

CAPITULO I. CONCEPTOS BÁSICOS DE SISTEMAS DE CONTROL

El principal objetivo de este capítulo es repasar conceptos asociados con dinámica de procesos que debieron haber sido tratados en un curso anterior de ingeniería. En la primera parte revisaremos los conceptos básicos de un sistema de control, ya sea realimentado o en lazo abierto, así como la identificación de señales y elementos presentes en tales sistemas. En la segunda parte, repasaremos conceptos básicos de la respuesta temporal de los sistemas de control, tanto en el estado transitorio, es decir cuando hay cambios definidos en la entrada, como en estado estable, después de que su salida se ha establecido.

SEÑALES Y ELEMENTOS DE UN SISTEMA DE CONTROL

Sistema de Control: Una primera definición que usaremos en adelante, es que un sistema de control es el conjunto de elementos acondicionados y organizados adecuadamente, de manera que se pueda manipular una o más variables de entrada de un proceso o sistema para lograr que una o más variables de salida sigan un determinado comportamiento dinámico. Es importante resaltar el término dinámico, ya que aquí tratamos sistemas o procesos cuyas variables pueden ser manipuladas para producir cambios en la dinámica.

Por tanto, lo que buscamos en los sistemas de control es manipular esa dinámica a partir de la modificación automática de una o varias entradas del proceso, de manera que alcancemos una(s) determinada(s) salida(s) deseadas.

Normalmente cuando hablamos de sistemas de control, los asociamos con procesos industriales, donde existe una serie de interfaces hombre máquina, elementos y unidades de control industrial. Sin embargo, el uso del concepto de sistemas de control es más amplio y se puede encontrar en sistemas biológicos, económicos, educativos o cualquier otro proceso que tenga una dinámica manipulable a partir de una o más entradas.

Tipos y elementos de un sistema de control

Para definir el tipo de sistema de control, lo primero que vamos a preguntarnos es ¿qué elementos básicos debe contener un sistema de control?. Debemos tener obviamente una **planta o proceso** cuya dinámica se pueda controlar mediante una o más entradas (sistema dinámico). Para ello debe existir entonces un **actuador**, que como su nombre lo indica, actúa sobre la(s) entrada(s) de la planta y generalmente es el elemento del sistema de control que entrega la potencia necesaria para cambiar modificar la dinámica del proceso. Se requiere adicionalmente un controlador, que es el elemento que “*toma decisiones*” en función de alcanzar un valor deseado de la salida de la planta o proceso. Este se encarga de enviarle una señal de control (normalmente baja potencia) al actuador para que este aplique los cambios necesarios sobre el proceso. Hasta ahora con esos tres elementos comentados podemos tener un sistema de control como el de la figura XXXX.

Para la configuración anterior, si conocemos la dinámica del proceso, es decir sabemos cuánto se necesita aplicar a la entrada y durante cuánto tiempo, para que la salida alcance un valor deseado, y además dicha dinámica solo se ve afectada por la entrada del proceso (no

hay señales adicionales que perturben el proceso) podríamos configurar una estrategia de control tal que basada en un tiempo de acción asumimos que la salida alcanza el valor deseado en ese intervalo de tiempo. Entonces estamos hablando de una estrategia de control de **Lazo Abierto**.

Finalmente, podemos agregar uno o varios **sensores** tal que podamos medir directa o indirectamente la variable de salida que queremos establecer en un valor deseado. En un libro de instrumentación se amplía más el concepto de sensor, sin embargo, aquí hablamos del conjunto transductor-acondicionamiento-transmisor. Por tanto, en este elemento se asocia desde convertir la variable física a una variable eléctrica (volts, amperios o resistencia), para luego acondicionarla a un rango estandarizado y finalmente transmitir dicha señal.

Al sensar la variable de salida, podemos hacer uso de ella para ir comparando en cada instante de tiempo el valor deseado contra el valor real a partir de un **comparador**. El resultado de dicha comparación denominada normalmente error, se usará para que el controlador tome decisiones en forma autónoma. Entonces tendremos el sistema presentado en la figura XXX y es lo que se denomina **Lazo Cerrado**.

Como su nombre lo indica al existir una realimentación negativa de la variable de salida el lazo se cierra y las acciones de control se toman no basadas en un tiempo como el lazo abierto, sino en función de cómo evoluciona el error.

Señales de un sistema de control

Como se sabe, cada bloque o elemento tienen al menos una entrada y una salida, por tanto en este espacio vamos a identificar de cada bloque las señales asociadas. En este libro se tratará la configuración serie presentada en la figura XXX para la que vamos a definir sus respectivas señales, sin embargo, existen otras configuraciones en la que pueden existir señales adicionales o las que aquí se definen estarán en alguna otra posición, pero no es el objetivo ni alcance de este libro de control básico.

En orden de aparición (ver figura xxx) la primera señal que identificamos es:

Consigna, señal de referencia o set point ($r(t)$) que como lo indica su nombre es el valor deseado que queremos que alcance la(s) salida(s) de la planta. Normalmente es una señal eléctrica que se establece a través de un ajuste mecánico (perilla) o digital (desde una unidad de cómputo) u otro elemento de interacción.

Error ($e(t)$): Es la señal resultante de la comparación entre la referencia y la salida medida en cada instante. Normalmente tanto la señal de referencia como la salida son señales eléctricas de tipo voltaje o corriente son normalizadas a $\pm 5V$ o $4-20\text{ mA}$ por tanto, la señal de error va a tener la misma naturaleza.

Señal de control: Es la señal resultante de la decisión de control tomada por el controlador y normalmente es de tipo eléctrica ya sea tensión o corriente de acuerdo con la naturaleza de activación del actuador

Señal de actuación: Es la señal que como su nombre lo indica actúa sobre la planta y normalmente es la encargada de entregar la potencia que demanda la planta para que se modifique su dinámica.

Señal de salida o señal controlada: Es la variable física que se está controlando en la planta y que en el caso de ser un esquema de lazo cerrado es la variable que se realimenta a través del elemento de sensado. No debe confundirse la señal controlada (sobre la que se actúa) con la señal de control (con la que se controla).

A manera de ejemplificar cada uno de los elementos y señales del sistema de control, tomemos como ejemplo el control del nivel del fluido (agua, fluido químico, bebida, entre otros) en un tanque, tal como el de la figura XXX. En este caso el objetivo es llenar el tanque hasta un determinado nivel establecido externamente por un usuario del proceso (directamente se controla volumen dado que el área permanece constante). Para conseguir ello, se requiere: Planta que en este caso es el tanque y que presenta una dinámica del nivel dado que en la medida en que empieza a fluir líquido, este varía con el tiempo. Actuador que en este caso es la electroválvula de entrada con capacidad de variar el flujo de entrada al tanque. Controlador, que puede estar contenido en forma analógica en una tarjeta electrónica o en forma digital programado en un PLC o unidad de cómputo, que toma decisiones en función del error. Sensor de nivel que es el encargado de entregar una señal eléctrica equivalente al nivel actual del tanque y finalmente el comparador que se encuentra integrado en la tarjeta del controlador o programado en el PLC o unidad de cómputo según

sea el caso y como su nombre lo indica se encarga de comparar las señales de referencia y salida medida.

En cuanto a señales, se la de referencia es una señal establecida por el usuario desde una unidad de control o desde un elemento tipo perilla o digital desde donde se establece el nivel deseado mediante una señal eléctrica del mismo tipo y rango que la entregada por el sensor. La señal de salida que es la que entrega el sensor se nivel y que es normalmente un rango por ejemplo de 4 a 20 mA donde nivel 0 es 4 mA y nivel máximo es 20 mA. La señal de error que es la resultante de comparar las señales de referencia y salida. La señal de control que es una señal que puede ser un voltaje en un rango de por ejemplo 0 a 5V donde 0v deja la válvula totalmente cerrada y 5V totalmente abierta, mientras que dentro de ese rango deja la válvula en una apertura proporcional a la tensión aplicada. Fíjese que esta señal de control no es de potencia, sino que su función es indicar cual debe ser la apertura de la válvula, mientras que la potencia es entregada a través de la señal de actuación que para este caso es el flujo de líquido controlado mediante la válvula.

Si en el ejemplo presentado pensamos en un control de lazo abierto, entonces deberíamos tener una relación de tiempo de apertura de la válvula contra nivel alcanzado, cuando por ejemplo abrimos totalmente la válvula y deberíamos asumir que siempre empieza llenándose desde el mismo nivel (por ejemplo, vacío). Entonces tendría un controlador basado en tiempo donde si quiero alcanzar por ejemplo la mitad del nivel debería saber cuánto tiempo tarda en hacerlo. Esto se podría aplicar si caracterizo adecuadamente la dinámica del proceso y sus condiciones ambientales son totalmente controladas, en donde no existe perturbación

alguna que por ejemplo agregue fluido a través de otra fuente o que cambie la condición de la válvula de totalmente abierta a parcialmente abierta.

Por otra parte, si el tanque tiene por ejemplo una salida cuyo flujo es variable en función de la demanda (puede cambiar en función de la necesidad de uso) entonces necesariamente la mejor opción es cerrar el lazo y monitorear en cada instante el nivel, para tomar decisiones de control en línea que mantengan el nivel deseado por el usuario.

Entonces, a modo de conclusión respecto a las señales y elementos básicos de un sistema de control, tenemos entre cuatro y 5 elementos básicos: la planta, el actuador, el controlador y con eso podemos construir un sistema en lazo abierto y si tenemos un elemento de comparación y un sensor, entonces podemos construir un sistema de control de lazo cerrado, en función de las condiciones del proceso y necesidades de control.

Finalmente, se debe tener en cuenta que el proceso puede cambiar sus dinámicas por condiciones intrínsecas o extrínsecas. Por ejemplo, supongamos que el proceso está en una ciudad a nivel de mar con temperatura ambiente al medio día de 40°C y si es un tanque con agua expuesto a la radiación, eso hace que se pierda fluido en forma de vapor y consecuentemente disminuya el, mientras que en la noche no ocurre lo mismo. Por tanto, hay condiciones cambiantes del proceso, así como condiciones externas o perturbaciones externas que hacen que se modifique. Por otra parte, si estoy regulando el flujo mediante una electroválvula, puede haber un cambio en el nivel de la fuente de tensión o un ligero taponamiento que haga que modifique el flujo esperado. Lo mismo en la señal del

controlador enviada al actuador es en un rango de 5 voltios, pero pueden incluir ruidos y hace que la electroválvula opere inadecuadamente. Finalmente, otra perturbación externa, es el ruido en el sensor el que por conceptos de instrumentación se sabe que se diseñan con una buena relación señal a ruido, sin embargo, no es ajeno a ruido y ese ruido puede afectar en mayor o menor medida, dependiendo obviamente de la calidad del sensor y otros parámetros asociados con él.

Otro ejemplo que podemos revisar es el ventilador mecánico, bastante promocionado en los diferentes medios durante la pandemia del COVID-19 (ver video en XXX). Este ventilador mecánico fue propuesto para reemplazar la función del enfermero de aplicar al paciente antes de ir a la UCI, un volumen de aire a un flujo más o menos constante y a un número de respiraciones por minuto. Entonces este ventilador es un sistema de control de posición o velocidad, que indirectamente controla el volumen y flujo de aire aplicado.

Por tanto, la señal de referencia de posición de las pinzas se establece en función del número de respiraciones por minuto, el volumen de aire a aplicar y el flujo al que se quiere aplicar. Entonces, la señal de referencia (ver figura XXX) consiste en una posición desde cero hasta un cierto valor (en función del volumen de aire que se quiere aplicar) en un tiempo determinado, luego que se mantenga allí durante un momento y luego que regresé a la posición inicial en un intervalo de tiempo y así sucesivamente. El ciclo de cada apertura y cierre de las pinzas es en función del número de respiraciones por minuto que se esperan en el paciente. Entonces esto hace que las pinzas abran y cierren, permitiendo entonces que haya un volumen constante desplazado a una velocidad similar (flujo constante que lo que se busca en este tipo de pacientes adicional).

Lo que se observa en la figura XXX, es la velocidad de las pinzas (relacionada directamente con el flujo de aire) que es una variable que no se controla directamente, pero dado que se establece una posición variable, la pendiente de esa recta es la velocidad a la que van las pinzas abriendo o cerrando. Fíjese que, al principio la velocidad tiene un estado transitorio hasta que se establece, luego cuando para hay una ligera variación y cambia cuando va regresando se establece.

Entonces la respuesta es similar a la de un sistema de segundo orden para la velocidad, mientras que lo que se ve en la figura XXXb es la señal de actuación que se aplica consistente en una onda cuadrada con ancho de pulso variable (PWM) que lo que haces es variar la tensión eficaz aplicada al motor. Entonces los invito a que identifiquen los diferentes elementos y señales asociadas a este tipo de sistema de control.

Otro ejemplo muy útil de nuestra vida cotidiana es un horno microondas, que consiste en calentar alimentos a través de la radiación electromagnética en frecuencias de las microondas. Si revisamos el sistema de control contiene la planta que es el habitáculo de los alimentos (cavidad resonante), el actuador que es el magnetrón (generador de microondas) y el controlador que es ejecutado en una tarjeta y se encarga de activar el magnetron mediante un pulso, durante un tiempo determinado por el usuario o por la función definida por el mismo. En este caso no hay sensor de temperatura por tanto el control es de lazo abierto donde se establece un tiempo por el usuario o una temperatura aproximada según la función escogida, se aplican ondas sobre el alimento por un tiempo y el alimento sale a una temperatura mayor a la de ingreso, pero no se puede asegurar que independiente del alimento sea la misma. Sin embargo, por fines prácticos y económicos no se cierra el lazo

instalándose un sensor de temperatura dado que debería ser en los alimentos y para la finalidad de calentar un alimento el lazo abierto funciona adecuadamente.

RESPUESTA TEMPORAL DE SISTEMAS DE CONTROL

En esta parte se presenta un repaso de lo que seguramente en un curso de modelado y dinámica de sistemas se trata con detalle, que corresponde al análisis temporal tanto en estado transitorio como en estado estable de sistemas de primero, segundo orden, así como el tratamiento de algunos sistemas de orden mayor. Igualmente, en cursos de circuitos eléctricos se repasa la respuesta transitoria y de estado estable para sistemas de primero orden (RL-RC), de segundo orden (RLC) o incluso orden mayor. Lo primero que debo resaltar es que el análisis se enfoca a sistemas LTI (Linear Time Invariant por sus siglas en inglés) excepto que se diga lo contrario. Estos sistemas, al ser lineales e invariantes en el tiempo, se considera que contienen dos tipos de elementos: disipadores y almacenadores de energía. Estos últimos hacen que exista un estado transitorio cuando hay se produce un estímulo en su entrada, para luego terminar en una condición de estado estable. La mayoría de los procesos que se van a encontrar en la industria responden generalmente como sistemas de primer orden o de segundo orden, ya sea porque naturalmente lo son o porque a pesar de ser de un orden mayor, tienen uno o dos polos dominantes. Por tanto, el enfoque principal en este libro es el uso de los conceptos de respuesta temporal en el análisis temporal de sistemas, tanto en lazo abierto, como cerrado.

ANÁLISIS DE ESTADO TRANSITORIO

Como se mencionó anteriormente, el estado transitorio es la condición temporal que se genera en un sistema que contiene elementos almacenadores de energía, cuando se quiere

cambiar las condiciones de los mismos. Esto hace que exista un tiempo para que los elementos almacenadores se acomoden a la nueva condición que imponen las entradas del sistema. La respuesta transitoria en sistemas de control es de las más importantes a tener en cuenta, tanto para el análisis como el diseño de sistemas de control, dado que cuando se quiere alcanzar una condición de la salida del proceso a partir del establecimiento de una referencia (generalmente de tipo escalón), dada la naturaleza de los procesos se presenta una respuesta transitoria nosotros como ingenieros de control debemos considerar y se habla de controlar la dinámica.

SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Cuando hablamos de sistemas de primer orden, se considera que el sistema bajo análisis contiene solamente un elemento almacenador de energía (por ejemplo, condensador, bobina, resorte, tanque, masa rotacional o traslacional, entre otros) Un ejemplo de sistema de primer orden es la relación entre velocidad de un vehículo y su fuerza aplicada a través de la aceleración{on del mismo, que se usa para mantener de manera automática su velocidad (conocido como modo crucero). Por tanto, en este sistema de control el conductor establece una velocidad deseada (señal de referencia) y el controlador mantendrá dicha velocidad independiente del terreno y condiciones de carga del vehículo, al enviar una señal de aceleración en función de la diferencia entre la velocidad deseada y la velocidad actual (error). Para ese proceso, el elemento almacenador de energía de mayor influencia es la masa del vehículo, por tanto, el modelo del mismo se considera predominantemente de primer orden. En la ecuación dinámica simplificada ese sistema es la que se presenta mediante las siguientes ecuaciones:

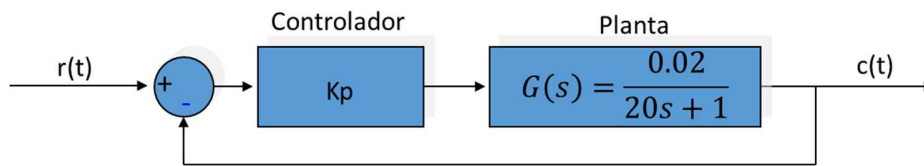


Figura XXX. Esquema de control de velocidad crucero en lazo cerrado

Básicamente es un sistema al que se le aplica una señal de actuación (par del motor) mediante su actuador (motor), donde la fuerza se almacena en forma cinética por la masa ***m*** del carro (almacenador) y se disipa a por la fricción (disipador), al producirse una velocidad ***v***. Por tanto, al pasar la ecuación de la dinámica del sistema al dominio de Laplace (*s*), se obtiene la función de transferencia entre la salida (velocidad del carro) y entrada (par aplicado) de primer orden que es la presentada en la ecuación XXX. Al reemplazar los parámetros presentados en la página ([CTM](#)) la función de transferencia se puede escribir de la forma:

¿Por qué es importante esta forma? Porque al final es la forma cómo se presentan los sistemas de primer orden, donde la parte superior 0.02 corresponde a la ganancia ***K*** en estado estable o de DC (equivale a aproximar *s* a cero en la FT) y 20 es la constante de tiempo ***Tao*** del sistema. Entonces si nosotros analizamos la respuesta temporal de este sistema ante una entrada escalón unitario (ver figura XXX) nos damos cuenta, que el vehículo va a empezar a moverse con una velocidad variable, en donde en principio tiende a ser lineal, pero luego se va saturando hasta llegar a una velocidad constante (estado estable). Por eso esta es la respuesta típica de un sistema de primer orden, donde la forma general de la función de transferencia es como la ecuación XXX.

Donde para el ejemplo, $k=0.02$, $Tao=20$ s. El transitorio dura alrededor de 100 s, que equivale a 5 veces la constante de tiempo (5**T**).

Cerrando el lazo

Bien, ahora vamos a tomar el modelo del control de velocidad crucero y dado que estamos representando en el modelo el actuador (motor+cuerpo de aceleración) en conjunto con la planta (vehículo) que es la función de transferencia previamente presentada, incluiremos un elemento sensor de velocidad lineal (de ganancia unitaria y sin dinámica considerable respecto a la planta) y cerraremos el lazo a través de un controlador de ganancia proporcional ($u(t) = K_p e(t)$), probando diferentes ganancias tal como se observa en la figura XXX.

Entonces, si obtenemos la función de transferencia de lazo cerrado, que relaciona la salida controlada $y(t)$, respecto a la señal de referencia $r(t)$ y que en este libro la denominaremos $Gcl(s) = Y(s)/R(s)$ es de la forma de la ecuación XXXX y se obtienen una respuesta al escalón de la forma de la figura XXX para diferentes ganancias.

$$Y(s)/R(s) = k_p * I / (ms + b) / I +$$

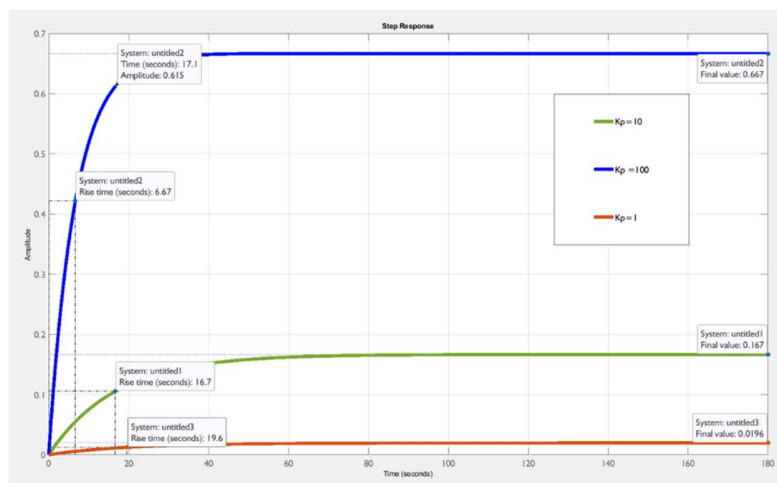


Figura XXX. Respuesta de lazo cerrado del control de velocidad crucero para 3 ganancias (1, 10 y 100)

ante una entrada escalón unitario.

Observamos tanto de la ecuación obtenida, como de la figura de la respuesta temporal que el lazo cerrado sigue siendo de primer orden dado que incluimos un controlador proporcional el cual no afecta el orden del sistema. La diferencia para el sistema en lazo cerrado, su nueva constante de tiempo (T_{cl}) y su ganancia de estado estable (K_{cl}), dependen de la ganancia que se establezca en el controlador. Donde:

$$G_{cl}(s) = \frac{K_p \frac{K}{\tau s + 1}}{1 + K_p \frac{K}{\tau s + 1}} = \frac{K_p K}{\tau s + 1 + K_p K}$$

$$G_{cl}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_{cl}}{\tau_{cl} s + 1}$$

$$K_{cl} = \frac{K_p K}{K_p K + 1} = \frac{0,02 K_p}{0,02 K_p + 1}$$

$$\tau_{cl} = \frac{\tau}{1 + K_p K} = \frac{20}{1 + 0,02 K_p}$$

Quiere decir que la ganancia del controlador para este caso afecta los dos estados (estable y transitorio). Si se aumenta la ganancia del controlador observamos que en la ecuación XXX la ganancia K_{cl} tiende a ser 1 que es lo que se busca al cerrar el lazo en el estado estable para que la salida siga la referencia. Por otro lado, si aumentamos la ganancia T_{cl} tiende a disminuir lo que hace que el transitorio sea más rápido, tal que favorece un establecimiento más rápido de la referencia. De las tres respuestas temporales obtenidas, observe que la que está más cerca de 1 es para una ganancia igual a 100, donde hay en estado estable un error menor que para las otras dos, mientras que se establece en XXXs. Por tanto, para el caso bajo

análisis se puede concluir que aumentar la ganancia proporcional del controlador mejora la respuesta temporal del lazo cerrado (transitoria y de estado estable), aunque esto no se puede generalizar para otros tipos de sistemas y depende de las necesidades de control establecidas.

Si lo establecemos en forma general para un sistema de primer orden como planta+actuador y cerramos el lazo, obtenemos que la constante de tiempo y la ganancia de lazo cerrado son de la forma:

$$K_{cl} = \frac{K_p K}{K_p K + 1} = \frac{0,02 K_p}{0,02 K_p + 1}$$

$$\tau_{cl} = \frac{\tau}{1 + K_p K} = \frac{20}{1 + 0,02 K_p}$$

SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Los sistemas de segundo orden, tal como su nombre lo indica, son sistemas cuyo polinomio en s de su denominador es de orden 2 o lo que es lo mismo poseen dos polos en su función de transferencia y que físicamente significa que poseen dos elementos almacenadores de energía. Un ejemplo típico es la función de transferencia para el motor de DC cuando se relaciona velocidad respecto a la tensión de armadura aplicada. Consiste en dos circuitos: uno eléctrico y uno mecánico, donde cada uno contiene elementos disipadores (R y b) y elementos almacenadores (L y J). El circuito eléctrico es toda la parte de los bobinados y el circuito mecánico, pues su nombre lo dice todas las partes o elementos mecánicos de ese motor, donde básicamente esos elementos mecánicos están muy asociados con la inercia del motor. Las leyes físicas, tanto eléctricas como mecánicas, están representadas por las ecuaciones diferenciales XXX y XXX, donde se establece una relación entre circuitos a través del par mecánico aplicado (T_m) y la fuerza contraelectromotriz (F_m) que se

presenta cuando hay movimiento de ese sistema inercial. A partir de estas relaciones se obtiene la función de transferencia que relaciona velocidad respecto a la tensión de armadura aplicada, que corresponde a un sistema de segundo orden dado contiene dos polos. Si se recuerda del curso de dinámica o de circuitos eléctricos, la función de transferencia de segundo orden en forma general es como la presentada en la ecuación XXX.

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Al hacer una relación con la función de transferencia del motor de DC (reemplazando los parámetros con los propuestos en CTM) con la general de segundo orden, se encuentra que:

$$\zeta=1,341 \quad \omega_n=4,4744 \quad k=0,0999$$

Si yo aplico una tensión de armadura tipo escalón unitario, fíjese en la figura XXX que la respuesta va a ser un sistema que se parece al de primer orden, pero se diferencia en que el de primer orden durante los primeros instantes del transitorio el incremento es prácticamente lineal, mientras que en el segundo orden hay una pequeña inflexión o curva, para luego evolucionar hacia su valor final. Entonces, recuerden que la respuesta de este tipo de sistemas, depende del valor del factor de amortiguamiento ζ y se habla de tres (3) tipos de respuestas de segundo orden : sobreamortiguado ($\zeta > 1$) , críticamente amortiguado ($\zeta = 1$) y subamortiguado ($\zeta < 1$). Para el ejemplo del motor DC, fíjese que $\zeta = 1.341 > 1$ por tanto, podemos decir que el sistema es sobreamortiguado

Si analizamos el efecto del factor de amortiguamiento (ζ), sobre los polos, recordemos que los polos se ubicarán en:

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Por tanto si ζ es menor que 1, los polos resultantes son complejos conjugados de la forma

Si ζ es 1, entonces los polos resultantes son reales e iguales de la forma

Si ζ es mayor que 1, los polos resultantes son reales y diferentes de la forma:

Cerrando el lazo

Observemos las diferencias en el tipo de respuesta de segundo orden, a partir de cerrar el lazo con nuestro ejemplo del motor DC, al igual que antes, usaremos un controlador proporcional tal como se presenta en la figura XXX.

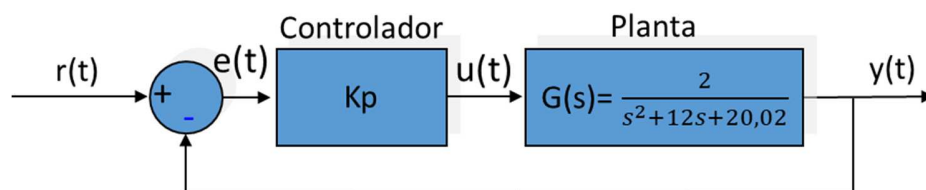


Figura XXX. Sistema de control de velocidad del motor DC en lazo cerrado

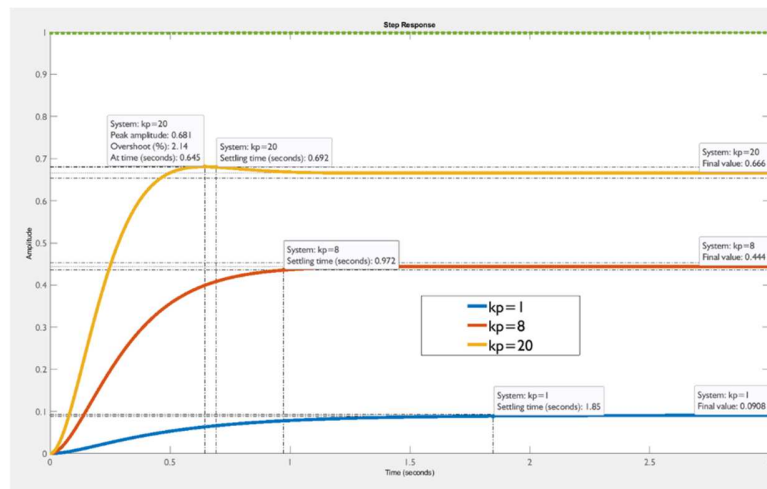


Figura XXX. Respuesta de lazo cerrado del motor DC para 3 ganancias (1, 8 y 20) ante una entrada escalón unitario.

En la figura XXX se observa la respuesta temporal para tres ganancias diferentes ($k_p=1$, $K_p=8$ y $K_p=20$) en donde se puede observar que el transitorio es diferente para cada uno de ellos. Aquí podemos ver que la respuesta del sistema en lazo cerrado sigue siendo de segundo orden, pero que tanto su estado transitorio como de estado estable es diferente para cada valor de ganancia proporcional del controlador. Si analizamos matemáticamente la función de transferencia de lazo cerrado, obtenemos que:

$$G_{cl}(s) = \frac{K_p G(s)}{1 + K_p G(s)}$$

$$G_{cl} = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p \frac{2}{s^2 + 12s + 20,02}}{1 + K_p \frac{2}{s^2 + 12s + 20,02}} = \frac{2K_p}{s^2 + 12s + 20,02 + 2K_p}$$

Si observamos, los polos de lazo cerrado dependen del valor de k_p y al reemplazar por los tres valores de $k_p = 1, 8$ y 20 , encontramos los parámetros de estado transitorio y valor final presentados en la tabla XXX. (Puede usar la siguiente función en Matlab: `damp([1 12 20.02 + 2*kp])` donde k_p es $1, 8$ ó 20)

Tabla XXX. Parámetros transitorios y de estado estable al cerrar el lazo del motor dc.

K_p	Polos	c_{ita}	w_n	T_{ao}	S_p (%)	$t_{s2\%}$ (s)	y_{inf}
1	$s_1 = -9.74$ $s_2 = -2.26$	1.2786	4.6925	0.0998	No	0.4625	0.098
8	$s_1 = s_2 = -6$	1	6	0.1667	No	0.243	0.444
20	$s_{1,2} = -6.0000$ $\pm j4.9010$	0.7745	7.7473	0.1667	2.14	0.692	0.173

Para el caso del factor de amortiguamiento, recordando que es una relación entre la capacidad del sistema de disipar respecto a almacenar energía, si es mayor que 1 significa que se almacena menos que lo que disipa en el estado transitorio (sobre amortiguado), y al contrario si es menor que 1 significa que se disipa menos que lo que se almacena durante el transitorio (subamortiguado) tal como se observa en la figura XXX. Mientras que en el caso de que sea igual a 1, significa que hay un equilibrio entre la capacidad de almacenamiento y de disipación (críticamente amortiguado).

SISTEMAS DE ORDEN MAYOR QUE 2

Si el sistema LTI es de orden mayor que dos, entonces eso va a depender la respuesta temporal, que algunas veces se puede reconocer pero otras veces se va a parecer a una de primer o segundo orden. Para ello miremos el ejemplo del sistema glucoregulatorio cuyo objetivo es controlar la concentración de glucosa en sangre de pacientes diabéticos, intentando imitar lo que ocurre en un sujeto sano.

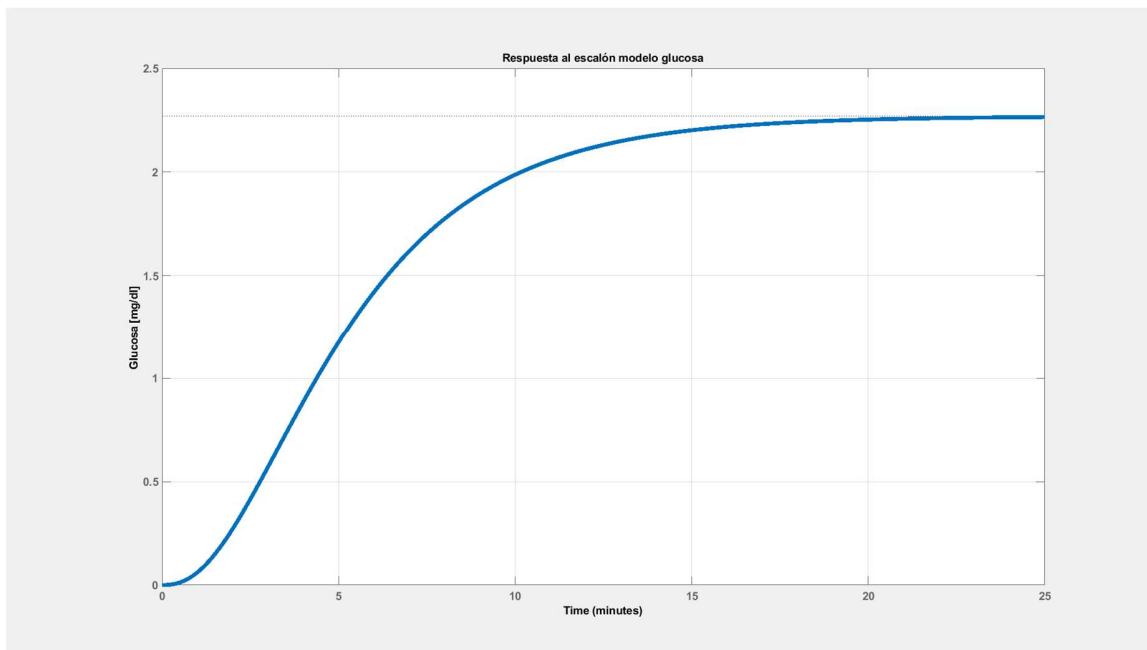
En forma resumida el objetivo es mantener la glucosa del paciente diabético en niveles sanos a partir de la dosificación automática de insulina y basado en medidas instantáneas de concentración de glucosa en la sangre. Se presentan diferentes modelos dinámicos que representan el comportamiento de la glucosa ante la dosificación de insulina, así como ingesta de glucosa. Existe un modelo de tercer orden que es el presentado en la ecuación XXX

$$G(s) = \frac{G(s)}{U(s)} = k_j \frac{s + z}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)}$$

En [referencia] plantean los siguientes valores:

$$z = 0.1503 \quad p_1 = 0.0138 \quad p_2 = 0.0143 \quad p_3 = 0.0048 \quad k_j = 1.43 \times 10^{-5}$$

Sí, analizamos hay un polo que está muy cerca del origen, otros dos polos seguidos y distanciados cerca de 3 veces respecto al primero y el cero está mas lejos que los polos (mas de 10 veces del más cercano). Entonces, si miramos la respuesta ante una entrada escalón unitario (ver figura XXX), yo no podría reconocer fácilmente si el sistema es de segundo o de tercer orden.



Esto sucede porque si vemos individualmente la duración del transitorio debido a cada uno de los polos tienen, estos tienen duraciones comparativas dado que las constantes de tiempo de cada una de ellas es relativamente cercana (70, 72 y 208 s respectivamente). No hay un dominio de uno o dos polos para que el comportamiento sea más parecido a uno de primero o segundo orden. Un indicio de que el sistema es de orden mayor es que se observa una inflexión mayor, pero sería lo único más no determinante. Fíjese que si ahora, solo con fines académicos, muevo el polo que estaba cerca del origen (-0.0048) aún más cerca del origen de manera que esté lo suficientemente alejado de los otros dos polos, por ejemplo alejo unas 20 veces para ubicarlo en -0.0008. Al simular nuevamente la respuesta temporal ante una entrada escalón unitario obtenemos la respuesta de la figura XXXX y notamos que se parece más a la respuesta de un sistema de primer orden, dado que el polo que se modificó es

dominante. Por tanto a manera de conclusión, en el caso de que se tengan modelos de orden mayor, se puede reducir su orden a uno o dos si hay uno o dos polos dominantes respectivamente. ¿Cómo se debe aproximar? Para hacerlo debo mantener los polos dominantes (uno o dos según sea el caso) y elimino los dos polos e incluso ceros, pero manteniendo la ganancia de DC del sistema. Para el ejemplo modificado, al ser un polo dominante puedo aproximar el sistema de tercer orden a uno de primero quedando de la siguiente forma:

$$G(s) \cong 1.43 \times 10^{-5} j \frac{0.1503}{(0.0138)(0.0143)(s+0.0008)} = \frac{0.0109}{s+0.0008}$$

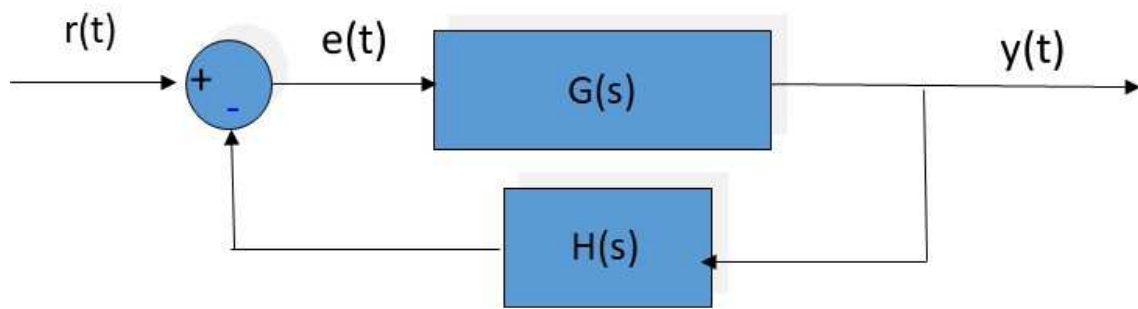
Fíjese que he mantenido la ganancia de DC al solo eliminar el término s que generaba los polos no dominantes y manteniendo las ganancias asociadas con cada polo eliminado.

RESPUESTA DEL LAZO CERRADO EN ESTADO ESTABLE

En sistemas de control de lazo cerrado, interesa bastante el valor final en el que se establece la salida una vez haya pasado la respuesta transitoria. Por ejemplo, si establezco un cambio en la referencia tal que en el tiempo cero quiero que pase de una condición inicial a una condición final (una entrada escalón) sabemos que por la naturaleza física de los sistemas, tal cambio no se dará inmediatamente sino que habrá un transitorio que dura aproximadamente cinco (5) constantes de tiempo. Pero una vez transcurrido dicho transitorio, lo que espero es que la salida se establezca en el valor final establecido o al menos cerca de ella. Esto es error en estado estable igual o cercano a cero ($e_{ss}=0$). Un ejemplo es si llego al salón de clase y está apagado el aire acondicionado, la temperatura inicial es la temperatura ambiente (por ejemplo 24°C) y establezco en el tiempo cero una temperatura de referencia de por ejemplo 18°C . Obviamente no se va a tener inmediatamente dicha temperatura en el salón, sino que transcurrirá un tiempo (transitorio) para que se establezca, pero lo que espero es que una vez transcurrido dicho tiempo, la temperatura sea 18°C o cercano a ella ($e_{ss}=0$).

Por tanto, en el estado estable para los sistemas de control en lazo cerrado debemos enfocarnos en si se sigue la referencia establecida, lo implica analizar el comportamiento de Error en Estado Estable (e_{ss}) teniendo en cuenta que es la diferencia entre el valor de referencia y la salida.

De la figura XXX podemos obtener el error en función de la referencia de la siguiente forma



$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

$$E(s) = R(s) \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

Donde $G(s)$, con fines de abreviar la notación, representa todo el lazo directo (planta+controlador+actuador), mientras que $H(s)$ el lazo de realimentación. Recuerden también que el lazo abierto es lo que se ve desde la referencia hasta el punto de realimentación, es decir $G(s)H(s)$.

Recordemos que una vez transcurrido el transitorio, consideramos la condición de estado estable que para fines de control consideramos que el tiempo tiende a infinito. Al analizar entonces el error en estado estable significa determinar el valor alcanzado por el error cuando el tiempo tiende a infinito (después de las cinco constantes de tiempo) que por el teorema del valor final podemos representarlo de la siguiente manera:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

Entonces se pueden dar tres casos:

$e_{ss}=0$ si la salida sigue perfectamente la referencia en estado estable

$e_{ss}=\text{Constante}$. Si la salida sigue la referencia en estado estable, pero con error

$e_{ss} = \text{Infinito}$. Si en la medida que pasa el tiempo la salida sigue cambiando respecto a la referencia

Noten también que la parte derecha de la ecuación XXXX, el error en estado estable no depende sólo de la dinámica de los elementos del sistema de control, representada por $G(s)H(s)$ sino que también depende del tipo de referencia que se establezca $R(s)$. Generalmente se establecen referencias de tipo escalón, sin embargo se revisarán otros dos tipos de referencias (rampa $r(t)=t$ y parábola $r(t)=t^2$).

Referencia de tipo escalón $r(t)=\mu(t)$

Si la referencia es de tipo escalón, entonces $R(s)=1/s$ por tanto reemplazando en la ecuación XXX, se tiene que:

$$r(t) = \mu(t) \quad R(s) = \frac{1}{s}$$
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + k_p}$$

Donde $k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$ se conoce como constante de error de posición y equivale a la ganancia en DC del lazo abierto. Nótese que dependiendo del valor que alcance k_p el error puede ser:

Si $k_p = \text{Constante}$, entonces $e_{ss} = \text{constante}$

Si $k_p = \text{Infinito}$, entonces $e_{ss} = 0$

En otras palabras, para que e_{ss} sea cero, la ganancia en DC del lazo abierto (k_p) debe tender a infinito y esto se consigue si $G(s)H(s)$ contiene al menos un polo en el origen o lo que es lo mismo un integrador ($1/s$).

Referencia de tipo rampa $r(t)=t$

Si la referencia es de tipo rampa, entonces $R(s) = \frac{1}{s^2}$, por tanto reemplazando en la ecuación XXX, se tiene que:

$$r(t) = t \quad R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s^2}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s + \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)H(s)} = \frac{1}{0 + \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)H(s)} = \frac{1}{k_v}$$

Donde $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)H(s)$ se conoce como constante de error de velocidad. Nótese que dependiendo del valor que alcance k_v el error puede ser:

Si $k_v = 0$, entonces $e_{ss} = \text{infinito}$

Si $k_v = \text{constante}$, entonces $e_{ss} = \text{constante}$

Si $k_v = \text{infinito}$, entonces $e_{ss} = 0$

En otras palabras, para que haya al menos seguimiento de la referencia ($e_{ss} = \text{constante}$) el lazo abierto debe contener al menos un polo en el origen (integrador) que cancele el término s de la constante k_v , mientras que para que e_{ss} sea cero, k_v debe tender a infinito y esto se consigue si $G(s)H(s)$ contiene al menos dos polos en el origen (dos integradores), uno para cancelar el término s presente en k_v y otro para que aparezca un cero en el denominador.

Referencia de tipo parábola $r(t)=t^2/2$

Si la referencia es de tipo parábola, entonces $R(s) = \frac{1}{s^3}$, por tanto, reemplazando en la ecuación XXX, se tiene que:

$$r(t) = \frac{t^2}{2} \quad R(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s^3}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 + \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)} = \frac{1}{0 + \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)} = \frac{1}{k_a}$$

Donde $k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)H(s)$ se conoce como constante de error de aceleración. Nótese

que dependiendo del valor que alcance k_a el error puede ser:

Si $k_a = 0$, entonces $e_{ss} = \text{infinito}$

Si $k_a = \text{constante}$, entonces $e_{ss} = \text{constante}$

Si $k_a = \text{infinito}$, entonces $e_{ss} = 0$

En otras palabras, para que haya al menos seguimiento de la referencia ($e_{ss} = \text{constante}$) el lazo abierto debe contener al menos dos polos en el origen (dos integradores) que cancelen el término s^2 de la constante k_a , mientras que para que e_{ss} sea cero, k_a debe tender a infinito y esto se consigue si $G(s)H(s)$ contiene al menos tres polos en el origen (tres integradores), uno para cancelar el término s presente en k_v y otro para que aparezca un cero en el denominador.

Lo anteriormente expuesto se puede resumir en la tabla XXX.

Tabla XXX. Resumen del e_{ss} para diferentes entradas según el número de integradores de LA

Error en estado estable e_{ss}				
r(t)	No de integradores del lazo abierto $G(s)H(s)$			
	N=0	N=1	N=2	N=3
$\mu(t)$	Constante	0	0	0
t	∞	Constante	0	0
$t^2/2$	∞	∞	Constante	0

N representa el número de integradores que contenga el lazo abierto, los cuales no necesariamente deben estar en el controlador, sino en cualquier elemento del lazo abierto. La tabla es una matriz cuyas diagonales son constantes, la diagonal superior son ceros y la diagonal de inferior son infinitos. En las filas están el tipo de entradas, por tanto de la primera fila podemos concluir que si hay al menos un integrador el e_{ss} para una referencia escalón será cero, mientras que para la segunda fila que es referencia tipo rampa debe haber al menos dos integradores y para la tercera fila que es referencia parábola debe haber al menos tres integradores. No habrá seguimiento a la referencia rampa si no hay al menos un integrador en el lazo abierto, ni a la referencia parábola si no hay al menos dos integradores.