Seminarausarbeitung: Floquet-Theorie für gewöhnliche Differentialgleichungen

Emine Cambel

Betreuender Dozent: Dr. Thomas Dohnal

December 25, 2013

1 Abstract

Linear differential equations with periodic coefficients constitute a well developed part of the theory of ordinary differential equations. They arise in many physical and technical applications. The main tool of the theory of periodic ordinary differential equations ist the co-called Floquet-theory. Its central result is the falowing theorem: Linear differential algebraic equations with periodic coefficients are considered in detail, and a natural notion of the monodromy matrix is obtained that generalizes the well-known theory for regular ordinary differential equations.

2 Einleitung

In meinem Votrag betrachten wir uns gewöhnliche lineare Differentialgleichungssysteme der Form

$$y^{(n)} = \sum_{k}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}(t)$$

an, in denen eine unbekannte, auf einem Intervall I definierte reell-, komplex- oder vektorwertige stetig differenzierbare Funktion $y : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ gesucht wird, die die vorgelegte Gleichung erfüllt.
Diese Lösungsfunktion $y = (y_1, \cdots, y_n)$ löst das obige System. Insbesondere ist die Gleichung ein lineares System von n Differentialgleichungen erster Ordnung. Dabei bezeichnet $y^{(k)}$ die k-te Ableitung der gesuchten Funktion. D.h. die Koeffizienten a_k stellen im vektorwertigen Fall eine quadratische Koeffizientenmatrix $A : [a, b] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ dar. Wenn die a_k von $t \in \mathbb{R}$ abhängen und die folgende Gleichung

$$a_k(t) = a_k(t + \omega) \ , \quad \omega > 0$$

erfüllt, so wird $A(t)$ für $t \in \mathbb{R}, \omega > 0$ als eine *ω-periodische Koeffizientmatrix* bezeichnet und es gilt

$$A(t) = A(t + \omega)$$

Wenn die a_k nicht von $t \in \mathbb{R}$ abhängen, so wird A für $t \in \mathbb{R}$ als eine *konstante Koeffizientenmatrix* bezeichnet.
Im allgemeinen Fall ist es schwierig Fundamentalsysteme für Differentialgleichungen zu konstruieren. Dies ist nur durch eine spezielle Struktur der Differentialgleichung möglich. Ausserdem gilt: Ist eine Lösung der homogenen Differentialgleichung hoher Ordnung bekannt, so kann man das Reduktionsverfahren von d'Almbert verwenden, um die Gleichung auf eine Differentialgleichung mit einer um eins erniedrigten Ordnung zurckzuführen.
Für das System

$$y' = A(t)y \ , \quad t \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

ω-periodischer stetiger Koeffizientmatrix kann man zwar nicht explizit ein Fundamentalsystem konstruieren, jedoch kann man eine Aussage über die Struktur der Fundamentalmatrix dieses Systems machen. Dies wird die Hauptthematik dieses Seminars realisieren.
Im Folgenden sei $y = (y_1 \cdots, y_n)$ immer eine Lösung des obigen Systems, so bezeichnet man die Matrix

$$Y(t) := (y_1(t) \mid \ \cdots \ \mid y_n(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

als Fundamentalmatrix. Die n Differentialgleichungen $y_i^{'} = A(t)y_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ lassen sich als eine Matrizen-Gleichung

$$Y^{'} = A(t)Y$$

schreiben. Man sieht leicht, dass diese Matrizen-Gleichung äquivalent zu den n Differentialgleichungen ist. Die Lösung $Y(t)$ ist durch die Vorgabe einer Anfangsbedingung $Y(\tau) = C$ eindeutig bestimmt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wird Y(0)=E, um die folgenden Rechnungen zu vereinfachen.
Es ist $Y(t)$ genau dann ein Fundamentalsystem, wenn die Matrix C regulär ist. In diesem Fall ist $Y(t)$ regulär $\forall t \in I$. Für die Fundamentalmatrix $Y(t)$ erhält man also sämtliche Lösungen in der Form

$$y = Yc \ , \quad c \in \mathbb{R}^n$$

Die FLOQUET-Theorie, die nach dem französischen Mathematiker Gaston Floquet (1847 - 1920) benannt ist, macht eben gerade diese Aussage über die Struktur der Fundamentalmatrizen $Y(t)$ des homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems mit periodischen Koeffizienten aus (1). Sie besagt, dass jede Fundamentalmatrix $Y(t)$ eines solchen Systems sich in der Form

$$Y(t) = P(t)e^{tR} \qquad (1')$$

schreiben lässt, worin $P : \mathbb{R} \to GL_m(\mathbb{C})$ stetig differenzierbar und ω-periodisch und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine konstante Matrix ist. Hierbei bezeichnet e^X die Matrixexponentialfunktion. Begnügt man sich damit, dass P nur 2ω-periodisch ist, so können P, R reellwertig gewählt werden.
Dieses Resultat wird benutzt, um zu zeigen, dass das System (1) äquivalent zu einem homogenen linearen System mit konstanten Koeffizienten ist, bzw. die Transformation

$$z(t) = P^{-1}(t)y(t)$$

das Differentialgleichungssystem in eines mit konstanten Koeffizienten überführt:

$$z'(t) = Rz(t).$$

D.h. also es existiert eine zeitabhängige 2ω-periodische Koordinatentransformation, die das ω-periodische System in ein lineares System mit konstanten Koeffizienten transformiert. Wir haben bereit für homogene Systeme die Stabilität von stationären Lösungen untersucht und werden hier nochmal in dem letzten Abschnitt festhalten, dass wir die Stabilitätsbetrachtungen auf unser System ausweiten können.
Die Stabilität unserer Nulllösung wird durch die *charakteristischen Multiplikatoren* bestimmt.

3 Einführung in die Floquet-Theorie

Im folgenden Abschnitt werde ich eine kleine Wiederholung und Zusammenfassung von Matrizenfunktionen und dessen Eigenschaften geben. Dies ist insofern wichtig und grundlegend, da das Konzept der Floquet-Theorie auf spezielle Matrizenfunktionen basiert. Diejenigen, die mit dem Thema schon vertraut sind, können ohne Weiteres in dem nächsten Abschnitt weiterlesen.

3.1 1. Potenzreihen von Matrizen

Sei K ein Körper. Ist $B \in K^{n\times n}$ und $p(s)$ ein Polynom

$$p(s) = c_0 + c_1 s + \cdots + c_k s^k$$

so versteht man unter $p(B)$ die Matrix

$$p(B) = c_0 E + c_1 B + \cdots + c_k B^k \in K^{n\times n}$$

Ist dabei $B = At$ mit $A \in K^{n\times n}$, so gilt

$$p(At) = c_0 E + c_1 At + \cdots + c_k A^k t^k.$$

Die Ableitung dieser von t abhängenden Matrix nach t lautet

$$\frac{d}{dt} p(At) = Ap'(At). \tag{2}$$

Die unendliche Reihe von $C_k \in K^{n\times n}$ wird dargestellt in der Form

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} C_k.$$

Die Konvergenz der Reihe ist in der üblichen Weise als Konvergenz der Teilsummenfolge bzgl. der euklidischen Norm $|.|$ im Raum $\mathbb{R}^{n\times n}$ oder $\mathbb{C}^{n\times n}$ definiert.
Eine absolute Konvergenz liegt vor, wenn $\sum_k |C_k| < \infty$ ist.
Eine beliebige Potenzreihe

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k (|s| < r)$$

mit dem Konvergenzradius r gibt Anlass zu einer Matrizenfunktion

$$f(C) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k B^k,$$

wobei diese absolut konvergent für $|B|_e < r$ ist. Insbesondere ist

$$f(At) = c_0E + c_1At + \cdots + c_kA^kt^k$$

absolut konvergent für

$$|t| < \frac{r}{|A|_e} = t_0$$

und gleichmässig konvergent in jedem kompakten Teilintervall von $(-t_0, t_0)$. Da die formal differenzierte Reihe wieder gleichmäig konvergent ist, darf man $f(At)$ gliedweise differenzieren.
Es ergibt sich wie bei (2)

$$\frac{d}{dt}f(At) = Af'(At). \qquad (2')$$

3.2 Beispiel: Die Exponentialfunktion

Für beliebige $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ wird die Exponentialreihe erzeugt durch die Funktion $f(s) = e^s$. Sie ist definiert durch

$$\begin{aligned} e^B &= E + B + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}B^k \\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}B^k\right). \end{aligned}$$

Diese konvergiert für alle B und die Ableitung ist nach (2')

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}.$$

Damit haben wir ein Fundamentalsystem für das lineare DGL-System

$$y' = Ay$$

gefunden, nämlich

$$Y(t) = e^{At}\ ,\ Y(0) = E$$

Die Exponentialfunktion besitzt eine Reihe von Eigenschaften, die wir im Folgenden benennen werden. Die Beweise überlasse ich dem Leser als kleine Wiederholungsaufgabe. Diese sollten aus der Vorlesung Analysis 3 bekannt sein, oder können im Buch *'Gewöhnliche*

Differentialgleichungen' von Wolfgang Walter nachgelesen werden.

Der *Hilfssatz 1* liefert einige grundlegende Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion.

3.3 Hilfssatz 1

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Es ist

- $e^{A+B} = e^A e^B$, falls AB=BA.
- $e^{(B^{-1}AB)} = B^{-1} e^A B$, falls $detB \neq 0$.
- e^A ist invertierbar mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Zur Vorbereitung auf die FLOQUET-*Theorie* benötigen wir noch die folgenden Aussage über reguläre Matrizen. Diese werden wir beim Beweisen der FLOQUET-*Theorie* benutzen. Der *Hilfssatz 2*, der besagt, dass jede reguläre Matrix durch die Matrixexponentialfunktion dargestellt werden kann, wird im späteren Verlauf für die Existenzannahme solcher Darstellungen dienen.

3.4 Hilfssatz 2

Zu jeder regulären Matrix C existiert eine Matrix B mit

$$e^B = C.$$

In der Einleitung wurde die FLOQUET-*Darstellung* (1') kurz eingeführt. Wir werden später sehen, dass diese Matrixarstellung eine spezielle Darstellung der Eigenwerte haben wird. Um dies Beweisen zu können, wird letztendlich der *Hilfssatz 3* benutzt.

3.5 Hilfssatz 3

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und seien $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von A. Dann sind

- $\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k$ Eigenwerte von A^k
- $e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}$ Eigenwerte von e^A.

3.6 Hilfssatz 4

Ein Eigenwert λ von U hat dieselbe algebraische und geometrische Vielfachheit und dieselben Eigenvektoren wie der entsprechende Eigenwert e^{λ} von e^{U}

$$U\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow e^{U}\mathbf{x} = e^{\lambda}\mathbf{x}\ , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

4 Die Floquet-Theorie

Wir behandeln lineare Systeme mit periodischen Koeffizienten. Die folgenden Überlegungen gehen auf den französischen Mathematiker Gaston Floquet (1847-1920) zurück. Sie zeigen unter Anderem, dass solche Systeme auf Systeme mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt werden können.

4.1 Homogene Systeme mit periodischen Koeffizienten

Definition
Es sei $\omega > 0$. Eine Funktion f heisst ω-periodisch, wenn sie in $\mathbb{R}$ definiert ist und dort der Gleichung

$$f(t+\omega) = f(t)$$

genügt.

Im Folgenden betrachten wir uns das homogene lineare DGL-System mit einer stetigen, ω-periodischen (reell- oder komplexwertigen) Koeffizientenmatrix mit $\omega > 0$:

$$y^{'} = A(t)y \quad , \quad A(t+\omega) = A(t). \qquad (*)$$

Desweiteren sei jede Lösung immer eine Lösung von (*). Jede Lösung existiert in $\mathbb{R}$. Dass heisst wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass *Y(0)=E* die *Anfangsbedingung* und *Y(t)* die *Fundamentalmatrix* ist.

4.2 Floquet-Theorie

Sei $Y(t)$ gegeben. Dann gelten folgende Aussagen

1. Es ist
$$Y(t+\omega) = Y(t)Y(\omega)\ , \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

   Definition

   - Die Matrix $M := Y(\omega)$ heisst **Monodromie-** oder **Übergangsmatrix**.
   - Die Eigenwerte von M heissen **Floquet-** oder **charakteristische Multiplikatoren**.

2. Es gibt eine **komplexwertige konstante** Matrix $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$, sodass
$$Y(\omega) = e^{\omega K}\ , \quad Y'(\omega) = Ke^{\omega K}$$
und eine ω**-periodische** stetige Matrixfunktion $Q_\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $t \mapsto Q_\omega(t)$ mit
$$Y(t) = Q_\omega(t)e^{tK}\ , \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

   Definition

   - Die Darstellung heisst **Floquet-Normalform** oder **Floquet-Darstellung**.

3. Es gibt eine nur **2**ω**-periodische** Matrixfunktion $P_{2\omega} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $t \mapsto P_{2\omega}(t)$ und eine **reellwertige konstante** Matrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit
$$Y(t) = P_{2\omega}(t)e^{tR}\ , \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- Beweis zur 1. Aussage
  Ist $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $t \mapsto A(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ stetig und ω-periodisch, so existiert nach Vorlesung eine Lösung zum DGL-System (*).
  Setze nun $Z(t) := Y(t+\omega)$.

  Zeige zunächst

  (#) Sei $Y(t)$ eine Lösung, dann ist $Y(t+\omega)$ auch eine Lösung.

Beweis zu (#)
Es gilt

$$Y'(t) = A(t) \cdot Y(t),\ t \in \mathbb{R},$$

Nach Voraussetzung ist A ω-periodisch, somit gilt $A(t) = A(t + \omega)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ Z'(t) = Y'(t+\omega) &= A(t+\omega) \cdot Y(t+\omega) \\ &= A(t) \cdot Y(t+\omega) \\ &= A(t)Z(t) \qquad \square \end{aligned}$$

Nun definiere $M := Y(\omega) = (y_1(\omega)|\cdots|y_n(\omega)) = Z(0)$ mit $Y(0) = E$, wie oben angenommen. Die Matrix M ist offensichtlich konstant. Ihre Spalten sind linear unabhängig und bilden einen Vektorraum. Für die Fundamentalmatrix erhält man sämtliche Lösungen in der Form $y = Y(t) \cdot c$ mit $c \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow Y(t) \cdot M$ ist Fundamentalmatrix zum AWP $Z(0) = Y(0) \cdot M$ mit $Y(0) = E$.

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung folgt

$$Z(t) = Y(t) \cdot Y(\omega)\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Mit (#) folgt die Behauptung für die 1. Aussage der FLOQUET-Theorie. $\square$

- Beweis zur 2. Aussage
  Gegeben ist die konstante reguläre Matrix $M = Y(\omega)$. Mit *Hilfsatz 2* folgt, dass es zu der Matrix M eine Matrix $K \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit

  $$e^{\omega K} = M$$

  existiert. Nun setze $Q(t) := Y(t) \cdot e^{-Kt}$.
  Es ist noch zu Zeigen, dass $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ eine ω-periodische Matrix ist. M.a.W.

  Zeige (##)

  $$(\#\#)\ Q(t) = Q(t+\omega)$$

Beweis zu (##)
Wegen $Y(\omega)e^{-K\omega} = E$ und den Eigenschaften der Matrixesponentialfunktion aus *Hilfssatz 1* gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} Q(t+\omega) &= Y(t+\omega) \cdot e^{-K(t+\omega)} \\ &= Y(t)Y(\omega)e^{-Kt}e^{-K\omega} \\ &= Y(t)e^{-Kt}Y(\omega)e^{-K\omega} \\ &= Q(t) \end{aligned}$$

Also erfüllt unsere Definition die gewünschte Eigenschaft und es gilt nach Definition

$$Y(t) = Q(t)e^{tK}.$$

□

- Beweis zur 3. Aussage
  Setze $P(t) := Y(t)e^{-tR}$. Der Beweis folgt analog zum Beweis der 2. Aussage. □

4.3 Bemerkung

- Die Floquet-Normalform gibt Informationen über die Lösung der DGL.
- Ihre Fundamentalmatrix wird zerlegt in einen periodischen Teil und einen exponentiellen Teil.

Der Beweis der folgenden Proposition folgt unmittelbar aus der Linearen Algebra 1/2. Dies wird dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

4.4 Proposition über Übergangsmatrizen

Sei $Y(t)$ gegeben. Dann gelten folgende Aussagen über die Übergangsmatrix:

1. Jede Übergangsmatrix ist invertierbar. Jeder charakteristischer Multiplikator ist $\neq 0$
2. Alle Übergangsmatrizen haben diesselben Eigenwerte. Somit hängen sie weder von der Wahl der Fundamentalmatrix noch vom Anfangswert ab.
3. Insbesondere gibt es genau n charakteristische Multiplikatoren.

4.5 Folgerung vom Floquet

Sei Y(t) gegeben durch $Y(t) = P(t)e^{tR}$. Dann gilt die Aussage: Die Transformation

$$Z(t) = P^{-1}(t)Y(t)$$

führt das System in ein reelles System mit konstanten Koeffizienten über:

$$Z'(t) = RZ(t).$$

Offensichtlich ist das System (*) äquivalent zu einem homogenen linearen System mit konstanten Koeffizienten. D.h. wir können bereits bekannte Stabilitätsbetrachtungen auf (*) ausweiten. Dies werden wir uns im letzten Abschnitt nochmal genauer anschauen.

Nun sei das ω-periodische DGL-System (*) mit der zugehörigen Fundamentalmatrix Y(t) in der *Floquet-Darstellung*

$$Y(t) = Q(t)e^{tK}$$

gegeben. Sei M die reguläre Übergangsmatrix. Im folgenden wird diese Matrix eine entscheidende Rolle spielen. Wir haben bereits kennengelernt, dass die Eigenwerte λ_i dieser Matrix als *charakteristische* (oder *Floquet-*) *Multiplikatoren* bezeichnet werden. Da M regulär ist, sind sie $\neq 0$ und folglich existieren Zahlen $\mu_i \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_i = e^{\mu_i \omega}$. Die μ_i werden als *charakteristische Exponenten* bezeichnet. Dies halten wir im folgenden fest.

4.6 Charakteristischer Exponent

Definition
Es gibt ein $\mu_i \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_i = e^{\mu_i \omega}$.
Die μ_i für $i = 1, \cdots, n$ heissen **charakteristische Exponenenten** oder **Floquet-Exponenten**.
Die λ_i für $i = 1, \cdots, n$ heissen **charakteristische** oder **Floquet-Multiplikatoren**.

Es gilt

$$e^{2\pi i} = 1$$

Somit sind die λ_i nur bis auf Vielfache von $2\pi i\omega$ bestimmt, jedoch ist $Re\mu_i$ eindeutig festgelegt. Diese Festlegung wird später bei der Stabilitätsbetrachtung eine bemerkenswerte

Rolle spielen.
Nun machen wir uns Gedanken über die Existenz von nichttrivialen Lösung. Da eine beliebige Lösung in der Form $y_i(t) = Y(t)y_i(0)$ für $i = 1, \cdots, n$ dargestellt werden kann, ist $y_i(\omega) = My_i(0)$. Die Gleichung

$$y_i(\omega) = \lambda_i y_i(0)$$

ist also äquivalent mit

$$My_i(0) = \lambda_i y_i(0).$$

Womit wir zu der Existenzaussage einer nichttrivialen Lösung stossen.

4.7 Existenz der nicht-trivialen Lösung

Sei Y(t) gegeben. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ charakteristischer Multiplikator und $e^{\mu \cdot \omega} = \lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$, dann existiert eine nicht-triviale Lösung der Form

$$y(t) = e^{\mu \cdot t}\rho(t),$$

mit $\rho(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ periodische Funktion. Ausserdem gilt für diese Lösung

$$y(t + \omega) = \lambda y(t)$$

Beweis
Sei Y(t) eine Fundamentalmatrix von (*) gegeben. Laut *Satz von Floquet* existiert eine Floquet-Normalform in der Darstellung $Y(t) = Q(t)e^{t \cdot K}$, sodass μ Eigenwert von K ist. Demzufolge existiert ein Vektor $v \neq 0$, sodass $K \cdot v = \mu \cdot v$.
Mit

$$\begin{aligned}
K \cdot v &= \mu \cdot v \\
K^2 \cdot v &= \mu \cdot K \cdot v = v\mu^2 \cdot v \\
&\cdots \\
K^n \cdot v &= \mu^n \cdot v
\end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned} e^{\mu \cdot t} \cdot v &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot t^k \cdot \mu^k \cdot v \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot t^k \cdot K^k \cdot v \\ &= e^{t \cdot K} \cdot v \end{aligned}$$

Also gilt $e^{t \cdot K} \cdot v = e^{\mu \cdot t} \cdot v$, somit wird die Lösung $y(t) = Y(t) \cdot v$ repräsentiert in der Form $y(t) = Q(t) \cdot e^{t \cdot K} \cdot v = e^{\mu \cdot t} \cdot Q(t) \cdot v$. Die Lösung, welche von der ersten Aussage des Satzes gefordert wird, erhalten wird durch die Definition von $\rho = Q(t) \cdot v$. Die zweite Aussagen wird wie folgt bewiesen:

$$\begin{aligned} y(t+\omega) &= e^{\mu \cdot (t+\omega)} \rho(t+\omega) \\ e^{\mu \cdot t} \cdot e^{\mu \cdot \omega} \cdot Q(t+\omega) &= e^{\mu \cdot t} \cdot e^{\mu \cdot \omega} Q(t) \cdot v \\ e^{\mu \cdot t} \cdot e^{\mu \cdot \omega} \rho(t) &= \lambda \cdot y(t) \end{aligned}$$

□

4.8 Zusammenfassung

Einem Eigenwert $\lambda = e^{\omega \cdot \mu}$ von M entspricht ein Eigenwert μ von K mit gleicher algebraischer Vielfachheit k. Dazu gibt es k linear unabhängige Lösungen der Form

$$y(t) = e^{\mu t} Q(t) v(t) \ , \quad (m = 0, 1, \cdots, k-1)$$

wobei $v(t)$ ein Vektorpolynom vom Grad $\leq n$ ist. Die Funktion

$$\rho(t) = Q(t)v(t) = c_0(t) + c_1(t) + c_1(t)t + \cdots + c_n(t)t^n$$

ist ein 'Polynom mit ω-periodischen Koeffizienten c_j. Die solcherart für alle charakteristischen Exponenten μ_i durchgeführten Konstruktion führt auf ein Hauptsystem von Lösungen der Gleichung (*).

5 Stabilität

Der folgende Stabilitätstheorem wird zeigen, wie elegant man solche Beobachtungen durchführen kann. Jedoch ist es in der Praxis bei realen Problemen meistens unmöglich die Eigenwerte von $e^{\omega K}$ zu bestimmen, d.h. es ist nicht einsichtig, dass die Eigenwerte gefunden werden können ohne das gesamte System vorher lösen zu müssen. Wir müssen jedoch lediglich endlich viele Zahlen (die charakteristischen Multiplikatoren) approximieren, um eine Aussage ber die Stabilität des Systems treffen zu können. Diese Tatsache ist wichtig, denn beispielsweise kann die Stabilität oft durch Anwendung einer numerischen Methode, um die charakteristischen Multiplikatoren zu approximieren, überprüft werden. Dies wollen wir jedoch nicht weiter vertiefen.

5.1 Stabilitätstheorem

1. Wenn die charakteristischen Multiplikatoren des periodischen System (*) alle betraglich kleiner 1 sind oder äquivalent dazu alle charakteristischen Exponenten negativen Realteil haben, dann ist die Nulllösung asymptotisch stabil.

2. Wenn die charakteristischen Multiplikatoren des periodischen Systems (*) alle betraglich kleiner gleich 1 sind oder äquivalent dazu alle charakteristischen Exponenten nicht-positiven Realteil besitzen und ,wenn die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit jedes charakteristischen Multiplikators im Betrag gleich 1 ist oder quivalent dazu wenn die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit jedes charakteristischen Exponentens mit Realteil 0 ist, dann ist die Nulllösung (Lyapunov-) stabil.

3. Wenn mindestens ein charakteristischer Multiplikator des periodischen Systems (*) betraglich grösser 1 oder äquivalent dazu ein charakteristischer Exponent positiven Realteil hat, dann ist die Nulllösung instabil.

Die anschliessende Frage wäre: Existiert eine Methode, die charakteristischen Exponenten explizit zu bestimmen ohne die Lösung der DGL explizit zu finden?
Es gibt Fälle, wo dies möglich ist. Ein Beispiel hierfür wäre die *Hill's Gleichung.* Die Stabilität der Nulllösung der DGL (*) kann bestimmt werden, ohne das System explizit zu lsen bzw. die Floquet-Normalform explizit zu bestimmen.

6 Literaturverzeichnis

Bücher

- Aulbach, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Verlag Spektrum, 2004.
- Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Verlag Springer, 2000.

Webseiten

- http://de.wikipedia.org/wiki/Gewöhnliche_Differentialgleichung
- http://de.wikipedia.org/wiki/Fundamentalsystem_(Mathematik)
- http://math.arizona.edu/~dwang/FloquetTheory.pdf
- www.matha.rwth-aachen.de/de/lehre/ws11/sdgl/