9. Übungsblatt

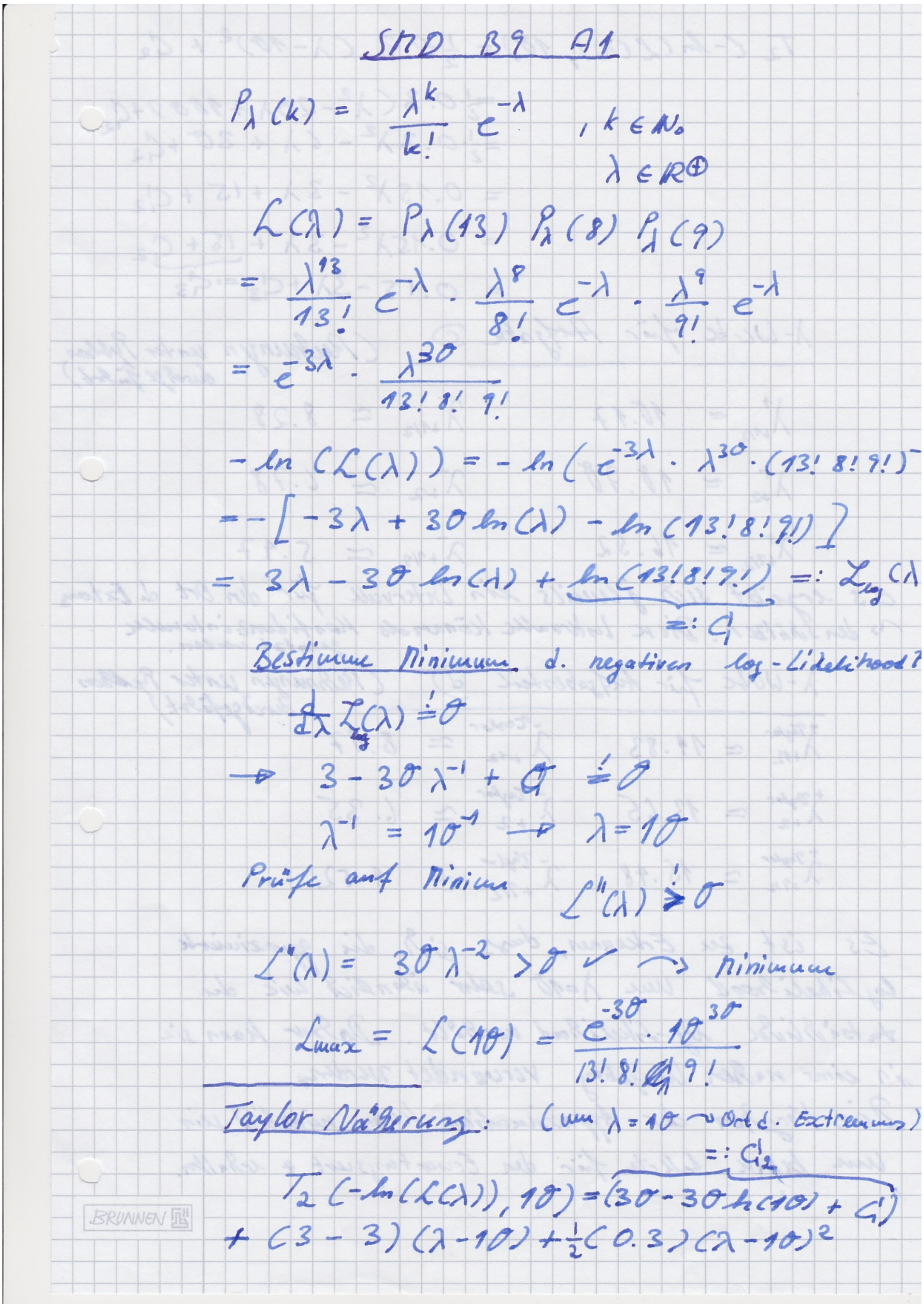
Ksenia Klassen
ksenia.klassen@udo.edu

Dag-Björn Hering
dag.hering@udo.edu

Henning Ptaszyk
henning.ptaszyk@udo.edu

17. Januar 2017

1 Aufgabe1



SMD B9 A1

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad , k \in \mathbb{N}_0 \quad \lambda \in \mathbb{R}^{+}$$

$$\mathcal{L}(\lambda) = P_\lambda(13)\, P_\lambda(8)\, P_\lambda(9)$$

$$= \frac{\lambda^{13}}{13!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{8}}{8!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{9}}{9!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{-3\lambda} \cdot \frac{\lambda^{30}}{13!\,8!\,9!}$$

$$-\ln(\mathcal{L}(\lambda)) = -\ln\left(e^{-3\lambda} \cdot \lambda^{30} \cdot (13!\,8!\,9!)^{-}\right.$$

$$= -\left[-3\lambda + 30\ln(\lambda) - \ln(13!\,8!\,9!)\right]$$

$$= 3\lambda - 30\ln(\lambda) + \underbrace{\ln(13!\,8!\,9!)}_{=:\, c_1} =: \mathcal{L}_{log}(\lambda)$$

Bestimme Minimum d. negativen log-Likelihood?

$$\frac{d}{d\lambda}\mathcal{L}_{log}(\lambda) \overset{!}{=} 0$$

$$\to \quad 3 - 30\lambda^{-1} + \cancel{c_1} \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda^{-1} = 10^{-1} \to \lambda = 10$$

Prüfe auf Minimum $\quad \mathcal{L}''(\lambda) \overset{!}{>} 0$

$$\mathcal{L}''(\lambda) = 30\lambda^{-2} > 0 \checkmark \rightsquigarrow \text{Minimum}$$

$$\mathcal{L}_{max} = \mathcal{L}(10) = \frac{e^{-30} \cdot 10^{30}}{13!\,8!\,9!}$$

Taylor Näherung: (um $\lambda = 10 \rightsquigarrow$ Ort d. Extremums)

$$T_2(-\ln(\mathcal{L}(\lambda)), 10) = \overbrace{(30 - 30\ln(10) + c_1)}^{=:\, c_2} + (3-3)(\lambda - 10) + \tfrac{1}{2}(0.3)(\lambda - 10)^2$$

Abbildung 1: Seite1.

$$T_2(-\ln(\mathcal{L}(\lambda)), 10) = \frac{1}{2} 0.3 \, (\lambda - 10)^2 + C_{12}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 0.3 (\lambda^2 - 20\lambda + 100) + C_{12}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 0.3 \lambda^2 - 6\lambda + 30 + C_{12}$$
$$= 0.15\lambda^2 - 3\lambda + 15 + C_{12}$$
$$= 0.15\lambda^2 - 3\lambda + \underbrace{15 + C_{12}}$$
$$= 0.15 - 3\lambda + C_{13} =: C_{13}$$

λ-Werte für Aufgabe c (Rechnungen unter Python durchgeführt)

$\lambda^{+}_{+1/2} \simeq 10.17$ $\quad \lambda^{-}_{+1/2} \simeq 8.28$

$\lambda^{+}_{+2} \simeq 10.70$ $\quad \lambda^{-}_{+2} \simeq 6.78$

$\lambda^{+}_{+9/2} \simeq 16.52$ $\quad \lambda^{-}_{+9/2} \simeq 5.47$

Es ergibt sich jeweils ein Intervall für den Ort d. Extr. ~ den Schätzer. Diese Intervalle können als Konfidenzintervalle genutzt werden.

λ-Werte für Aufgabenteil d (Rechnungen unter Python durchgeführt)

$\lambda^{+\,Taylor}_{+1/2} \simeq 11.83$ $\quad \lambda^{-\,Taylor}_{+1/2} \simeq 8.17$

$\lambda^{+\,Taylor}_{+2} \simeq 13.65$ $\quad \lambda^{-\,Taylor}_{+2} \simeq 6.35$

$\lambda^{+\,Taylor}_{+9/2} \simeq 15.48$ $\quad \lambda^{-\,Taylor}_{+9/2} \simeq 4.52$

Es ist zu erkennen, dass sich die approximierte log-Likelihood um $\lambda = 10$ sehr ähnlich wie die tatsächliche log-Likelihood verhält. Daher kann sie in einer nahen Umgebung verwendet werden.
Dieses Vorgehen der Approximation kann nützlich sein um bessere Werte für den Erwartungswert z. erhalten.

Abbildung 2: Seite2.

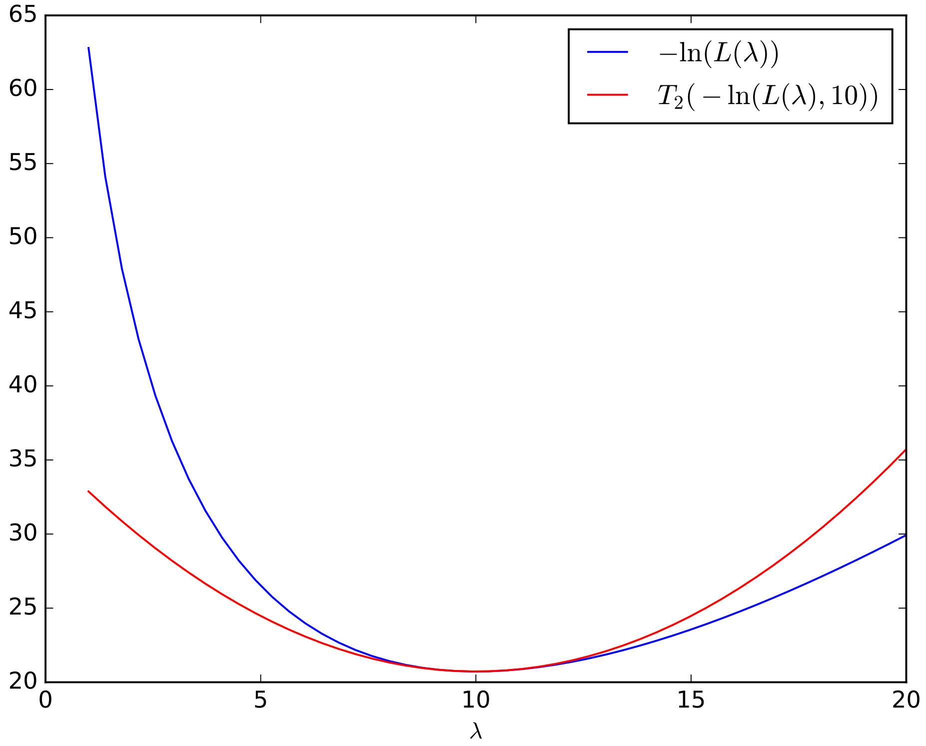


Abbildung 3: Graphische Darstellung der negativen log-likelihood sowie ihrer Taylornäherung 2.Ordnung.

Aufgabe 2:

$$f(\varphi) = A_0 \cos(\varphi + \delta)$$

Ansatz:

$$f(\varphi) = a_1 \cos(\varphi) + a_2 \sin(\varphi)$$

a)

$$A = \begin{pmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ \cos(30) & \sin(30) \\ \cos(60) & \sin(60) \\ \cos(90) & \sin(90) \\ \vdots & \vdots \\ \cos(330) & \sin(330) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{a} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{y}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Mit Python:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -0{,}038 \\ 0{,}077 \end{pmatrix}$$

2 Aufgabe 3

2.1 a)

Die Messwerte aus der Datei *aufg_a.csv* sollen mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate an ein Polynom 6. Grades

$$p(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4 + a_6 x^5 + a_7 x^6 \tag{1}$$

gefittet werden. Dafür wird die Designmatrix A für die Messewerte bestimmt und über die Formel

$$\vec{a} = (A^T A)^{-1} A \vec{y} \tag{2}$$

folgen die Koeffizienten die in der Tabelle 1 aufgelistet sind. In der Abbildung 4 sind die Messwerte und das Polynom dargestellt.

Tabelle 1: Koeffizienten des Polynoms 6.Grades für den Fit.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
$-6,7 \cdot 10^{-2}$	$6,1 \cdot 10^{-1}$	$-5,1 \cdot 10^{-1}$	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$-4,5 \cdot 10^{-2}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$	$-1,9 \cdot 10^{-4}$

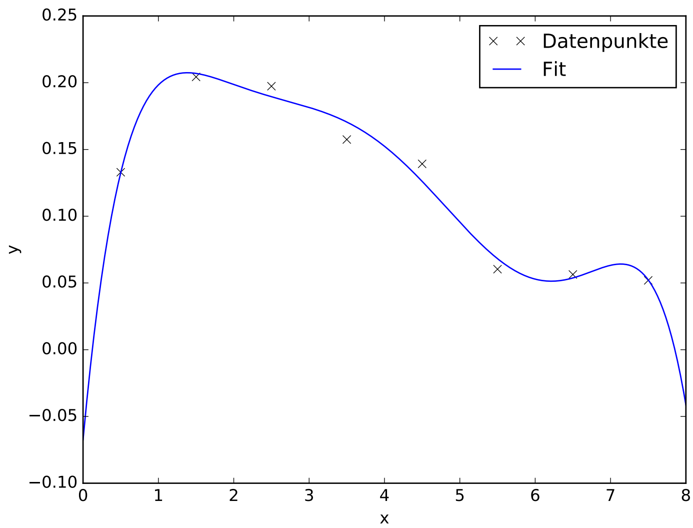


Abbildung 4: Messwerte und Fit für die Messwerte.

2.2 b)

Nun soll über eine Reguariserung ($\Gamma = \sqrt{\lambda} C A$) in den Fit mit eingehen. Die unterschiedlichen Regularisierungsstärken sind $\lambda \in (0.1, 0.3, 0.7, 3, 10)$. Die Koeffizienten die sich für die unterschiedlichen Regularisierungsstärken sind in der Tabelle2 und die dazugehörigen Graphen in der Abbildung 5 zu finden.

Tabelle 2: Koeffizienten des Polynoms 6.Grades für den Fit bei underschiedlichen Regularisierungsstärken λ.

λ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
$0,1$	$5,3 \cdot 10^{-02}$	$2,6 \cdot 10^{-01}$	$-1,9 \cdot 10^{-01}$	$7,7 \cdot 10^{-02}$	$-1,7 \cdot 10^{-02}$	$1,9 \cdot 10^{-03}$	$-8,1 \cdot 10^{-05}$
$0,3$	$1,1 \cdot 10^{-01}$	$1,1 \cdot 10^{-01}$	$-6,4 \cdot 10^{-02}$	$2,5 \cdot 10^{-02}$	$-6,3 \cdot 10^{-03}$	$7,9 \cdot 10^{-04}$	$-3,6 \cdot 10^{-05}$
$0,7$	$1,4 \cdot 10^{-01}$	$4,4 \cdot 10^{-02}$	$-1,7 \cdot 10^{-02}$	$6,5 \cdot 10^{-03}$	$-2,4 \cdot 10^{-03}$	$3,6 \cdot 10^{-04}$	$-1,8 \cdot 10^{-05}$
3	$1,7 \cdot 10^{-01}$	$8,0 \cdot 10^{-03}$	$-1,1 \cdot 10^{-03}$	$-1,1 \cdot 10^{-04}$	$-4,9 \cdot 10^{-04}$	$1,1 \cdot 10^{-04}$	$-6,0 \cdot 10^{-06}$
10	$1,7 \cdot 10^{-01}$	$2,1 \cdot 10^{-03}$	$-2,1 \cdot 10^{-03}$	$-1,9 \cdot 10^{-04}$	$-1,4 \cdot 10^{-04}$	$3,9 \cdot 10^{-05}$	$-2,3 \cdot 10^{-06}$

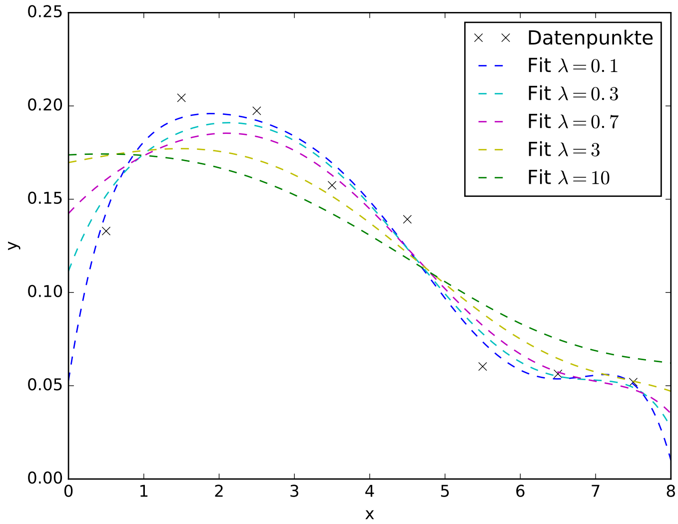


Abbildung 5: Messwerte und Fit bei underschiedlichen Regularisierungsstärken λ.

2.3 c)

Diesmal werden die Daten aus der Datei $aufg\_c.csv$ verwendet. Die Messungen für einen x-wert werden gemittelt und der Mittelwertfehler wird mit der Formel

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \tag{3}$$

berechnet. Die Mittelwerte und die entsprechenden Fehler sind in der Tabelle 3 zu finden.

Tabelle 3: Mittelwerte von y und Mittelwertfehler für ensprechende x Werte.

x	$\overline{y}$	σ_y
$0,50$	$0,12$	$0,02$
$1,50$	$0,18$	$0,03$
$2,50$	$0,20$	$0,03$
$3,50$	$0,16$	$0,03$
$4,50$	$0,12$	$0,02$
$5,50$	$0,09$	$0,02$
$6,50$	$0,07$	$0,01$
$7,50$	$0,06$	$0,01$

Über die Mittelwertfehler kann eine Gewichtsmatrix W definiert werden mit dieser und der Formel

$$\vec{a} = (A^T W A)^{-1} A^T W \vec{y} \tag{4}$$

können die Parameter für den Fit bestimmt werden. Diese sind in der Tabelle 4 aufgelistet und in der Abbildung 6 sind die berechneten Mittelwerte mit Fehler sowie der Fit enthalten.

Tabelle 4: Koeffizienten des Polynoms 6.Grades für den Fit.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
$1,0 \cdot 10^{-1}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$6,2 \cdot 10^{-2}$	$-3,8 \cdot 10^{-2}$	$7,9 \cdot 10^{-3}$	$-7,3 \cdot 10^{-04}$	$2,6 \cdot 10^{-5}$

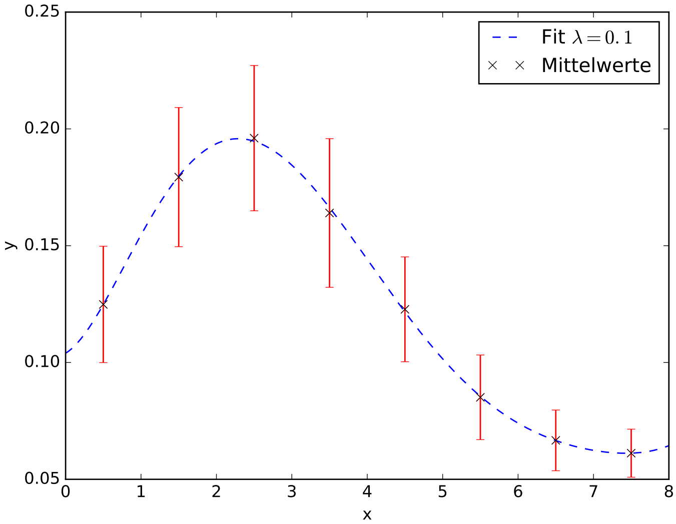


Abbildung 6: Mittelwerte der Messwerte und deren Mittelwertfehler und Fit mit Hilfe einer Gewichtsmatrix.