

## Capítulo 7. Diseño de Controladores Clásicos Digitales Mediante el Plano $z$

Este capítulo lo dedicaremos a estudiar el diseño de controladores clásicos digitales (P, PI, PD, PID, atraso, adelante, adelanto/atraso y sus combinaciones) mediante el plano  $z$ . Por tanto, nos referimos a controladores para sistemas SISO, cuya dinámica es representada mediante función de transferencia, donde la entrada del controlador es la señal de error discreta  $e(k)$  y su salida la señal de control en forma continua escalonada  $u(t)$ , tal como el sistema de la figura XXX.

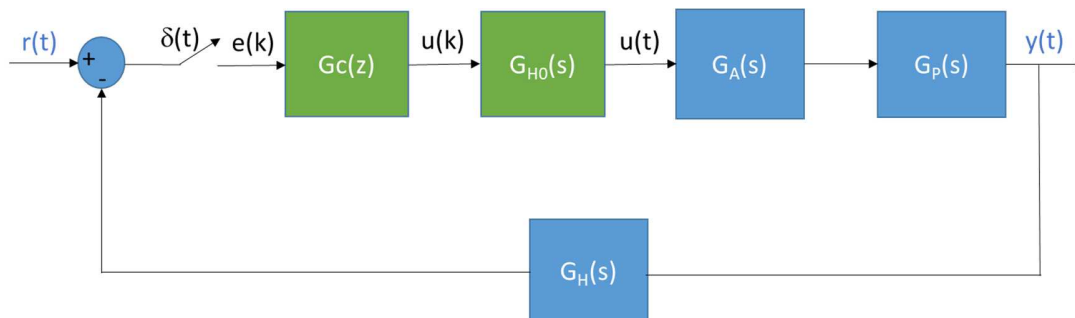


Figura XXX. Sistema de control de lazo cerrado continuo típico

Entonces, al igual que en el caso continuo, el enfoque de diseño está en ubicar los polos de lazo cerrado dentro de una zona establecida, a partir de especificaciones de la respuesta temporal deseada. Al agregar polos y ceros del controlador bajo diseño (según necesidades), así como ajustar sus ganancias, se logrará modificar el  $LGP_{LC}$  y por tanto se asegurará un comportamiento dinámico definido.

Por tanto, para el diseño de controladores clásicos discretos mediante el plano  $z$ , partiremos de conocer la dinámica de los elementos del sistema de control de lazo cerrado, excepto obviamente la del controlador discreto, que es lo que se diseñará. Para este capítulo, al igual que en el capítulo 5, enfocaremos el diseño del controlador discreto a unas especificaciones de diseño temporales tanto transitorias, como de estado estable.

De manera que el uso del plano  $z$ , específicamente el Lugar Geométrico de los Polos de Lazo Cerrado ( $LGP_{LC}$ ) para sistemas discretizados, es el que se usará en este capítulo para lograr el diseño del controlador clásico continuo, no desde la construcción manual, sino usando herramientas computacionales ya establecidas, tal como *sisotool* o *rltool* de Matlab.

De manera que debemos recordar del capítulo 2, que se trabajarán sistemas mixtos donde encontraremos bloques continuos y discretos, pero para tener en cuenta el periodo de muestreo llevaremos todo el sistema a una versión discretizada respetando la propiedad estrella.

### *Efecto del controlador discreto en el lazo cerrado*

Del sistema de control presentado en la figura XXX, normalmente se conocen las funciones de transferencia (dinámica) de cada uno de sus elementos, excepto el del controlador discreto que es el elemento bajo diseño.

Recordemos que la función de transferencia de lazo cerrado del sistema discretizado de la figura XXX queda de la forma:

$$G_{CL}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G_{H0}G_AG_PG_H(z)}{1 + G_c(z)G_{H0}G_AG_PG_H(z)}$$

Si definimos  $G_c(z)$  de la siguiente forma

$$G_c(s) = K_c \frac{(z + z_1)(z + z_2)}{(z + p_1)(z + p_2)}$$

Que se puede tomar como la representación generalizada de un controlador digital clásico, ya sea para un controlador de la familia PID o una combinación de atraso/adelanto.

Por tanto, al resolver el lazo cerrado se obtiene:

$$G_{CL}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_c \frac{(z + z_1)(z + z_2)}{(z + p_1)(z + p_2)} G_{H0}G_AG_PG_H(z)}{1 + K_c \frac{(z + z_1)(z + z_2)}{(z + p_1)(z + p_2)} G_{H0}G_AG_PG_H(z)}$$

$$G_{CL}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_c \frac{(z + z_1)(z + z_2)}{(z + p_1)(z + p_2)} G_{H0}G_AG_PG_H(z)}{\frac{(z + p_1)(z + p_2) + K_c(z + z_1)(z + z_2)G_{H0}G_AG_PG_H(z)}{(z + p_1)(z + p_2)}}$$

$$G_{CL}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{(z + z_1)(z + z_2)G_{H0}G_AG_PG_H(z)}{(z + p_1)(z + p_2) + K_c(z + z_1)(z + z_2)G_{H0}G_AG_PG_H(z)}$$

De la función de transferencia de lazo cerrado  $G_{CL}(z)$  obtenida, se observa que el controlador  $G_c(z)$ , tiene efecto tanto en el numerador como en el denominador. En el numerador agrega la ganancia y sus ceros  $K_c(-z_1 - z_2, \dots)$ , mientras que en el denominador se combinan sus polos  $(-p_1, -p_2, \dots)$ , ganancia y ceros  $K_c(-z_1 - z_2, \dots)$ , lo que hace que sean modificables los polos de lazo cerrado al variar los ceros, polos y ganancia del controlador. Por tanto, el objetivo del diseño del controlador es seleccionar tanto su ganancia, como sus ceros y polos, tal que los polos de lazo cerrado se localicen en una zona de diseño especificada (lo que normalmente se denomina ubicación de polos).

Se observa que aparece la función de transferencia del retenedor de orden cero  $G_{H0}$ , pero como su nombre lo indica, al ser de orden cero, no se afectan los polos ni ceros del lazo abierto, sino que su función es mantener el mismo valor de la señal de control entre instantes de muestreo.

Al momento de diseñar un controlador discreto, similar al caso continuo normalmente se espera que la respuesta temporal del lazo cerrado cumpla unas condiciones o especificaciones tanto transitorias como de estado estable, lo que normalmente se conoce como especificaciones de diseño. Adicional, obviamente se espera que el sistema sea estable y tenga un aceptable rango de ganancia.

Las especificaciones transitorias pueden ser:

Tiempo de establecimiento dentro del 2%:	$t_{s2\%} \leq a \text{ s}$
Sobrepico :	$S_p \leq b$
Tiempo pico:	$t_p \leq c \text{ s}$
Tiempo de subida:	$t_r \leq d \text{ s}$

Las especificaciones de estado estable están asociadas con el error para un tipo de referencia (escalón, rampa, parábola):

$$\text{error en estado estable: } e_{ss} \leq d$$

Si se observan las especificaciones transitorias, están asociadas con obtener un sistema en lazo cerrado de segundo orden subamortiguado dominante (lo que implica un par de polos complejos conjugados dominantes).

Por tanto, si el sistema fuera continuo se esperaría que el sistema de lazo cerrado tuviera la siguiente función de transferencia:

$$G_{CL}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + p_3) \dots (s + p_n)}$$

Donde n depende del orden resultante del lazo cerrado, pero independiente del orden, se debe asegurar un par de polos complejos conjugados. Esto significa que los polos  $-p_3 \dots -p_n$  deben ser no dominantes, lo que implica que deben quedar alejados cinco veces de la parte real del complejo conjugado dominante. Es decir  $-p_3 \dots -p_n \geq 5\xi\omega_n$ .

Sin embargo, el sistema de lazo cerrado es mixto a pesar de que tanto su referencia como su salida son continuas. De ahí que, aunque normalmente se especifican las prestaciones en el dominio continuo, se debe mirar la correspondencia estas en el plano  $z$ , pues el controlador a diseñar es discreto.

### ***Zona de diseño en el dominio z***

A partir de las especificaciones transitorias, se espera al igual que en el continuo un par de polos complejos conjugados dominantes de la forma:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Por tanto, la versión discreta de los polos complejos conjugados deseados sería de la siguiente manera:

$$z_{1,2} = e^{Ts_{1,2}} = e^{T(-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2})} = e^{-T\xi\omega_n} e^{\pm jT\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

Como se puede observar, el polo deseado tiene una magnitud  $e^{-T\xi\omega_n}$  a un ángulo  $\pm jT\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ , que dependen además de las especificaciones transitorias deseadas, del periodo de muestreo definido.

Si realizamos una equivalencia de las zonas de acuerdo con las especificaciones transitorias, similar al capítulo 5, pero en este caso para el plano  $z$  se obtienen las siguientes zonas.

#### ***Tiempo de establecimiento del 2%: ( $t_{s2\%}$ )***

Por definición, el tiempo de establecimiento dentro del 2% es:

$$t_{s2\%} = 4\tau = 4 \frac{1}{\xi\omega_n} \leq a \text{ s}$$

Por tanto, de la desigualdad anterior se obtiene lo siguiente:

$$\xi\omega_n \geq \frac{4}{a}$$

Si se mantiene  $\xi\omega_n$  constante, significa que el tiempo de establecimiento será el mismo y en el dominio  $z$ , equivale a mantener constante la magnitud del polo deseado, es decir:

$$e^{-T\xi\omega_n} = \text{cte} < 1$$

Esto se representa entonces en el plano  $z$  por la región de diseño del tiempo de establecimiento tal como la resaltada en color verde de la figura XXX, que corresponde a un círculo de radio  $e^{-T\xi\omega_n} < 1$ . Si los polos complejos conjugados dominantes se ubican en cualquier punto sobre el círculo naranja, se asegura que el tiempo de establecimiento  $t_{s2\%}$  será igual a  $a$  s, mientras que, si se ubican por dentro de este círculo ( $\xi\omega_n$  mayor al deseado), es decir en la región verde, se asegura un tiempo  $t_{s2\%}$  menor a  $a$  s.

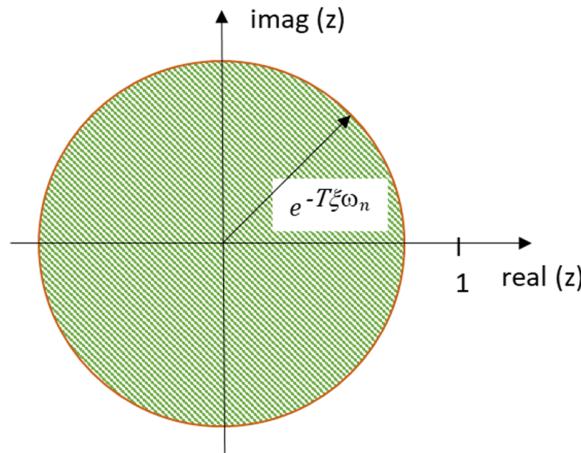


Figura XXX. Región de diseño para el tiempo de establecimiento del 2%

### ***Sobrepico ( $S_p$ )***

Por definición, el sobrepico es:

$$S_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \leq b$$

Observamos que el sobrepico solo depende del factor de amortiguamiento ( $\xi$ ). Y recordando que los polos complejos conjugados dominantes se deberían ubicar en

$$z_{1,2} = e^{-T\xi\omega_n} e^{\pm jT\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

A partir de un periodo de muestreo definido, si queremos mantener el mismo valor de sobrepico se debe asegurar que  $\xi = \text{cte}$ , lo que significa que en la relación XXX  $T\xi = k_1$  y  $T\sqrt{1-\xi^2} = k_2$  serán constantes, por tanto, el único parámetro que se podría variar es  $\omega_n$ .

De ahí que, al variar solamente  $\omega_n$  la magnitud de los polos deseados variará exponencialmente ( $e^{-k_1\omega_n}$ ), mientras que el ángulo variará proporcionalmente ( $-k_2\omega_n$ ). Por tanto, para condiciones de sobrepico constante los polos deseados deberían localizarse sobre la línea naranja de la figura XXXX, mientras que para valores de sobrepico menor dentro de la zona verde (si  $\xi$  mayor que el deseado,  $e^{-T\xi\omega_n}$  disminuirá).

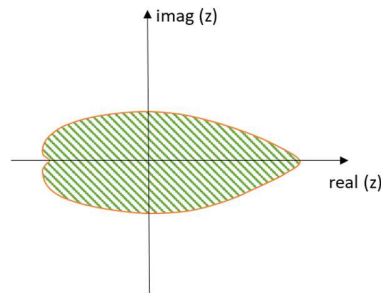


Figura XXX. Región de diseño para el sobrepico  $S_p$

Aunque existen otros parámetros transitorios que podrían incluirse como parámetros de diseño, generalmente las dos especificaciones anteriores definen en buena medida una respuesta transitoria deseada.

Al intersectar las dos regiones anteriores, se puede llegar a la región de diseño presentada en la figura XXX. En dicha región se puede observar que, si los polos complejos conjugados dominantes de la función de transferencia de lazo cerrado se encuentran dentro de la zona amarilla, se puede afirmar teóricamente que se cumplen las especificaciones de diseño. Sin embargo, se debe asegurar que los demás polos de lazo cerrado no afecten la dominancia de los polos de diseño y que además los ceros obtenidos de la función de transferencia de lazo cerrado, no afecten significativamente el comportamiento transitorio. Para tener en cuenta estos y otros aspectos de diseño, revisemos un ejemplo.

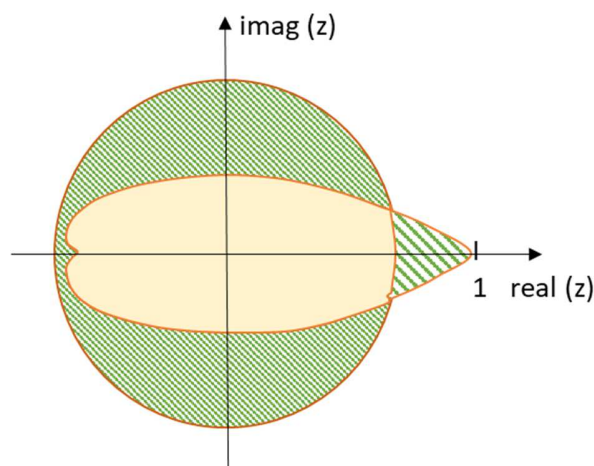


Figura XXX. Zona de diseño para especificaciones de  $S_p$  y  $t_{s2\%}$

### **Ejemplo 7.1.**

Del sistema de control presentado en la figura XXX, se conocen las funciones de transferencia (dinámica) de cada uno de sus elementos, excepto el del controlador discreto que es el elemento bajo diseño. Adicionalmente, se establecen las siguientes especificaciones de diseño:

Transitorias:	Tiempo de establecimiento para el 2%	$t_{ss2\%} \leq 2s$
	Sobrepico	$S_p \leq 10\%$
Estado estable:	Error en estado estable para entrada escalón	$e_{ss} \leq 0.1$

Donde:

$$G_P(s) = \frac{2}{(s + 10)(s + 2)}$$

$$G_H(s) = \frac{30}{s + 30}$$

$$G_A(s) = \frac{15}{s + 20}$$

$$G_{H0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

Una forma de seleccionar el periodo de muestreo es asegurar que se existan entre 5 a 10 acciones de control durante el primer  $\tau$  de la respuesta transitoria deseada. Es decir, si se toma 10 veces el periodo de muestreo estará definido como:

$$T = \frac{\tau}{10} = \frac{t_{s2\%}/4}{10} = \frac{t_{s2\%}}{40}$$

Por tanto, para las especificaciones del transitorio dadas, T debe ser:

$$T = \frac{t_{s2\%}}{40} = \frac{2}{40} = 0.05s$$

Se debe entonces, para el periodo de muestreo calculado, obtener la ecuación característica  $F(z) = 1 + G_C(z)G_{H0}G_AG_PG_H(z)$ , recordando que sus ceros corresponden a los polos de lazo cerrado.

Del ejemplo 6.1, para un periodo de muestreo  $T=0.05s$ , se obtuvo:

$$G_{H0}G_AG_PG_H(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{15}{s + 20} \frac{2}{(s + 2)(s + 10)} \frac{30}{(s + 30)} \right\}$$

$$G_{H0}G_AG_PG_H(z) = \frac{0.00012938 (z + 5.584) (z + 0.5392) (z + 0.05176)}{(z - 0.9048) (z - 0.6065) (z - 0.3679) (z - 0.2231)}$$

Por tanto:

$$F(z) = 1 + G_C(z) \frac{0.00012938 (z + 5.584) (z + 0.5392) (z + 0.05176)}{(z - 0.9048) (z - 0.6065) (z - 0.3679) (z - 0.2231)}$$

Al tomar la definición generalizada de  $G_C(z)$  se tiene:

$$F(z) = 1 + K_C \frac{(z + z_1)(z + z_2)}{(z + p_1)(z + p_2)} \frac{0.00012938 (z + 5.584) (z + 0.5392) (z + 0.05176)}{(z - 0.9048) (z - 0.6065) (z - 0.3679) (z - 0.2231)}$$

$$F(z) = \frac{(z + p_1)(z + p_2)(z - 0.9048) (z - 0.6065) (z - 0.3679) (z - 0.2231)}{(z - 0.9048) (z - 0.6065) (z - 0.3679) (z - 0.2231)} + \frac{K_C(z + z_1)(z + z_2)0.00012938(z + 5.584) (z + 0.5392) (z + 0.05176)}{(z - 0.9048) (z - 0.6065) (z - 0.3679) (z - 0.2231)}$$

ceros de  $F(z)$  = Polos de lazo cerrado  $G_{CL}(z)$

$$= \text{raíces de} \left( \begin{array}{l} (z + p_1)(z + p_2)(z - 0.9048)(z - 0.6065)(z - 0.3679)(z - 0.2231) \\ + 0.00012938 K_C(z + z_1)(z + z_2)(z + 5.584)(z + 0.5392)(z + 0.05176) \end{array} \right)$$

Nuevamente observemos que la ubicación de los polos de lazo cerrado y por consiguiente la estabilidad y el desempeño transitorio, dependen del número de ceros y polos que asignemos al controlador discreto (tipo de controlador) así como su ubicación.

A partir de las especificaciones de diseño, para un periodo de muestreo  $T=0.05s$ , ubiquémoslas en el plano  $z$  usando la herramienta *sisotool* de Matlab mediante el siguiente código, donde la gráfica de la interfaz es la presentada en la figura XXX.

```
>> s=tf('s'); %Define una variable FT para facilidad de operar bloques
>> Gp=2/((s+10)*(s+2)); %Define las diferentes FT
>> Gh=30/(s+30);
>> Ga=15/(s+20);
>> T=0.05;
>> GhoGaGpGh=c2d(Ga*Gp*Gh,T) %Recuerde que si no se define método, Matlab
asume zoh por defecto, por tanto no se debe incluir nuevamente función del retenedor
>> sisotool(GhoGaGpGh) % Se debe definir como argumento el lazo abierto sin el
controlador y Matlab presenta las ventanas del LGPLC, de la respuesta transitoria ante un
escalón y el diagrama de bode (se puede modificar las ventanas que se quieren ver,
desde la interfaz)
```

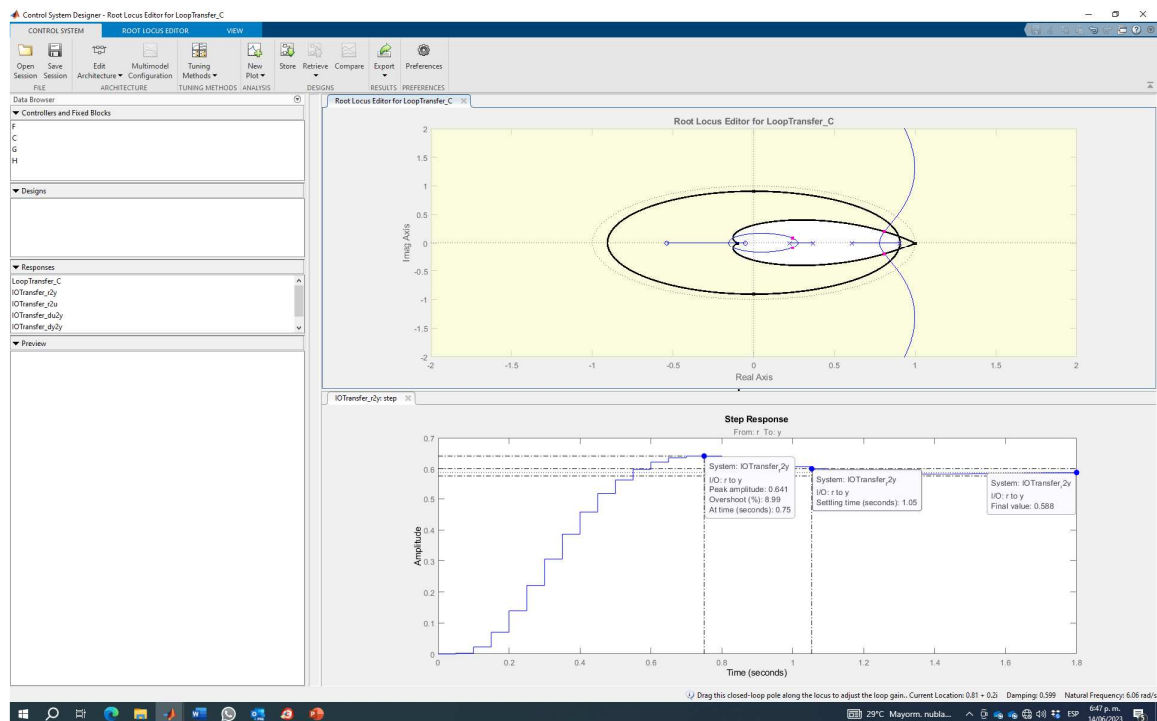


Figura XXX. Interfaz gráfica de sisotool para el ejemplo 7.1



Directamente desde la interfaz agregar los requerimientos de diseño (hacer **click** derecho), donde al especificar el tiempo de establecimiento inferior a 2s y sobrepico inferior al 10% se presenta la zona de diseño (zona blanca) donde todos los polos de lazo cerrado deben quedar o como mínimo en el punto de diseño, que de acuerdo con la figura XXXX es la intersección de la línea  $t_{ss2\%} = cte$  con la línea de  $\xi = cte$ .

### Controlador Proporcional (P)

Los puntos de color fucsia en el marco superior derecho de la figura XX indican donde se ubicarían los cuatro (4) polos de lazo cerrado si se usa un controlador discreto proporcional de ganancia  $K_P=1$  y la respuesta transitoria es la presentada en la figura XXX. Como se puede observar no tiene sobrepico (todos los polos de lazo cerrado son reales) y el tiempo de establecimiento es 1.95 s, lo que indica que, si se usa un controlador proporcional de ganancia unitaria, se cumplen las condiciones transitorias establecidas.

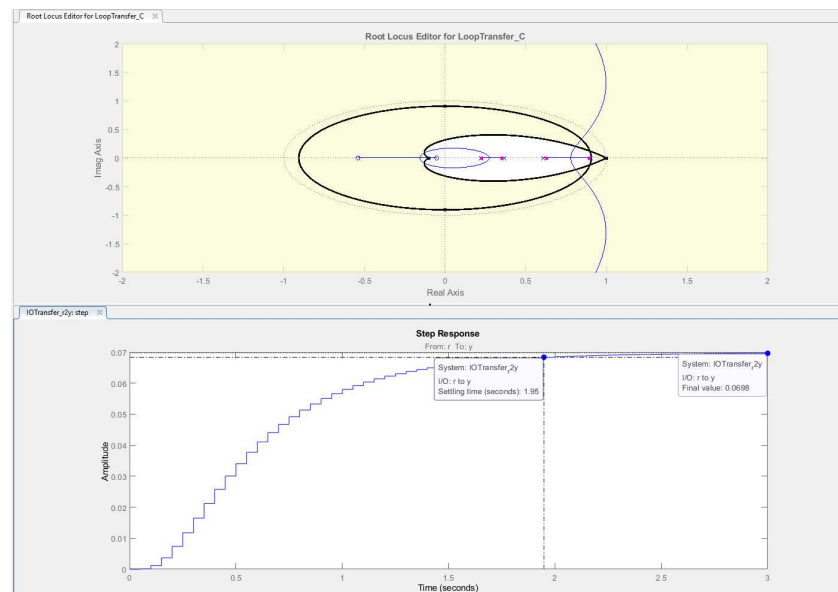


Figura XXX. Diseño en sisotool para el ejemplo 7.1 con controlador P

Sin embargo, la salida se establece alrededor de 0.07 para una referencia tipo escalón unitario. Esto indica que no se cumple la condición de estado estable ( $e_{ss} \leq 0.1$ ), dado que en este caso  $e_{ss} = |0.07 - 1| = 0.93$ . Por tanto, si se quiere cumplir tanto las condiciones transitorias, como de estado estable, un controlador proporcional de ganancia unitaria no es suficiente.

Usemos las ecuaciones presentadas en el capítulo I, con el fin de calcular la ganancia en DC que debería aportar el controlador, si se quiere obtener un error como el establecido.

Para una referencia de tipo escalón unitario, el  $e_{ss}$  está definido como:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_{EE}} \leq 0.1$$

Por tanto, al despejar  $K_{EE}$  (constante de error de referencia escalón) se obtiene que:

$$K_{EE} + 1 \geq \frac{1}{e_{ss}} = \frac{1}{0.1} = 10$$

ó

$$K_{EE} \geq \frac{1}{e_{ss}} - 1 = 10 - 1 = 9$$

Recordando que:

$$\begin{aligned} K_{EE} &= \lim_{z \rightarrow 1} G_{LA}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} G_c(z) \frac{0.00012938 (z + 5.584) (z + 0.5392) (z + 0.05176)}{(z - 0.9048) (z - 0.6065) (z - 0.3679) (z - 0.2231)} \\ &= G_c(1) \frac{0.00012938 (1 + 5.584) (1 + 0.5392) (1 + 0.05176)}{(1 - 0.9048) (1 - 0.6065) (1 - 0.3679) (1 - 0.2231)} \\ &= 0.075 G_c(1) = 9 \end{aligned}$$

Por tanto, la ganancia de DC que debe aportar el controlador ( $G_c(1)$ ) debe ser :

$$G_c(1) = \frac{9}{0.075} = 120$$

Si se sigue usando el controlador proporcional  $G_c(z) = K_p$ , la ganancia debería ser:

$$K_p = 120$$

En la interfaz, al aumentar la ganancia del controlador proporcional los polos de lazo cerrado se desplazarán por el LGP<sub>LC</sub> (mover puntos fucsia o modificar directamente la ganancia de DC en la interfaz). Al establecer el valor en 120 para cumplir la condición de error, se obtiene la respuesta de la figura XXX. En la respuesta se observa que dos polos de lazo cerrado quedan fuera de la zona de diseño y del círculo unitario. Por tanto, al usar dicho controlador proporcional, además de no cumplirse la respuesta transitoria establecida el sistema se hará inestable. Esto indica que con el controlador proporcional se podría cumplir ya sea la respuesta transitoria ( $K_p = 1$ ) o la de estado estable ( $K_p = 120$ ), pero no se pueden cumplir las dos.

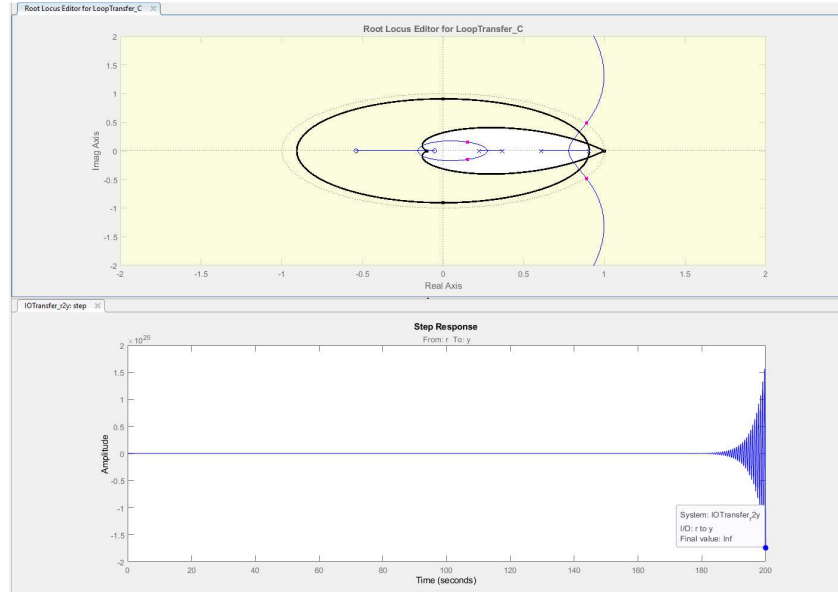


Figura XXX. Diseño en sisotool para el ejemplo 7.1 con controlador P de ganancia 120

### Controlador Proporcional-Integral (PI)

Dado que se debe cumplir con las especificaciones de lazo cerrado tanto transitorias, como de estado estable, debemos recurrir inicialmente a un controlador PI. Recuerden de la tabla XXX presentada en el capítulo 2, que la acción del integrador es hacer que el error sea cero para una referencia escalón, mientras que sea constante para una referencia tipo rampa.

Recordemos que la forma general de un controlador PI discreto es:

$$G_C(z) = K_P + \frac{K_I T}{2} \frac{z}{z-1} = \frac{K_P z - K_P + \frac{K_I T}{2} z}{z-1}$$

$$G_C(z) = \frac{\left(K_P + \frac{K_I T}{2}\right) z - K_P}{z-1} = \frac{\left(K_P + \frac{K_I T}{2}\right) \left(z - \frac{K_P}{K_P + \frac{K_I T}{2}}\right)}{z-1}$$

$$G_C(z) = \frac{\left(K_P + \frac{K_I T}{2}\right) \left(z - \frac{K_P}{K_P + \frac{K_I T}{2}}\right)}{z-1} = \frac{\left(K_P + \frac{K_I T}{2}\right) \left(z - \frac{2K_P}{2K_P + K_I T}\right)}{z-1}$$

Por tanto, el PI aporta al lazo abierto un polo  $p_1 = 1$ , un cero  $z_1 = \frac{2K_P}{2K_P + K_I T}$  y una ganancia  $K_C = K_P + \frac{K_I T}{2}$ .

Si mediante la herramienta *sisotool*/ ubicamos el cero del controlador PI sobre el polo del lazo abierto que aporta una respuesta más lenta (el más cercano al círculo unitario)  $z_1 = 0.9048$ , tal que se cancelen entre si, y el polo  $p_1 = 1$ , se obtiene la respuesta de la figura XXXX.

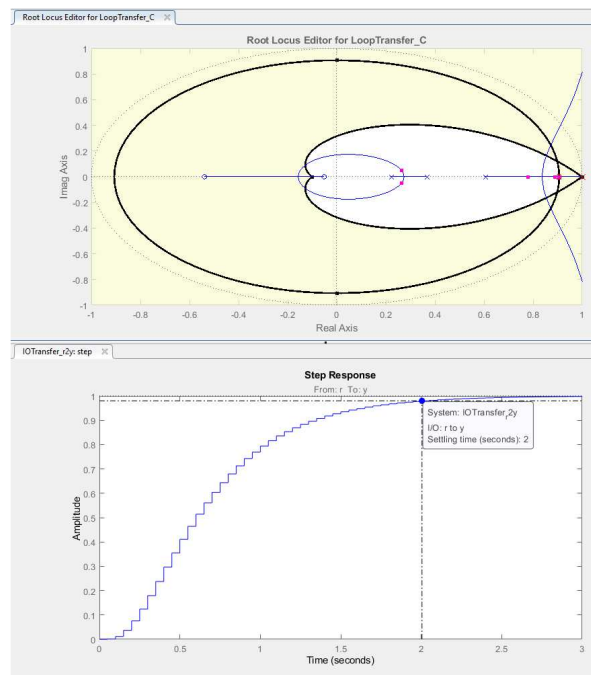


Figura XXX. Diseño en sisotool para el ejemplo 7. I con controlador PI

De acuerdo con la respuesta temporal del lazo cerrado obtenida para una referencia escalón unitario, se observa que se establece dentro del 2% en un tiempo menor de 2 segundos, no tiene sobrepico y el valor final es 1, tal que el  $e_{ss} = 0$ .

El controlador resultante con la ganancia ajustada es de la forma:

$$G_C(z) = \frac{9.6791(z - 0.9048)}{z - 1}$$

De tal manera que al despejar las constantes del controlador PI diseñado, se tienen los siguientes valores:

$$z_1 = 0.9048 = \frac{2K_p}{2K_p + K_I T} = \frac{2K_p}{2K_p + 0.05K_I}$$

$$K_C = 9.6791 = \left( K_p + \frac{K_I T}{2} \right) = \left( K_p + \frac{0.05K_I}{2} \right)$$

Resolviendo las dos ecuaciones se obtiene que:  $K_p = 8.7574$ ,  $K_I = 36.8580$   
Por tanto, el controlador PI discreto diseñado es:

$$G_C(z) = 8.7574 + \frac{36.8580(0.05)}{2} \frac{z}{z - 1}$$

Al expresar el controlador PI de la ecuación XXX en potencias negativas se tiene que:

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{9.6791(1 - 0.9048z^{-1})}{1 - z^{-1}} = \frac{9.6791 - 8.7576z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$U(z)(1 - z^{-1}) = (9.6791 - 8.7576z^{-1})E(z)$$

$$U(z) - z^{-1}U(z) = 9.6791E(z) - 8.7576z^{-1}E(z)$$

$$U(z) = z^{-1}U(z) + 9.6791E(z) - 8.7576z^{-1}E(z)$$

Por tanto, la ley de control en tiempo discreto que se aplicaría con el controlador PI diseñado es de la forma:

$$U(k) = U(k - 1) + 9.6791E(k) - 8.7576E(k - 1)$$

### ***Controlador Proporcional-Derivativo (PD)***

Consideremos que, por condiciones de diseño se requiere una respuesta transitoria más rápida, tal que:

$$\begin{aligned} \text{Especificaciones Transitorias: } t_{ss2\%} &\leq 1s \\ S_p &\leq 10\% \\ \text{Especificación Estado estable: } e_{ss} &\leq 0.1 \end{aligned}$$

Recuerden que la principal función de la acción derivativa es anticiparse al comportamiento del error (se basa en su derivada) tal que ayuda a que la respuesta transitoria tienda a ser más rápido.

Por tanto, planteemos el diseño de un controlador PD discreto de la forma:

$$G_C(z) = K_p + \frac{K_D}{T} \frac{z - 1}{z} = \frac{K_p z + \frac{K_D}{T} (z - 1)}{z}$$

$$G_C(z) = \frac{K_P z + \frac{K_D}{T} z - \frac{K_D}{T}}{z} = \frac{\left(K_P + \frac{K_D}{T}\right) z - \frac{K_D}{T}}{z}$$

$$G_C(z) = \frac{\left(K_P + \frac{K_D}{T}\right) \left(z - \frac{\frac{K_D}{T}}{K_P + \frac{K_D}{T}}\right)}{z} = \frac{\left(K_P + \frac{K_D}{T}\right) \left(z - \frac{K_D}{TK_P + K_D}\right)}{z}$$

Recordemos entonces que el controlador PD aporta un cero en  $z_1 = \frac{K_D}{TK_P + K_D}$ , un polo en  $p_1 = 0$  y una ganancia  $K_C = K_P + \frac{K_D}{T}$ .

Igual que en diseño del PI anterior, si mediante la herramienta *sisotool*/ubicamos el cero del controlador PD sobre el polo del lazo abierto que aporta una respuesta más lenta (el más cercano al círculo unitario)  $z_1 = 0.9048$ , tal que se cancelen entre si, y el polo  $p_1 = 0$ , se obtiene la respuesta de la figura XXXX. Nótese que se mantiene el mismo periodo de muestreo que el caso anterior, a pesar de que se disminuyó a la mitad el requerimiento del tiempo de establecimiento, sin embargo se cumple que se aplican al menos 5 acciones de control durante el primer  $\tau$ .

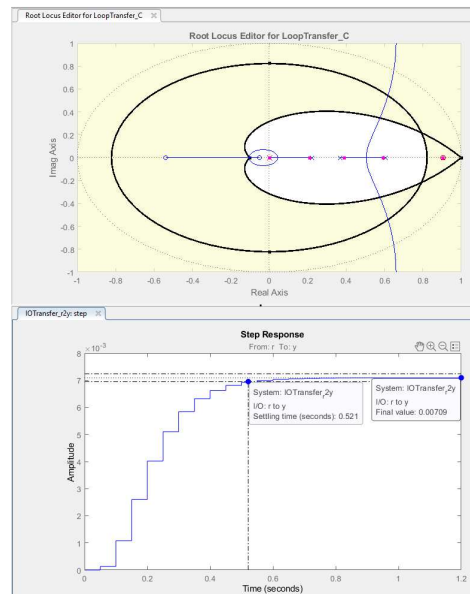


Figura XXX. Diseño en sisotool para el ejemplo 7.1 con controlador PD

Como se puede observar en la figura XXX, con el controlador PD ubicando el cero en 0.9048, con la ganancia en 1, se cumplen las condiciones transitorias al estar los polos de lazo cerrado dentro de la zona de diseño, pero no se cumple el error en estado estacionario, dado que la salida se establece en 0.0709 lo que significa un  $e_{ss} = 0.9291$

### Controlador PID

Por tanto, para el caso anterior una forma de cumplir condiciones de diseño tanto transitorias, como de estado estable, es diseñar un controlador PID.

Recuerde que la forma del controlador PID es:

$$G_C(z) = K_P + \frac{K_D}{T} \frac{z-1}{z} + \frac{K_I T}{2} \frac{z}{z-1} = \frac{K_P z(z-1) + \frac{K_D}{T} (z-1)^2 + \frac{K_I T}{2} z^2}{z(z-1)}$$

$$G_C(z) = \frac{K_P z^2 - K_P z + \frac{K_D}{T} z^2 - 2 \frac{K_D}{T} z + \frac{K_D}{T} + \frac{K_I T}{2} z^2}{z(z-1)}$$

$$G_C(z) = \frac{\left(K_P + \frac{K_D}{T} + \frac{K_I T}{2}\right) z^2 - \left(K_P + 2 \frac{K_D}{T}\right) z + \frac{K_D}{T}}{z(z-1)}$$

$$= \frac{\left(K_P + \frac{K_D}{T} + \frac{K_I T}{2}\right) \left( z^2 - \frac{\left(K_P + 2 \frac{K_D}{T}\right)}{\left(K_P + \frac{K_D}{T} + \frac{K_I T}{2}\right)} z + \frac{\frac{K_D}{T}}{\left(K_P + \frac{K_D}{T} + \frac{K_I T}{2}\right)} \right)}{z(z-1)}$$

Y que este aporta dos ceros en  $z_{1,2} = \frac{-\frac{\left(K_P + 2 \frac{K_D}{T}\right)}{\left(K_P + \frac{K_D}{T} + \frac{K_I T}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{\left(K_P + 2 \frac{K_D}{T}\right)}{\left(K_P + \frac{K_D}{T} + \frac{K_I T}{2}\right)}\right)^2 - 4 \frac{\frac{K_D}{T}}{\left(K_P + \frac{K_D}{T} + \frac{K_I T}{2}\right)}}}{2}$  y una ganancia  $K_C = \left(K_P + \frac{K_D}{T} + \frac{K_I T}{2}\right)$  que dependen de los valores que tomen las constantes del controlador para cumplir las condiciones de diseño. Mientras que los polos que aporta, son fijos y se ubican en  $p_1 = 0$  y  $p_2 = 1$ . Donde este último (integrador) según la tabla XXX asegura que  $e_{ss} = 0$  para una referencia tipo escalón.

Una forma práctica de ubicar los ceros del controlador es justo en los polos de lazo abierto que estén más cerca al círculo unitario (dado que estos son los más lentos del lazo abierto), tal que haya una cancelación de ceros y polos en lazo abierto. Para el ejemplo, sería ubicarlos en  $z_1 = 0.9048$  y  $z_2 = 0.6065$ . Al agregarlos mediante la herramienta *sisotool*, así como los polos en  $p_1 = 0$  y  $p_2 = 1$ , se obtiene la respuesta de la figura XXXX

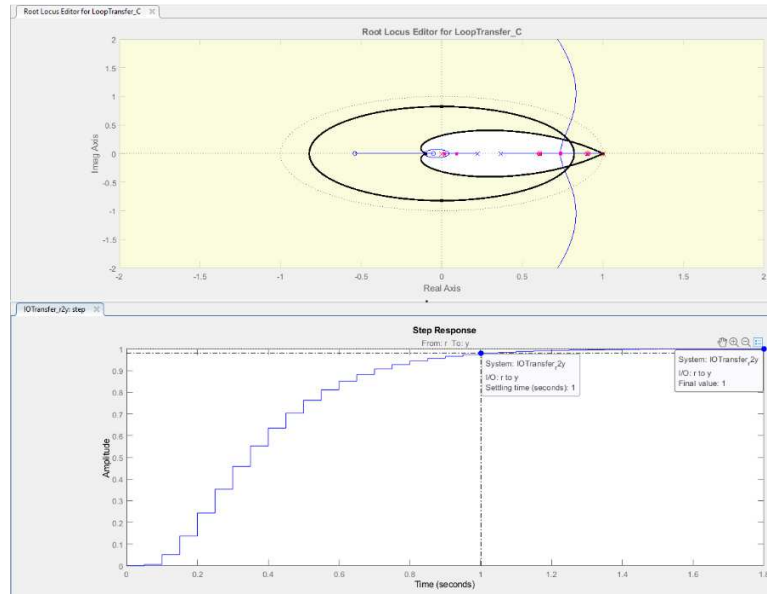


Figura XXX. Diseño en sisotool para el ejemplo 7.1 con controlador PID

Se observa de la figura XXX que, con el controlador diseñado, se cumplen tanto las condiciones transitorias ( $S_p = 0 \leq 10\%$  y  $t_{ss2\%} = 1s \leq 1s$ ) y  $e_{ss} = 0 \leq 0.1$ . El controlador final con la ganancia ajustada es:

$$G_C(z) = \frac{44.7(z - 0.6065)(z - 0.9048)}{z(z - 1)} = \frac{44.7(z^2 - 1.5113z + 0.5488)}{z(z - 1)}$$

$$G_C(z) = \frac{44.7z^2 - 67.5551z + 24.5296}{z^2 - z}$$

Que en términos de potencias negativas sería

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{44.7 - 67.5551z^{-1} + 24.5296z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

Y la ley de control  $U(z)$  queda de la forma:

$$U(z) - z^{-2}U(z) = 44.7E(z) - 67.5551z^{-1}E(z) + 24.5296z^{-2}E(z)$$

Por lo que la ley de control discreta que se implementa sería:

$$u(k) - u(k - 2) = 44.7e(k) - 67.5551e(k - 1) + 24.5296e(k - 2)$$

$$u(k) = u(k - 2) + 44.7e(k) - 67.5551e(k - 1) + 24.5296e(k - 2)$$

Por tanto, al igualar términos se obtiene:

$$K_P + \frac{K_D}{T} + \frac{K_I T}{2} = 44.7$$



$$K_I = \frac{2}{T} \left( 44.7 - K_P - \frac{K_D}{T} \right)$$

$$\left( K_P + 2 \frac{K_D}{T} \right) = 67.5551$$

$$K_P = 67.5551 - 2 \frac{K_D}{T}$$

$$\frac{K_D}{T} = 24.5296$$

$$K_D = 24.5296T$$

De las anteriores ecuaciones se obtiene que:

$$K_D = 24.5296(0.05) = 1.2265$$

$$K_P = 67.5551 - 2 \frac{1.2265}{0.05} = 18.4951$$

$$K_I = \frac{2}{0.05} \left( 44.7 - 18.4951 - \frac{1.2265}{0.05} \right) = 1.6749$$

Por tanto, el controlador PID diseñado es el siguiente:

$$G_c(z) = 18.4951 + 1.6749(0.05) \frac{z}{z-1} + \frac{1.2265}{0.05} \frac{z-1}{z}$$

### Controlador de atraso

Una opción para continuar dentro de la zona de diseño, aumentando la ganancia en DC, pero sin modificar significativamente la respuesta transitoria es usar un controlador de atraso. Recordemos que la forma general de un controlador de atraso es:

$$G_C(z) = K_C \frac{z + \alpha}{z + \beta} \quad \beta < \alpha$$

Y que para que se logre una alta ganancia en DC sin que aporte una fase significativa, el polo debe tener en valores positivos ligeramente menores a 1 (valores menores a 1).

Si para el caso del controlador proporcional, lo reemplazamos por un controlador de atraso, podemos asegurar las especificaciones transitorias iniciales, pero también cumplir la condición de error en estado estable. Para ello, diseñemos el controlador de atraso, dejando inicialmente la ganancia  $K_C = 1$  y ubiquemos su cero en 0.9084 ( $\alpha = -0.9084$ ) para aprovechar la cancelación del polo del lazo abierto cuya respuesta transitoria es más lenta. Por tanto, si planteamos la ganancia en DC del controlador y recordando que se debe cumplir que sea 120, se obtiene:

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_C(z) = 1 \frac{1 - 0.9084}{1 + \beta} = 120$$

Al despejar la ecuación XXX, se tiene que:

$$\beta = \frac{(1 - 0.9084)}{120} - 1 = -0.9993$$

De manera que el controlador de atraso inicialmente diseñado quedaría de la forma:

$$G_C(z) = \frac{z - 0.9084}{z - 0.9993}$$

Con el que se va a asegurar una ganancia en DC  $G_C(1) = 130$  (es mayor por la aproximación por arriba del cuarto decimal). Al agregar el cero y el polo del controlador de atraso en la herramienta *sisotool*, y ajustar la ganancia en DC, se obtiene la respuesta de la figura XXXX, donde se observa que se cumple tanto las condiciones transitorias ( $S_p = 0 \leq 10\%$ ,  $t_{ss2\%} = 2s \leq 2s$ ), como de estado estable y  $e_{ss} = 1 - 0.99 = 0.01 \leq 0.1$ . El controlador final es:

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} 10.37 \frac{z - 0.9084}{z - 0.9993}$$

Que en potencias negativas es de la forma:

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = 10.37 \frac{1 - 0.9084z^{-1}}{1 - 0.9993z^{-1}} = \frac{10.37(1 - 0.9084z^{-1})}{1 - 0.9993z^{-1}} = \frac{10.37 - 9.4201z^{-1}}{1 - 0.9993z^{-1}}$$

Por tanto, la ley de control  $U(z)$  es:

$$U(z) = 0.9993z^{-1}U(z) + 10.37E(z) - 9.4201z^{-1}E(z)$$

Y en el tiempo discreto se implementaría la siguiente ley de control  $u(k)$

$$u(k) = 0.9993u(k-1) + 10.37e(k) - 9.4201e(k-1)$$

En este caso, al ubicar el cero del controlador, se hizo de tal manera que también se mejore la respuesta transitoria, cancelando el polo más lento de la planta y la ubicación del polo queda condicionada a la ganancia que se quería obtener. Otra opción, menos eficaz es ubicar el polo cercano a la unidad y calcular la ubicación del cero en función de la ganancia esperada, sin embargo, esto puede generar un efecto de cola dado que no se cancela el cero del controlador.

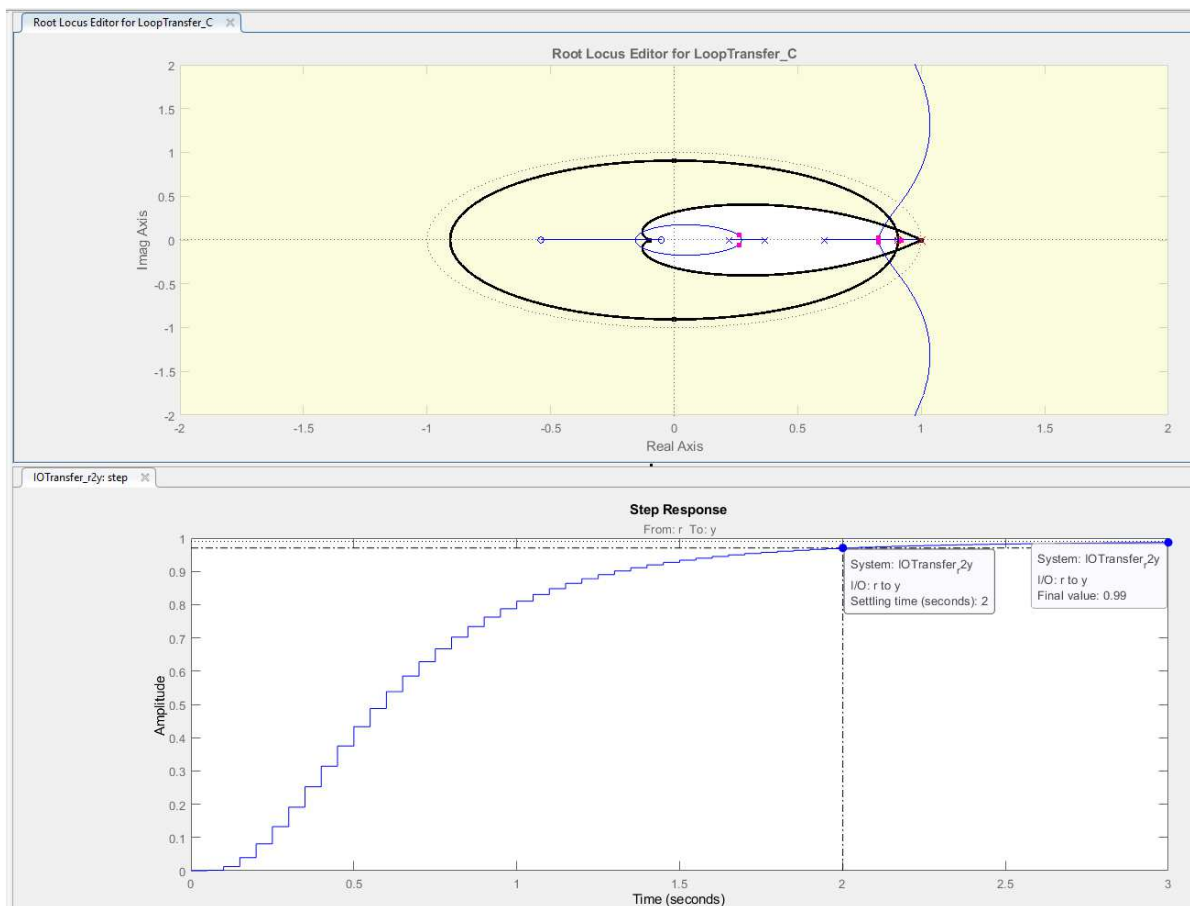


Figura XXX. Diseño en sisotool para el ejemplo 7.1 con controlador de Atraso

### **Controlador de Adelanto**

Recordemos que una versión generalizada del controlador PD es el controlador de adelanto, con la ventaja que la acción derivativa pura se evita y se tiene una ganancia baja a altas frecuencias que suelen ser indeseadas.

Recordemos que la forma general de un controlador de adelanto es:

$$G_C(s) = K_C \frac{z + \alpha}{z + \beta} \quad \beta < \alpha$$

Recuerde que, al ser controlador de adelanto, el ángulo aportado por dicho controlador debe ser positivo.

Por tanto, para el ejemplo 7.1 Controlador PD en lugar de usar dicho controlador, planteemos el diseño de uno de adelanto de la siguiente manera. Ubiquemos el cero en donde se ubica el polo más lento del lazo abierto ( $\alpha = -0.9084$ ) y ubiquemos el polo de tal manera que se cumplan las especificaciones de diseño. Al agregar el cero y el polo del controlador de adelanto en la herramienta *sistool*, y ajustar la ganancia en DC hasta el límite de la zona de diseño, se obtiene la respuesta de la figura XXXX, donde se observa que se cumple las condiciones transitorias ( $S_p = 8.27\% \leq 10\%$ ,  $t_{ss2\%} = 0.731s \leq 2s$ ), pero no de estado estable ( $e_{ss} = 1 - 0.27 = 0.73 \geq 0.1$ ).

El controlador final es:

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = 21.537 \frac{z - 0.9084}{z - 0.6}$$

Que en potencias negativas es de la forma:

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = 21.537 \frac{z - 0.9084}{z - 0.6} = \frac{21.537(1 - 0.9084z^{-1})}{1 - 0.6z^{-1}} = \frac{21.537 - 19.5642z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}}$$

Por tanto, la ley de control  $U(z)$  es:

$$U(z) = 0.6z^{-1}U(z) + 21.537E(z) - 19.564z^{-1}E(z)$$

Y en el tiempo discreto se implementaría la siguiente ley de control  $u(k)$

$$u(k) = 0.6u(k - 1) + 21.537e(k) - 19.564e(k - 1)$$

En este caso, al ubicar el cero del controlador, se hizo de tal manera que se cancele el polo más lento de la planta y la ubicación del polo queda condicionada a la ganancia a la zona de diseño. Sin embargo, se debe mejorar el error en estado estable, que implica aumentar la ganancia de DC del lazo abierto. Una opción que se pensaría inmediatamente es aumentar la ganancia  $K_C$  del controlador, pero se observa que esto hará que se salga de la zona de diseño, por tanto se debe buscar otra opción. Planteemos el diseño de un controlador de

atraso para aumentar la ganancia DC manteniéndonos en la zona de diseño con el controlador de adelanto.

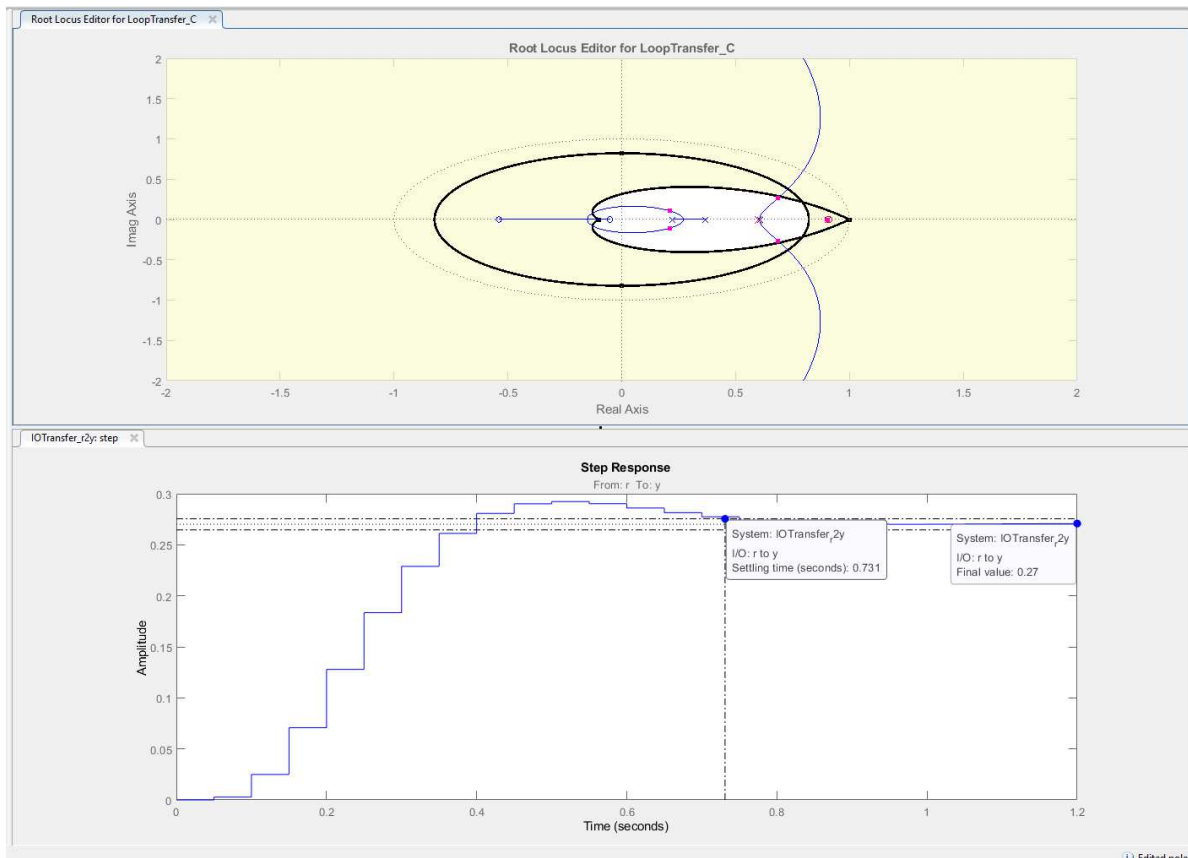


Figura XXX. Diseño en sisotool para el ejemplo 7.1 con controlador de adelanto

### ***Controlador de Adelanto+Atraso***

Recordemos que el controlador de adelanto+atraso es la combinación de dos controladores, donde el de adelanto mejora la respuesta transitoria, mientras que el de atraso el error de estado estable al aumentar la ganancia DC.

La forma general del controlador de adelanto+atraso es:

$$G_C(z) = K_C \frac{z + \alpha_1}{z + \beta_1} \frac{z + \alpha_2}{z + \beta_2} \quad \beta_1 < \alpha_1 \quad \beta_2 > \alpha_2$$

Para el ejemplo 7.1 diseñemos el controlador de atraso+adelanto, manteniendo el controlador de atraso diseñado inicialmente ( $\alpha_2 = -0.9084$  y  $\beta_2 = -0.9993$  para un aporte de ganancia en DC igual al 30). Mientras que la componente de adelanto diseñémosla de tal manera que el cero cancele el siguiente polo mas lento, es decir ubiquémoslo tal que  $\alpha_1 = -0.6065$  y el polo se ubica tal que se cumpla la zona de diseño. Al agregar los ceros y los polos del controlador de adelanto+atraso en la herramienta *sisotool*, ubicando el segundo

polo en  $\beta_2 = -0.5$  y ajustar la ganancia en DC hasta el límite de la zona de diseño, se obtiene la respuesta de la figura XXXX, donde se observa que se cumple las condiciones transitorias ( $S_p = 0\% \leq 10\%$ ,  $t_{ss2\%} = 1.99s \leq 2s$ ), y de estado estable  $e_{ss} = 1 - 0.99 = 0.01 \leq 0.1$ .

El controlador final es:

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = 12.9 \frac{(z - 0.6065)(z - 0.9084)}{(z - 0.5)(z - 0.9993)}$$

Que en potencias negativas es de la forma:

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{12.9(z^2 - 1.5149z + 0.5509)}{z^2 - 1.4993z + 0.4997} = \frac{12.9 - 19.5422z^{-1} + 7.1066z^{-2}}{1 - 1.4993z^{-1} + 0.4997z^{-2}}$$

$$U(z) - 1.4993U(z)z^{-1} + 0.4997U(z)z^{-2} = 12.9E(z) - 19.5422z^{-1}E(z) + 7.1066z^{-2}E(z)$$

Por tanto, la ley de control  $U(z)$  es:

$$U(z) = 1.4993U(z)z^{-1} - 0.4997U(z)z^{-2} + 12.9E(z) - 19.5422z^{-1}E(z) + 7.1066z^{-2}E(z)$$

Y en el tiempo discreto se implementaría la siguiente ley de control  $u(k)$

$$u(k) = 1.4993u(k-1) - 0.4997u(k-2) + 12.9e(k) - 19.5422e(k-1) + 7.1066e(k-2)$$

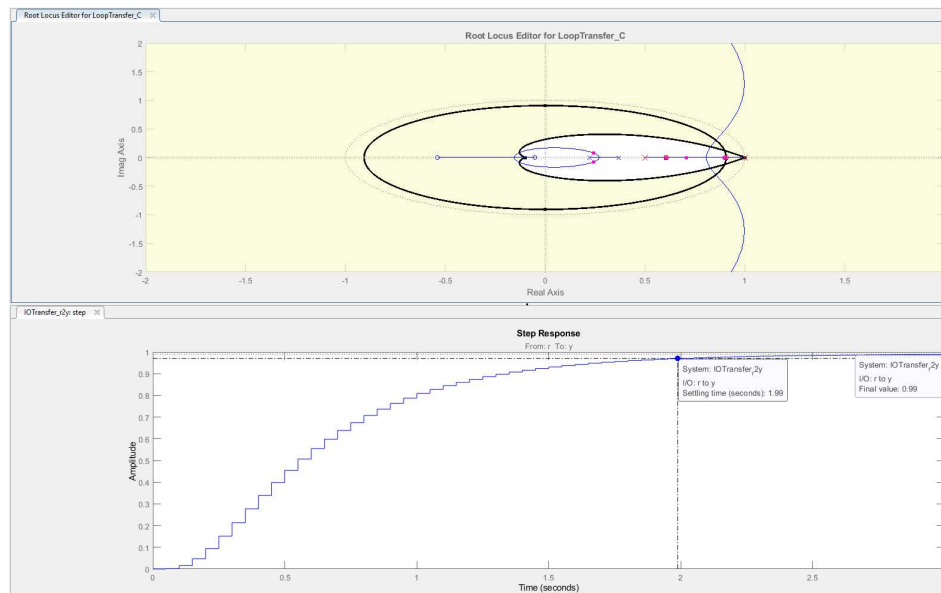


Figura XXX. Diseño en sisotool para el ejemplo 7.1 con controlador Adelanto+Atraso