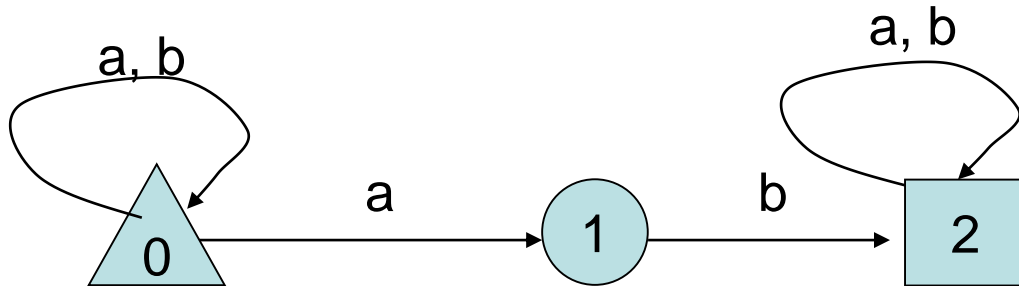


**L3 – MIASHS 2021 2022**  
**Parcours Informatique**  
**UE MIC0602T**

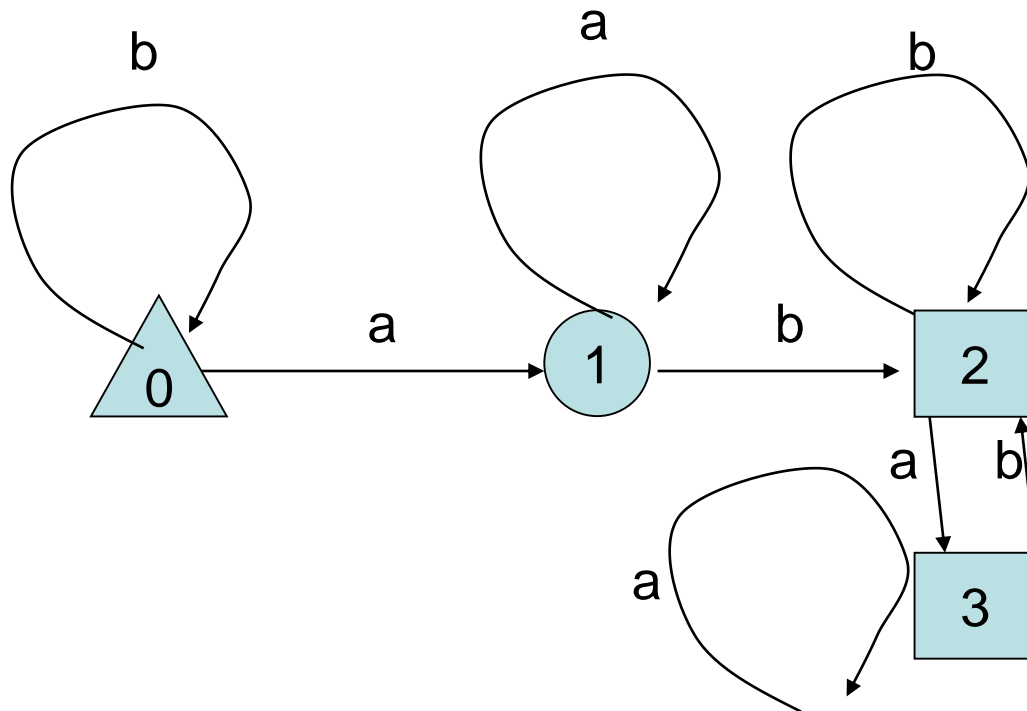
**TD 2 – Automates – Solutions**

**Pierre-Jean Charrel – Sophie Ebersold**

1. (a)



	V	a	b
Q			
0		0,1	0
1		<u>2</u>	<u>2</u>
<u>2</u>		<u>2</u>	<u>2</u>



	V	a	b
Q			
0	<u>0</u>	0,1	0
0, 1	<u>1</u>	0,1	<u>0, 2</u>
<u>0, 2</u>	<u>2</u>	<u>0, 1, 2</u>	<u>0, 2</u>
<u>0, 1, 2</u>	<u>3</u>	<u>0,1, 2</u>	<u>0, 2</u>

Renumérotation des états du  
nouvel automate

$\Sigma$	a	b
Q		
0	1	0
1	1	<u>2</u>
<u>2</u>	<u>3</u>	<u>2</u>
<u>3</u>	<u>3</u>	<u>2</u>

( d)

Classe des états non terminaux

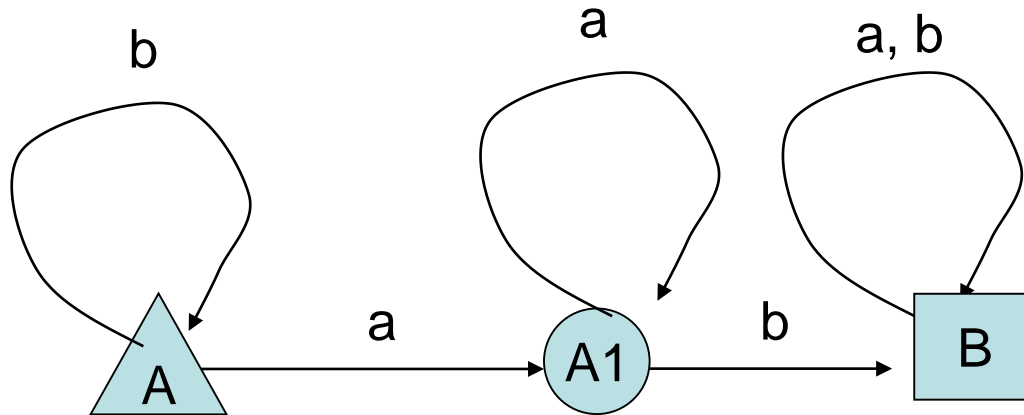
$A = \{0, 1\}$

Classe des états terminaux

$B = \{2, 3\}$

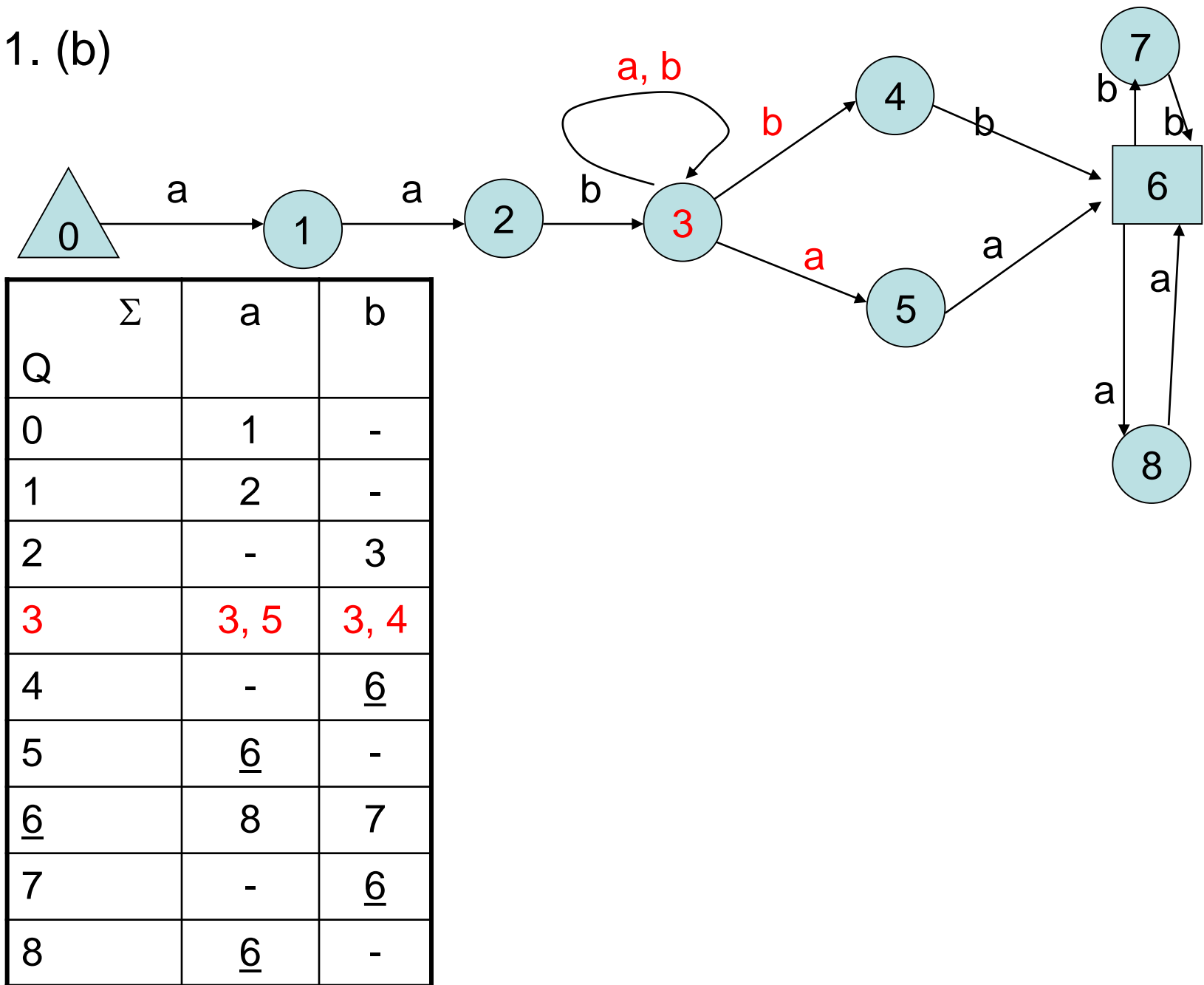
A est séparable par "b", qui envoie 0 sur un non terminal et 1 sur un terminal  
2 et 3 ne sont pas séparables : ils envoient l'automate sur un état terminal  
avec "a" et "b"

## Expression régulière : $b^*aa^*b(a+b)^*$



Q \ V	a	b
A	A1	A
A1	A1	<u>B</u>
<u>B</u>	<u>B</u>	<u>B</u>

1. (b)



	$\Sigma$	a	b
Q			
0		1	-
1		2	-
2		-	3
3		3, 5	3, 4
4		-	<u>6</u>
5		<u>6</u>	-
<u>6</u>		8	7
7		-	<u>6</u>
8		<u>6</u>	-

indéterminations

	V	a	b
Q			
0	0	1	1
1	1	2	2
2	2		3
3	3	3, 5	4
3, 5	4	3, 5, <u>6</u>	<u>6</u>
3, 4	5	3, 5	4
3, 5, <u>6</u>	<u>6</u>	3, 5, <u>6</u> , 8	<u>8</u>
<u>3</u> , 4, <u>6</u>	<u>7</u>	3, 5, 8	10
3, 5, <u>6</u> , 8	<u>8</u>	3, 5, <u>6</u> , 8	<u>8</u>
3, 4, 7	9	3, 5	4
3, 5, 8	10	3, 5, <u>6</u>	<u>6</u>
3, 4, <u>6</u> , 7	<u>11</u>	3, 5, 8	10

renumération

Q	V	a	b
0	0	1 1	puits
1	1	2 2	puits
2	2	puits	3 3
3	3	3, 5 4	3, 4 5
3, 5	4	3, 5, <u>6</u> <u>6</u>	3, 4 5
3, 4	5	3, 5 4	3, 4, <u>6</u> <u>7</u>
3, 5, <u>6</u> <u>6</u>		3, 5, <u>6</u> , 8 <u>8</u>	3, 4, 7 9
<u>3</u> , 4, <u>6</u> <u>7</u>		3, 5, 8 10	3, 4, <u>6</u> , 7 <u>11</u>
3, 5, <u>6</u> , 8 <u>8</u>		3, 5, <u>6</u> , 8 <u>8</u>	3, 4, 7 9
3, 4, 7 9		3, 5 4	3, 4, <u>6</u> <u>7</u>
3, 5, 8 10		3, 5, <u>6</u> <u>6</u>	3, 4 5
3, 4, <u>6</u> , 7 <u>11</u>		3, 5, 8 10	3, 4, <u>6</u> , 7 <u>11</u>

( d )

Classe des états non terminaux

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10\}$

Classe des états terminaux

$B = \{6, 7, 8, 11\}$

7 est séparable de 6 par "a"

11 est séparable de 6 par "a"

6 et 8 ne sont pas séparables

$B = \{6, 8\}$

$B_1 = \{7\}$

$B_2 = \{11\}$

7 et 11 ont le même

comportement donc sont

regroupés en

$B_1 = \{7, 11\}$

Q	V	a	b
0	0	1 1	puits
1	1	2 2	puits
2	2	puits	3 3
3	3	3, 5 4	3, 4 5
3, 5	4	3, 5, <u>6</u> <u>6</u>	3, 4 5
3, 4	5	3, 5 4	3, 4, <u>6</u> <u>7</u>
3, 5, <u>6</u> <u>6</u>		3, 5, <u>6</u> , 8 <u>8</u>	3, 4, 7 9
<u>3</u> , 4, <u>6</u> <u>7</u>		3, 5, 8 10	3, 4, <u>6</u> , 7 <u>11</u>
3, 5, <u>6</u> , 8 <u>8</u>		3, 5, <u>6</u> , 8 <u>8</u>	3, 4, 7 9
3, 4, 7 9		3, 5 4	3, 4, <u>6</u> <u>7</u>
3, 5, 8 10		3, 5, <u>6</u> <u>6</u>	3, 4 5
3, 4, <u>6</u> , 7 <u>11</u>		3, 5, 8 10	3, 4, <u>6</u> , 7 <u>11</u>

( d )

Classe des états non terminaux

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10\}$

2 séparable de 0 par "a" (et "b")

1 est séparable de 0 "a" (et "b")

3 est séparable de 0 par « b »

4 est séparable de 0 par « b »

5 est séparable de 0 par "a"

9 est séparable de 0 par « b »

10 est séparable de 0 par "a"

$A = \{0\}$

$A_1 = \{ 1 \}$

$A_2 = \{ 2 \}$

$A_3 = \{ 3 \}$

$A_4 = \{ 4 \}$

$A_5 = \{ 5 \}$

$A_6 = \{ 9 \}$

$A_7 = \{ 10 \}$

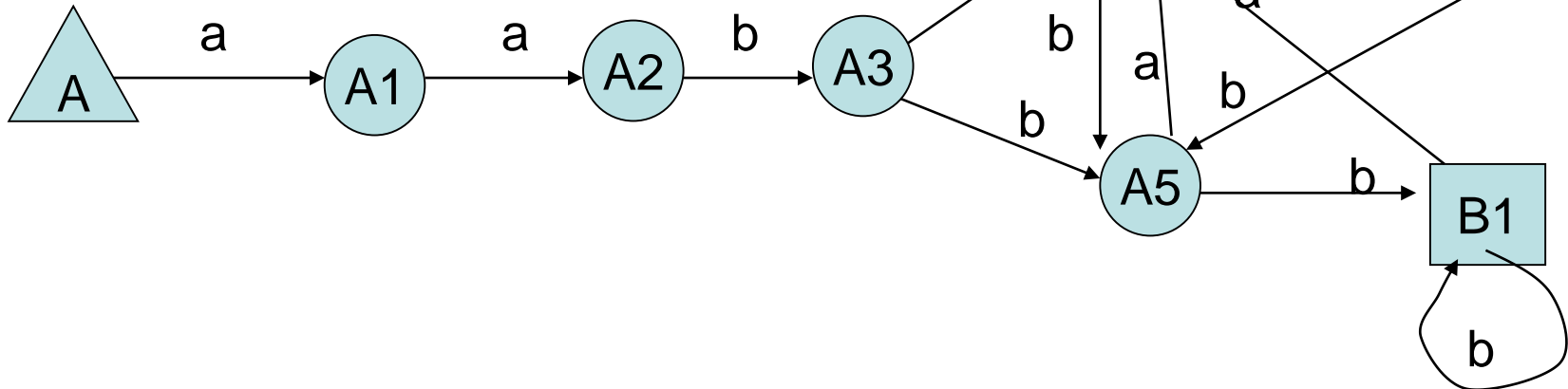
A5 et A6 ont le même comportement,  
regroupés en  $A_5 = \{ 5, 9 \}$

A4 et A7 ont le même comportement,  
regroupés en  $A_4 = \{ 4, 10 \}$

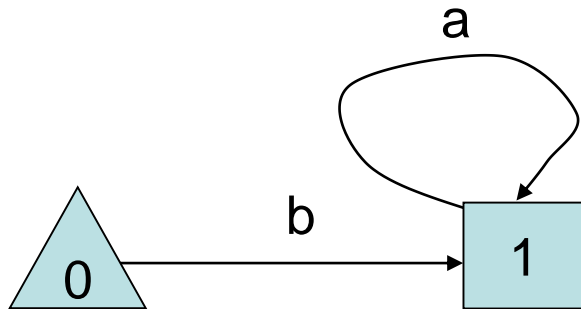


**l'automate est minimal**

	V	a	b
Q			
A		A1	puits
A1		A2	puits
A2		puits	A3
A3		A4	A5
A4		<u>B</u>	A5
A5		A4	<u>B1</u>
<u>B</u>		<u>B</u>	A5
<u>B1</u>		A4	<u>B1</u>



1. (c)



	$\Sigma$	a	b
Q			
0		-	<u>1</u>
<u>1</u>		<u>1</u>	-

(d)

L'automate est déterministe et minimal :

- aucune source d'indétermination
- une seule état par classe

Exercice 2 : Déterminer automate p. 95 et 96 du support de cours - Détermination

V		a		b		c	
Q							
0	0	1	0, 1	2	0, 2	3	0, 3
1	0, 1	<u>4</u>	<u>0, 1, 4</u>	5	0, 1, 2	6	0, 1, 3
2	0, 2	5	0, 1, 2	<u>7</u>	<u>0, 2, 4</u>	8	0, 2, 3
3	0, 3	6	0, 1, 3	8	0, 2, 3	<u>9</u>	<u>0, 3, 4</u>
<u>4</u>	<u>0, 1, 4</u>	<u>4</u>	<u>0, 1, 4</u>	5	0, 1, 2	6	0, 1, 3
5	0, 1, 2	<u>10</u>	<u>0, 1, 2, 4</u>	<u>10</u>	<u>0, 1, 2, 4</u>	11	0, 1, 2, 3
6	0, 1, 3	<u>12</u>	<u>0, 1, 3, 4</u>	11	0, 1, 2, 3	<u>12</u>	<u>0, 1, 3, 4</u>
<u>7</u>	<u>0, 2, 4</u>	5	0, 1, 2	<u>7</u>	<u>0, 2, 4</u>	8	0, 2, 3
8	0, 2, 3	11	0, 1, 2, 3	<u>13</u>	<u>0, 2, 3, 4</u>	<u>13</u>	<u>0, 2, 3, 4</u>
<u>9</u>	<u>0, 3, 4</u>	6	0, 1, 3	8	0, 2, 3	<u>9</u>	<u>0, 3, 4</u>
<u>10</u>	<u>0, 1, 2, 4</u>	<u>10</u>	<u>0, 1, 2, 4</u>	11	0, 1, 2, 3	11	0, 1, 2, 3
11	0, 1, 2, 3	14	<u>0, 1, 2, 3, 4</u>	<u>14</u>	<u>0, 1, 2, 3, 4</u>	<u>14</u>	<u>0, 1, 2, 3, 4</u>
<u>12</u>	<u>0, 1, 3, 4</u>	<u>12</u>	<u>0, 1, 3, 4</u>	11	0, 1, 2, 3	<u>12</u>	<u>0, 1, 3, 4</u>
<u>13</u>	<u>0, 2, 3, 4</u>	11	0, 1, 2, 3	<u>13</u>	<u>0, 2, 3, 4</u>	<u>13</u>	<u>0, 2, 3, 4</u>
<u>14</u>	<u>0, 1, 2, 3, 4</u>	<u>14</u>	<u>0, 1, 2, 3, 4</u>	<u>14</u>	<u>0, 1, 2, 3, 4</u>	<u>14</u>	<u>0, 1, 2, 3, 4</u>

## Minimisation

Classe des états terminaux :  $B = \{ 4, 7, 9, 10, 12, 13, 14 \}$

Classe des états non terminaux :  $A = \{ 0, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 11 \}$

7 et 4 sont séparables par "a"

$B_1 = \{7\}$

$B = \{ 4, 9, 10, 12, 13, 14 \}$

9 et 4 sont séparables par "a"

$B_2 = \{9\}$

$B = \{ 4, 10, 12, 13, 14 \}$

10 et 4 sont séparables par "a"

$B_3 = \{10\}$

$B = \{ 4, 12, 13, 14 \}$

12 et 4 sont séparables par "a"

$B_4 = \{12\}$

$B = \{ 4, 13, 14 \}$

13 et 4 sont séparables par "a"

$B_5 = \{13\}$

$B = \{ 4, 14 \}$

14 et 4 sont séparables par "a"

$B_6 = \{14\}$

$B = \{ 4 \}$

De même tous les états de la classe A sont séparables.

L'automate est donc minimal, chaque classe est constituée d'un seul état.

3.

Matrice de transition

	a	b
1	1	3
<u>2</u>	1	<u>2</u>
3	<u>2</u>	1

$$E1 = aE1 + bE3$$

$$E2 = aE1 + bE2 + \epsilon$$

$$E3 = aE2 + bE1$$

$$E1 = a^*bE3$$

$$E2 = b^*(aE1 + \epsilon) = b^*aa^*bE3 + b^*$$

$$\begin{aligned} E3 &= aE2 + bE1 = a(b^*aa^*bE3 + b^*) + ba^*bE3 \\ &= ab^*aa^*bE3 + ab^* + ba^*bE3 \\ &= (ab^*aa^*b + ba^*b)E3 + ab^* \\ &= ((ab^*a + b) a^*b)^* ab^* \end{aligned}$$

$$E1 = a^* b ((ab^*a + b) a^*b)^* ab^*$$

## Exercise 4 :

(a)

	a	b
0	1, 2	
1		<u>2,3</u>
2	1	
<u>3</u>	<u>3</u>	2



	a	b
0	1,2	
1,2	1	<u>2,3</u>
1		<u>2,3</u>
<u>2,3</u>	<u>1,3</u>	2
<u>1,3</u>	<u>3</u>	<u>2,3</u>
2	1	
<u>3</u>	<u>3</u>	2

	a	b
0	<u>1</u>	<b>puits</b>
<u>1</u>	2	<u>3</u>
2	<b>puits</b>	<u>3</u>
<u>3</u>	<u>4</u>	5
4	<u>6</u>	<u>3</u>
5	2	<b>puits</b>
<u>6</u>	<u>6</u>	5

**(b)**  $B = \{0, 2, 5\}$        $A = \{1, 3, 4, 6\}$

Pour la classe A :

1 et 3 sont séparables par a

$$A = \{1, 4, 6\}$$

$$A_1 = \{3\}$$

4 et 1 sont séparables par b

$$A = \{1, 6\}, A_1 = \{3\}, A_2 = \{4\}$$

6 et 1 sont séparables par b

$$A = \{1\}, A_1 = \{3\}, A_2 = \{4\}, A_3 = \{6\}$$

Pour la classe B

0 et 2 sont séparables par a

$$B = \{0, 5\}$$

$$B_1 = \{2\}$$

0 et 5 sont séparables par b

$$B_2 = \{5\}$$

$$B = \{0\}$$

$$B = \{0\}, B_1 = \{2\}, B_2 = \{5\}$$

On retombe sur les 7 classes de l'automate initial. Il est donc **minimal**.

(c)

$$\mathbf{E0 = a E1}$$

$$E1 = a E2 + b E3$$

$$E2 = b E3$$

$$E3 = a E4 + b E5 + \epsilon$$

$$E4 = a E6 + b E3 + \epsilon$$

$$E5 = a E2$$

$$E6 = a E6 + b E5 + \epsilon$$

$$E6 = a^* ( b E5 + \epsilon ) = a^* ( b a E2 + \epsilon ) = a^* ( b a b E3 + \epsilon )$$

$$E4 = a ( a^* ( b a b E3 + \epsilon ) ) + b E3 + \epsilon$$

$$\begin{aligned} E3 &= a ( a ( a^* ( b a b E3 + \epsilon ) ) + b E3 + \epsilon ) + b a b E3 + \epsilon \\ &= a a a^* b a b E3 + a a a^* + a b E3 + a + b a b E3 + \epsilon \\ &= ( a a a^* b a b + a b + b a b )^* ( a a a^* + a + \epsilon ) \\ &= ( a a a^* b a b + a b + b a b )^* a^* \\ &= ( a a + b + \epsilon + b )^* ( a b )^* a^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E2 &= b E3 \\ &= b ( a a + b + \epsilon + b )^* ( a b )^* a^* \end{aligned}$$

$$E1 = a E2 + b E3 = a b E3 + b E3 = ( a + \epsilon ) b ( a a + b + \epsilon + b )^* ( a b )^* a^*$$

$$E0 = a \quad E1$$

$$\mathbf{E0 = a ( a + \epsilon ) b ( a a + b + \epsilon + b )^* ( a b )^* a^*}$$



## Exercice 5 : Expression régulière associée à l'automate des diapositives 91 et 92

Pour simplifier, posons :

$$a = 0+3+6+9$$

$$b = 1+4+7$$

$$c = 2+5+8$$

De la table de transition, on déduit les équations suivantes :

$$E0 = aE0 + bE1 + cE2 + \epsilon = a^*(bE1 + cE2 + \epsilon) = a^*bE1 + a^*cE2 + a^*$$

$$E1 = aE1 + bE2 + cE0 = a^*(bE2 + cE0) = a^*bE2 + a^*cE0$$

$$\begin{aligned} E2 &= aE2 + bE0 + cE1 = a^*(bE0 + cE1) = a^*bE0 + a^*cE1 \\ &= a^*bE0 + a^*c(a^*bE2 + a^*cE0) = a^*bE0 + a^*ca^*bE2 + a^*ca^*cE0 \\ &= (a^*ca^*b)^*(a^*b + a^*ca^*c)^*E0 = (a^*ca^*b)^*a^*(b + ca^*c)E0 \end{aligned}$$

$$E1 = a^*b(a^*ca^*b)^*a^*(b + ca^*c)E0 + a^*cE0 = (a^*b(a^*ca^*b)^*a^*(b + ca^*c) + a^*c)E0$$

$$E0 = a^*b \quad E1 \quad + a^*c \quad E2 \quad + a^*$$

$$\begin{aligned} E0 &= a^*b (a^*b(a^*ca^*b)^*a^*(b + ca^*c) + a^*c)E0 + a^*c(a^*ca^*b)^*a^*(b + ca^*c)E0 + a^* \\ &= (a^*b(a^*b(a^*ca^*b)^*a^*(b + ca^*c) + a^*c) + a^*c(a^*ca^*b)^*a^*(b + ca^*c))E0 + a^* \end{aligned}$$

$$E0 = ((a^*b(a^*b(a^*ca^*b)^*a^*(b + ca^*c) + a^*c) + a^*c(a^*ca^*b)^*a^*(b + ca^*c))^*a^*$$

## Expression régulière associée aux automates de la diapositive 93

1-

$$E0 = 0 E0 + 1 E1$$

$$E1 = 1 E1 + \varepsilon$$

$$E0 = 0^* 1 E1$$

$$E1 = 1^*$$

$$\mathbf{E0 = 0^* 1^+}$$

2-

$$E0 = a E0 + \varepsilon E1$$

$$E1 = b E1 + \varepsilon E2$$

$$E2 = c E2 + \varepsilon$$

$$E0 = a^* E1$$

$$E1 = b^* E2$$

$$E2 = c^*$$

$$\mathbf{E0 = a^* b^* c^*}$$