

BÀI TẬP 3
THỐNG KÊ MÁY TÍNH VÀ ỨNG DỤNG

Câu 1. (2.5 điểm) Dùng phương pháp Monte Carlo, ước lượng các giá trị sau với sai số chuẩn không quá 0.01.

a)

$$I = \int_{-2}^2 e^{x+x^2} dx.$$

b)

$$J = \int_0^\infty \int_0^x e^{-(x+y^2)} dy dx.$$

Câu 2. (3 điểm) Cho các $U_i (i \geq 1)$ độc lập và có phân phối $\mathcal{U}(0, 1)$. Đặt

$$N = \max_n \left\{ \prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-3} \right\}.$$

Dùng phương pháp Monte Carlo:

- a) Ước lượng $P(N = 1)$.
- b) Ước lượng $P(N \geq 10)$.
- c) Đưa ra khoảng tin cậy 95% cho $E(N)$.

Câu 3. (2.5 điểm) Cho biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn tắc $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Ước lượng $P(3 \leq X \leq 4)$ bằng các phương pháp (1) Monte Carlo “ngây thơ” dùng phân phối $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ và phương pháp lấy mẫu quan trọng với các phân phối mới lần lượt là (2) $Y \sim \mathcal{N}(1, 1)$, (3) $Y \sim \mathcal{N}(2, 1)$, (4) $Y \sim \mathcal{N}(3.5, 1)$, (5) $Y \sim \text{Exp}(1) + 3$.

- a) Ước lượng sai số của các phương pháp khi dùng cỡ mẫu là 50000.
- b) Dùng phương pháp tốt nhất trong các phương pháp trên tìm khoảng tin cậy 98% cho I .

Câu 4. (2 điểm) Dùng 2 phương pháp giảm phương sai khác nhau để ước lượng giá trị I ở Câu (1.a). Tính (hoặc ước lượng) tỉ lệ giảm phương sai so với phương pháp ở Câu (1.a).

Lưu ý:

- Trình bày bài làm (lời giải, công thức Toán, mã Python, kết quả, ...) trong tập tin notebook.
- Cần trình bày mã giả và cài đặt bằng Python các thuật toán.
- Cần kiểm tra và đánh giá kết quả chạy các thuật toán.
- Được phép dùng các hàm sinh số ngẫu nhiên từ thư viện `random` hoặc `numpy.random`.

--- HẾT ---