MAT1110 - Oblig 1

Dag Arne Lydvo

22. februar 2018

Oppgave 1a)

Antall unge ved n+1 (x_{n+1}) er gitt ved antall unger de voksne i n(y_n) får, $9y_n$.
Antall voksne ved n+1 (y_{n+1}) er gitt ved ungene ved n x_n som nå er voksne.
Antall gamle ved n+1 z_{n+1} er gitt ved de voksne ved n y_n som nå er gamle.
Som gir: $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n y_n z_n \end{bmatrix}$

b)

Finner egenverdier:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 9 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda = -\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$$
$$\rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$$

$$\lambda_1 : \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow z = a, a = 1 \rightarrow y = 0, x = 0 \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 : \begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow z = a, a = 1 \rightarrow y = -3, x = 9 \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 : \begin{bmatrix} -3 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow z = a, a = 1 \rightarrow y = 3, x = 9 \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finne tilstanden neste sesong:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Det finnes kun gamlek(k) og kolonien vil da dø ut.

c)

Matriselikningen:

$$A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}45\\18\\5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&9&0&45\\1&0&0&18\\0&1&0&5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&18\\0&9&0&45\\0&1&0&5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&18\\0&1&0&5\\0&1&0&5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&18\\0&1&0&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18\\5\\0\end{bmatrix}$$

Den reduserte matrisen har ikke pivotelement i siste søyle og er derfor ikke inverterbar.

d)

Basis bestående av egenvektorene:

$$v_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}9\\-3\\1\end{bmatrix},v_3=\begin{bmatrix}9\\3\\1\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}0&9&9&0\\0&-3&3&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

Søyle 1,2,3 er pivotsøyler og alle elementene untatt pivotelementene er 0, basis er derfor:

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}9\\-3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}$$

En matrise

$$M=\begin{bmatrix}0&9&9\\0&-3&3\\1&1&1\end{bmatrix}$$

Gir

$$M^{-1}AM=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

e)

Ved $t=0$ er det kun 18 unge hunnkaniner, $r_0=\begin{bmatrix}18\\0\\0\end{bmatrix}$

$$r_0=c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3\rightarrow A^nr_0=r_n=c_1A^nv_1+c_2A^nv_2+c_3A^nv_3=c_1\lambda_1^nv_1+c_2\lambda_2^nv_2+c_3\lambda_3^nv_3$$

$$=c_1(0)^nv_1+c_2(3)^nv_2+c_3(-3)^nv_3$$

Finner c_1,c_2 og c_3

$$r_0 = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 & 18 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 18 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dette gir $c_1 = -2$, $c_2 = 1$ og $c_3 = 1$

$$r_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = -2(0)^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (3)^n \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + (-3)^n \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2a og b)

```
from numpy import *

a,b,c,d= input("Sett inn verdier for a,b,c,d:")
A=matrix([[a,b],[c,d]])

l1 = ((a+d)-sqrt((a+d)**2-4*(a*d-b*c)))/2.0
l2 = ((a+d)+sqrt((a+d)**2-4*(a*d-b*c)))/2.0


print "Egenverdiene til abcd-matrisen:%.2f,%.2f"%(l1,l2)

y1 = 1
if (d-l1)==0 or (a-l1)==0:
    y=1
else:
    l1=l1
if c==0 and b==0:
    if a>d:
        x = 1
        y = 0
    else:
        x = 0
        y = 1
elif b == 0:
    x = -(d-l1)*y1/c
    y = (-c*x)/(d-l1)
elif c == 0:
    x = (-b*y1)/(a-l1)
    y = -(a-l1)*x/b
else:
    x = -(d-l1)*y1/c
    y = -(a-l1)*x/b
v = [x,y]
print "Egenvektoren til egenverdien %g er"%(l1), v

"""
Sett inn verdier for a,b,c,d:-5,4,3,-1
Egenverdiene til abcd-matrisen:-7.00,1.00
Egenvektoren til egenverdien -7 er [-2.0, 1.0]

In [13]: run oppg2.py
Sett inn verdier for a,b,c,d:3,0,5,1
Egenverdiene til abcd-matrisen:1.00,3.00
Egenvektoren til egenverdien 3 er [0.40000000000000002, 1.0]

```

```
In [20]: run oppg2.py
Sett inn verdier for a,b,c,d:2,7,0,1
Egenverdiene til abcd-matrisen:1.00,2.00
Egenvektoren til egenverdien 1 er [-7.0, 1.0]

In [21]: run oppg2.py
Sett inn verdier for a,b,c,d:1,0,0,0
Egenverdiene til abcd-matrisen:0.00,1.00
Egenvektoren til egenverdien 0 er [1, 0]

"""
```

Oppgave 3a)

Parametrisering av skjæringskurven C:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$x^2 + y^2 = 4 = 2^2$$

gir en radius på kurven 2.

$$x(t) = 2cos(t)$$

og

$$y(t) = 2sin(t)$$

z er gitt ved:

$$z = y + 3$$

, som gir

$$z(t) = y(t) + 3 = 2sin(t) + 3$$

Parametriseringen av C er da:

$$\vec{r}(t) = (2cos(t), 2sin(t), 2sin(t) + 3)$$

b)

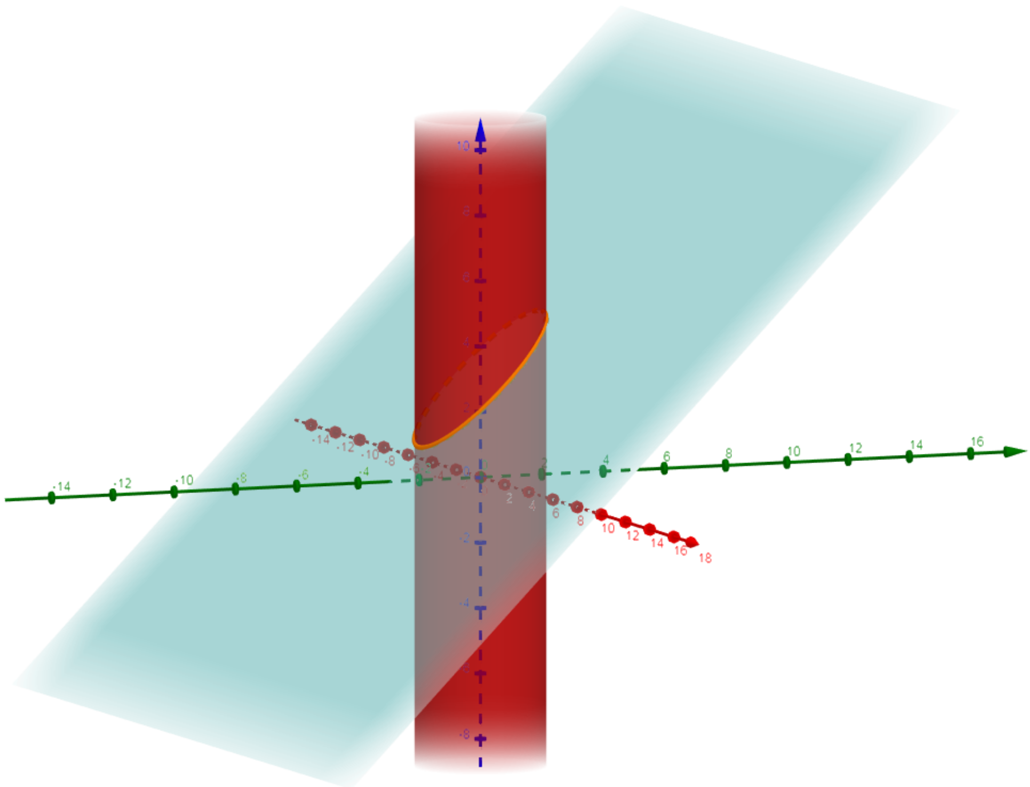
Finne linjeintegralet $\int \vec{F} * d\vec{r}$

$$\int \vec{F} {*} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) {*} \vec{r}(t) dt = \int_0^{2\pi} \left(2cos(t)\vec{i} + 2sin(t)\vec{j} + (2sin(t) + 3)\vec{k}\right) \left(-2sin(t)\vec{i} + 2cos(t)\vec{j} + 2cos(t)\vec{k}\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2sin(2t) + 6cos(t) dt = [-cos(2t) + 6sin(t)]_0^{2\pi} = -1 + 1 = 0$$

c)

Linjeintegralet til $\vec{F}$ er lik null, $\vec{F}$ er derfor konservativt.



Oppgave 4a)

Gitt $x_{n+1} = 40x_n + y_n$ og $y_{n+1} = 40y_n - x_n$ Så er $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M * \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$
fordi $\begin{bmatrix} 40 & 1 \\ -1 & 40 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40x_n + y_n \\ 40y_n - x_n \end{bmatrix}$

b)

$$\begin{vmatrix} (40-\lambda) & 1 \\ -1 & (40-\lambda) \end{vmatrix} = (40-\lambda)(40-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 80\lambda + 1601$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 4(1601)}}{2} \rightarrow \lambda_1 = 40 + i, \lambda_2 = 40 - i$$

Egenvektorer:

$$M * x = \lambda x$$
$$\lambda_1 : 40x + y = (40+i)x$$
$$-x + 40y = (40+i)y$$
$$\rightarrow y = a, x = -ai$$
$$\lambda_2 : 40x + y = (40-i)x$$
$$-x + 40y = (40-i)y$$
$$\rightarrow y = a, x = ai$$
$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} -ai \\ a \end{bmatrix}, \vec{v_2} = \begin{bmatrix} ai \\ a \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 80 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -i & i & 2 \\ 1 & 1 & 80 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 40+i \\ 0 & 1 & 40-i \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 80 \end{bmatrix} = (40+i) \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} + (40-i) \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bruker setning 4.11.1: $A^n v = \lambda^n v$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y_n \end{bmatrix} = A^{n+1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (40+i)^{n+1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (40-i)^{n+1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow y_n = (40+i)^{n+1} + (40-i)^{n+1}$$

d)

Gjør utrykket om til polarkoordinater:
r=$\sqrt{40^2 + 1^2} = \sqrt{1601}$
$y_n = r(cos(\theta) + isin(\theta)) = \left(\sqrt{1601}(cos(\theta) + isin(\theta)\right)^{n+1} + \left(\sqrt{1601}(cos(\theta) - isin(\theta)\right)^{n+1}$
$= 2\sqrt{1601}^{n+1}(cos(n+1)\theta) + isin((n+1)\theta) - isin((n+1)\theta) = 2\sqrt{1601}^{n+1}(cos((n+1)\theta)$