

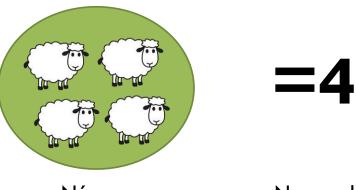
CIRCUITOS DIGITAIS SISTEMA DE NUMERAÇÃO

Marco A. Zanata Alves

Número: ideia de quantidade

Numeral: representação dessa ideia (falada ou escrita)

Na prática, usamos a palavra número para nos referirmos também a um numeral.



Número

Numeral

Exemplo: A idéia de quantidade/número cento e vinte e oito é representado pelo numeral "128"

Como representar todos os números naturais possíveis?

Um símbolo para cada número. Ex.: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, *, †, •, (...como lembrar de todos?)

Como representar todos os números naturais possíveis?

Um símbolo para cada número. Ex.: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, *, †, •, (...como lembrar de todos?)

Símbolos diferentes para algumas quantidades e **combinações** para as demais.

- Ex.: símbolos no sistema romano são I (um), V (cinco), X (dez), L (cinquenta), C (cem), D (quinhentos), M (mil).
- Combinações: II (dois), III (três), IV (quatro), MCMLXXXIV (mil novecentos e oitenta e quatro), . . .

Egyptian Hieratic Numerals

Algarismos: conjunto finito de símbolos numéricos que usamos para representar apenas algumas quantidades (não todas).

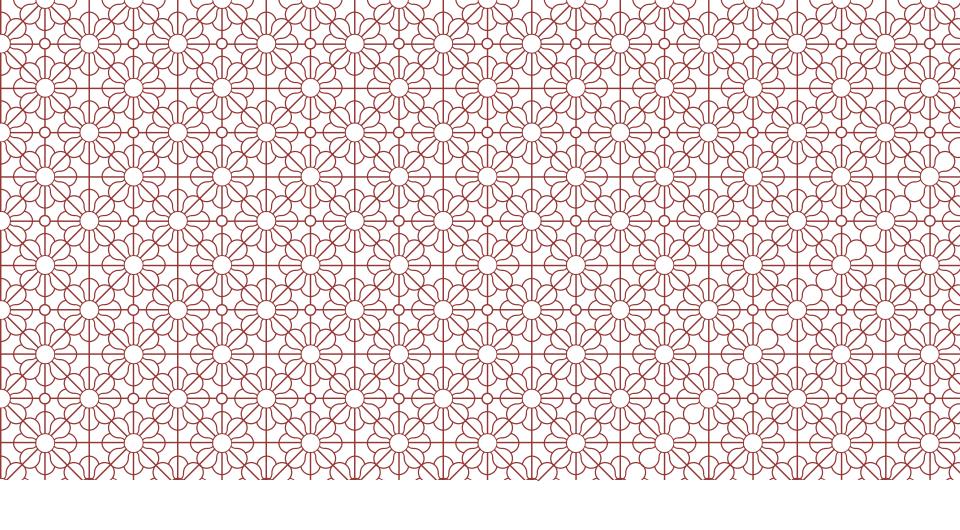
Todo e qualquer número deve poder ser representado por uma combinação de algarismos

Exemplo: os algarismos chamados indo-arábicos são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Exemplo: O numeral 128 é representado pelos algarismos 1, 2 e 8.

Sistema de numeração: forma de atribuir uma representação única para cada número.

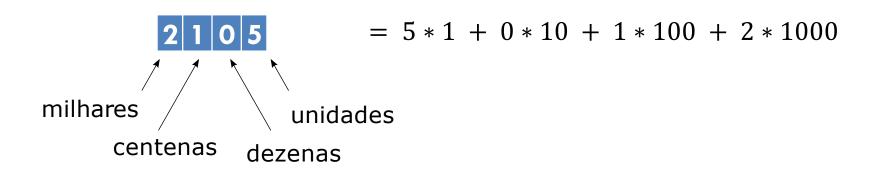
Sistema de numeração posicional: sistema de numeração onde cada número é representado por uma combinação de algarismos, onde a posição do algarismo altera a quantidade que ele representa.



Algarismos ou dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Por possuir dez algarismos distintos, é chamado **decimal**.

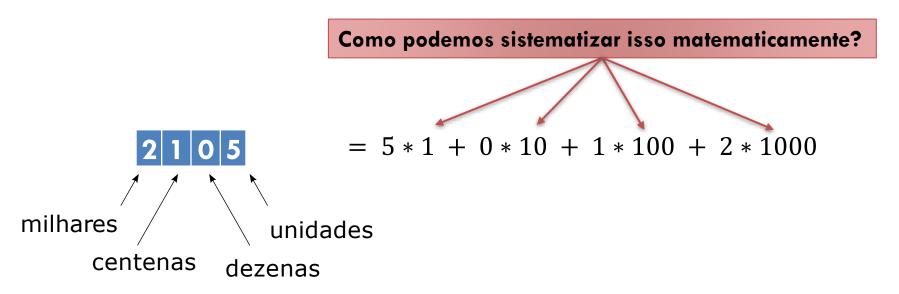
Valor absoluto de cada algarismo: a quantidade que ele representa. 0 (zero) = nada, 1 = um, etc.

Dependendo da **posição** do algarismo na representação do número, a quantidade que ele representa varia (**valor posicional** ou valor **relativo**).

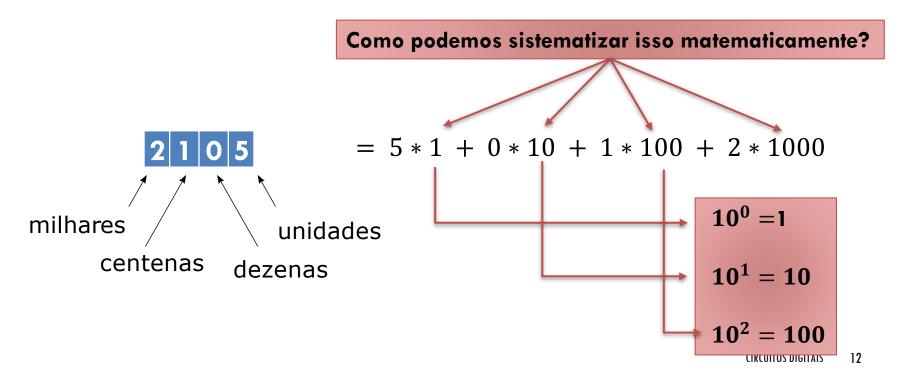




Dependendo da **posição** do algarismo na representação do número, a quantidade que ele representa varia (**valor posicional** ou valor **relativo**).



Dependendo da **posição** do algarismo na representação do número, a quantidade que ele representa varia (**valor posicional** ou valor **relativo**).



Em geral, um número inteiro A no sistema decimal é representado por \boldsymbol{n} dígitos

$$a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$$

onde cada a_i é um algarismo decimal.

Em geral, um número inteiro ${\sf A}$ no sistema decimal é representado por n dígitos

$$a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$$

onde cada a_i é um algarismo decimal.

$$a_{n-1} * 10^{n-1} + a_{n-2} * 10^{n-2} + \dots + a_2 * 100 + a_1 * 10 + a_0 * 1$$

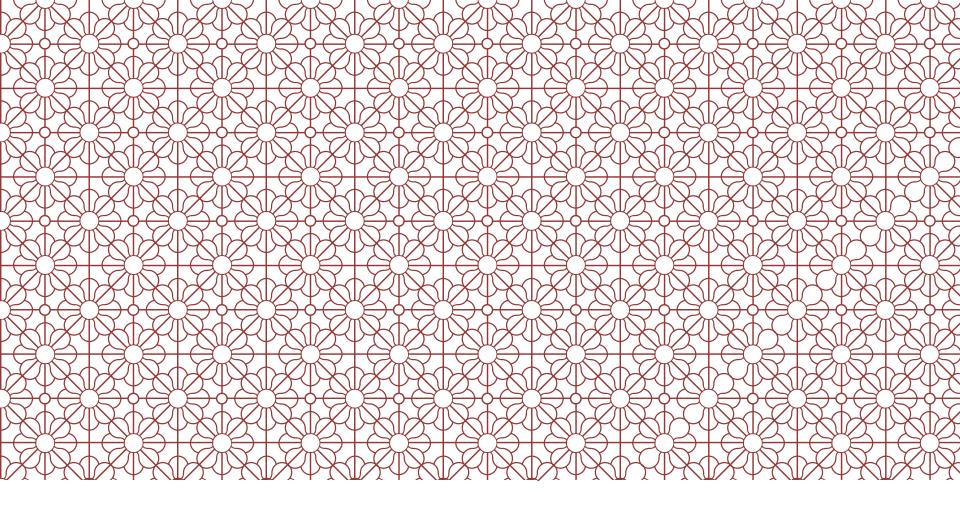
Em geral, um número inteiro A no sistema decimal é representado por n dígitos $a_{n-1} \ a_{n-2} \dots a_2 \ a_1 \ a_0$

onde cada a_i é um algarismo decimal.

$$a_{n-1} * 10^{n-1} + a_{n-2} * 10^{n-2} + \dots + a_2 * 100 + a_1 * 10 + a_0 * 1$$

ou, usando a notação sigma (somatório):

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 10^i$$



NÚMEROS QUE NÃO SÃO INTEIROS

Todo número racional pode ser representado no sistema decimal da seguinte forma:

$$a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots$$

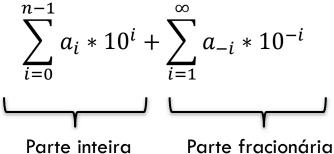
onde há um número finito de algarismos à direita da vírgula ou esses algarismos começam a se repetir a partir de uma certa posição.

Todo número racional pode ser representado no sistema decimal da seguinte forma:

$$a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$$
, $a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots$

onde há um número finito de algarismos à direita da vírgula ou esses algarismos começam a se repetir a partir de uma certa posição.

Esse numeral representa o número

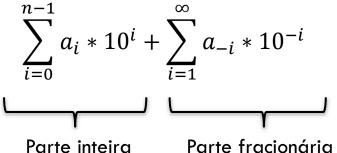


Todo número racional pode ser representado no sistema decimal da seguinte forma:

$$a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$$
, $a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots$

onde há um número finito de algarismos à direita da vírgula ou esses algarismos começam a se repetir a partir de uma certa posição.

Esse numeral representa o número



$$10^{-1} = ?$$
 $10^{-2} = ?$
 $10^{-3} = ?$

Todo número racional pode ser representado no sistema decimal da seguinte forma:

$$a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$$
, $a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots$

onde há um número finito de algarismos à direita da vírgula ou esses algarismos começam a se repetir a partir de uma certa posição.

Esse numeral representa o número

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 10^i + \sum_{i=1}^{\infty} a_{-i} * 10^{-i}$$

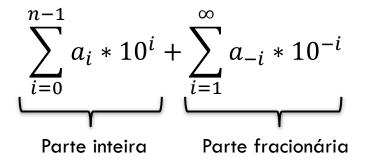
$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0,1$$
Parte inteira

Parte fracionária

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^{3}} = \frac{1}{1000} = 0,001$$



Exemplo:

12, **4533** ... =

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 10^i + \sum_{i=1}^{\infty} a_{-i} * 10^{-i}$$
Parte inteira
Parte fracionária

Exemplo:

$$12,4533 \dots = 1 * 10^1 + 2 * 10^0 +$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 10^i + \sum_{i=1}^{\infty} a_{-i} * 10^{-i}$$
Parte inteira Parte fracionária

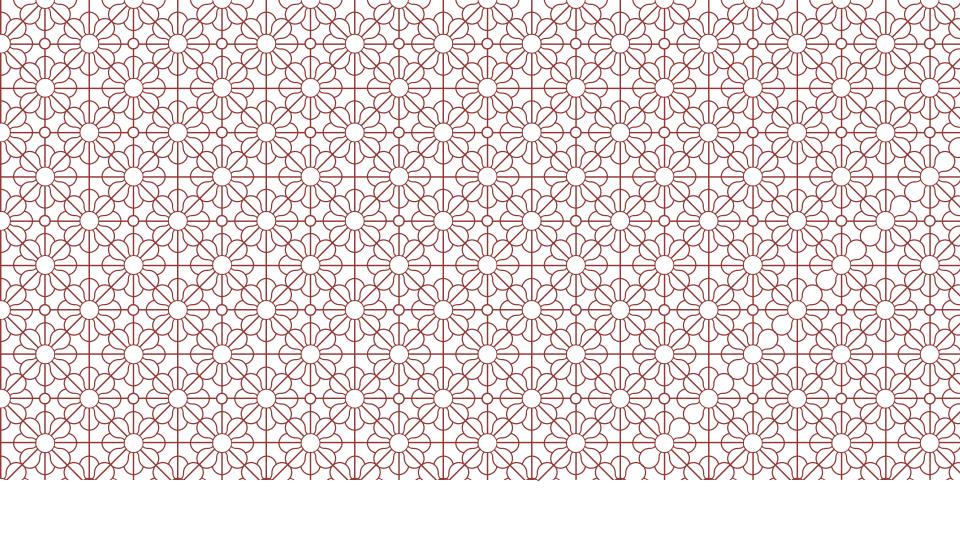
Exemplo:

12,4533 ... =
$$1 * 10^{1} + 2 * 10^{0} + 4 * 10^{-1} + 5 * 10^{-2} + 3 * 10^{-3} + 3 * 10^{-4} + \cdots$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 10^i + \sum_{i=1}^{\infty} a_{-i} * 10^{-i}$$
Parte inteira Parte fracionária

Exemplo:

12,4533 ... =
$$1 * 10^{1} + 2 * 10^{0} + 4 * 10^{-1} + 5 * 10^{-2} + 3 * 10^{-3} + 3 * 10^{-4} + \cdots + 0,4 + 0,05 + 0,003 + 0,0003 + \cdots$$



TRUNCAMENTO

$$a_{n-1} \ a_{n-2} \dots a_2 \ a_1 \ a_0$$
, $a_{-1} \ a_{-2} \ a_{-3} \dots$

Observe que à medida que caminhamos mais para a direita após a vírgula, o valor relativo de cada algarismo torna-se cada vez menor.

Podemos tomar uma representação próxima do número, **limitando o número de algarismos após a vírgula** por uma constante m.

Essa aproximação chama-se **truncamento** a m dígitos.

Ex.: represente a fração $\frac{1007}{495}$ por um numeral truncado a 4 dígitos decimais e calcule o erro de aproximação.

Ex.: represente a fração $\frac{1007}{495}$ por um numeral truncado a 4 dígitos decimais e calcule o erro de aproximação.

$$\frac{1007}{495} = 2,0343434... \approx 2,0343$$
 usando 4 dígitos após a vírgula

Ex.: represente a fração $\frac{1007}{495}$ por um numeral truncado a 4 dígitos decimais e calcule o erro de aproximação.

$$\frac{1007}{495}$$
 = 2,0343434... ≈ 2,0343 usando 4 dígitos após a vírgula

Erro de aproximação:

$$2,0343434... - 2,0343 = 0,000043434...$$

Ex.: represente a fração $\frac{1007}{495}$ por um numeral truncado a 4 dígitos decimais e calcule o erro de aproximação.

$$\frac{1007}{495} = 2,0343434... \approx 2,0343$$
 usando 4 dígitos após a vírgula

Erro de aproximação:

$$2,0343434... - 2,0343 = 0,000043434...$$

$$4 * 10^{-5} + 3 * 10^{-6} + \cdots$$



Ex.: represente a fração $\frac{1007}{495}$ por um numeral truncado a 4 dígitos decimais e calcule o erro de aproximação.

$$\frac{1007}{495} = 2,0343434... \approx 2,0343$$
 usando 4 dígitos após a vírgula

Erro de aproximação:

$$2,0343434... - 2,0343 = 0,000043434...$$

Ou seja o maior erro poderia ser $9*10^5 + 9*10^6 + 9*10^7$

Que é menor do que 10^4

$$4*10^{-5} + 3*10^{-6} + \cdots$$

Ex.: represente a fração $\frac{1007}{495}$ por um numeral truncado a 4 dígitos decimais e calcule o erro de aproximação.

$$\frac{1007}{495}$$
 = 2,0343434... ≈ 2,0343 usando 4 dígitos após a vírgula

Erro de aproximação:

$$2,0343434... - 2,0343 = 0,000043434...$$

$$Erro < 10^{-4}$$

NÚMEROS REAIS: TRUNCAMENTO

Se adotarmos uma representação finita com $m \, + \, n$ algarismos para qualquer número real

$$a_{n-1} \ a_{n-2} \dots a_2 \ a_1 \ a_0, a_{-1} \ a_{-2} \ a_{-3} \dots a_m$$

com n algarismos à esquerda da vírgula, e m algarismos à direita, **então** o erro de aproximação de qualquer número será

$$err < 10^{-m}$$

Aumentar m implica a diminuição do erro.

NÚMEROS REAIS: TRUNCAMENTO

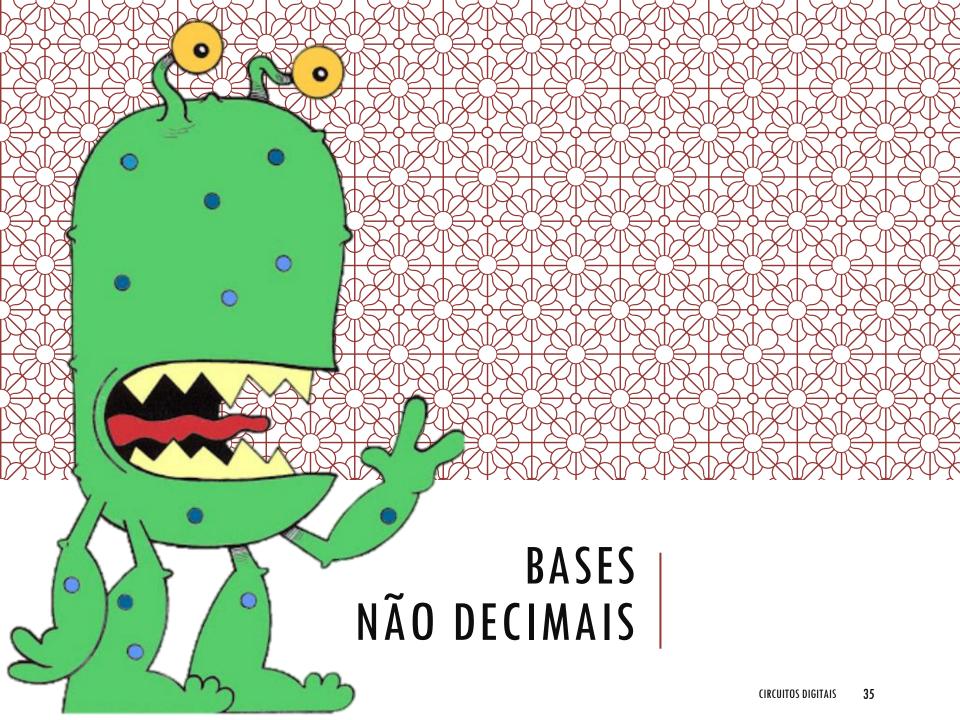
A grande maioria dos números reais que desejamos representar vêm de medidas.

Ex: comprimento, temperatura, tempo, etc.

Como toda medida possui um erro ϵ intrínseco ao processo de medição, podemos escolher m de maneira que o erro de representação seja menor do que o erro de medição.

Ou seja, escolha m tal que

$$10^{-m} < \epsilon$$
, ou seja, $m > -\log_{10} \epsilon$



BASES NÃO DECIMAIS

A quantidade de algarismos usados em um sistema de numeração posicional é chamada **base**.

Ex.: O sistema de numeração decimal é um sistema de base 10.

A base 10 tornou-se a mais popular pois possuímos 10 dedos (digitus em latim)

BASES NÃO DECIMAIS

A quantidade de algarismos usados em um sistema de numeração posicional é chamada **base**.

Ex.: O sistema de numeração decimal é um sistema de base 10.

A base 10 tornou-se a mais popular pois possuímos 10 dedos (digitus em latim)

Nada impede de construirmos sistemas de numeração posicionais com bases diferentes de 10 (se tivéssemos apenas 1 dedo em cada mão, provavelmente a base mais popular seria 2)

A base 2 também é chamada base binária.

BASES NÃO DECIMAIS

Em um sistema de numeração posicional de **base** d, o número

$$a_{n-1} \ a_{n-2} \dots a_2 \ a_1 \ a_0$$
 , $a_{-1} \ a_{-2} \ a_{-3} \dots a_m$

possui valor

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i * \underline{d}^i + \sum_{i=1}^{\infty} a_{-i} * \underline{d}^{-i}$$
Parte inteira
Parte fracionária

Para indicar a base em que um número está representado, usaremos a notação

$$(a_{n-1} \ a_{n-2} \dots a_2 \ a_1 \ a_0 \ a_{-1} \ a_{-2} \ a_{-3} \dots a_m)_d$$



Conforme o ditado:

"Existem 10 tipos de pessoas: aquelas que sabem contar em binário, e as que não sabem."

Exemplos de conversão de base:

$$(1101001)_2 = ?$$



Conforme o ditado:

"Existem 10 tipos de pessoas: aquelas que sabem contar em binário, e as que não sabem."

Exemplos de conversão de base:

$$(1101001)_2 = 1 * 2^0 + 1 * 2^3 + 1 * 2^5 + 1 * 2^6 = 105$$

 $(110,1001)_2 = ?$



Conforme o ditado:

"Existem 10 tipos de pessoas: aquelas que sabem contar em binário, e as que não sabem."

Exemplos de conversão de base:

$$(1101001)_2 = 1 * 2^0 + 1 * 2^3 + 1 * 2^5 + 1 * 2^6 = 105$$

 $(110,1001)_2 = 1 * 2^{-4} + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 = 6,5625$
 $(1101001)_8 = ?$



Conforme o ditado:

"Existem 10 tipos de pessoas: aquelas que sabem contar em binário, e as que não sabem."

Exemplos de conversão de base:

$$(1101001)_2 = 1 * 2^0 + 1 * 2^3 + 1 * 2^5 + 1 * 2^6 = 105$$

 $(110,1001)_2 = 1 * 2^{-4} + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 = 6,5625$
 $(1101001)_8 = 1 * 8^0 + 1 * 8^3 + 1 * 8^5 + 1 * 8^6 = 295425$
 $(B, EEF)_{16} = ?$

Obs.: valor absoluto dos algarismos na base 16:

Conforme o ditado:

"Existem 10 tipos de pessoas: aquelas que sabem contar em binário, e as que não sabem."

Exemplos de conversão de base:

$$(1101001)_2 = 1 * 2^0 + 1 * 2^3 + 1 * 2^5 + 1 * 2^6 = 105$$

$$(110,1001)_2 = 1 * 2^{-4} + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 = 6,5625$$

$$(1101001)_8 = 1 * 8^0 + 1 * 8^3 + 1 * 8^5 + 1 * 8^6 = 295425$$

$$(B, EEF)_{16} = 11 * 16^0 + 14 * 16^{-1} + 14 * 16^{-2} + 15 * 16^{-3} = 11,933349609$$

Obs.: valor absoluto dos algarismos na base 16:

Conforme o ditado:

"Existem 10 tipos de pessoas: aquelas que sabem contar em binário, e as que não sabem."

Exemplos de conversão de base:

$$(1101001)_2 = 1 * 2^0 + 1 * 2^3 + 1 * 2^5 + 1 * 2^6 = 105$$

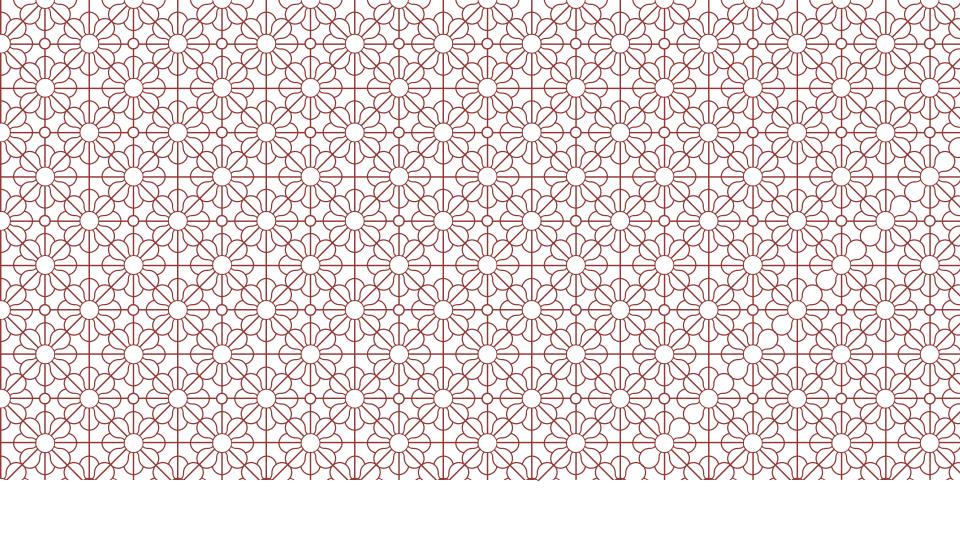
$$(110,1001)_2 = 1 * 2^{-4} + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 = 6,5625$$

$$(1101001)_8 = 1 * 8^0 + 1 * 8^3 + 1 * 8^5 + 1 * 8^6 = 295425$$

$$(B, EEF)_{16} = 11 * 16^0 + 14 * 16^{-1} + 14 * 16^{-2} + 15 * 16^{-3} = 11,933349609$$

Obs.: valor absoluto dos algarismos na base 16:

Note que as conversões de base d para base 10 são triviais!



CONVERSÃO DE BASES

45

Vamos começar com os números inteiros.

Ex: represente os números $(0)_{10}$, $(1)_{10}$, $(2)_{10}$ e $(3)_{10}$ na base 2.

Vamos começar com os números inteiros.

Ex: represente os números $(0)_{10}$, $(1)_{10}$, $(2)_{10}$ e $(3)_{10}$ na base 2.

Muito fáceis: $(0)_{10} = 0_2$, $(1)_{10} = 1_2$

Não existe nenhum **algarismo** para representar $(2)_{10}$ e $(3)_{10}$ na base 2.

Vamos começar com os números inteiros.

Ex: represente os números $(0)_{10}$, $(1)_{10}$, $(2)_{10}$ e $(3)_{10}$ na base 2.

Muito fáceis: $(0)_{10} = 0_2$, $(1)_{10} = 1_2$

Não existe nenhum **algarismo** para representar $(2)_{10}$ e $(3)_{10}$ na base 2.

Portanto, $(3)_{10}$ deve ser representado como $(a_1 a_0)_2$

 a_0 = unidades, a_1 = quantas vezes 2^1 cabe em 3

Vamos começar com os números inteiros.

Ex: represente os números $(0)_{10}$, $(1)_{10}$, $(2)_{10}$ e $(3)_{10}$ na base 2.

Muito fáceis:
$$(0)_{10} = 0_2$$
, $(1)_{10} = 1_2$

Não existe nenhum **algarismo** para representar $(2)_{10}$ e $(3)_{10}$ na base 2.

Portanto, $(3)_{10}$ deve ser representado como $(a_1 a_0)_2$

 a_0 = unidades, a_1 = quantas vezes 2^1 cabe em 3

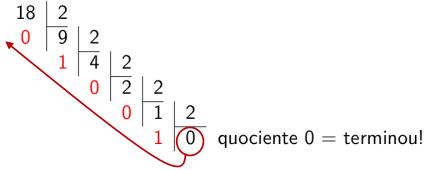
$$\begin{array}{c|c}
3 & 2 \\
1 & 1 \\
\hline
(3)_{10} = (11)_2
\end{array}$$

Converter 18 da base 10 para a base 2.

Vamos fazer sucessivas divisões entre o **quociente** e 2 (base)... Até o quociente ser menor que 2 (base)

Converter 18 da base 10 para a base 2.

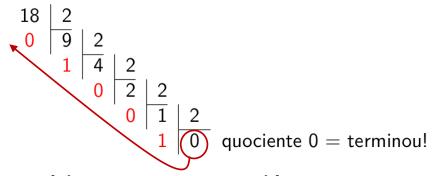
Vamos fazer sucessivas divisões entre o **quociente** e 2 (base)... Até o quociente ser menor que 2 (base)



leia os restos neste sentido

Converter 18 da base 10 para a base 2.

Vamos fazer sucessivas divisões entre o **quociente** e 2 (base)... Até o quociente ser menor que 2 (base)



leia os restos neste sentido

$$(18)_{10} = (010010)_2$$



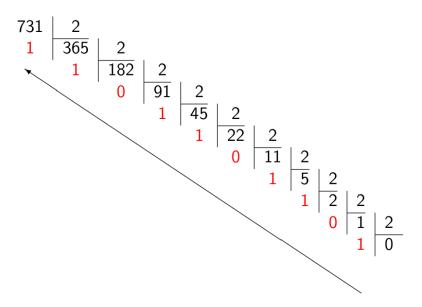
$$(731)_{10} = ($$

$$(1)_2$$

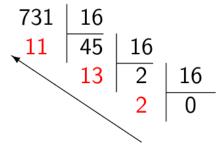
$$(731)_{10} = (11)_2$$

$$(11)_2$$

$$(731)_{10} = (1011011011)_2$$







Converter 731 da base 10 para a base 16.

Observe que $(11)_{10} = (B)_{16}$ e que $(13)_{10} = (D)_{16}$, logo:

$$(731)_{10} = (2DB)_{16}$$

Base 10	Base 16
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	В
12	С
13	D
14	Е
15	F

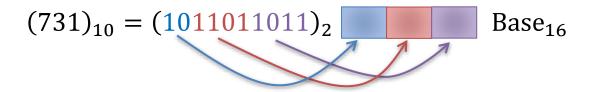
$$(18)_{10} = (10010)_2$$

 $(731)_{10} = (1011011011)_2$

Observação 1:

- Se um número é par, na base 2 o seu último algarismo é sempre 0
- Se um número é ímpar, na base 2 o seu último algarismo é sempre 1

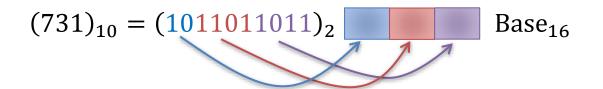
Observação 2: é muito fácil converter da base 2 para 16 e vice-versa!



$$(50F1A)_{16} = (???)_2$$



Observação 2: é muito fácil converter da base 2 para 1



$$(50F1A)_{16} = (???)_2$$

Base 2	Base 16
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	В
1100	С
1101	D
1110	E
1111	F

Observação 2: é muito fácil converter da base 2 para 16 e vice-versa!

$$(731)_{10} = (1011011011)_2$$

$$(50F1A)_{16} = (???)_2$$

 $(50F1A)_{16} = (0101\ 0000\ 1111\ 0001\ 1010)_2$

Note que a conversão entre as bases octal ← → binária também é trivial.

Quais outras bases são triviais? Porque?