Symulacja ewakuacji w czasie powodzi w 2010 roku

Dagmara Krenich, Kinga Kowal, Natalia Kuchta

October 2025

1 Wprowadzenie

Celem modelu teoretycznego jest uproszczone odwzorowanie rozlewania się wody o powierzchni terenu, bazujące na zasadzie zachowania masy i różnic wysokości między sąsiednimi komórkami siatki. Model jest inspirowany podejściem stosowanym w LISFLOOD-FP, jednak w celu ograniczenia złożoności obliczeń pomija pełne równania fal płytkich (Shallow Water Equations).

2 Opis modelu

Środowisko jest reprezentowane jako siatka o wymiarach $N \times M$, gdzie każda komórka (i, j) opisuje fragment terenu o zadanej wysokości $h_{i,j}$ oraz aktualnej wysokości słupa wody $w_{i,j}$.

Poziom zwierciadła wody w komórce opisuje zależność:

$$z_{i,j} = h_{i,j} + w_{i,j} \tag{1}$$

Przepływ wody pomiędzy komórkami zależy od różnicy poziomów:

$$Q_{i,j \to m,n} = k \cdot \max(0, z_{i,j} - z_{m,n}) \tag{2}$$

gdzie k jest współczynnikiem przepływu $(0 < k < 1)$.

3 Powiązanie z równaniami fal płytkich (Shallow Water Equations)

Pełne modele hydrodynamiczne, takie jak LISFLOOD-FP, HEC-RAS czy Delft3D, opierają się na rozwiązaniu układu równań fal płytkich (ang. *Shallow Water Equations, SWE*). Równania te stanowią uproszczenie równań Naviera–Stokesa i opisują zachowanie cieczy, dla której głębokość jest znacznie mniejsza od charakterystycznego wymiaru poziomego.W dwuwymiarowej postaci równania SWE zapisuje się następująco:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial y} = R, \\ {[8pt]}\frac{\partial (hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right) + \frac{\partial (huv)}{\partial y} = -gh\frac{\partial z}{\partial x} - \tau_x, \\ {[8pt]}\frac{\partial (hv)}{\partial t} + \frac{\partial (huv)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right) = -gh\frac{\partial z}{\partial y} - \tau_y. \end{cases} \tag{3}$$

gdzie:

- $h(x, y, t)$ – głębokość wody [m],
- u, v – składowe prędkości przepływu w kierunkach x i y,
- $z(x, y)$ – wysokość powierzchni terenu,
- g – przyspieszenie ziemskie,
- R – dopływ zewnętrzny (np. opad),
- τ_x, τ_y – straty energii (tarcie, opory).

3.1 Uproszczenie zastosowane w naszym modelu

Z uwagi na złożoność obliczeniową pełnych równań SWE, w projekcie zastosowano ich uproszczoną wersję, odpowiadającą tzw. *diffusive wave approximation*. Uproszczenie to polega na:

- pominięciu członów pędu ($\partial(hu)/\partial t$, $\partial(hv)/\partial t$),
- nieuwzględnianiu bezpośrednio prędkości przepływu (u, v),
- zachowaniu jedynie bilansu masy i kierunku przepływu wyznaczanego przez gradient wysokości.

Po uproszczeniu równanie ciągłości przyjmuje postać:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla z) + R \tag{4}$$

gdzie $z = h + w$ jest poziomem zwierciadła wody, a współczynnik k pełni funkcję empirycznego współczynnika przepływu zastępującego złożone efekty prędkości i tarcia.

Modelstosuje dyskretną, iteracyjną formę tego równania na siatce komórek, przy założeniu, że woda spływa wyłącznie do sąsiadów o niższym poziomie $z_{m,n}$, z zachowaniem całkowitej masy wody w systemie.

$$Q_{i,j \to m,n} = k \cdot \max(0, z_{i,j} - z_{m,n}) \tag{5}$$

Powyższe podejście zachowuje kluczowe własności fizyczne przepływu powierzchniowego, przy znacznie niższym koszcie obliczeniowym w porównaniu z pełnym rozwiązaniem równań fal płytkich.