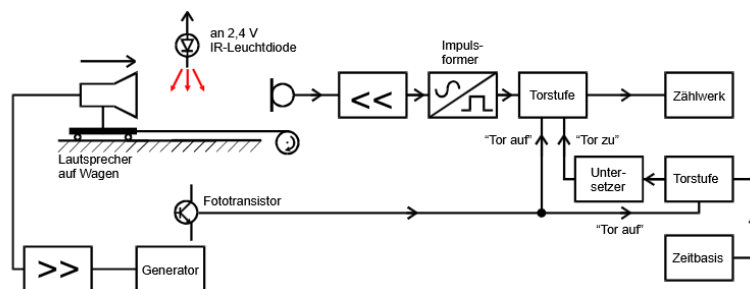


Abbildung 3: Aufbau zur Messung der Frequenzänderung beim Doppler-Effekt.[1]

Das Mikrophon wandelt wieder das vom Lautsprecher gesendete Signal in eine elektrische Schwingung um. Diese wird in einen Rechteckimpuls umgewandelt und kann nun von den digitalen Bausteinen verarbeitet werden. Die digitalen Bausteine werden so geschaltet, dass das Zählwerk, die Impulse, die innerhalb von einer Sekunde auf das Zählwerk gelangen, aufnimmt und folglich genau die Frequenz anzeigt. Dafür wird der Untersetzter auf 10^6 gesetzt und die Bausteine wie Abbildung 4 zusammen gesetzt.

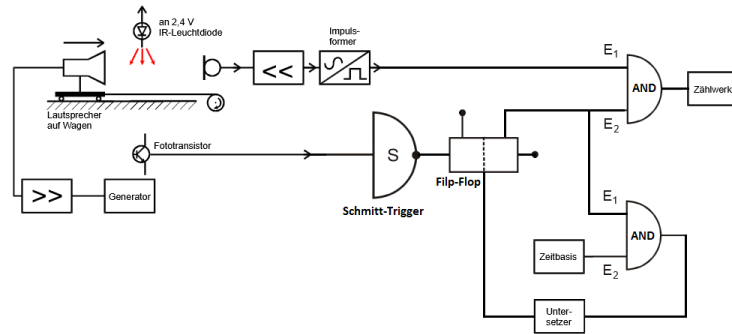


Abbildung 4: Aufbau der digitalen Bausteine.

Durch diesen Aufbau löst die Lichtschranke ein Impuls aus der dafür sorgt, dass das Zählwerk eine Sekunde lang geöffnet wird und die Impulse des umgewandelten Signales aufnimmt. Die Messung besteht darin, dass der Wagen mit dem Lautsprecher mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten, gegeben durch die unterschiedlichen Gänge des Synchromotors, auf das Mikrophon zu- und wieder wegfährt. Jedes mal passiert dieser die Lichtschranke und löst die Messung des Frequenz aus. Dies wird für jede Geschwindigkeit 5-mal wiederholt und der Wert gemittelt. Am Anfang wird auch die Grundfrequenz ν_0 gemessen, indem die Lichtschranke manuell ausgelöst wird, aber der Wagen nicht bewegt wird.

3.4 Schwebung

Um die Frequenzänderung mit Hilfe der Schwebungsmethode zu bestimmen, wird der Versuch wie in Abbildung 5 aufgebaut. Der Lautsprecher sendet wieder ein Signal aus.

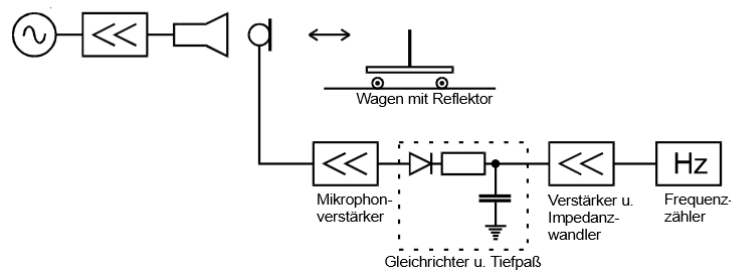


Abbildung 5: Aufbau zur Messung der Frequenzänderung beim Doppler-Effekt mit Hilfe der Schwebungsmethode.[1]

Hierbei nimmt das Mikrophon nun sowohl die Ruheschwingung des Lautsprechers, als auch die durch den Reflektor auf dem Wagen reflektierten Schwingungen auf. Dieses überlagerte Signal wird durch einen Gleichrichter und einen Tiefpass geschickt. Die Frequenz der dadurch entstehenden Spannung wird mit einem Frequenzzähler gemessen,

der wieder durch die digitalen Bausteine aufgebaut wird. Dies wird genau wie in der Abbildung 4 aus dem Kapitel 3.3 realisiert. Wieder wird der Wagen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten durch die Lichtschranke bewegt und die Frequenz gemessen.

4 Fehlerrechnung

In der Auswertung müssen Mittelwerte und Standardabweichungen berechnet werden. Die Formel für die Mittelwerte lautet

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (9)$$

und für die Standardabweichung ergibt sich:

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (v_j - \bar{v}_i)^2} \quad (10)$$

mit v_j mit $j = 1, \dots, n$ als Wert mit zufällig behafteten Fehlern.

Diese werden mit Hilfe von Numpy 1.9.2, einer Erweiterung von Python 3.2.0, berechnet.

Die Fehlerfortpflanzung wird mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet (11).

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \dots} \quad (11)$$

Diese wird von der Erweiterung Uncertainties 2.4.6.1 von Python 3.2.0 übernommen.

Desweiteren wird in der Auswertung Lineare Regression benutzt, um die Konstanten A und B aus einer Gleichung der Form

$$y(x) = A + B \cdot x. \quad (12)$$

zu berechnen. B errechnet sich hierbei aus der Formel

$$B = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (13)$$

und A durch die Gleichung

$$A = \bar{y} - B \cdot \bar{x}. \quad (14)$$

Die Ungenauigkeit von A und B ergibt sich aus der mittleren Streuung:

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \cdot \sum_{i=1}^N (y_i - A - B \cdot x_i)^2}. \quad (15)$$

Für die Ungenauigkeit von B gilt:

$$s_B = s_y \cdot \sqrt{\frac{1}{N \cdot (\overline{x^2} - (\bar{x})^2)}}. \quad (16)$$

Für die Ungenauigkeit von A gilt:

$$s_A = s_B \cdot \sqrt{\overline{x^2}}. \quad (17)$$

Für die Lineare Regression wird die Erweiterung Scipy 0.15.1 für Python 3.2.0 benutzt.

5 Auswertung

5.1 Geschwindigkeit des Wagens

Zur Bestimmung der Geschwindigkeiten für die zehn Gänge wird die Formel

$$v = \frac{s}{t} \quad (18)$$

genutzt. Für die Strecke gilt $s = (0,450 \pm 0,005)\text{m}$. Die gemittelten Geschwindigkeiten finden sich in Tabelle 1 wieder.

Tabelle 1: Geschwindigkeit des Wagens bei unterschiedlichen Gängen

<i>Gang</i>	<i>Geschwindigkeit</i> $\bar{v}/\text{m s}^{-1}$	σ_v
6	0.051	0.001
12	0.102	0.001
18	0.154	0.002
24	0.205	0.002
30	0.256	0.003
36	0.308	0.004
42	0.360	0.004
48	0.410	0.005
54	0.461	0.005
60	0.513	0.006

Nun soll untersucht werden, ob bei den hier verwendeten Geschwindigkeiten ein Unterschied zwischen Formel (4), für den bewegten Empfänger, und der Formel (7) für den bewegten Sender. Dafür wird die höchste Geschwindigkeit, die in dem Versuch vorkommt, hier die Geschwindigkeit des Ganges 60, in die Formeln eingesetzt und beide Ergebnisse miteinander verglichen:

$$\nu_E = (20,7708 \pm 0,0011)\text{s}^{-1} \quad (19)$$

$$\nu_Q = (21,7709 \pm 0,0011). \quad (20)$$

Der Unterschied zwischen ν_E und ν_Q beträgt circa 0,1 Hz, und ist damit vernachlässigbar. Somit lässt sich in diesem Versuch immer die Formel (4) verwenden.

5.2 Wellenlänge

Die gemessenen Längen zwischen identischen Lissajous-Figuren sind in der Tabelle 2 aufgetragen. Werden diese Abstände gemittelt, ergibt sich die Wellenlänge:

$$\overline{\lambda_0} = (17,5 \pm 0,6)\text{mm}. \quad (21)$$

Mit dem Kehrwert:

$$\frac{1}{\lambda_0} = (57 \pm 2)\text{m}^{-1} \quad (22)$$

ergibt sich aus der Beziehung $c = \nu_0 \cdot \lambda_0$ für $\frac{\nu_0}{c}$ derselbe Wert.

Tabelle 2: Gemessenen Abstände zwischen den identischen Lissajous-Figuren.

Abstand s/mm
18,6
17,2
17,29
17,11

5.3 Frequenzmessung

Wie in Kapitel 3.3 beschrieben, werden die Frequenzen abhängig von der Geschwindigkeit gemessen. In den Tabellen 3 und 4 sind die Mittelwerte der gemessenen Frequenzen für die entsprechenden Geschwindigkeiten aufgetragen. Die gemessene Ruhefrequenz ν_0 beträgt:

$$\nu_0 = 20,7416\text{kHz} \quad (23)$$

Durch die zuvor gemessenen Wellenlänge λ_0 und der Ruhefrequenz ν_0 lässt sich aus der Formel (3) die Ausbreitungsgeschwindigkeit c bestimmen:

$$c = (364,0 \pm 12,6)\text{m s}^{-1} \quad (24)$$

Da $v_{\max} \ll c$ ist, führt dies ebenfalls zu der Abschätzung $\nu_E \approx \nu_Q$.

Tabelle 3: Gemittelte Frequenzen für die Bewegung auf das Mikrophon zu.

Gang	$\bar{v}/\text{m s}^{-1}$	σ_v	$\bar{\nu}/\text{kHz}$	σ_ν
6	0,051	0,0006	20,745	0,0
12	0,102	0,001	20,7482	0,0004
18	0,154	0,002	20,751	0,0
24	0,205	0,002	20,7532	0,0004
30	0,256	0,003	20,7562	0,0004
36	0,308	0,004	20,7604	0,0005
42	0,360	0,004	20,763	0,0
48	0,410	0,005	20,7664	0,0005
54	0,461	0,005	20,7692	0,0004
60	0,513	0,006	20,772	0,0

5.4 Schwebungsmethode

Bei der Schwebungsmethode muss beachtet werden, dass die Welle den doppelten Weg zurück legt, um dies zu berücksichtigen wird die Geschwindigkeiten der unterschiedlichen Gänge mal 2 genommen. Die gemittelten Werte des gemessenen $\Delta\nu$ für die verschiedenen Geschwindigkeiten sind in der Tabelle 5 dargestellt.

Tabelle 4: Gemittelte Frequenzen für die Bewegung von den Mikrophon weg.

Gang	$\bar{v}/\text{m s}^{-1}$	σ_v	$\bar{\nu}/\text{kHz}$	σ_ν
6	-0,051	0,0006	20,739	0,0
12	-0,102	0,001	20,7362	0,0004
18	-0,154	0,002	20,733	0,0
24	-0,205	0,002	20,73	0,0
30	-0,256	0,003	20,7272	0,0004
36	-0,308	0,004	20,724	0,0
42	-0,360	0,004	20,721	0,0
48	-0,410	0,005	20,718	0,0
54	-0,461	0,005	20,715	0,0
60	-0,513	0,006	20,7122	0,0004

Tabelle 5: Gemittelte Frequenzen für die Bewegung von den Mikrophon weg.

Gang	$\bar{v}/\text{m s}^{-1}$	σ_v	$\overline{\Delta\nu}/\text{kHz}$	$\sigma_{\Delta\nu}$
6	0,102	0,001	0,006	0,0
12	0,204	0,002	0,012	0,0
18	0,307	0,003	0,018	0,0
24	0,410	0,005	0,0257	0,0005
30	0,512	0,006	0,031	0,0
36	0,616	0,007	0,0367	0,0005
42	0,720	0,008	0,042	0,0005
48	0,821	0,009	0,049	0,0
54	0,92	0,01	0,055	0,0
60	1,03	0,01	0,061	0,0

5.5 Lineare Ausgleichsrechnung

Werden nun die Ergebnisse aus den Tabellen 3 bis 5 in den Abbildung 6 und 7 in der Form v nach $\Delta\nu$ aufgetragen. $\Delta\nu$ errechnet sich bei den Ergebnissen aus Tabelle 3 und 4 mit Hilfe der folgenden Formel:

$$\Delta\nu = \nu_E - \nu_0 \quad (25)$$

Aus den Messwerten lässt sich nun mit Hilfe der lineare Regression die Proportionalitätsfaktoren zwischen $\Delta\nu$ und v bestimmen. Desweiteren lässt sich durch die Wellenlängenmessung ebenfalls eine Gerade mit Hilfe der Formel (5) berechnen, die ebenfalls in Abbildung 6 und 7 zu sehen ist.

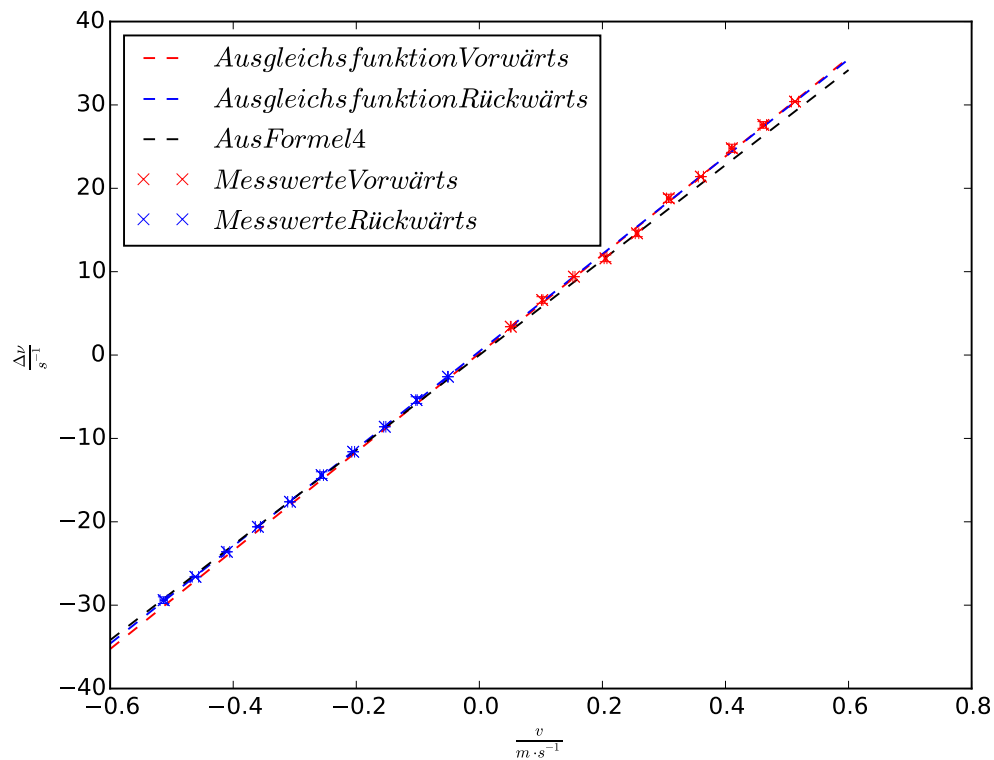


Abbildung 6: Die Geschwindigkeit v nach $\Delta\nu$ aufgetragen für die Frequenzmessung ν durch den Aufbau aus der Abb:3

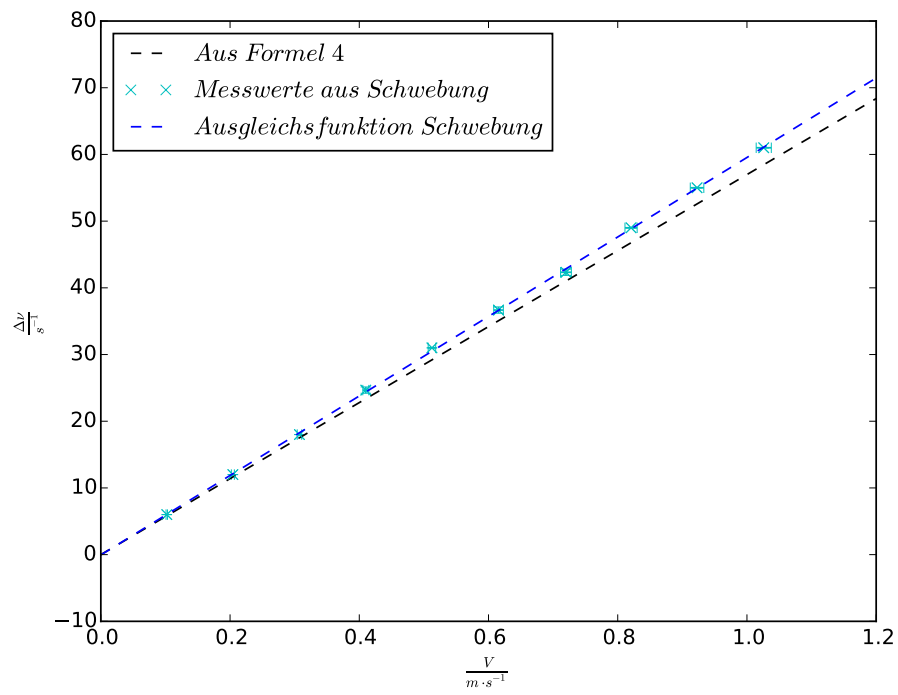


Abbildung 7: Die Geschwindigkeit v nach $\Delta\nu$ aufgetragen für die Messung von $\delta\nu$ durch den Aufbau aus der Abb:5

Daraus ergibt sich der Proportionalitätsfaktor ν_0/c oder $1/\lambda$ für alle Messungen:

$$\text{Aus der Wellenlängenmessung: } \frac{1}{\lambda} = (57,0 \pm 2,0)\text{m}^{-1} \quad (26)$$

$$\text{Aus der Frequenzmessung auf das Mikrophon zu: } \frac{\nu_0}{c} = (59,1 \pm 0,9)\text{m}^{-1} \quad (27)$$

$$\text{Aus der Frequenzmessung von dem Mikrophon weg: } \frac{\nu_0}{c} = (58,4 \pm 0,2)\text{m}^{-1} \quad (28)$$

$$\text{Aus der Schwebungsmethode: } \frac{\nu_0}{c} = (59,6 \pm 0,3)\text{m}^{-1} \quad (29)$$

6 Diskussion

Die Laufzeit des Wagens kann recht genau bestimmt werden. Die größere Fehlerquelle ist die Messung der Strecke zwischen den Lichtschranken, somit lässt sich die Geschwindigkeit nur mit kleinen Abweichungen bestimmen. Bei der Messung der Wellenlänge sind die ungenauen Lissajous-Figuren eine Fehlerquelle, da diese sich nicht auf die Form einer Geraden bringen lassen, was zu Abweichungen bei der Wellenlänge führt. Im Gegensatz dazu lassen sich die Frequenzen recht genau bestimmen, auch bei wiederholter Messung ergibt sich der gleiche Wert, was zu einem $\sigma = 0,0$ führt. Desweiteren lässt sich bei den Messwerten aus den Graphen gut erkennen, dass eigentlich schon bei den geringen Geschwindigkeiten ein sichtbarer Unterschied zwischen Formel 4 und 7 vorliegt. Dieses ist erkennbar, da die Regressionsgrade der gemessenen Frequenzen, bei dem sich der Sender bewegt, bei höheren Geschwindigkeiten leicht von der Geraden, die mit den Werten aus der Wellenlängenmessung und der Formel 4 für einen bewegten Empfänger berechnet wurde, nach oben abweicht. Folglich handelt es sich hierbei um eine sehr genaue Messung, da meist die Abschätzung gilt, dass die Formeln bei $v \ll c$ ungefähr gleich sind, wie auch in der Auswertung angenommen.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch zum Doppler-Effekt*. 2014.