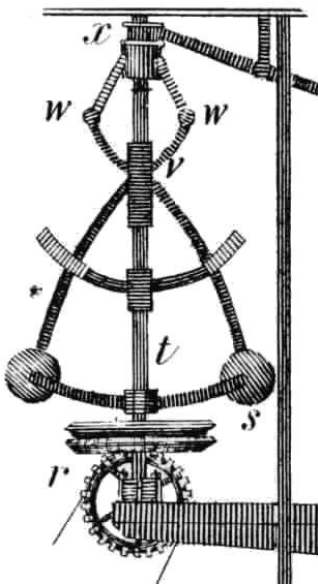


# Controladores PID

---

*Virginia Mazzone*



Regulador centrífugo de Watt

Control Automático 1  
<http://iaci.unq.edu.ar/caut1>  
Automatización y Control Industrial  
Universidad Nacional de Quilmes  
Marzo 2002

# 1 Introducción

En este capítulo veremos la familia de controladores PID, que mostraron ser robustos en muchas aplicaciones y son los que más se utilizan en la industria. La estructura de un controlador PID es simple, aunque su simpleza es también su debilidad, dado que limita el rango de plantas donde pueden controlar en forma satisfactoria (existe un grupo de plantas inestables que no pueden estabilizadas con ningún miembro de la familia PID). En este capítulo estudiaremos los enfoques tradicionales al diseño de controladores PID.

## 2 Estructura del PID

Consideremos un lazo de control de una entrada y una salida (SISO) de un grado de libertad:

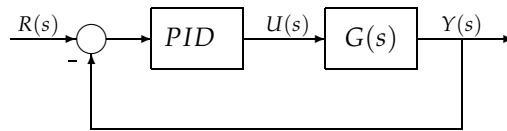


Figura 1: Diagrama en bloques

Los miembros de la familia de controladores PID, incluyen tres acciones: *proporcional* (P), *integral* (I) y *derivativa* (D). Estos controladores son los denominados P, I, PI, PD y PID.

- **P: acción de control proporcional**, da una salida del controlador que es proporcional al error, es decir:  $u(t) = KP.e(t)$ , que descripta desde su función transferencia queda:

$$C_p(s) = K_p \quad (1)$$

donde  $K_p$  es una ganancia proporcional ajustable. Un controlador proporcional puede controlar cualquier planta estable, pero posee desempeño limitado y error en régimen permanente (off-set).

- **I: acción de control integral**: da una salida del controlador que es proporcional al error acumulado, lo que implica que es un modo de controlar lento.

$$u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad C_i(s) = \frac{K_i}{s} \quad (2)$$

La señal de control  $u(t)$  tiene un valor diferente de cero cuando la señal de error  $e(t)$  es cero. Por lo que se concluye que dada una referencia constante, o perturbaciones, el error en régimen permanente es cero.

- **PI: acción de control proporcional-integral**, se define mediante

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (3)$$

donde  $T_i$  se denomina tiempo integral y es quien ajusta la acción integral. La función de transferencia resulta:

$$C_{PI}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (4)$$

Con un control proporcional, es necesario que exista error para tener una acción de control distinta de cero. Con acción integral, un error pequeño positivo siempre nos dará una acción de control creciente, y si fuera negativo la señal de control será decreciente. Este razonamiento sencillo nos muestra que el error en régimen permanente será siempre cero.

Muchos controladores industriales tienen solo acción PI. Se puede demostrar que un control PI es adecuado para todos los procesos donde la dinámica es esencialmente de primer orden. Lo que puede demostrarse en forma sencilla, por ejemplo, mediante un ensayo al escalón.

- **PD: acción de control proporcional-derivativa**, se define mediante:

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (5)$$

donde  $T_d$  es una constante denominada tiempo derivativo. Esta acción tiene carácter de previsión, lo que hace más rápida la acción de control, aunque tiene la desventaja importante que amplifica las señales de ruido y puede provocar saturación en el actuador. La acción de control derivativa nunca se utiliza por sí sola, debido a que sólo es eficaz durante períodos transitorios. La función transferencia de un controlador PD resulta:

$$C_{PD}(s) = K_p + s K_p T_d \quad (6)$$

Cuando una acción de control derivativa se agrega a un controlador proporcional, permite obtener un controlador de alta sensibilidad, es decir que responde a la velocidad del cambio del error y produce una corrección significativa antes de que la magnitud del error se vuelva demasiado grande. Aunque el control derivativo no afecta en forma directa al error en estado estacionario, añade amortiguamiento al sistema y, por tanto, permite un valor más grande que la ganancia  $K$ , lo cual provoca una mejora en la precisión en estado estable.

- **PID: acción de control proporcional-integral-derivativa**, esta acción combinada reúne las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales. La ecuación de un controlador con esta acción combinada se obtiene mediante:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (7)$$

y su función transferencia resulta:

$$C_{PID}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (8)$$

### 3 Métodos clásicos de ajuste de Ziegler and Nichols

En esta sección veremos dos métodos de ajuste de las ganancias de un controlador PID, el *Método de Oscilación* o *Método de Respuesta en Frecuencia* y el *Método Basado en la Curva Reacción* o *Método de Respuesta al Escalón*. El primero se basa en un lazo de control sólo con ganancia proporcional y de acuerdo a la ganancia utilizada para que el sistema empiece a oscilar y al período de esas oscilaciones, podemos establecer las ganancias del controlador PID. El otro método se resume en ensayar al sistema a lazo abierto con un escalón unitario, se calculan algunos parámetros, como la máxima pendiente de la curva y el retardo, y con ellos establecemos las ganancias del controlador PID. Estos métodos fueron propuestos por Ziegler y Nichols (Z-N) en 1942, quienes se basaron en la práctica para desarrollarlos.

#### 3.1 Método de Oscilación

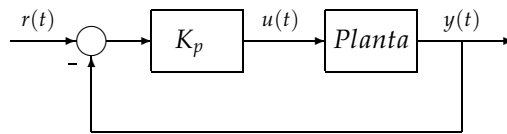


Figura 2: Lazo cerrado solo con ganancia proporcional

Este procedimiento es válido solo para plantas estables a lazo abierto y se lleva a cabo siguiendo los siguientes pasos:

1. Utilizando sólo control proporcional, comenzando con un valor de ganancia pequeño, incrementar la ganancia hasta que el lazo comience a oscilar. *Notar que se requieren oscilaciones lineales y que éstas deben ser observadas en la salida del controlador.*
2. Registrar la ganancia crítica del controlador  $K_p = K_c$  y el período de oscilación de la salida del controlador,  $P_c$ . (en el diagrama de Nyquist, corresponde a que  $K_c G(j\omega)$  cruza el punto  $(-1, 0)$  cuando  $K_p = K_c$ ).
3. Ajustar los parámetros del controlador según la Tabla 1:

	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.50K_c$		
PI	$0.45K_c$	$\frac{P_c}{1.2}$	
PID	$0.60K_c$	$0.5P_c$	$\frac{P_c}{8}$

Tabla 1: Parámetros de ajuste (método de oscilación)

Dicha tabla fue obtenida por Ziegler y Nichols quienes buscaban una respuesta al escalón de bajo amortiguamiento para plantas que puedan describirse satisfactoriamente por un modelo de la forma:

$$G_0(s) = \frac{K_0 e^{-s\tau_0}}{v_0 s + 1}, \quad \text{donde} \quad v_0 > 0 \quad (9)$$

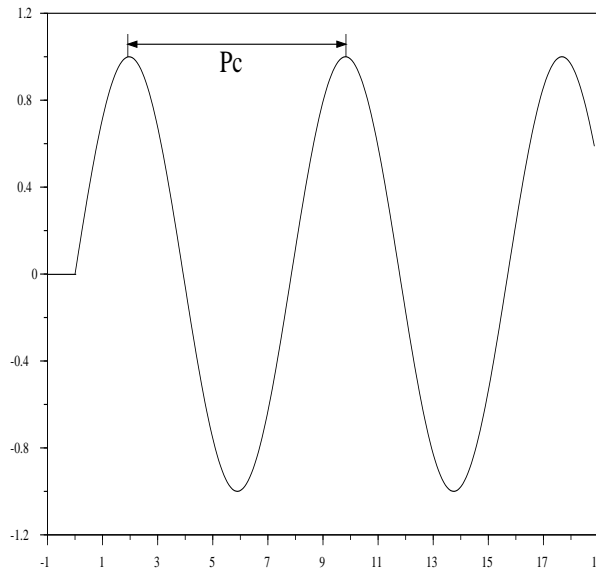


Figura 3: Respuesta de la planta con ganancia crítica

*Ejemplo 1.* Considerar el modelo de una planta dado por:

$$G_0(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \quad (10)$$

Determinar los parámetros de un controlador PID utilizando el método de oscilación de Z-N. Obtener un gráfico de la respuesta a una entrada escalón unitario y a una perturbación de entrada escalón unitario.

Primero debemos calcular la ganancia crítica  $K_c$  y la frecuencia crítica  $\omega_c$ . Dichos valores deben satisfacer

$$K_c G_0(j\omega_0) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad K_c = -(j\omega_c + 1)^3, \quad (11)$$

de donde obtenemos  $K_c=8$  y  $\omega_c = \sqrt{3}$ . El período crítico es entonces  $P_c = \frac{2\pi}{\omega_c} \simeq 3.63$ . Utilizando la tabla obtenemos los siguientes valores:

$$K_p = 0.6 \times K_c = 4.8; T_i = 0.5 \times P_c = 1.81; T_d = 0.25 \times P_c = 0.45$$

De esta forma la función transferencia a lazo abierto resulta:

$$G_0(s)C(s) = K_p \frac{T_d s^2 + s + \frac{1}{T_i}}{s(s+1)^3} = \frac{2.16s^2 + 4.8s + 2.652}{s(s+1)^3} \quad (12)$$

Implementando dicho sistema en SIMULINK, con una entrada escalón unitario aplicada en el instante  $t = 0$  y una perturbación de entrada escalón unitario en el instante  $t = 10$ , obtenemos la Figura 4

Como se puede apreciar en el gráfico, el control hallado provoca un sobrevalor significativo, lo que es inaceptable en algunos casos. Sin embargo el método de Z-N nos ha

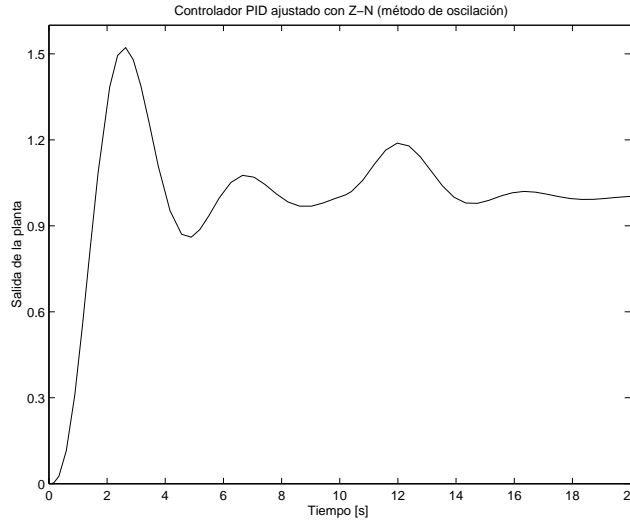


Figura 4: Salida del sistema controlado con un PID

proporcionado un punto de partida para una sintonía más fina. En este caso, si utilizamos el valor  $Td = 1$  el desempeño mejora. Sin embargo, el incremento de acción derivativa puede traer inconvenientes si estuviéramos en presencia de un ruido significativo en el sistema, y es recomendable verificar que el aumento de acción derivativa no amplifique ruido excesivamente.

### 3.2 Método Basado en la Curva Reacción

Muchas plantas, pueden ser descriptas satisfactoriamente por el modelo:

$$G_0(s) = \frac{K_0 e^{-s\tau_0}}{v_0 s + 1} \quad \text{donde} \quad v_0 > 0 \quad (13)$$

Una versión cuantitativa lineal de este modelo puede ser obtenida mediante un experimento a lazo abierto, utilizando el siguiente procedimiento:

1. Con la planta a lazo abierto, llevar a la planta a un punto de operación normal. Digamos que la salida de la planta se estabiliza en  $y(t) = y_0$  para una entrada constante  $u(t) = u_0$ .
2. En el instante inicial  $t_0$ , aplicar un cambio en la entrada escalón, desde  $u_0$  a  $u_\infty$  (esto debería ser en un rango de 10 al 20% de rango completo).
3. Registrar la salida hasta que se estabilice en el nuevo punto de operación. Supongamos que la curva que se obtiene es la que se muestra en la Figura 5. Esta curva se llama curva de reacción del proceso.

Calcular los parámetros del modelo de la siguiente forma:

$$K_0 = \frac{y_\infty - y_0}{y_\infty - u_0}; \quad \tau_0 = t_1 - t_0; \quad v_0 = t_2 - t_1 \quad (14)$$

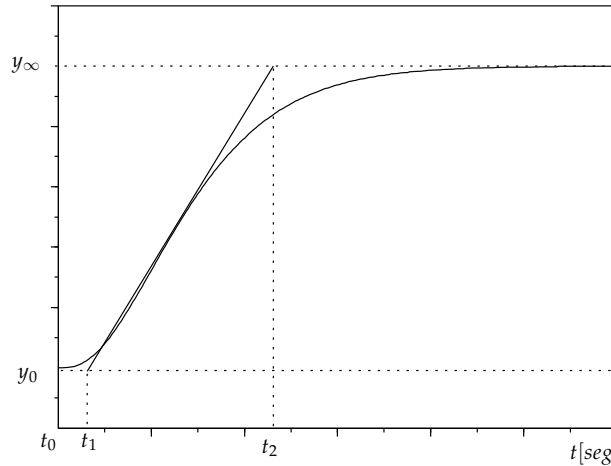


Figura 5: Respuesta al escalón de la planta

El modelo obtenido puede ser utilizado para varios métodos de ajuste de controladores PID. Uno de estos también en fue propuesto por Ziegler y Nichols. El objetivo de diseño es alcanzar un amortiguamiento tal que exista una relación de 4:1 para el primer y segundo pico de la respuesta a una referencia escalón. Los parámetros sugeridos por Z-N son los que se muestran en la Tabla 2.

	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{v_0}{K_0 \tau_0}$		
PI	$\frac{0.9 v_0}{K_0 \tau_0}$	$3 \tau_0$	
PID	$\frac{1.2 v_0}{K_0 \tau_0}$	$2 \tau_0$	$0.5 \tau_0$

Tabla 2: Parámetros de ajuste (método curva de reacción)

## 4 Modificaciones de los esquemas de control PID

En los sistemas de control básicos vistos hasta ahora, si la entrada de referencia es un escalón, debido a la presencia del término derivativo en la acción de control, la variable manipulada  $u(t)$  contendrá una función impulso (una delta). En un controlador PID real, en lugar del término derivativo  $T_D s$  emplearemos:

$$\frac{T_d s}{\tau_D s + 1} \quad (15)$$

donde  $\tau_D$ , denominada constante de tiempo derivativa, normalmente es elegida tal que  $0.1 \leq \tau_D \leq 0.2$ . Cuanto más pequeña es  $\tau_D$ , mejor es la aproximación entre el término

"derivativo filtrado" de la Ecuación (15) y el "derivativo"  $T_d s$ , es decir son iguales en el límite:

$$\lim_{\tau_d \rightarrow 0} u_{PID}(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (16)$$

Con la inclusión de un polo evitamos utilizar acciones de control grandes en respuesta a errores de control de alta frecuencia, tales como errores inducidos por cambios de setpoint (referencia) o mediciones de ruido. El argumento clásico por el cual se elige  $\tau_D \neq 0$  es, además de asegurar un controlador propio, para atenuar ruido de alta frecuencia. Casi todos los controladores industriales PID definen a  $\tau_D$  como una fracción fija de  $T_d$ , en lugar de tomarlo como un parámetro independiente de diseño.

Analicemos nuevamente el Ejemplo 1, pero tomando ahora como función transferencia del controlador PID a:

$$C_{PID}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\tau_D s + 1} \right) \quad (17)$$

Por lo que la función transferencia a lazo abierta resulta ser la siguiente

$$G_o(s)C(s) = \frac{K_p(T_d + \tau_D)s^2 + (1 + \frac{\tau_D}{T_i})s + \frac{1}{T_i}}{s(\tau_D s + 1)} G_o(s) \quad (18)$$

Con el mismo desarrollo anteriormente explicado obtenemos los mismos parámetros del PID aplicando el método de oscilación de Z-N. Tomando a  $\tau_D = 0.1$  y  $T_d = 0.045$ , la función transferencia a lazo abierto resulta:

$$G_o(s)C(s) = \frac{52.8s^2 + 109.32s + 58.93}{s(s + 22.2)(s + 1)^3} \quad (19)$$

## 5 Asignación de polos

La asignación de polos es un método de diseño de controladores cuando queremos que el desempeño del sistema a lazo cerrado cumpla con determinadas especificaciones de diseño. En esta sección veremos en detalle de qué se trata y veremos también como podemos ajustar un controlador PID utilizando asignación de polos.

Consideremos el lazo nominal de la Figura 1 con las siguientes funciones transferencias:

$$C(s) = \frac{P(s)}{L(s)} \quad G_0(s) = \frac{B_0(s)}{A_0(s)} \quad (20)$$

con  $P(s)$ ,  $L(s)$ ,  $B_0(s)$  y  $A_0(s)$  polinomios de grados  $n_p$ ,  $n_l$ ,  $n - 1$  y  $n$  respectivamente (asumimos que el modelo nominal de la planta es estrictamente propio). Consideremos que el polinomio a lazo cerrado deseado está dado por  $A_{lc}$ . La pregunta que surge es:

¿Dado un  $A_{lc}$  arbitrario, existirá una función  $C(s)$  propia tal que a lazo cerrado resulte que  $A_{lc}$  sea el polinomio característico?

Para contestar esta pregunta, veamos primero que pasa con un ejemplo para ilustrar mejor la idea:



*Ejemplo 2 (Asignación de polos).* Sea el modelo nominal de una planta dada y un controlador de la forma:

$$G_0(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \quad C(s) = \frac{P(s)}{L(s)} \quad (21)$$

Podemos ver que  $A_{lc} = A_0(s)L(s) + B_0(s)P(s) = (s^2 + 3s + 2)(l_1s + l_0) + (p_1s + p_0)$ . Si igualamos los coeficientes obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \\ p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Podemos verificar que la matriz anterior es no-singular, por lo que el sistema tendrá solución única:  $l_1 = 1, l_0 = 0, p_1 = 1$  y  $p_0 = 1$ . Así el polinomio característico es alcanzado para un controlador dado por la siguiente función transferencia:

$$C(s) = \frac{s + 1}{s} \quad (23)$$

En el ejemplo anterior vimos como la asignación de polos a lazo cerrado depende de la no-singularidad de una matriz particular. Como la idea es generalizar el resultado anterior, primero necesitaremos algunos resultados matemáticos.

**Teorema 1 (Teorema de Sylvester).** Consideremos los polinomios

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad (24)$$

$$B(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0, \quad (25)$$

junto con la matriz

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \dots & a_n & b_0 & b_1 & \dots & b_n \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-1} & 0 & b_0 & \dots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Se dice que  $A(s)$  y  $B(s)$  son coprimos, es decir que no tienen factores en común o raíces, si y solo si  $\det(\mathbf{M}_e) \neq 0$

Con este resultado podemos ahora generalizar lo visto en el Ejemplo 2, para mostrar que la asignación de polos es generalmente posible, cuando se cumplen algunos requerimientos mínimos.

**Lema 1 (Asignación de Polos SISO).** Consideremos un lazo de realimentación de un grado de libertad con un controlador  $C(s)$  y un modelo nominal  $G_0(s)$  dado por (20). Suponiendo que  $A_0(s)$  y  $B_0(s)$  son coprimos y que sus grados son  $n$  y  $n - 1$ , respectivamente. Sea  $A_{lc}$

un polinomio arbitrario de grado  $n_c = 2n - 1$ . Entonces existen polinomios  $P(s)$  y  $L(s)$ , con grados  $n_p = n_l = n - 1$  tal que:

$$A_0(s)L(s) + B_0(s)P(s) = A_{lc}(s) \quad (27)$$

*Nota 1.* El lema anterior establece bajo qué condiciones existe solución para el problema de asignación de polos, asumiendo un controlador bipropio. Cuando se requiere un controlador estrictamente propio, el grado de  $P(s)$  y  $L(s)$  debería ser  $n_p = n - 1$  y  $n_l = n$ , respectivamente. De esta forma, para poder estar en condiciones de elegir un polinomio a lazo cerrado  $A_{lc}(s)$  arbitrario, su grado debería ser igual a  $2n$ .

*Nota 2.* No están permitidas las cancelaciones del estilo polo-cero inestables. Cualquier cancelación entre el controlador y la planta aparecerá como factor en  $A_0(s)L(s)$  y también en  $B_0(s)P(s)$ . Para que la condición del lema 1 pueda ser satisfecha, el mismo factor deberá aparecer en  $A_{lc}(s)$ , pero el polinomio característico a lazo cerrado se debe elegir estable, por lo que ese factor común deberá ser estable. Sólo de esta forma, el lazo cerrado nominal es garantía de ser internamente estable, es decir, las cuatro *funciones de sensibilidad* serán estables.

En esta sección, veremos una forma más moderna que las anteriores para ajustar un controlador PID, basándonos en técnicas de asignación de polos. Durante esta sección consideraremos un lazo de control de un grado de libertad con controladores PI de la siguiente forma

$$C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (28)$$

y la forma del controlador PID

$$C_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{\tau_D s + 1} \quad (29)$$

Para referencias futuras notamos la siguiente representación alternativa de un controlador PID:

**Lema 2.** Cualquier controlador de la forma:

$$C(s) = \frac{n_2 s^2 + n_1 s + n_0}{d_2 s^2 + d_1 s} \quad (30)$$

es idéntico al controlador PID de (29) con los siguientes valores de los parámetros:

$$K_p = \frac{n_1 d_1 - n_0 d_2}{d_1^2} \quad (31)$$

$$K_i = \frac{n_0}{d_1} \quad (32)$$

$$K_d = \frac{n_2 d_1^2 - n_1 d_1 d_2 + n_0 d_2^2}{d_1^3} \quad (33)$$

$$\tau_D = \frac{d_2}{d_1} \quad (34)$$

*Demostración.* Desarrollando en fracciones simples (29) y comparándola con (30) se obtienen dichos coeficientes.  $\square$

Si asumimos que la planta puede ser (por lo menos, aproximadamente) modelada por un modelo de segundo orden, entonces podemos utilizar asignación de polos para sintonizar un controlador PID.

*Ejemplo 3.* Una planta tiene un modelo nominal dado por:

$$G_0(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \quad (35)$$

Sintonizar un controlador PID para que a lazo cerrado alcance la dinámica dominada por:  $s^2 + 4s + 9$

Resolvemos primero el problema de asignación de polos, donde

$$A_{lc}(s) = (s^2 + 4s + 9)(s + 4)^2; \quad B_0(s) = 2; \quad A_0(s) = s^2 + 3s + 2. \quad (36)$$

El factor  $(s + 4)^2$  ha sido agregado para asegurar que la asignación de polos tenga solución, es decir que el grado de  $A_{lc}(s)$  debe ser 4. Notar que este factor genera modos (polos) que son más rápidos que los originados por el polinomio deseado. De esta forma, la dinámica dominante será la de los polos mas lentos.

Resolviendo la ecuación de asignación de polos, resulta que

$$C(s) = \frac{P(s)}{s\bar{L}(s)} = \frac{14s^2 + 59s + 72}{s(s+9)} \quad (37)$$

de donde:  $K_p = 5.67$ ;  $K_i = 8$ ;  $K_d = 0.93$ ;  $\tau_D = 0.11$ .

Una importante observación es que la solución de este problema tiene la estructura de un controlador PID para el modelo dado  $G_0(s)$ . Para un modelo de mayor orden, el controlador resultante no será, en general, un controlador PID.

## 6 Resumen

- Desde una perspectiva moderna, un controlador PID es simplemente un controlador de hasta segundo orden, conteniendo un integrador.
- Descubrimientos empíricos demuestran que la estructura del PID por lo general tiene la suficiente flexibilidad como para alcanzar excelentes resultados en muchas aplicaciones.
- El término básico es el término proporcional, **P**, que genera una actuación de control correctivo proporcional al error.
- El término integral, **I**, genera una corrección proporcional a la integral del error. Esto nos asegura que si aplicamos un esfuerzo de control suficiente, el error de seguimiento se reduce a cero.
- El término derivativo, **D**, genera una acción de control proporcional al cambio de rango del error. Esto tiende a tener un efecto estabilizante pero por lo general genera actuaciones de control grandes.

- Los diferentes métodos de sintonización de los parámetros de un controlador PID, van de acuerdo a la estructura que se utilice del mismo. Cabe recordar, que sólo se mencionó una estructura, dada en la ecuación (29), y que los métodos que se estudiaron se realizaron de acuerdo a dicha estructura. En caso de tener otra habrá que analizar el método equivalente.