

VERSUCH NUMMER 353

Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreis

Dag-Björn Hering
dag.hering@udo.edu

Ksenia Klassen
ksenia.klassen@udo.edu

Durchführung: 24.11.2015

Abgabe: 01.12.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Ziel	3
1.2	Ent- und Aufladevorgang eines Kondensators	3
1.3	Frequenzabhängigkeit von Phasenverschiebung und Amplitude	4
1.4	Eigenschaft als Integrator	4
2	Aufgaben und Durchführung	5
2.1	Bestimmung der Zeitkonstante	5
2.2	Messung der Amplitude	5
2.3	Messung der Phasenverschiebung	6
2.4	Eignung als Integrator	7
3	Fehlerrechnung	7
4	Auswertung	7
5	Diskussion	15
	Literatur	16

1 Theorie

1.1 Ziel

Ziel des Versuchs 353 behandelt die Untersuchung von RC-Gliedern. Dabei werden Zeitkonstante, Frequenzabhängigkeit von Amplitude und Phasenverschiebung bestimmt, sowie die Eignung als Integrator betrachtet.

1.2 Ent- und Aufladevorgang eines Kondensators

Als Relaxationserscheinung wird die nicht-oszillatorische Rückkehr eines Systems in seinen Ausgangszustand bezeichnet, welches zuvor aus diesem rausgenommen wird. Ein Beispiel für einen Relaxationsvorgang dient der Ent- und Aufladevorgang eines Kondensators über einen Widerstand. Auf den Platten eines Kondensators befindet sich die Ladung Q , somit gilt für die Spannung zwischen den Platten:

$$U_C = \frac{Q}{C}. \quad (1)$$

Mit dem ohmschen Gesetz ergibt sich ein Strom:

$$I = \frac{U_C}{R}. \quad (2)$$

Ebenfalls gilt die Beziehung

$$\dot{Q} = -I. \quad (3)$$

Diese Beziehungen führen zu der Differentialgleichung:

$$\dot{Q} = -\frac{1}{RC}Q(t). \quad (4)$$

Es greift die Annahme, dass der Kondensator sich nach unendlich langer Zeit entladen hat, somit gilt $Q(\infty) = 0$. Mit weiterer Integration folgt:

$$Q(t) = Q(0)e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5)$$

hierbei wird RC als Zeitkonstante bezeichnet, diese gibt das Maß für die Geschwindigkeit an, mit welcher das System in den Zustand $Q(\infty)$ strebt.

Für den Aufladevorgang gelten analoge Annahmen, sodass sich, mit den Randbedingungen $Q(0) = 0$ und $Q(\infty) = CU_0$, eine Gleichung für den Aufladevorgang ableiten lässt:

$$Q(t) = CU_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right). \quad (6)$$

U_0 beschreibt die anliegende Spannung einer Spannungsquelle.

1.3 Frequenzabhängigkeit von Phasenverschiebung und Amplitude

Relaxationsvorgänge treten auch in Systemen auf, die periodisch aus der Ausgangslage ausgelenkt werden. Mit der Verwendung einer Wechselspannung als anliegende Spannung, kann der RC-Kreis weiterhin als ein Beispiel verwendet werden, wie in Abbildung zu sehen.

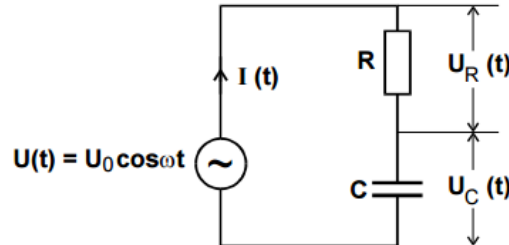


Abbildung 1: Schaltungsbeispiel.[1]

Gilt für ω , in der Wechselspannung $U(t) = U_0 \cos \omega t$, die Beziehung $\omega \ll \frac{1}{RC}$ so sind $U_C(t)$ und $U(t)$ zu jedem Zeitpunkt fast gleich. Mit größerer Frequenz ergibt sich eine immer größer werdende Phasenverschiebung ϕ zwischen der Generator- und Kondensatorspannung, ebenfalls nimmt die Amplitude der Kondensatorspannung ab.

Für den allgemeinen RC-Kreis gilt mit dem Ansatz $U_C(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega))$, der zweiten Kirchhoffschen Regel und einigen Umformungen:

$$U_0 \cos \omega t = -A\omega RC \sin(\omega t + \phi) + A(\omega) \cos(\omega t + \phi). \quad (7)$$

Diese Gleichung ist für alle t gültig. Es ergibt sich eine frequenzabhängige Beziehung für die Phasenverschiebung:

$$\phi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (8)$$

Ebenfalls lässt sich aus der Gleichung (7) eine frequenzabhängige Beziehung für die Amplitude der Kondensatorspannung ableiten:

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (9)$$

$A(\omega)$ geht gegen U_0 für $\omega \rightarrow 0$ und verschwindet bei $\omega \rightarrow \infty$.

1.4 Eigenschaft als Integrator

Ein RC-Kreis kann Wechselspannungen U_t mit Frequenzen größer als $\frac{1}{RC}$ integrieren. Mit dem zweiten Kirchhoffschen-Gesetz:

$$U_t = U_R(t) + U_C(t) = I(t) \cdot R + U_C(t) \quad (10)$$

und $I(t) = C \frac{dU_C}{dt}$ ergibt sich:

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^1 U(t') dt'. \quad (11)$$

Dies lässt sich daraus folgern, dass unter der Bedingung, $\omega \ll \frac{1}{RC}$, gilt: $|U_C| \ll |U_R|$ und $|U_C| \ll |U|$. Damit ist $U(t) = RC \frac{dU_C}{dt}$ und es ergibt sich das obenstehende Integral.

2 Aufgaben und Durchführung

2.1 Bestimmung der Zeitkonstante

In der ersten Aufgabe soll die Zeitkonstante eines RC-Gliedes bestimmt werden. Dies geschieht mit dem Aufbau nach Abbildung 2

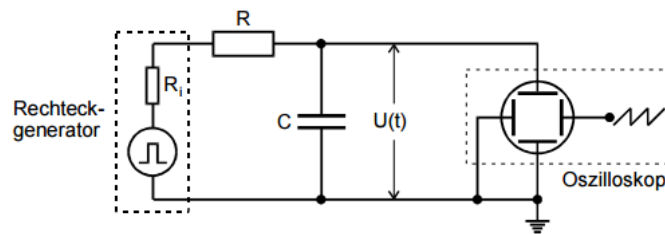


Abbildung 2: Schaltbild zur Bestimmung der RC-Konstante.[1]

Am Generator wird eine Rechteckspannung erzeugt, die entsprechende Kondensatorspannung $U_C(t)$ wird auf das Oszilloskop gegeben. Zur Bestimmung der Zeitkonstante wird entweder die Auflade- oder Entladekurve betrachtet und Wertepaare von U_C und t aufgenommen.

2.2 Messung der Amplitude

In der zweiten Aufgabe ist nach der Amplitude der Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz der generierten Spannung gefragt. Zur Bestimmung dieser wird die Schaltung aus Abbildung 3 benutzt.

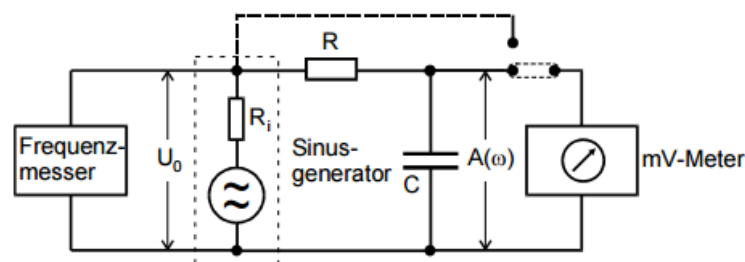


Abbildung 3: Schaltbild zur Bestimmung der Kondensatorspannungsamplitude.[1]

Der Generator erzeugt in diesem Aufgabenteil eine Sinusspannung und die Amplitude der entsprechenden Kondensatorspannung wird mit einem Voltmeter vermessen. Die Messung geht über drei Zehnerpotenzen der Frequenz der Generatorspannung. Zum Schluss wird eine Frequenzabhängigkeit der Generatorspannung selbst untersucht, dazu wird der Generator am Voltmeter angeschlossen.

2.3 Messung der Phasenverschiebung

In der dritten Aufgabe soll die frequenzabhängige Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung untersucht. Um die Phasenverschiebung zu bestimmen werden Generator und Kondensatorspannung am Oszilloskop dargestellt, wie im schematischen Aufbau in Abbildung 4 zu erkennen.

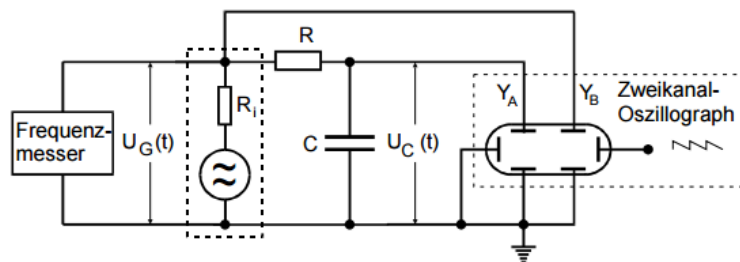


Abbildung 4: Schaltbild zur Bestimmung der Phasenverschiebung und Eignung als Integrator.[1]

Mit der Cursor Funktion am Oszilloskop wird der Abstand a der beiden Nulldurchgänge und die Schwingungsdauer b abgelesen, dies geschieht für verschiedene Frequenzen, wie in Abbildung 5 zu sehen.

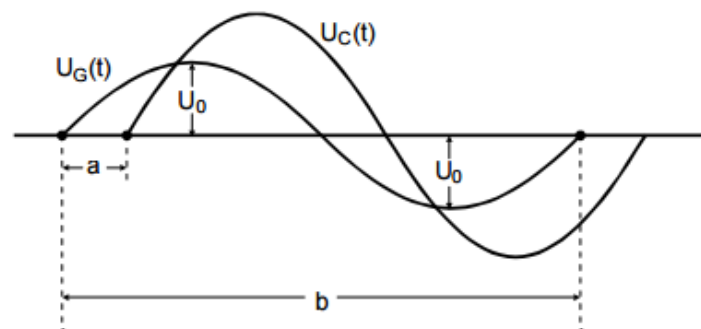


Abbildung 5: Beispielbild für den Messvorgang der Phasenverschiebung.[1]

2.4 Eignung als Integrator

In der vierten Aufgabe soll gezeigt werden, dass das RC-Glied für bestimmte Frequenzen als Integrator fungiert. Hierzu wird der Aufbau nach Abbildung 4 genutzt. Am Generator werden Sinus-, Rechteck und Dreiecksspannung eingestellt, mit einer Frequenz größer als $\frac{1}{RC}$ ist. Thermodrücke von der Kondensatorspannung werden mittels Oszilloskop aufgenommen.

3 Fehlerrechnung

Bei dem Versuch entstehen Messfehler, diese gilt es in Folgenden zu erörtern. Bei der Messung der Frequenz und der Spannung bei jeder Messreihe wurde diese mit Hilfe des Oszilloskopes oder des Generators gemessen, Dadurch kommt es zu eine Fehler, der in der Auswertung abgeschätzt wird.

Der Fehler einzelnen gemessener Größen, die aus der Theorie berechnet werden, wird mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet (12).

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2} \dots \quad (12)$$

Dies übernimmt das Programm Python mit Hilfe uncertainties.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Zeitkonstante am Aufladevorgang

Die Messwerte zur ersten Messung finden sich in Tabelle 1 wieder. Diese werden aus dem Graph aus Abbildung 6 entnommen, den das Oszilloskop anzeigt.

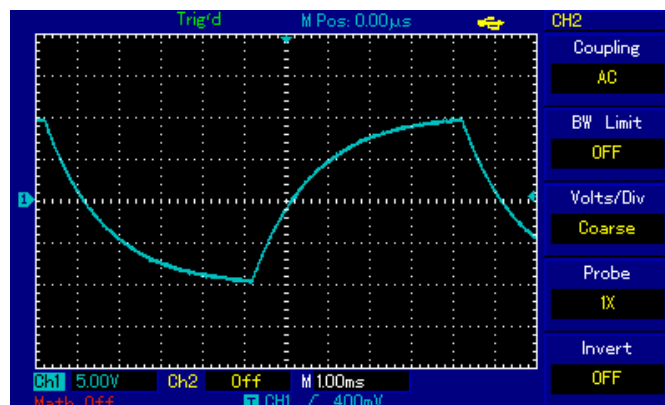


Abbildung 6: Aufladekurve eines Kondensators über einen Widerstand

Tabelle 1: Messwerte zur Bestimmung der Zeitkonstante aus Aufladevorgang.

t / ms	U_C / V
0.2 ± 0.05	2.0 ± 0.05
0.4 ± 0.05	4.2 ± 0.05
1.0 ± 0.05	9.6 ± 0.05
1.2 ± 0.05	11.0 ± 0.05
1.4 ± 0.05	12.2 ± 0.05
1.6 ± 0.05	13.2 ± 0.05
2.0 ± 0.05	14.8 ± 0.05
2.6 ± 0.05	16.6 ± 0.05
3.0 ± 0.05	17.4 ± 0.05
3.4 ± 0.05	18.0 ± 0.05
3.8 ± 0.05	18.4 ± 0.05
4.0 ± 0.05	18.6 ± 0.05
4.4 ± 0.05	19.0 ± 0.05
4.8 ± 0.05	19.2 ± 0.05

Am Anfang wird die Formel (6) in die folgende Form gebracht.

$$1 - \frac{U_C}{U_0} = e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \quad (13)$$

Zur Auswertung der ersten Messreihe wird der Logarithmus von $1 - \frac{U_C}{U_0}$ gegen die Zeit t aufgetragen, wie in Abbildung 7 zu sehen.

$$\ln \left(1 - \frac{U_C}{U_0} \right) = -\frac{1}{RC} * t \quad (14)$$

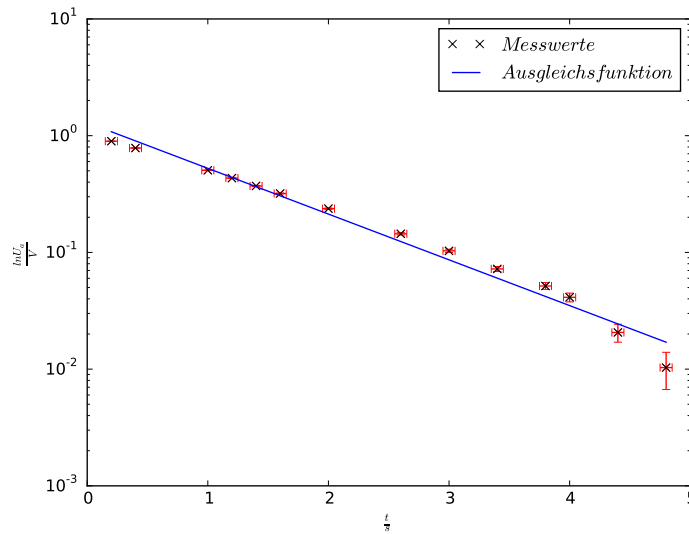


Abbildung 7: Bestimmung von der RC -Konstante aus dem Aufladevorgang eines Kondensators

Zur Bestimmung der Zeitkonstante wird nun eine lineare Regression durchgeführt. Das Ergebniss ist $1/RC$ als Steigung der Graden. Der Kehrwert der Steigung ist nun die Zeitkonstante RC .

RC ist hierbei $0.00111 \pm 0.05s$

4.2 Bestimmung der Zeitkonstante mittels Frequenzabhängigkeit der Amplitude

Erneut wird die Zeitkonstante bestimmt, nur diesmal unter der Betrachtung von der Frequenzabhängigkeit von der Amplitude von U_C . Die Amplitude wird halblogarithmisch gegen die Frequenz aufgetragen, und eine Ausgleichsrechnung entsprechend der Gleichung (9) wird durchgeführt, diese Darstellung findet sich in Abbildung 8 wieder. Die Messwerte befinden sich in Tabelle 2. Hier beträgt die Zeitkonstante $RC = 0.000936 \pm 0.000000007s$

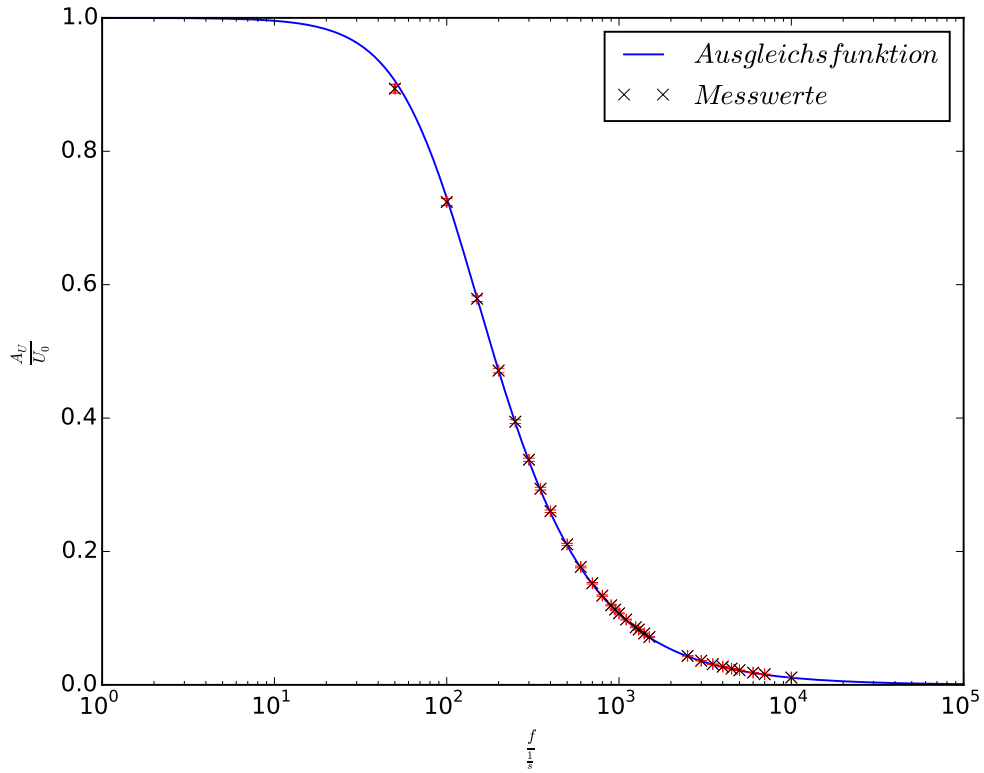


Abbildung 8: U_a/U_0 in Abhängigkeit von der Frequenz f

Tabelle 2: Messwerte zur Bestimmung der Zeitkonstante aus Aufladevorgang.

f / Hz	A / V		f / Hz	A / V
50 ± 0.5	6.078 ± 0.0005		1100 ± 0.5	0.666 ± 0.0005
100 ± 0.5	4.923 ± 0.0005		1250 ± 0.5	0.587 ± 0.0005
150 ± 0.5	3.937 ± 0.0005		1300 ± 0.5	0.564 ± 0.0005
200 ± 0.5	3.204 ± 0.0005		1400 ± 0.5	0.524 ± 0.0005
250 ± 0.5	2.683 ± 0.0005		1500 ± 0.5	0.488 ± 0.0005
300 ± 0.5	2.295 ± 0.0005		2500 ± 0.5	0.295 ± 0.0005
350 ± 0.5	2.000 ± 0.0005		3000 ± 0.5	0.246 ± 0.0005
400 ± 0.5	1.77 ± 0.0005		3500 ± 0.5	0.211 ± 0.0005
500 ± 0.5	1.432 ± 0.0005		4000 ± 0.5	0.186 ± 0.0005
600 ± 0.5	1.202 ± 0.0005		4500 ± 0.5	0.166 ± 0.0005
700 ± 0.5	1.036 ± 0.0005		5000 ± 0.5	0.149 ± 0.0005
800 ± 0.5	0.91 ± 0.0005		6000 ± 0.5	0.125 ± 0.0005
900 ± 0.5	0.811 ± 0.0005		7000 ± 0.5	0.108 ± 0.0005
950 ± 0.5	0.768 ± 0.0005		10000 ± 0.5	0.075 ± 0.0005
1000 ± 0.5	0.729 ± 0.0005			

4.3 Bestimmung der Zeitkonstante mittels Frequenzabhängigkeit der Phase

Ein letztes Mal wird die Zeitkonstante bestimmt, diesmal mit Hilfe der Phasenverschiebung von Generator und Kondensartorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz. Die Werte aus Tabelle 3 werden gegeneinander Aufgetragen, wie in Abb.9. Die Phasenverschiebung ϕ wird für die Tabelle nach Formel $\phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi$ errechnet. Das Ergebnis hierbei für Zeitkonstante RC ist $0.00087 \pm 0.0000002s$

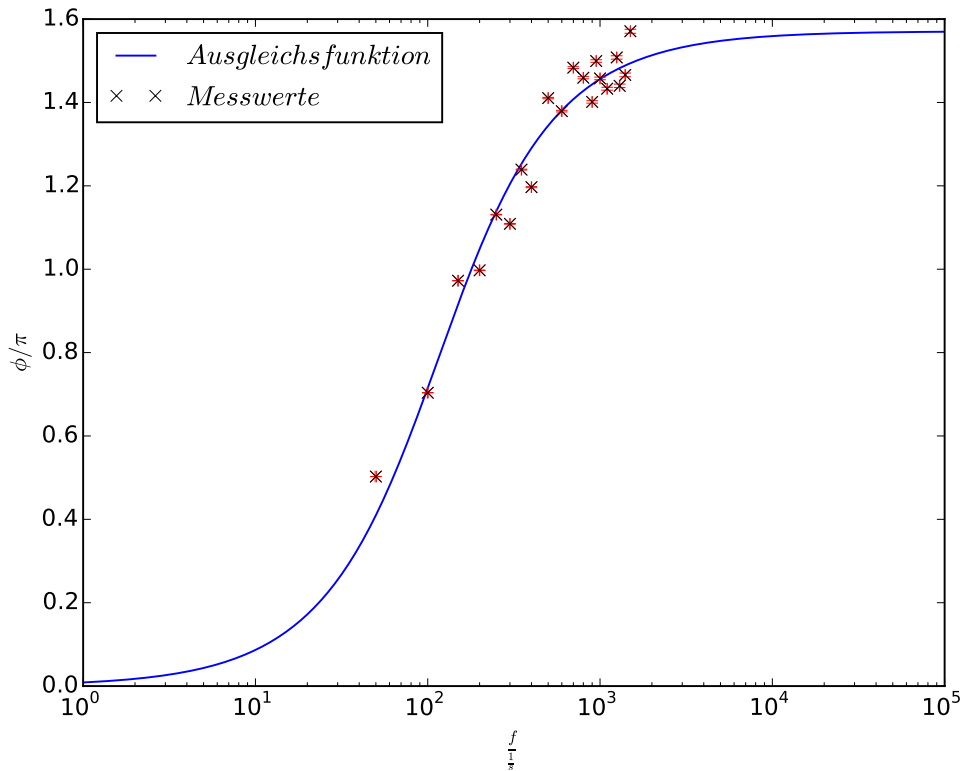


Abbildung 9: Frequenz f zur Phasenverschiebung ϕ aufgetragen

Tabelle 3: Messwerte zur Bestimmung der Zeitkonstante aus Aufladevorgang.

f / Hz	a / ms	b / ms	ϕ / π
50. ± 0.5	1.6 ± 0.0005	20. ± 0.0005	0.16 ± 0.00005
100. ± 0.5	1.12 ± 0.0005	10. ± 0.0005	0.22 ± 0.0001
150. ± 0.5	1.04 ± 0.0005	6.72 ± 0.0005	0.31 ± 0.0002
200. ± 0.5	0.8 ± 0.0005	5.04 ± 0.0005	0.32 ± 0.0002
250. ± 0.5	0.72 ± 0.0005	4.0 ± 0.0005	0.35 ± 0.0003
300. ± 0.5	0.6 ± 0.0005	3.4 ± 0.0005	0.39 ± 0.0004
350. ± 0.5	0.56 ± 0.0005	2.84 ± 0.0005	0.38 ± 0.0004
400. ± 0.5	0.48 ± 0.0005	2.52 ± 0.0005	0.45 ± 0.0005
500. ± 0.5	0.44 ± 0.0005	1.96 ± 0.0005	0.44 ± 0.0006
600. ± 0.5	0.36 ± 0.0005	1.64 ± 0.0005	0.47 ± 0.0007
700. ± 0.5	0.34 ± 0.0005	1.44 ± 0.0005	0.46 ± 0.0008
800. ± 0.5	0.288 ± 0.0005	1.24 ± 0.0005	0.45 ± 0.0009
900. ± 0.5	0.248 ± 0.0005	1.112 ± 0.0005	0.48 ± 0.001
950. ± 0.5	0.252 ± 0.0005	1.056 ± 0.0005	0.46 ± 0.001
1000. ± 0.5	0.232 ± 0.0005	1. ± 0.0005	0.46 ± 0.001
1100. ± 0.5	0.208 ± 0.0005	0.912 ± 0.0005	0.48 ± 0.001
1250. ± 0.5	0.192 ± 0.0005	0.8 ± 0.0005	0.46 ± 0.001
1300. ± 0.5	0.176 ± 0.0005	0.768 ± 0.0005	0.46 ± 0.001
1400. ± 0.5	0.168 ± 0.0005	0.72 ± 0.0005	0.47 ± 0.001
1500. ± 0.5	0.168 ± 0.0005	0.672 ± 0.0005	0.5 ± 0.002

Nun werden die Werte mit identischer Frequenz aus der Tabelle 2 und 3 in einem Polarplott dargestellt wie in Abbildung 10 zu sehen.

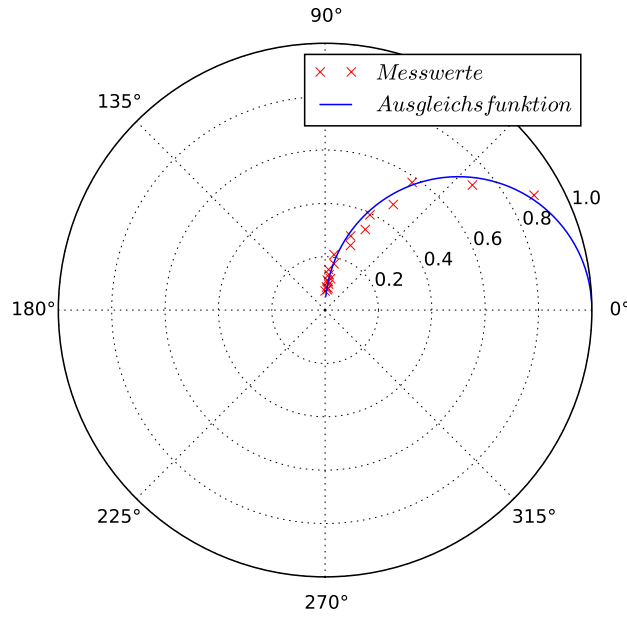


Abbildung 10: Amplitude A_0 in Abhängigkeit von der Phasenverschiebung ϕ

Die folgenden Abbildungen zeigen die integrierten Kurven von Dreiecks-, Rechtecks- und Sinusspannung. Für eine Phase Sinusspannung, ergibt sich, wie in Abbildung 11 zu sehen, eine Cosinusspannung, dies entspricht auch der Stammfunktion:

$$f(x) = a \cdot \sin x \qquad F(x) = -a \cdot \cos x. \qquad (15)$$

Bei einer Phase der Rechtecksspannung ergibt sich als integrierte Spannung eine Gerade mit konstanter Steigung, zu erkennen anhand der Abbildung 12 und der Stammfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} a, & 0 \leq t < \pi \\ -a, & -\pi \leq t < 0 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} a \cdot x, & 0 \leq t < \pi \\ -a \cdot x, & -\pi \leq t < 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Für eine Phase der Dreiecksspannung ergibt sich als integrierte Spannung eine Parabel, dies ist sowohl in Abbildung 13 als auch anhand der Stammfunktion zu erkennen:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x, & 0 \leq t < \pi \\ -a \cdot x, & -\pi \leq t < 0 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} \frac{a}{2} \cdot x^2, & 0 \leq t < \pi \\ \frac{-a}{2} \cdot x^2, & -\pi \leq t < 0. \end{cases} \qquad (17)$$

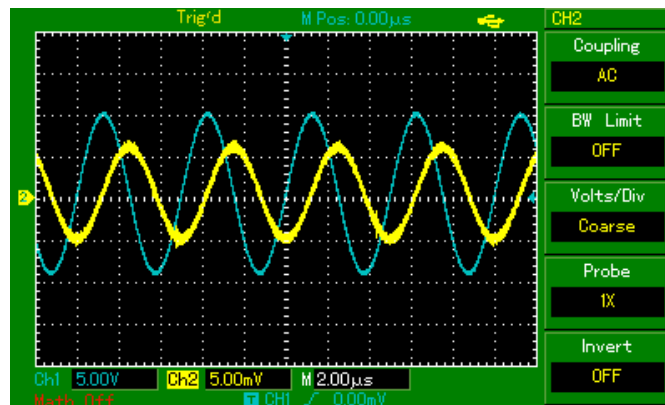


Abbildung 11: Bild der Sinusspannung und ihrer Integrierten Spannung.

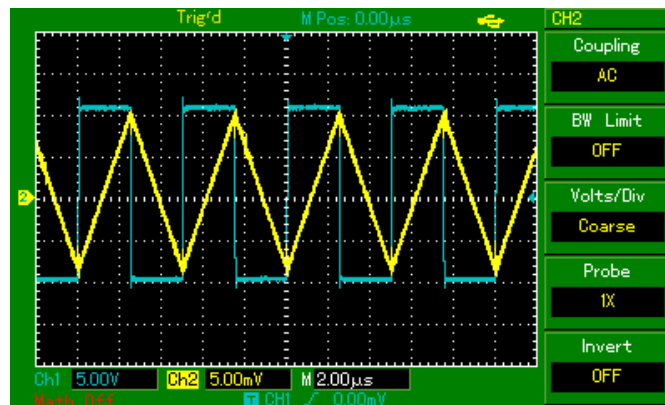


Abbildung 12: Bild der Rechteckspannung und ihrer Integrierten Spannung.

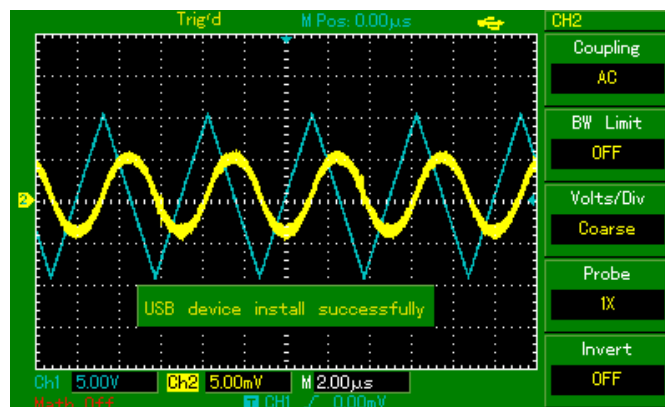


Abbildung 13: Bild der Dreiecksspannung und ihrer Integrierten Spannung.

5 Diskussion

Nun werden die aus der Auswertung erhaltenen Ergebnisse in Hinblick auf die Theorie untersucht. Zu einem muss gesagt werden das die Messwerte aus der Abbildung 9 stark um die Ausgleichsfunktion streuen, dies liegt daran das die Zeitabstände a und b mit Hilfe der Cursors des Oszilloskopes gemessen wurde und diese nicht genau eingestellt werden konnten. Dies ließe sich mit einem Oszilloskop, das die Daten speichert und ausgibt vermeiden. Ebenfalls würde mit Erhöhung der Messpaare im niedrigerem Frequenzbereich die Zeitkonstant RC genauer werden. Außerdem wurde eine Frequenzabhängigkeit bei der Spannung U_0 gemessen, diese sank bei höheren Frequenzen ab. Diese ist aber für den Frequenzbereich, indem die Messungen durchgeführt worden sind, sehr gering und kann somit vernachlässigt werden. Die bei den anderen Messverfahren erhaltenen Ergebnisse bestätigen die aus dem Kapitel 1 aufgeführten Formeln.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch V353*. 2015.