עבודה 2: אלגוריתמים חמדניים ו- MST

<u>תאריך הגשה:</u> 14 באפריל, 11:59.

<u>מתרגל אחראי:</u> פנינה נסים

<u>הערות:</u>

א. כל עוד לא נאמר אחרת, כאשר הנכם מתבקשים לתאר אלגוריתם יש לספק:

1) תיאור מילולי של האלגוריתם.

2) הוכחת נכונות.

3) ניתוח זמן ריצה.

ב. פתרון יש לרשום בדף התשובות הנלווה לעבודה.

ג. אלגוריתם עם זמן ריצה אקספוניציאלי לא יתקבל.

ד. בכל שימוש במשפט שהוכח בכיתה יש לציין את המשפט באופן מדויק.

שאלה 1

שאלה זו תעסוק בבעית כיסוי מספרים.

<u>מופע</u>: קבוצה של מספרים ממשיים $N = \{n_1, \dots, n_n\}$.

<u>פתרון חוקי:</u> קבוצת קטעים (סגורים) באורך 1, $I = \{I_1, \dots, I_k\}$ המכסים את קבוצת הנקודות N, כלומר לכל נקודה $n_i \in N$ קיים קטע $I_j \in I$ כך ש- $n_i \in I_j$.

<u>צריך למצוא:</u> פתרון חוקי מינימלי בגודלו.

<u>סעיף א</u>

נתון האלגוריתם החמדן הבא:

1. $N = \{n_1, \dots, n_n\}$, $I = \emptyset$, $i = 0$
2. כל עוד $N \neq \emptyset$ בצע:
   2.1. מצא קטע I_i באורך 1 המכסה מספר רב ביותר של נקודות ב- N. נסמן את תת הקבוצה של נקודות אלו ב- N_i
   2.2. $I \leftarrow I \cup \{I_i\}$
   2.3. $N \leftarrow N \backslash \{N_i\}$
   2.4. $i \leftarrow i + 1$
3. החזר את I

תנו דוגמא למופע לבעיה הנ"ל עבורו האלגוריתם הנתון לא מוצא פתרון אופטימלי. הסבירו בקצרה מדוע האלגוריתם יכשל.

<u>סעיף ב</u>

תארו אלגוריתם **<u>חמדן</u>** לבעיה הנתונה. הוכיחו את האלגוריתם על פי סכמת ההוכחה המומלצת שנלמדה בכיתה, ונתחו את זמן הריצה. ניתן להניח כי כל מספר $n_i \in N$ מיוצג ע"י מספר קבוע של ביטים.

שאלה 2

שאלה זו תעסוק בבעיה של הקצאת גנראטורים:

<u>**מופע**</u>: n גנראטורים - $\mathrm{G}=\{x_1,x_2,\dots.,x_n\}$ ולכל אחד מוצמד מספר טבעי $e(x_i)$ המתאר את עוצמת האנרגיה שהגנראטור x_i מספק. לפניכם מספר רב של מכונות זהות, כמות האנרגיה הנדרשת להפעלה מכונה הינה $P\in\mathbb{N}$. לצורך הפעלת מכונה נדרש לחבר **בדיוק שני גנראטורים**, <u>כל גנראטור יכול להיות מחובר לכל היותר למכונה אחת</u>. כמובן ששני הגנראטורים חייבים לספק כמות מספקת של אנרגיה, כלומר אם החלטתם לצוות את x_i ו-x_j למכונה מוכרח להתקיים כי $e(x_i)+e(x_j)\geq P$.

<u>**פתרון חוקי**</u>: ציוות של גנראטורים בזוגות, כך שכל זוג זר לזוגות האחרים ומספק מספיק אנרגיה להפעיל מכונה יחידה. **אין הכרח לצוות את כל הגנראטורים**.

<u>**צריך למצוא**</u>: פתרון חוקי עם מספר זוגות גדול ביותר.

דוגמא:

$\mathrm{G}=\{x_1,\dots,x_5\}$
$e(x_1)=5,e(x_2)=3,e(x_3)=2,e(x_4)=4,e(x_5)=1$
$P=7$

פתרון חוקי: $\{(x_2,x_4)\}$.
פתרון אופטימאלי: $\{(x_1,x_3),(x_2,x_4)\}$.

יהא x_s גנראטור בעל עוצמת אנרגיה חזקה ביותר ב-G ויהא x_w גנראטור בעל עוצמת אנרגיה חלשה ביותר ב-G.

<u>**סעיף א**</u>

הוכיחו את הטענה (טענונת...) הבאה:
אם $e(x_s)+e(x_w)<P$ לא קיים פתרון חוקי המצוות את x_w.

<u>**סעיף ב**</u>

הוכיחו את הטענה הבאה:
נניח $e(x_s)+e(x_w)\geq P$ ויהא Sol_1 פתרון חוקי כך ש- $(x_s,x_w)\notin Sol_1$ אזי בהכרח קיים פתרון חוקי Sol_2 כך $(x_s,x_w)\in Sol_2$ ומתקיים: $|Sol_2|\geq|\mathrm{Sol}_1|$.

הדרכה: הבדילו בין מצב בו שני הגנראטורים מצוותים ב-Sol_1 אך לא יחד לבין מצב בו רק אחד מהם מצוות. האם ייתכנו אפשרויות נוספות? בצעו בנייה של Sol_2 המתבסס על הפיתרון הנתון Sol_1.

<u>**סעיף ג**</u>

תארו אלגוריתם <u>**חמדן**</u> לבעיית הגנראטורים בהתבסס על הטענות לעיל.
הוכיחו את האלגוריתם על פי סכמת ההוכחה המומלצת שנלמדה בכיתה.
לנוחיותכם, השתמשו בסימונים הבאים:

- G_{i-1} - הזוגות שהאלגוריתם ציוות עד האיטרציה ה - (i-1).
- G_i - הזוגות שהאלגוריתם ציוות עד האיטרציה ה - i.
- Sol_1 - פיתרון אופטימאלי אשר על פי הנחת האינדוקציה מכיל את G_{i-1}.
- (x_k,x_j) - הזוג שהאלגוריתם מצוות באיטרציה ה - i.

שאלה 3

יהא $G = (V, E)$ גרף קשיר, לא מכוון וממושקל. תהי $w: E \to \mathbb{R}^+$ פונקצית המשקל על קשתות הגרף.
נתונים T עפ"מ של G ו- $e \in E$ קשת בגרף.

<u>סעיף א:</u>
הוכיחו כי אם קיים ב G מעגל C בו e קשת כבדה ממש אז לא קיים עפ"מ של G המכיל את e.

<u>סעיף ב:</u>
תארו אלגוריתם ליניארי המכריע האם קיים עפ"מ כלשהו של G המכיל את e. השתמשו (גם) בסעיף א' לצורך הוכחת נכונותו. יש לנתח זמן ריצה.

שאלה 4

בשאלה זו נעסוק במימוש יעיל יותר של האלגוריתם של Prim למציאת עפ"מ של גרף לא מכוון $G = (V, E)$.

יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון וקשיר. נגדיר לכל $v \notin S$ שני שדות:
- $key(v)$ – משקל קשת (u, v) קלה בחתך, $u \in S$, $v \in V \setminus S$.
  כלומר, $key(v) = \min\{w(u, v) | u \in S, v \in V \setminus S\}$. אם לא קיים u כנ"ל אז $key(v) = \infty$.
- $\pi(v)$ – שכן u של v, $u \in S$, המחובר לקשת קלה בחתך. $key(v) = w(\pi(v), v)$

תיאור האלגוריתם:

נגדיר פעולה <u>$DecreaseKey(u, v)$</u>:
- אם $u \notin S$ וגם $key(u) > w(u, v)$:
  - $\pi(u) = v$
  - $key(u) = w(u, v)$

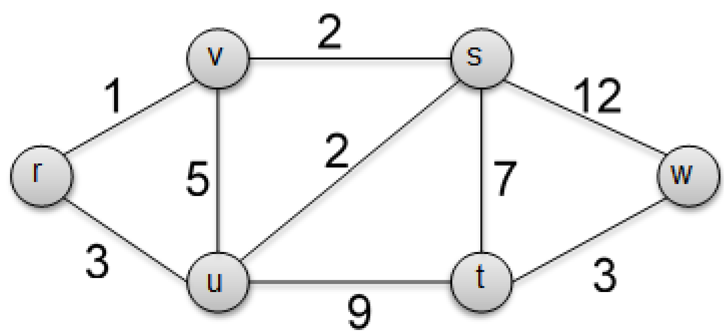
<u>האלגוריתם</u>:
אתחול:
- לכל $v \in V$: $key(v) = \infty$, $\pi(v) = Nil$.
- בחר $r \in V$ כלשהו, $key(r) = 0$.
- הכנס את כל הצמתים לערימת המינימום Q לפי המפתח $key(v)$. , $S \leftarrow \emptyset$, $B \leftarrow \emptyset$.

צעד: כל עוד $|B| < |V| - 1$ בצע:
- $v \leftarrow ExtractMin(Q)$
- $S \leftarrow S \cup \{v\}$
- אם $v \neq r$, $B \leftarrow B \cup \{(\pi(v), v)\}$
- לכל u שכן של v בצע $DecreaseKey(u, v)$

סיום: החזר $T = (V, B)$

<u>סעיף א</u>

הריצו את האלגוריתם על הגרף הבא וציירו במשבצת הריקה שבדף התשובות את העץ שהתקבל בסיום הריצה. התחילו את הריצה מהקדקוד r.



<u>סעיף ב</u>

הוכיחו כי במהלך ריצת האלגוריתם לכל $v \in V$ הערך $key(v)$ יכול רק לרדת.

<u>סעיף ג</u>

הוכיחו כי בכל שלב בלולאה מתווספת ל- B קשת קלה ביותר בחתך $(S, V\backslash S)$. הסיקו מכך את נכונות האלגוריתם.

<u>סעיף ד</u>

נתון מבנה נתונים Q הנקרא ערימת פיבונאצ'י (ערימת מינימום).
במבנה זה נתון כי

- פעולת $ExtractMin(Q)$ אורכת $O(\log|Q|)$.
- n פעולות של $DecreaseKey(u, v)$ אורכות בניתוח פחת $O(n)$.

השתמשו במבנה זה לצורך ניתוח זמן הריצה של האלגוריתם והגיעו למסקנה שזמן זה הינו $O(|E| + |V| \cdot \log|V|)$