

VERSUCH NUMMER 107

## **Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler**

Ksenia Klassen  
ksenia.klassen@udo.edu

Dag-Björn Hering  
dag.hering@udo.edu

Durchführung: 15.12.2015

Abgabe: 5.1.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Durchführung</b>	<b>4</b>
2.1	Fehlerrechnung . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>6</b>
3.1	Volumen und Dichte . . . . .	6
3.2	Berechnung der Apparatekonstante . . . . .	6
3.3	Viskosität bei Temperaturänderung . . . . .	8
3.4	Bestimmung der Andradeschen Gleichung . . . . .	8
3.5	Reynoldsche Zahl . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>10</b>
	<b>Literatur</b>	<b>11</b>

# 1 Theorie

Bewegt sich ein Körper in einer Flüssigkeit, so wirken auf ihn die stokesche Reibungskraft,

$$\vec{F}_R = 6\pi\eta vr, \quad (1)$$

mit  $\eta$  als dynamische Viskosität und  $v$  der Kugelgeschwindigkeit, die Schwerkraft  $\vec{F}_G$  und die Auftriebskraft  $\vec{F}_A$ . Die Reibungskraft wirkt entgegen der Bewegungsrichtung, somit stellt sich ein Kräftegleichgewicht ein und der Körper, in diesem Fall eine Kugel, fällt dann mit konstanter Geschwindigkeit. Die Fallvorrichtung ist so ausgelegt, dass beim Eintauchen keine Verwirbelungen entstehen. Eine wirbelfreie Strömung wird als laminar bezeichnet, ein Maß hierfür ist die Reynoldssche Zahl, berechnet nach

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta}. \quad (2)$$

Die Formel für die Reynoldssche Zahl bezieht sich auf Rohrströmungen.  $\rho$  ist die Dichte der Flüssigkeit,  $\eta$  die dynamische Viskosität der Flüssigkeit,  $v$  die Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit gegenüber des Körpers und  $d$  der Durchmesser des Rohrs[3]. Die kritische Reynoldszahl

$$Re_{\text{krit}} = 2040$$

gibt den Übergang zu turbulenten Strömungen an.[1] Die dynamische Viskosität  $\eta$  lässt sich aus der Fallzeit  $t$ , Flüssigkeitsdichte  $\rho_{FL}$  und Kugeldichte  $\rho_{PK}$  bestimmen.  $K$  ist dabei eine Apparaturkonstante, die Fallhöhe und Kugelgeometrie enthält, für  $\eta$  gilt:

$$\eta = K(\rho_K - \rho_{FL}) \cdot t. \quad (3)$$

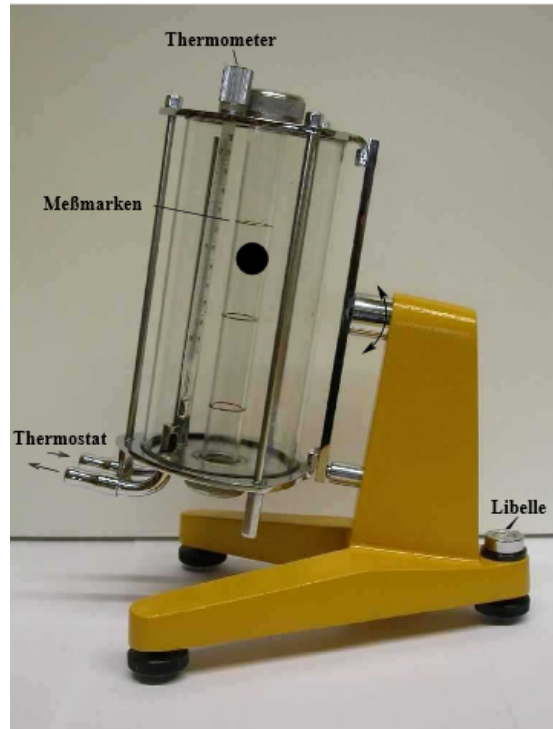
Die dynamische Viskosität ist ebenfalls Temperaturabhängig somit gilt ebenfalls die Beziehung:

$$\eta(T) = A e^{\frac{B}{T}}, \quad (4)$$

$A$  und  $B$  sind hierbei Konstanten.

## 2 Durchführung

Am Anfang des Versuch werden die zwei Kugeln gewogen und mehrmals vermessen. Zuerst wird der Versuch mit der kleineren Kugel durchgeführt, dafür wird die Röhre des Kugelfall-Viskosimeters siehe Abbildung 1 mit destilliertem Wasser und der kleineren Kugel aufgefüllt und, ohne Luft einzuschließen, verschlossen. Die Messung besteht darin,



**Abbildung 1:** Die Abbildung zeigt das verwendete Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler.[2]

dass die Zeit mehrmals gemessen wird, die die Kugel in der Flüssigkeit benötigt, um eine markierte Strecke zu sinken, ist die Kugel unten angekommen lässt sich die Röhre um  $180^\circ$  drehen und die Messung wiederholen. Die kleinere Kugel wird nun gegen die größere Kugel ausgetauscht und mit dieser wird ebenfalls die Messung durchgeführt. Nun wird durch ein Thermostat die Temperatur des destillierten Wassers verändert, wieder wird die Messung wie oben beschrieben, für unterschiedliche Temperaturen, wiederholt.

### 3 Fehlerrechnung

In der Auswertung müssen Mittelwerte und Standardabweichungen berechnet werden. Die Formel für die Mittelwerte lautet

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (5)$$

und für die Standardabweichung ergibt sich:

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (v_j - \bar{v}_i)^2} \quad (6)$$

mit  $v_j$  mit  $j = 1, \dots, n$  als Wert mit zufällig behafteten Fehlern.

Diese werden mit Hilfe von Numpy 1.9.2, einer Erweiterung von Python 3.2.0, berechnet.

Die Fehlerfortpflanzung wird mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet (7).

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \dots} \quad (7)$$

Diese wird von der Erweiterung Uncertainties 2.4.6.1 von Python 3.2.0 übernommen.

Desweiteren wird in der Auswertung Lineare Regression benutzt, um die Konstanten A und B aus einer Gleichung der Form

$$y(x) = A + B \cdot x. \quad (8)$$

zu berechnen. B errechnet sich hierbei aus der Formel

$$B = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (9)$$

und A durch die Gleichung

$$A = \bar{y} - B \cdot \bar{x}. \quad (10)$$

Die Ungenauigkeit von A und B ergibt sich aus der mittleren Streuung:

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \cdot \sum_{i=1}^N (y_i - A - B \cdot x_i)^2}. \quad (11)$$

Für die Ungenauigkeit von B gilt:

$$s_B = s_y \cdot \sqrt{\frac{1}{N \cdot (\overline{x^2} - (\bar{x})^2)}}. \quad (12)$$

Für die Ungenauigkeit von A gilt:

$$s_A = s_B \cdot \sqrt{\overline{x^2}}. \quad (13)$$

Für die Lineare Regression wird die Erweiterung Scipy 0.15.1 für Python 3.2.0 benutzt.

## 4 Auswertung

### 4.1 Volumen und Dichte

Zuerst werden die Mittelwerte aus den gemessenen Werte des Durchmesser der kleineren und der größeren Kugel bestimmt.

$$d_{\text{kl}} = (1,546 \pm 0.007) \text{ cm}$$

$$d_{\text{gr}} = (1,561 \pm 0.006) \text{ cm}$$

Dadurch lässt sich nun das Volumen der beiden Kugel mit Hilfe der Formel (??) berechnen:

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}\pi \left( \frac{d_{\text{Kugel}}}{2} \right)^3$$

Für die kleinere Kugel ergibt sich dann

$$V_{\text{kl}} = (1,935 \pm 0,026) \text{ cm}^3$$

und für die größere Kugel

$$V_{\text{gr}} = (1,991 \pm 0,023) \text{ cm}^3$$

Durch das Volumen und die gemessenen Massen der Kugeln kann nun die Dichten der Kugeln mit der Formel (14) bestimmt werden.

$$\rho_{\text{Kugel}} = \frac{m}{V} \quad (14)$$

Masse der Kugeln:

$$m_{\text{kl}} = 4,46 \text{ g}$$

$$m_{\text{gr}} = 4,96 \text{ g}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Dichten

$$\rho_{\text{kl}} = (2,305 \pm 0,031) \text{ g cm}^{-3}$$

$$\rho_{\text{gr}} = (2,492 \pm 0,029) \text{ g cm}^{-3}$$

### 4.2 Berechnung der Apparatekonstante

Nun wird die Apparatekonstante für die größere Kugel  $K_{\text{gr}}$  aus der Formel (3) berechnet. Dafür werden erst die gemessenen Zeiten aus der Tabelle 1 gemittelt.

**Tabelle 1:** Zeiten der Kugeln bei 294,15 K.

$t_{\text{kl}}/\text{s}$ bei einer Strecke von 10 cm	$t_{\text{gr}}/\text{s}$ bei einer Strecke von 5 cm
12,44	41,41
12,36	41,13
12,59	41,62
13,10	41,93
12,63	41,25
12,21	42,29
12,56	41,30
12,69	41,89
12,69	41,10
12,44	42,00

Für gemittelten Werte ergibt sich:

$$\begin{aligned}\bar{t}_{\text{kl}} &= (12,57 \pm 0,23) \text{ s} \\ \bar{t}_{\text{gr}} &= (41,59 \pm 0,39) \text{ s}.\end{aligned}$$

Da die größere Kugel bei der Messung nur 5 cm zurrücklegt, muss die Zeit verdoppelt werden, damit sich die Apparatekonstante  $K_{\text{gr}}$  auch auf 10 cm bezieht. Dies ist notwendig, damit diese für weitere Rechnungen benutzt werden kann. Folglich wird

$$\bar{t}_{\text{gr}} = (83,18 \pm 0,78) \text{ s}$$

verwendet. Da die Apparatekonstante

$$K_{\text{kl}} = 0,07640 \text{ mPa cm}^3 \text{ g}^{-1}$$

gegebene ist, lässt sich die Viskosität durch einsetzen der gemessenen Werte der kleineren Kugel in die Formel 3 berechnen. Für die Viskosität ergibt somit sich:

$$\eta = (1,26 \pm 0,04) \text{ mPa s}.$$

Wird die Formel (3) nun nach der Apparatekonstante umgestellt, ergibt sich

$$K = \frac{\eta}{(\rho_{\text{K}} - \rho_{\text{Fl}}) \cdot t}. \quad (15)$$

Durch die Formel (15) lässt sich nun  $K_{\text{gr}}$  bestimmen, indem nun die berechnete Viskosität, Dichte der größeren Kugel und ihrer gemittelten Zeit in die Gleichung eingesetzt werden.

$$K_{\text{gr}} = (10.1 \pm 0.4) \mu\text{Pa cm}^3 \text{ g}^{-1}.$$

### 4.3 Viskosität bei Temperaturänderung

Die gemittelten Zeiten für die unterschiedlichen Temperaturen die in der Tabelle 2 zusehen sind wurden nur mit der großen Kugel gemessen. Bei der Berechnung der Viskositäten wurde angenommen, dass die Dichte des Wassers bei unterschiedlichen Temperaturen ungefähr konstant bleib.

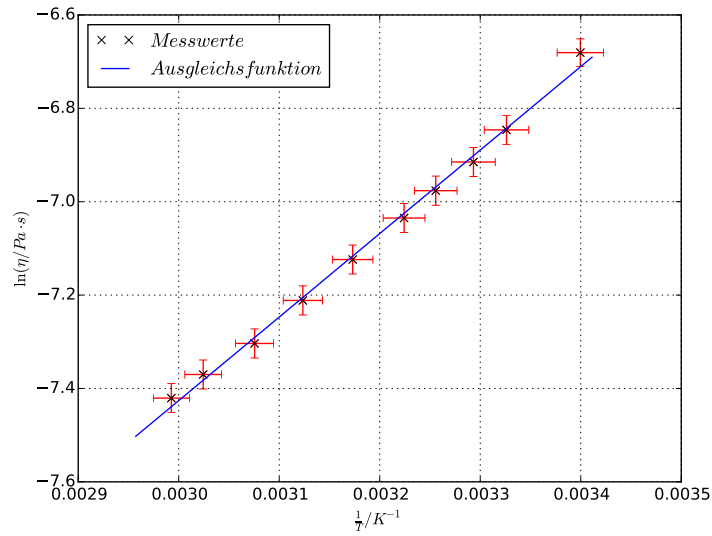
**Tabelle 2:** gemittelte Zeiten für eine Strecke von 10 cm bei unterschiedlichen Temperaturen und die sich daraus aus Formel (3) ergebenden Viskositäten.

Temperatur $T / \text{K}$	Zeitmittelwert $\bar{t} / \text{s}$	Viskosität $\eta / \text{mPa s}$
294,15±2,0	83,18±0,79	1,26±0,04
300,65±2,0	70,50±0,00	1,07±0,03
303,65±2,0	65,81±0,09	0,99±0,03
307,15±2,0	61,89±0,23	0,93±0,03
310,15±2,0	58,37±0,12	0,88±0,03
315,15±2,0	53,41±0,04	0,81±0,03
320,15±2,0	48,94±0,17	0,74±0,02
325,15±2,0	44,62±0,12	0,67±0,02
330,65±2,0	41,75±0,00	0,06±0,02
334,15±2,0	39,69±0,09	0,60±0,02

### 4.4 Bestimmung der Andradeschen Gleichung

Um die Konstanten A und B aus der Andradeschen Gleichung (4) zu bestimmen werden die Werte der Temperatur und der Viskosität in der Form  $\ln(\eta)$  gegen  $1/T$  in dem Graphen 2 aufgetragen.





**Abbildung 2:**  $\ln(\eta)$  gegen  $1/T$  aus der Tabelle 2 aufgetragen

Die Andradesche Gleichung sieht somit wie folgt aus:

$$\ln(\eta) = \ln \left( A \exp \left( \frac{B}{T} \right) \right). \quad (16)$$

Diese lässt sich nun in die Graden Gleichung

$$\ln(\eta) = B \cdot \frac{1}{T} + \ln(A) \quad (17)$$

umformen. Somit kann nun die Lineare Regression benutzt werden, um die Konstanten B und A zu erhalten. Aus der Linearen Regression ergibt sich für B

$$B = 1788,46 \pm 39,56,$$

für  $\ln(A)$

$$\ln(A) = 12,79 \pm 0,13$$

und somit für A

$$A = (2,78 \pm 0,35) \cdot 10^{-6}.$$

## 4.5 Reynoldssche Zahl

Als letztes wird durch die Reynoldssche Zahl noch überprüft, ob die hier vorkommene Strömung laminar ist. Dafür wird die Reynoldssche Zahl mit Hilfe der Formel (2) berechnet. Da sich der Durchmesser der Rohre nicht bestimmen ließ, wird der Durchmesser der größeren Kugel verwendet. Außerdem muss für die größere Kugel nur die geringste Zeit überprüft werden, weil alle anderen Werte durch die  $1/(\eta \cdot t)$  Abhängigkeit unter diesem Wert liegen. Für die kleinere Kugel ergibt sich

$$Re_{kl} = 97,29 \pm 4,22$$

und für die größere Kugel bei der kürzesten Zeit

$$Re_{gr} = 64,59 \pm 2,04.$$

laut dem Kapitel 1 handelt es sich bei beiden um eine laminare Strömung, da die Werte der beiden Reynoldsschen Zahlen kleiner als 2040 sind.

## 5 Diskussion

Das Experiment zeigt, dass die Viskosität von Wasser sich bei Erhöhung der Temperatur verringert und sich sowohl durch die Formel (3), als auch durch die Formel (4) berechnen lässt. Außerdem liegt die berechnete Ausgleichsgerade im Bereich der angenommenen Messfehler, dies bestätigt ebenfalls die Gleichungen. Jedoch weicht die durch den Versuch bestimmte Viskosität bei ungefähr Raumtemperatur (20°)

$$\eta_{exp} = 1,26 \text{ Pa s}$$

von dem Literaturwert

$$\eta_{lit} = 1 \text{ Pa s}$$

um 26% ab. Diese relative Abweichung lässt sich durch systematische Fehler bei der Messung begründen. Zum Beispiel werden die Zeiten bei dem Versuch nur mit einer Stoppuhr gemessen, die per Hand gestoppt werden. Ebenfalls wird die Apparatekonstante nur aus einer anderen, im Skript gegebenen, berechnet und nicht explizit für die große Kugel bestimmt. Desweiteren wird die Temperatur des destillierten Wassers nicht explizit in der Röhre gemessen, sondern nur an einem Thermostat abgelesen. Dies führt zu einer ungenauen Temperaturbestimmung. Trotzdem kann gesagt werden, dass der Versuch, wenn die systematischen Fehler minimiert werden, sich zur Viskositätsbestimmung eignet.

## Literatur

- [1] *Die Lösung eines alten Rätsels: Der kritische Punkt der Rohrströmung.* URL: [https://www.mpg.de/4804411/Rohrstroemung\\_kritische\\_Punkt](https://www.mpg.de/4804411/Rohrstroemung_kritische_Punkt) (besucht am 03.01.2016).
- [2] TU Dortmund. *Skript zum Versuch Nr.107 Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler.* 2014.
- [3] *Viskosität und Reynoldszahlen.* URL: [http://www.uni-oldenburg.de/fileadmin/user\\_upload/physik/ag/physikpraktika/download/GPR/pdf/Viskositaet.pdf](http://www.uni-oldenburg.de/fileadmin/user_upload/physik/ag/physikpraktika/download/GPR/pdf/Viskositaet.pdf) (besucht am 03.01.2016).