Clases de complejidad
Actividad 5

Dagoberto Quevedo

26 de febrero de 2020

Resumen

Es posible definir diferentes tipos de clases de complejidad computacional. Los requisitos para definir una clase son: (I) fijar un modelo de computación (es decir, qué tipo de máquina Turing se utiliza), (II) la modalidad de computación: determinista, no determinista, etc. (III) el recurso el uso del cual se controla por la definición: tiempo, espacio, etc., (IV) la cota que se impone al recurso (es decir, una función f correcta de complejidad) [1].

Formalmente, una clase de complejidad es el conjunto de todos los lenguajes decididos por alguna máquina Turing M del tipo I que opera en el modo de operación de II tal que para todo entrada x, M necesita al máximo $f(|x|)$ unidades del recurso definido en III, donde f es la función de IV.

1. Ejercicio A - Cobertura de vértices

Dado un grafo no dirigido (V, E), una cobertura de vértices es un subconjunto $W \subseteq V$, tal que para cada $(v, w) \in E$ se tiene $v, w \in W$, se considera el siguiente problema de decisión:

- Instancia: grafo no dirigido $G = (V, E)$, y un entero k
- Pregunta: ¿G tiene una cobertura de vértices W de a lo más k vértices?

1.1. Demostración de NP

Para demostrar que el problema es de la clase NP, es necesario demostrar que una instancia se puede verificar en tiempo polinomial. Para ello se define el siguiente algoritmo que computa la verificación,

$c \leftarrow 0$
$r \leftarrow 0$
for $v \in W \wedge E = \varnothing$ **do**
  $q \leftarrow (u, v) \in E, u \in V$
  $E \leftarrow E \setminus q$
  $c \leftarrow c + 1$
  if $c = k$ **then**
    $r \leftarrow 1$
  end if
end for

El algoritmo retorna la variable booleana r, que describe es 1 si la instancia es validad para las condiciones dadas 0 en otro caso. El peor caso para el cual se puede enfrentar este algoritmo es del orden $\mathcal{O}(n)$.

1.2. Reducción desde el problema del conjunto independiente que cobertura de vértices es NP

El problema del conjunto independiente considera el siguiente problema de decisión:

- Instancia: grafo no dirigido $G = (V, E)$, y un entero k
- Pregunta: ¿G tiene un conjunto independiente S de tamaño mayor o igual a k?

Por lo anterior la demostración de reducción es la siguiente

- $V - S$ es una cobertura de vértices,
- Si S es un conjunto independiente, este no tiene arista $(u, v) \in E$, tal que $u, v \in S$, por lo tanto toda arista $(u, v) \in E$, al menos un vértice u, v no tendria que estar en $V - S$, entonces $V - S$ es una cobertura de vértices.
- Si $V - S$ es una cobertura de vértices, $u, v \in S, (u, v) \in E$ tal que ninguno de los vértices exista en $V - S$, por lo tanto ninguna par de vértices en S puede estar conectado por una arista, asé que S es un conjunto independiente en G.
- G contiene un conjunto independiente de tamaño k, por lo tanto G contiene una cobertura de vértices de tamaño $|V| - k$

Referencias

[1] Elisa Schaeffer, *Modelos computacionales*, Complejidad computacional de problemas y el análisis y diseño de algoritmos, notas de curso, 2020.