7. Übungsblatt

Ksenia Klassen
ksenia.klassen@udo.edu

Dag-Björn Hering
dag.hering@udo.edu

Henning Ptaszyk
henning.ptaszyk@udo.edu

20. Dezember 2016

1 Aufgabe2

SMD B7

A2

a) $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

Prüfe Erw. Treue:

$$\langle \bar{X} \rangle = \frac{1}{n} \langle \sum_i X_i \rangle$$
$$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu \quad \text{ET.}$$

b) $Var[\bar{x}] = Var[\frac{1}{n} \sum_i x_i]$

$$= n^{-2} \, Var[\sum_i X_i] \underset{\substack{X_i \\ \text{unkorreliert}}}{=} n^{-2} \sum_i Var[x_i] \quad \Big| \; \sigma = \sqrt{Var(x)}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

c) $S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$

ET Schätzer für Varianz

Bedingung: $\langle S_0^2 \rangle = \sigma^2$

$$\langle n^{-1} \sum_i (X_i - \mu)^2 \rangle = n^{-1} \langle \sum_i (x_i - \mu)^2 \rangle$$

$$= n^{-1} \sum_i \langle (x_i - \mu)^2 \rangle = n^{-1} \sum_i Var[x_i] = n^{-1} n \, Var[x]$$
$$= \sigma^2 \quad \text{ET}$$

d) $S_1'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{x})^2$

$$\langle S_1'^2 \rangle = \frac{1}{n} \langle \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \rangle = n^{-1} \langle \sum_i (x_i + \mu - \mu - \bar{x})^2 \rangle$$

$$= n^{-1} \langle \sum_i ((x_i - \mu)^2 - 2(x_i - \mu)(\bar{x} - \mu) + (\bar{x} - \mu)^2) \rangle$$

$$= n^{-1} \langle \sum_i (x_i - \mu)^2 - 2 \sum_i (x_i - \mu)(\bar{x} - \mu) + n(\bar{x} - \mu)^2 \rangle$$

Abbildung 1: .

$$= n^{-1} \left\langle \sum_i (x_i-\mu)^2 - 2n(\bar{x}-\mu)(\bar{x}-\mu) + n(\bar{x}-\mu)^2 \right\rangle$$

$$= n^{-1} \left\langle \sum_i \langle (x_i-\mu)^2\rangle - n \langle(\bar{x}-\mu)^2\rangle \right.$$

$$= n^{-1}\left(n\, Var[x] - n \cdot Var[\bar{x}] \right)$$

$$= Var[x] - Var[\bar{x}] = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \underline{\frac{n-1}{n}} \cdot \underline{\sigma^2} \neq \sigma^2$$

nicht ET.

<u>Korektur</u>

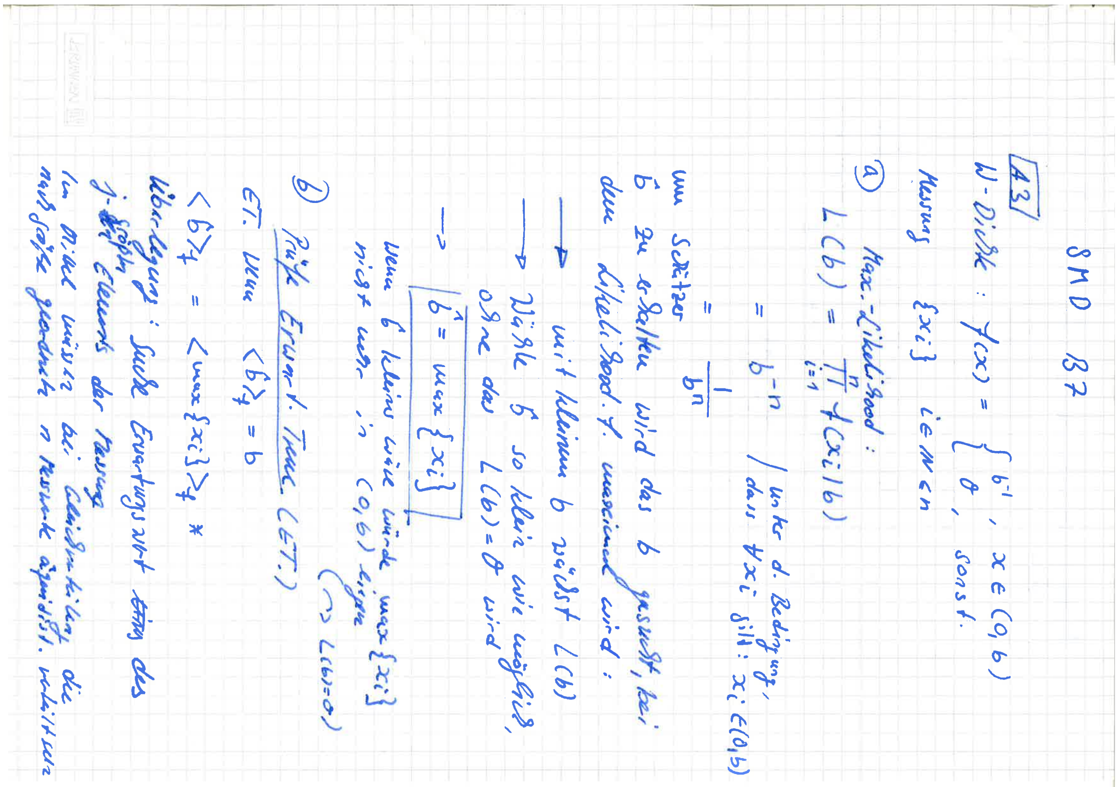
$$\tilde{S}_1'^2 = \frac{n}{n-1} S_1'^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \cancel{\mu}\bar{x})^2$$

Dieser Schätzer für σ^2 ist ET..

Abbildung 2: .

2 Aufgabe3



SMD B7

$\boxed{A3}$

W-Dichte: $f(x) = \begin{cases} b^{-1}, & x \in (0,b) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Messung $\{x_i\}$ $i \in \mathbb{N} < n$

a) Max.-Likelihood:

$$L(b) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i | b)$$

$$= b^{-n} \quad \Big| \text{ unter d. Bedingung, dass } \forall x_i \text{ gilt: } x_i \in (0,b)$$

$$= \frac{1}{b^n}$$

um Schätzer $\hat{b}$ zu erhalten wird das b gesucht, bei dem Likelihood-f. maximal wird:

→ mit kleinem b wächst $L(b)$

→ Wähle $\hat{b}$ so klein wie möglich, ohne dass $L(b) = 0$ wird

→ $\boxed{\hat{b} = \max\{x_i\}}$

wenn $\hat{b}$ kleiner wäre würde $\max\{x_i\}$ nicht mehr in $(0,b)$ liegen ($\rightarrow L(b)=0$)

b) <u>Prüfe Erwart.-Treue</u> (ET.)

ET. wenn $\langle \hat{b} \rangle_f = b$

$\langle \hat{b} \rangle_f = \langle \max\{x_i\} \rangle_f$ *

Überlegung: Suche Erwartungswert ~~eines~~ des j-größten Elements der Messung

Im Mittel müssen bei Gleichverteilung die nach größe geordnete n Messwerte äquidist. verteilt sein

Abbildung 3: .

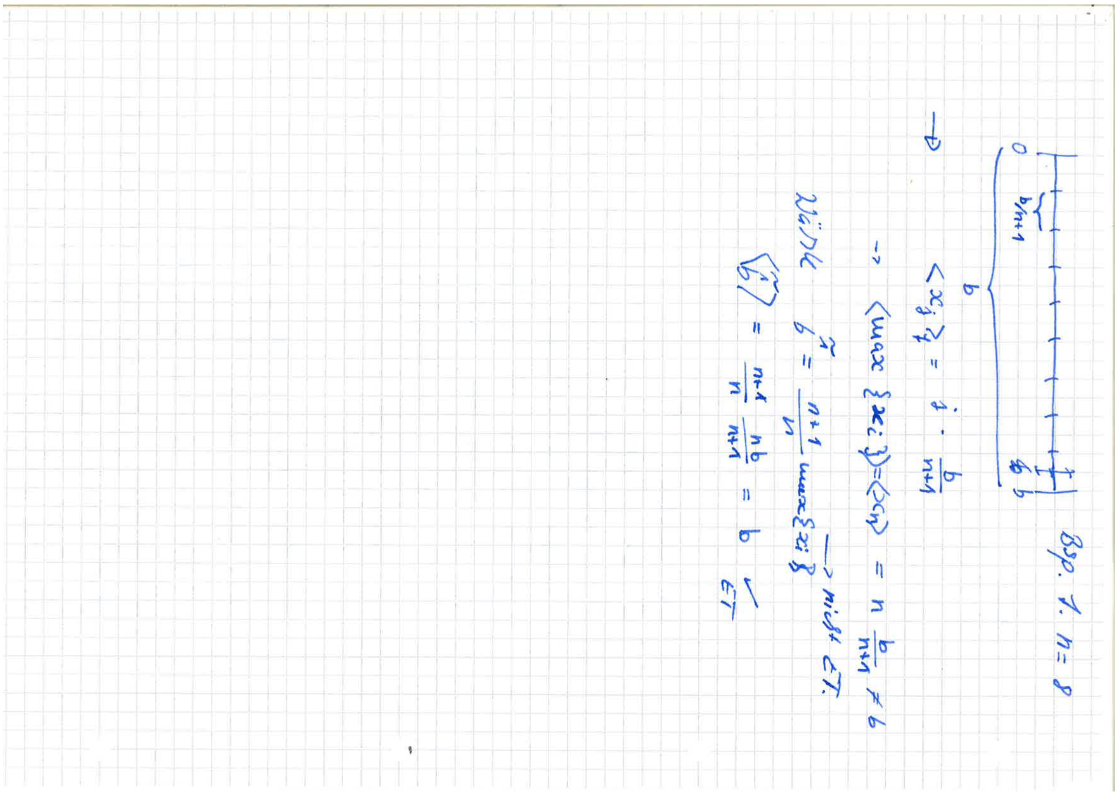


Abbildung 4