L3 MIASHS 2021-2022
Parcours Informatique

MI0C602T
Théorie des langages -
Expressions régulières, grammaires, automates, analyse des langages

Pierre-Jean Charrel

UT2J – IRIT / SMART

pierre-jean.charrel@univ-tlse2.fr

Sommaire

Sommaire

1.1 Problèmes, mots et langages

Machines et algorithmes

L'informatique a pour but de résoudre des problèmes au moyen d'algorithmes.

Question : tous les problèmes se résolvent-ils au moyen d'un algorithme ?

Réponse : en lien avec l'analogie entre le cerveau humain et l'ordinateur

Un ordinateur suit toujours le modèle de J. Von Neumann (1940)

- Unité centrale (UC) + mémoire + registres dont compteur de programme
- UC : répète le traitement séquentiel
  - 1- décode le compteur (adresse mémoire contient une instruction)
  - 2- exécute l'instruction et met à jour les registres
  - 3- incrémente le compteur

Il existe des traitements parallèles, quantiques, mais pas forcément meilleurs

Algorithme

Enchaînement d'actions élémentaires

- utilise toujours le même jeu d'instructions
- est décrit dans un formalisme simple valable pour n'importe quel langage de programmation

Origine du premier formalisme : **machine de Turing.**

Principes d'une machine de Turing

1. données et instructions = suites de caractères = **mots**
2. caractères d'un mot inscrits en séquence sur un support (image d'un ruban ou d'une bande magnétique)
3. un mot est lu et reconnu caractère par caractère ou écrit caractère par caractère par une "tête" de lecture-écriture
4. La machine ne sait exécuter que 4 actions élémentaires :
   – lecture, écriture d'un caractère sur le ruban,
   – déplacement de la tête de lecture le long du ruban, d'un caractère au suivant, en avant ou en arrière
   – transition entre états de la tête de lecture-écriture

Résoudre un problème revient donc à

- résoudre un problème de traitement d'un ensemble de mots
- donner la réponse sous la forme d'un mot parmi

"oui", "non", "erreur", ...

➔ Trouver tous les mots dont la réponse est "oui"

Un **ensemble de mots** définit un **langage**

➔ **Résoudre un problème** revient donc à

reconnaître un langage

Quels outils permettent de décrire un langage ?

1.2 Vocabulaire / Alphabet

Définition

Un **vocabulaire**, ou **alphabet**, noté V**,** est un ensemble fini, non vide, d'éléments, appelés **lettres** ou **symboles**

Exemples :

$V_1 = \{ a, b, \ldots, z \}$

$V_2 = \{ 0, 1 \}$

$V_3 = \{ 0, 1, et, ou, non, p \}$

1.3 Mot

Définition

Un **mot** est une **suite finie de lettres**.

On note **V* l'ensemble des mots** qui utilisent les lettres de l'alphabet V

Exemple :

p et 0 ou 1 mot sur V_3

Cas particulier

Le mot vide, qui ne contient aucun caractère est noté ε et appartient à tous les V *

Remarque

$V^* = \cup V^n$ (n = 0, …, ω)

V^n = mots de longueurs n, produit cartésien n fois de V

Définition récursive d'un mot sur V

(i) ε est un mot

(ii) si w est un mot et x appartient à V
alors x . w est aussi un mot,
où "." est un opérateur qui ajoute une lettre x au début d'un mot w

(iii) rien n'est un mot hors (i) et (ii)

Concaténation de mots " ^ "

Définition

La **concaténation de mots** est une loi de composition interne sur V* :

(v, w) → v ^ w   on place toutes les lettres de v devant w

Définition récursive

(i) ε ^ v = v

(ii) (x . v) ^ w = x . (v ^ w)

" ^ " est associative et possède un élément neutre

V * muni de sa loi de composition " ^ " est un monoïde.

Le monoïde est "libre" : pas d'équivalence entre les mots

C'est-à-dire :

- toutes les suites de lettres sont différentes

- Il n'existe qu'une seule façon d'écrire un mot

1.4 Langage

Définition

Un **langage** sur un vocabulaire V est une partie quelconque de V^*

Exemples

- ϕ est un langage pour tous les alphabets V
- $\{\varepsilon\}$ est un langage pour tous les alphabets V
- {a, b, …, z } est un langage sur V_1 → mots de longueur 1
- { représentations binaires d'entiers pairs } est un langage sur V_2
- { assemblage de parenthèses bien équilibré } est un langage sur { (,) } langage des mots de Dyck

Problème : trouver un moyen fini (qui tient en une suite finie de symboles) pour décrire un ensemble potentiellement infini

1.5 Opérations sur les langages

Les constructions suivantes sont des langages

- L_1 U L_2
- $L_1 . L_2$ = { v ^ w, v mot de L_1, w mot de L_2)
- Fermeture itérative (de Kleene) de L
  L* = { w, ∃ k non nul tel que w = w_1 ^ w_2 ^ … ^ w_K
  et ∀i, w_i mot de L }
- Complément de L à V*

On note

L^n = L . L . … . L la concaténation n fois de L

L* = U L^n (n = 1, …, infini)

Langage régulier

(i) ϕ et $\{\varepsilon\}$ sont des langages réguliers
(ii) Pour tout x de V , {x} est un langage régulier
(iii) Si L_1 et L_2 sont des langages réguliers,

$L_1 \cup L_2$

$L_1 . L_2$

$L_1{}^*$

sont des langages réguliers

Expression régulière

Expression littérale qui désigne – ***dénote*** **-** un langage régulier
(ι) ϕ et ε sont des expressions régulières
(ii) si a et b sont des expressions régulières, alors

(a + b) ou a + b

(a . b) ou (a b) ou a b

(a) * ou a *

sont aussi des expressions régulières

Notation – expressions régulières qui dénotent les langages

ϕ dénote L (ϕ)

ε dénote L ({ε})

a dénote L ({ a }) pour tout a de V

a + b dénote L ({ a }) U L ({ b })

a b dénote L ({ a }) . L ({ b })

a * dénote L ({ a }) *

Exemple :

Expression régulière qui dénote le langage L :

" tous les mots sur l'alphabet V = {a, b, c } contenant au moins une fois 4 "a" qui se suivent "

(a + b + c) * a a a a (a + b + c) *

Théorème

Un langage est régulier si et seulement si il est dénoté par une expression régulière

Propriétés

Soit a et b 2 expressions régulières

1.	$a + b$	=	$b + a$		
2.	$a + \phi$	=	$\phi + a$	=	a
3.	$a + a$	=	a		
4.	$(a + b) + c$	=	$a + (b + c)$		
5.	$a \varepsilon$	=	εa	=	a
6.	$a \phi$	=	ϕa	=	ϕ
7.	$(a b) c$	=	$a (b c)$		
8.	$a (b + c)$	=	$a b + a c$		
9.	$(a + b) c$	=	$a c + b c$		
10.	a^*	=	$a^* a^* = (a^*)^* = (\varepsilon + a)^*$		

11. ϕ^* = ε^* = ε

12. $(a + b)^* = (a^* + b^*)^*$ = $(a^* b^*)^*$

13. $a^* a$ = $a a^*$

14. $a (b a)^*$ = $(a b)^* a$

Preuve :

Soit e14 mot du langage L14 dénoté par l'expression régulière

e14 = $a (b a)^*$

Alors il existe un nombre entier " n " tel que

$$e14 = a_0 (b_0 a_1) \ldots (b_{n-1} a_n)$$
$$= (a_0 b_0) (a_1 b_1) \ldots (a_{n-1} b_{n-1}) a_n$$

e14 = $(a b)^* a$

Notations

$$a^+ = a + a^2 + \ldots + a^k + a^{K+1} a^*$$

$$a^* = \varepsilon + a a^* = \varepsilon + a^+$$

Sommaire

2.0 Introduction

Dans la **langue naturelle**, une **phrase** S (*Sentence*) est composée d'un sujet suivi d'un verbe suivi d'un complément.

Exemple :

la jeune pianiste virtuose	joue	sans partition

On peut lire une construction basée sur des **termes qui obéissent aux règles de syntaxe d’une grammaire**

phrase → *sujet verbe complément*

Ensuite, il faut "**expliquer**" les termes ***sujet***, **verbe**, ***complément pour justifier la structure de l'exemple***.

Exemple :

sujet → *article adjectif nom*
| *article nom adjectif*
| **article adjectif nom adjectif**
| *article nom*

…

article → **le** | **la** | **un** | **des** | **l'**

adjectif → **studieux** | *qualité* | *couleur*

qualité → **virtuose** | **débutant** | **jeune**

nom → **violoniste, violoncelliste, pianiste**

ainsi de suite ...

Expression conditionnelle dans le langage C :

if (*expression* **)** *instruction*

Exemple :

if	**(**	***x*** **< 10**	**)**	***a*** **=** ***a*** **+** ***b***

Il faut encore « exliquer » *expression* et *instruction* ...

Dans une langue ou un langage, 2 catégories de termes
- les **terminaux** :
termes qui permettent de construire les phrases des langages (Français, C) :
le, la, if ...
- les ***non-terminaux***
termes qu'il faut « *expliquer » pour construire une phrase* ***syntaxiquement correcte****:*
sujet, adjectif, instruction

2.1 Définition

Une **grammaire** G est un quadruplet

$G = (V_N, V_T, S, R)$

où :

- V_N : vocabulaire (alphabet) non terminal
- V_T : vocabulaire (alphabet) terminal
- $S \in V_N$: axiome ou racine
- R : ensemble de règles de **production** ou de **réécriture**

- $V_N \cap V_T = \varnothing$

Une **règle de réécriture** est un couple de mots (v, w)

où : $v \in (V_N \cup V_T) ^* - \{\varepsilon\}$ et $w \in (V_N \cup V_T) ^*$

on note : $v \rightarrow w$

On dit que "v se réécrit w" ou "v produit w" ou "v donne w" dans la grammaire G

v est la partie gauche de la règle, w la partie droite

Notation

S'il existe plusieurs règles de réécriture de même partie gauche v :

$v \rightarrow w_1$, $v \rightarrow w_2$, …, $v \rightarrow w_n$,

on peut écrire les n règles en 1 seule ligne :

$v \rightarrow w_1 \mid w_2 \mid \ldots \mid w_n$ " v se réécrit w_1 ou w_2 ou … ou w_n "

Exemple

$G0 = (V_N, V_T, S, R)$

$V_N = \{ S, A, B \}$

$V_T = \{ 0, 1 \}$

$S \in V_N$: racine

$R = \{ (1), (2), (3), (4), (5) \}$

$$
\begin{aligned}
= \{ \; & S && \rightarrow 0\,A\,1\,B && (1) \\
& 1\,B && \rightarrow 1\,A\,B\,B && (2) \\
& 1\,A && \rightarrow A\,1 && (3) \\
& 1\,B && \rightarrow 1\,1 && (4) \\
& 0\,A && \rightarrow 0\,0 && (5) \\
\} &
\end{aligned}
$$

2.2 Mot engendré par une grammaire

Intuitivement, un mot $w \in V_T{}^*$ est **engendré par une grammaire** G si on peut **l'assembler** au bout d'un nombre fini de réécritures à partir de la racine S.

Exemple intuitif

$G0 = (V_N, V_T, S, R)$

R =

{ S → 0 A 1 B (1)

1 B → 1 A B B (2)

1 A → A 1 (3)

1 B → 1 1 (4)

0 A → 0 0 (5)

}

le mot v = 0 0 0 0 1 1 1 1 est engendré par cette grammaire ?

S	→ 0 A 1 B	1
	→ 0 A 1 A B B	2
	→ 0 A A 1 B B	3
	→ 0 A A 1 A B B B	2
	→ 0 A A A 1 B B B	3
	→ 0 A A A 1 1 B B	4
	→ 0 A A A 1 1 1 B	4
	→ 0 A A A 1 1 1 1	4
	→ 0 0 A A 1 1 1 1	5
	→ 0 0 0 A 1 1 1 1	5
	→ 0 0 0 0 1 1 1 1	5

2.3 Dérivation immédiate

$v \rightarrow w$

si et seulement si :

$x, y \in V_T$ et $u, v \in (V_N \cup V_T)^*$

- $v \quad = \quad x\ u\ y\ ,\ u \neq \varepsilon$
- $w \quad = \quad x\ v\ y$
- $(u \rightarrow v) \quad \in \quad R$

2.4 Dérivation

La dérivation est la fermeture réflexive et transitive de $\rightarrow$

$v \rightarrow^* w$

si et seulement si :

Il existe $k \geq 0$ et une suite $v_0, v_1, \ldots v_k$, d'éléments de

$(V_N \cup V_T)^*$ tels que

$v = v_0$

$w = v_k$

$\forall i, 0 \leq i \leq k - 1, \quad v_i \rightarrow v_{i+1}$

Exemples sur G0

- S $\rightarrow$ 0 A 1 B
  $\Rightarrow$ 0 A 1 A B B
  $\Rightarrow$ 0 A A 1 B B
  $\Rightarrow$ 0 A A 1 A B B B
  $\Rightarrow$ 0 A A A 1 B B B
  $\Rightarrow$ 0 A A A 1 1 B B
  $\Rightarrow$ 0 A A A 1 1 1 B
  $\Rightarrow$ 0 A A A 1 1 1 1
  $\Rightarrow$ 0 0 A A 1 1 1 1
  $\Rightarrow$ 0 0 0 A 1 1 1 1
  $\Rightarrow$ 0 0 0 0 1 1 1 1

  S $\Rightarrow^*$ 0 0 0 0 1 1 1 1

- 0 A 1 A B B $\Rightarrow^*$ 0 0 0 A 1 1 1 1
- 0 A 1 A B B $\Rightarrow^*$ 0 A 1 A B B

Remarque

$v \Rightarrow^* v$: autrement dit, la relation $\Rightarrow^*$ est réflexive.

<u>*Démonstration*</u> :

dans la définition, prendre k = 0, alors :

$$v = v_0 = v_k = v$$

La condition

$$\forall i,\ 0 \leq i \leq k - 1 \Rightarrow v_i \Rightarrow v$$

est vérifiée car aucun i ne satisfait $0 \leq i \leq -1$

2.5 Langage engendré par une grammaire

Soit une grammaire

G = (V_N, V_T, S, R)

L (G) = $\{v \in V_T{}^* ;\ S \Rightarrow^* v\}$

Exemple sur G0:

v = 0 0 0 0 1 1 1 1 $\in$ L (G0)

2.6 Types de règles – types de grammaires – hiérarchie de Chomsky

Type 0 : toutes les règles

Type 1 : non raccourcissantes

$v \rightarrow w$ avec longueur (v) $\leq$ longueur (w)

Type 2 : hors-contexte

$X \rightarrow w$ avec $X \in V_N$

Type 3 : linéaires.

linéaires gauches

$X \rightarrow x\,w$ avec $X \in V_N$, $x \in V_T$, et $w \in (V_N \cup V_T)^*$

linéaires droites

$X \rightarrow w\,x$ avec $X \in V_N$, $x \in V_T$, et $w \in (V_N \cup V_T)^*$

Types de grammaires

Une grammaire est de type T si toutes ses règles de réécriture sont de type T

Exemples

- Grammaire de typer 1

$G1 = \{ V_N, V_T, S, R \}$

$V_N = \{ S, B, C \}$

$V_T = \{ a, b, c \}$

$$R = \{ \begin{array}{lll} S & \rightarrow & a\,S\,B\,C \\ S & \rightarrow & a\,b\,C \\ b\,B & \rightarrow & b\,b \\ b\,C & \rightarrow & b\,c \\ c\,C & \rightarrow & c\,c \end{array} \}$$

- Grammaire de type 2, ou "hors-contexte"

$G2 = \{ V_N, V_T, S, R \}$

$V_N = \{ S \}$

$V_T = \{ a, b\}$

$R = \{$

$S \rightarrow a\ S\ b$

$S \rightarrow a\ b$

$\}$

$S \Rightarrow a\ b$

$S \Rightarrow a\ S\ b \Rightarrow a\ a\ S\ b\ b \Rightarrow a\ a\ a\ b\ b\ b$

$S \Rightarrow a\ S\ b \Rightarrow a\ a\ S\ b\ b \Rightarrow a\ a\ a\ S\ b\ b\ b \Rightarrow a\ a\ a\ a\ b\ b\ b\ b$

$L(G2) = \{a^n b^n ; n \geq 1\}$

- Grammaire de type 3, ou linéaire

$G3 = \{ V_N, V_T, S, R \}$
$V_N = \{ S, A \}$
$V_T = \{ a, b \}$
$R = \{$

$S \rightarrow a\ S$
$S \rightarrow a\ A$ (linéaire **gauche**)
$A \rightarrow b\ A$
$A \rightarrow b$

$\}$

exemples de dérivation

$S \Rightarrow a\ A \Rightarrow a\ b$
$S \Rightarrow a\ S \Rightarrow a\ a\ S \Rightarrow a\ a\ a\ S \Rightarrow a\ a\ a\ a\ A \Rightarrow a\ a\ a\ a\ b$
$S \Rightarrow a\ S \Rightarrow a\ a\ A \Rightarrow a\ a\ b$
$S \Rightarrow a\ S \Rightarrow a\ a\ A \Rightarrow a\ a\ b\ A \Rightarrow a\ a\ b\ b\ A \Rightarrow a\ a\ b\ b\ b$

$L(G3) = \{a^n b^m ; n, m \geq 1\}$
langage dénoté par l'expression régulière $a\ a^*\ b\ b^* = a^+ b^+$

Type i étendu = type i + règles avec ε possible en partie droite

Grammaires de type hors-contexte (type 2) étendu

G21 = { V_N, V_T, S, R }
V_N = { S }
V_T = { a, b }
R = {
S $\rightarrow$ a S b
S $\rightarrow$ ε
}

S $\Rightarrow$ ε
S $\Rightarrow$ a S b $\Rightarrow$ a a S b b $\Rightarrow$ a a b b
S $\Rightarrow$ a S b $\Rightarrow$ a a S b b $\Rightarrow$ a a a S b b b $\Rightarrow$ a a a b b b

L (G21) = $\{a^n b^n ; n \geq 0\}$

Grammaire de type linéaire (type 3 à étendu

$G31 = \{ V_N, V_T, S, R \}$

$V_N = \{ S, A \}$

$V_T = \{ a, b \}$

R = {

S → a S

S → b A

S → ε   linéaire gauche

A → b A

A → ε

}

S → a S → a

S → a S → a a S → a a

S → a S → a a S → a a a S → a a a b A → a a a b

S → a S → a a S → a a a S → a a a b A → a a a b b A → a a a b b

S → ε

L (G31) = a * b *

2.7 Grammaire et définition récursive

Exemple

Langage des mots de Dyck ou des
Structures de Parenthèses Equilibrées (SPE)

(1) ε est une SPE

(2) Schéma d'induction :
- Si A est une SPE, alors (A) est une SPE
- Si A et B sont des SPE, alors A B est une SPE

(3) Rien n'est une SPE hormis par (1) et (2)

traduction sous forme de grammaire

1 17 01 2022 8h20 – 10h20

$G_{Dyck} = \{ V_N, V_T, S, R \}$

$V_N = \{ S \}$

$V_T = \{ (,) \}$

$R = \{$

S	→	ε	(1)
S	→	(S)	(2)
S	→	S S	(3)

$\}$

Exemple de dérivation

S → (S) → ((S)) → ((S S)) → (((S) S))
→ ((( ) (S))) → ((( ) (S S)))
→ ((( ) ((S) S))) → ((( ) (( ) S))) → ((( ) (( ))))

2.8 Arbre de dérivation dans une grammaire hors-contexte

Soit $G = (V_N, V_T, S, R)$ une grammaire hors-contexte

Un arbre de dérivation dans G pour $v \in V_T^*$ est un arbre :

- **Racine** : S
- **Feuilles** : symboles terminaux ou ε
- **Sommets** : symboles non terminaux

v = concaténation des feuilles

Si un sommet N a pour descendants immédiats

$N_1, N_2, \ldots, N_k$,

alors

$N \rightarrow N_1 N_2 \ldots N_k$ est une règle de R

Théorème

Si v $\in$ L (G)

alors il existe un arbre de dérivation A pour v dans G

Démonstration

- $\Rightarrow$: récurrence sur le nombre de pas dans la dérivation (démontrer que pour tout non-terminal X et tout mot v,

  si X ➔* v,

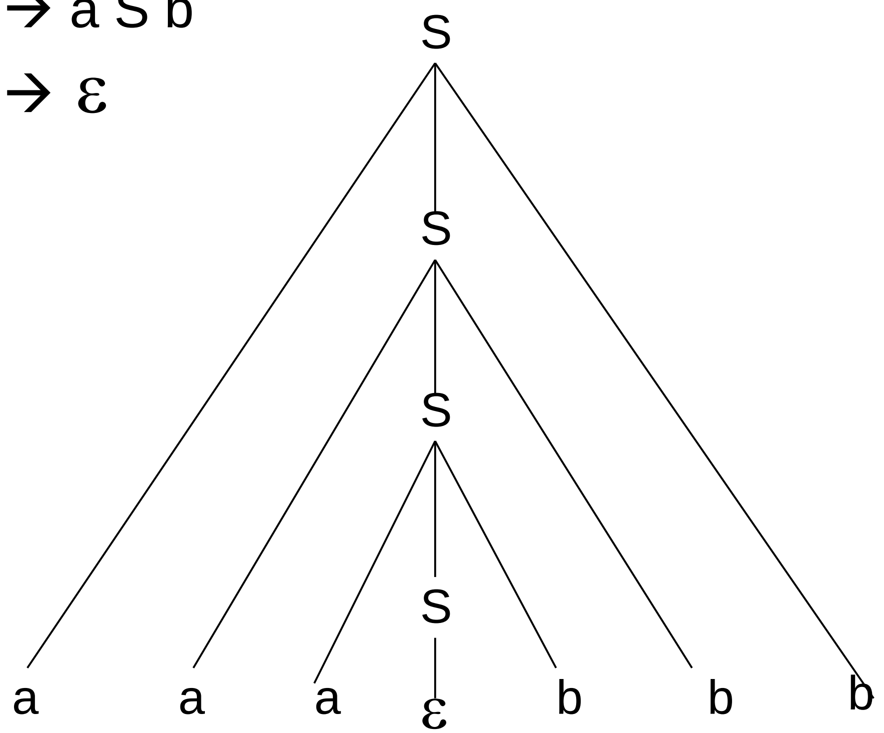
  alors il existe un arbre de dérivation pour v de racine X)

- $\Leftarrow$: récurrence sur la profondeur de l'arbre

Exemple 1

v = a a a b b b
appartient-il à L (G21) ?

G21 = { V_N, V_T, S, R }
V_N = { S }
V_T = { a, b }
R = {
S → a S b
S → ε
}



Concaténation des feuilles :
a a a ε b b b = a a a b b b

Réponse ;
OUI

Exemple 2

G22 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = {S, SN, SV, Det, N', N, Vt, Vi}

V_T = {qui, un, le, chat, garçon, lait, ballon, regarde, boit, frappe, boue}

R = {

S → SN SV

SN → Det N’

N’ → N | N qui SV

SV → Vt SN | Vi

Det → un | le

N → chat | garçon | lait | ballon

Vt → regarde | boit | frappe

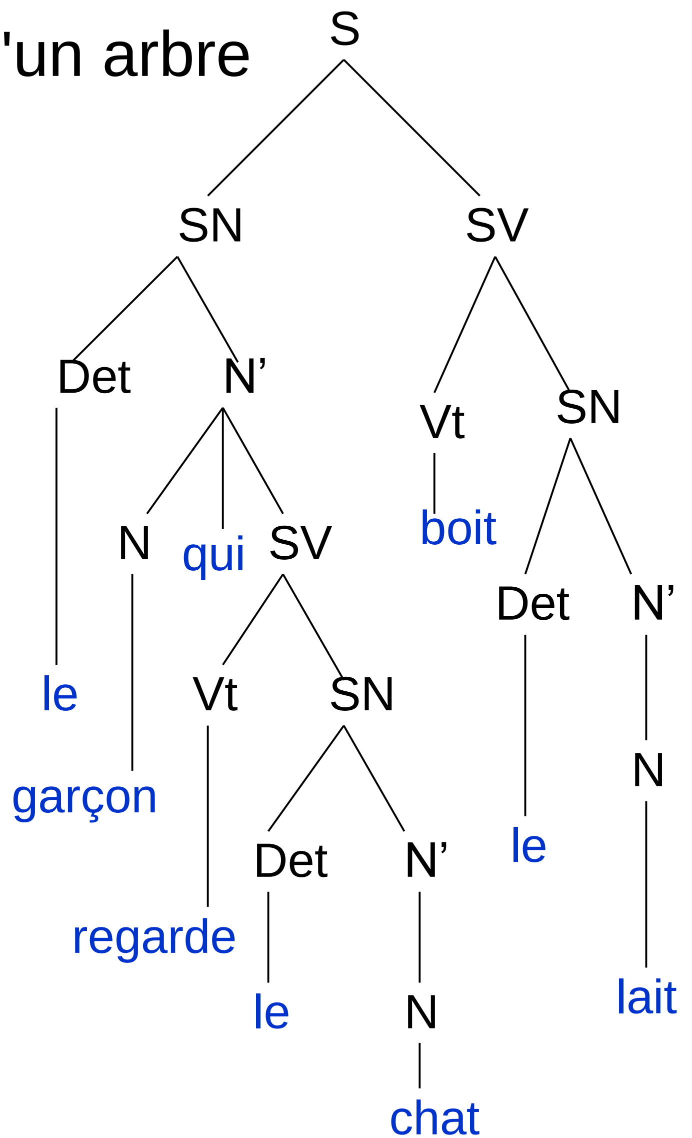
Vi → boue

}

v = le garçon qui regarde le chat boit le lait

généré par G ?

Construction d'un arbre de dérivation



Réponse ; OUI

Symbole récursif

SV ➔ V SN ➔ V Det N' ➔ V Det N qui **SV**

donc

SV ➔ * V Det N qui **SV**

SV est récursif

d'où :

SV ➔ * V Det N qui SV

➔ * V Det N qui V Det N qui SV

➔ *

…

➔ * V Det N qui V Det N qui … V Det N qui SV

Langage infini

Une sous-expression E d'un mot v **est un constituant de type X** si et seulement si E est la concaténation des feuilles d'un sous-arbre dans l'arbre de dérivation de E de racine X

Exemples

regarde le chat

est un constituant de type SV

garçon qui regarde le chat

est un constituant de type N'

garçon qui regarde le chat boit le lait

n'est pas un constituant

On peut écrire le mot w en indexant ses constituants :

$[\,[\,[\text{ le }]_{\text{Det}}\,[\,[\text{ garçon }]_{\text{N}}\text{ qui }[\,[\text{ regarde}]_{\text{Vt}}\,[\,[\text{ le }]_{\text{Det}}\,[\,[\text{ chat }]_{\text{N}}\,]_{\text{N'}}]_{\text{SN}}\,]_{\text{SV}}\,]_{\text{N'}}\,]_{\text{SN}}$

$[\,[\text{ boit }]_{\text{Vt}}\,[\,[\text{ le }]_{\text{Det}}\,[\,[\text{ lait }]_{\text{N}}\,]_{\text{N'}}\,]_{\text{SN}}\,]_{\text{SV}}\,]_{\text{S}}$

2.9 Ambiguïté syntaxique

Un mot v $\in$ L (G) est dit **ambigu** si et seulement si
v admet **plusieurs arbres** de dérivation

G est ambiguë ssi elle engendre des mots ambigus

L est ambigu ssi L n'admet que des grammaires ambiguës

Degré d'ambiguïté d'un mot

Nombre d'arbres de dérivations admis par ce mot

Exemple 1

G23 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = {S, SN, SV, Det, N, A, V, Pro}

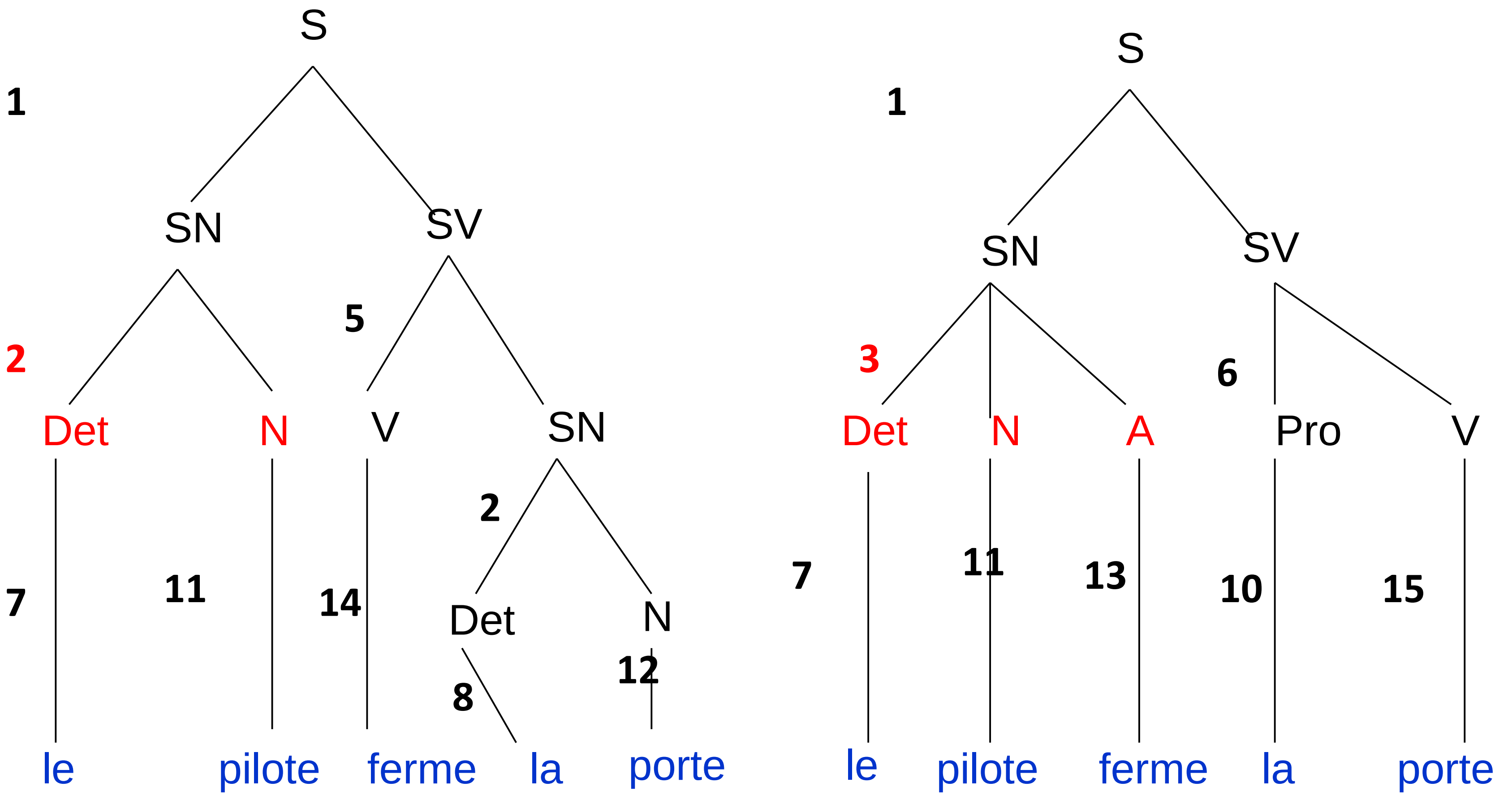
V_T = {le, la, pilote, porte, ferme }

R = {

1	S	→ SN SV
2 3 4	SN	→ Det N | Det N A | Det A N
5 6	SV	→ V SN | Pro V
7 8	Det	→ le | la
9 10	Pro	→ le | la
11 12	N	→ pilote | porte
13	A	→ ferme
14 15	V	→ ferme | porte

}

v = *le pilote ferme la porte* mot de G23 ?



v est un mot de G23 et admet **2** arbres de dérivation

Exemple 2

Extrait de la grammaire d'un langage de programmation

G = (V_N, V_T, instruction, R }

V_N = {instruction, expression}

V_T = {if, else, (,) }

Racine = Instruction

R = {

1 instruction → if (expression) instruction else instruction

2 instruction → if (expression) instruction

3 instruction → …

4 instruction → …

}

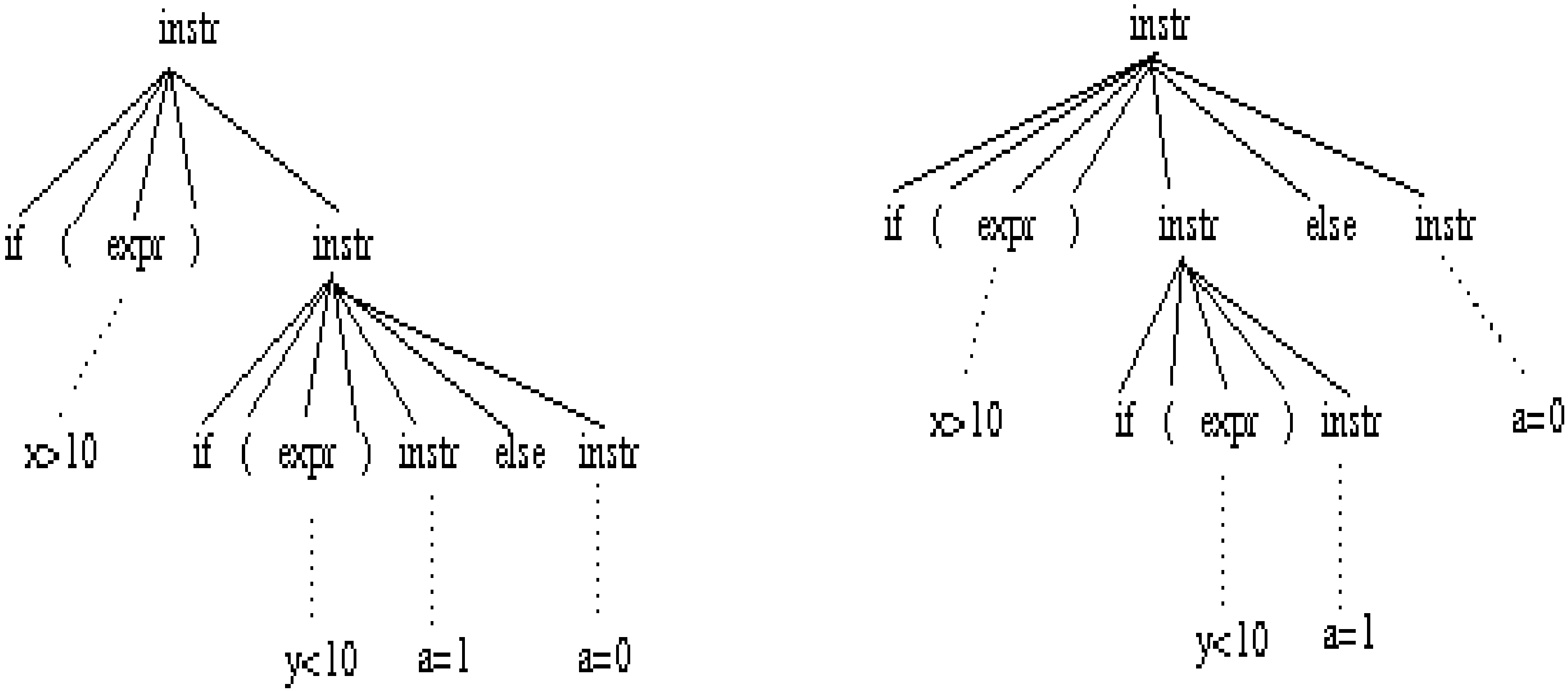
G est ambiguë

Exemple :

Le mot

v = if (x>10) if (y < 0) a = 1 else a = 0

possède deux arbres de dérivation différents :



deux " interprétations syntaxiques " :

```
if (x>10)
   if (y<0)
         a=1
   else
         a=0
   // finsi
// finsi
```

```
if (x>10)
    if (y<0)
       a=1
    // finsi
 else
      a = 0
// finsi
```

Sommaire

3.0 Introduction

Principe : construire l'arbre de dérivation d'un mot w en partant de la racine – le haut - vers les feuilles - le bas.

Exemples

Exemple 1 :

G1 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = (S, T)

V_T = (a, b, c, d)

Racine = S

R = {

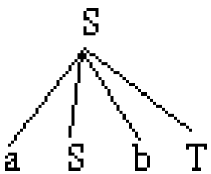
1, 2, 3	S	→	a S b T	| c T	| d
4, 5, 6	T	→	a T	| b S	| c

]

Soit le mot : w = a c c b b a d b c

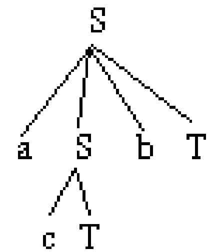
On démarre avec l'arbre contenant la racine S et on cherche une règle qui a la 1ère lettre de w comme 1er symbole de sa partie droite

La lecture de la première lettre du mot "a" permet d'avancer la construction



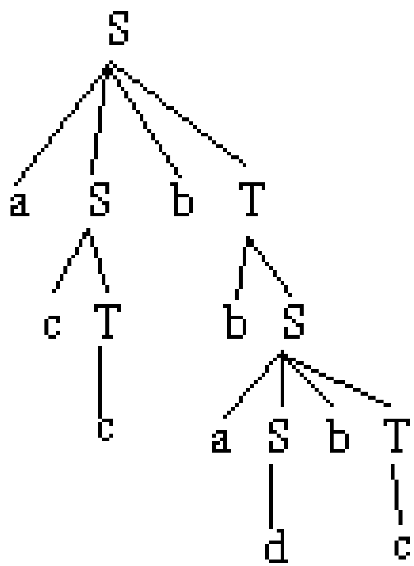
$w = \cancel{a}\ c\ c\ b\ b\ a\ d\ b\ c$

Puis la deuxième lettre "c" amène à la situation



$w = \cancel{a}\ \cancel{c}\ c\ b\ b\ a\ d\ b\ c$

et ainsi de suite jusqu'à



$w = \cancel{a}\ \cancel{c}\ \cancel{c}\ \cancel{b}\ \cancel{b}\ \cancel{a}\ \cancel{d}\ \cancel{b}\ \cancel{c}$

On a trouvé un arbre de dérivation, donc w appartient au langage de G1.

Facile : chaque règle commence par un terminal différent, on n'a pas à choisir.

Exemple 2 :

G2 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = (S, A)

V_T = (a, b, c, d)

Racine = S

R = {

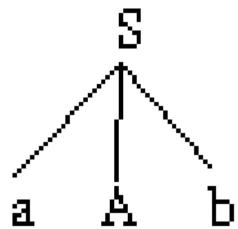
1 S → a A b

2, 3 A → c d | c

}

Soit le mot w = a c b

On se retrouve avec



w = a c b

En lisant *c*, on ne sait pas s'il faut choisir

la règle 2 A → c d

ou la règle 3 A → c.

Pour le savoir, il faut :

1- soit lire **aussi** la lettre suivante du mot : b,

2- soit faire des **retours en arrière :** on essaie la règle 2 A → c d, on aboutit à un échec, alors on retourne en arrière et on essaie 3 A → c et ça marche.

Exemple 3 :

G3 = (V_N , V_T , S, R)
V_N = (S)
V_T = (a, b, c, d)
R = { S → a S b | a S c | d } 1, 2, 3 }

Soit le mot w = a a a a a a a d b b c b b b c
Pour savoir quelle règle utiliser, il faut connaître aussi la **dernière** lettre du mot.

Exemple 4 : grammaire des expressions arithmétiques

G4 = (V_N , V_T , E, R)
V_N = (E, E', T, T', F)
V_T = (+, ⁎, (,), nb)
Racine = E
R = {
1 E → T E'
2, 3 E' → + T E' | ε
4 T → F T'
5, 6 T' → ⁎ F T' | ε
7, 8 F → (E) | nb
}

Soit le mot *w* = 3 ⁎ 4 + 10 ⁎ (5 + 11) ??????
Ce serait pratique d'avoir une " **table de correspondance "** qui indique :
"quand je lis tel symbole et que j'en suis à dériver tel symbole non-terminal,
alors j'applique telle règle".

3.1 Grammaires LL (1)

Définition

On appelle **grammaire LL(1)** une grammaire pour laquelle la reconnaissance d'un mot peut se faire de la manière suivante :

- on parcourt le mot de gauche à droite (L pour *Left to right scanning*),

- on développe l'arbre de dérivation en choisissant d'abord les non terminaux les plus à gauche (L pour *Leftmost derivation*),

- on ne lit pas plus d'un symbole du mot à la fois (1).

Contre-exemple :

G2 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = (S, A)

V_T = (a, b, c, d)

Racine = S

R = {

1	S	→ a A b
2, 3	A	→ c d | c
	}	

Pour pouvoir choisir entre

A → c d

et

A → c

il faut lire la lettre qui suit.

grammaire LL (2) **:**

Il faut lire 2 symboles à la fois pour décider

Théorème

Une grammaire **récursive à gauche** ou **non factorisée à gauche** ou **ambiguë** n'est pas LL(1).

3.2 Récursivité à gauche

Définition ; récursivité à gauche immédiate

Une grammaire est **immédiatement récursive à gauche** si elle contient un non-terminal A tel qu'il existe une règle

$$A \rightarrow A\, v$$

où v est un mot quelconque composé de symboles terminaux ou non-terminaux

Exemple :

G5 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = (S, A, B)

V_T = (a, b, c, d, e)

Racine = S

R = {

1, 2	S	→ S c A	| B	
3, 4	A	→ A a	| ε	
5, 6, 7	B	→ B b	| d	| e

}

3 récursivités à gauche immédiates : règles 1, 3, 5

Construction d'une grammaire non immédiatement récursive à gauche équivalente

Remplacer tout schéma de règles

$A \rightarrow A\ w1\ |\ \ldots\ |\ A\ wn\ |\ x1\ |\ \ldots\ |\ xm\ |$

où les xi ne commencent pas par A

en appliquant la procédure :

1 - ajouter le symbole A1 à V_N

2 – remplacer le schéma de règles par :

$A \rightarrow x1\ A1\ |\ \ldots\ |\ xm\ A1$

$A1 \rightarrow w1\ A1\ |\ \ldots\ |\ wm\ A1\ |\ \varepsilon$

Théorème La grammaire obtenue reconnaît **le même langage** que la grammaire initiale.

Exemple : règles de G51 issue de G5

S	→ B S1	
S1	→ c A S1	| ε
A	→ ε A1	= A1
A1	→ a A1	| e
B	→ d B1	| e B1
B1	→ b B1	| ε

Ici, A1 est un symbole inutile

S	→ B S1	
S1	→ c A S1	| ε
A	→ a A	| ε
B	→ d B1	| e B1
B1	→ b B1	| ε

Exemple : reconnaissance d'un mot avec G5 et G51

w = **d b b c a a** s'obtient à partir de G5 par la suite de dérivations immédiates :

S → S c A → B c A → B b c A

→ B b b c A → d b b c A → d b b c A a

→ d b b c A a a

→ d b b c a a

w = **d b b c a a** s'obtient à partir de G51 par la suite de dérivations immédiates :

S → B S1 → d B1 S1 → d b B1 S1

→ d b b B1 S1 → d b b S1 → d b b c A S1

→ d b b c a A S1 → d b b c a a A S1

→ d b b c a a S1

→ d b b c a a

Remarque : ici on peut se passer de A1.

A → A a | ε est équivalent à :

A → a A | ε immédiatement récursive à droite, ne pose pas de problème.

Définition : récursivité à gauche

Une grammaire est **récursive à gauche** si elle contient un non-terminal **A** tel qu'il existe une dérivation

$$A \rightarrow^{+} A\, v$$

où v est un mot quelconque composé de symboles terminaux ou non-terminaux

Exemple :

G6 $= (V_N , V_T , S, R)$

V_N $= (S, A)$

V_T $= (a, b, c, d)$

Racine $= S$

R = {

S → A a | b

A → A c | S d | ε

}

S n'est pas immédiatement récursif à gauche mais récursif à gauche :

en 2 dérivations immédiates

S → A a

→ S d a

Construction d'une grammaire non récursive à gauche équivalente

Renommer et ordonner les non-terminaux $A_1, A_2, \ldots, A_n$

pour i = 1 à n

pour k = 1 à i - 1

remplacer chaque ensemble de règles de la forme

$A_i \rightarrow A_k\ v$

avec $A_k \rightarrow w_1 \mid \ldots \mid w_m \quad w_i \in (V_N \cup V_T)^+$

et $v = x_1 \mid \ldots \mid x_p \quad x_j \in V_T{}^*$

par

$A_i \rightarrow w_1\ v \mid \ldots \mid w_m\ v$

-- on supprime les A_k k = 1 à i - 1

fin pour

éliminer les récursivités à gauche immédiates des règles

$A_i \rightarrow w_1\ v \mid \ldots \mid w_m\ v$

fin pour

Théorème La grammaire obtenue reconnaît **le même langage** que la grammaire initiale.

Exemple – G6

On renomme S et A : A1 = S et A2 = A

i = 1

il n'existe aucun k possible

ni de récursivité immédiate dans

S → A a | b —- A1 → A2 a | b

i = 2 et k = 1

A → S d -- A2 → A1 x

S → A a | b -- A1 → w1 | w2

devient

A → A a d | b d --- A2 → w1 x | w2 x

En rassemblant les règles dont A est partie gauche

A → A c | A a d | b d | ε

on élimine la récursivité immédiate :

1- on introduit A1

2- on remplace le schéma de règles A → A c | A a d | b d | ε

par le schéma :

A → b d A1 | ε A1 = A1

A1 → c A1 | a d A1 | ε

On a obtenu la grammaire :

G61 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = (S, A, A1)

V_T = (a, b, c, d)

Racine = S

R = {

S → A a | b

A → b d A1 | A1

A1 → c A1 | a d A1 | ε

}

Exemple – G7

G7 = (V_N , V_T , S, R)
V_N = (S, T)
V_T = (a, b, c, d)
Racine = S
R = {

$$S \rightarrow S\ a \mid T\ S\ c \mid d$$
$$T \rightarrow T\ b\ T \mid \varepsilon$$

}

On obtient la grammaire :

G71 = (V_N , V_T , S, R)
V_N = (S, S1, T, T1)
V_T = (a, b, c, d)
Racine = S
R = {

$$S \rightarrow T\ S\ c\ S1 \mid d\ S1$$
$$S1 \rightarrow a\ S1 \mid \varepsilon$$
$$T \rightarrow T1$$
$$T1 \rightarrow b\ T\ T1 \mid \varepsilon$$

}

Mais :

S $\rightarrow$ T S c S1 $\rightarrow$ T1 S c S1 $\rightarrow$ **S** c S1 !!! récursivité à gauche !!!!

L'algorithme n'est pas toujours opérant lorsque la grammaire possède une ε production $A \rightarrow \varepsilon$

3.3 Factorisation à gauche

Objectif : **supprimer les ambiguïtés** dans la construction d'un arbre de dérivation

Pour développer le nœud du non-terminal A quand il n'est pas évident de choisir la production à utiliser, on doit réécrire les règles de la partie gauche A pour **différer** le choix jusqu'à ce que suffisamment de texte ait été lu pour choisir.

Exemple – G8

G8 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = (S, A, B)

V_T = (a, b, c, d)

Racine = S

R = {

S → b a c d A b d | b a c d B c c a

A → a D

B → c E

C → …

E → …

}

Pour construire l'arbre de dérivation, il faut choisir entre

S → b a c d **A** b d

et

S → b a c d **B** c c a

il faut avoir lu la **5ième lettre** du mot (*A* ou *B*). G8 est une grammaire LL(5).

Construction d'une grammaire factorisée à gauche équivalente

pour chaque symbole non-terminal A

trouver le plus long préfixe w commun à au moins deux parties droites des règles dont A est partie gauche

si w est différent de ε

alors

Ajouter un nouveau symbole A1 à VN

remplacer

$A \rightarrow w\ v1 \mid \ldots \mid w\ vn \mid u1 \mid \ldots \mid up$

où les u i ne commencent pas par w

par les 2 ensembles de règles

$A \rightarrow w\ A1 \mid u1 \mid \ldots \mid up$

$A1 \rightarrow v1 \mid \ldots \mid vn$

finpour

Recommencer jusqu'à ne plus trouver de préfixe commun.

Exemple :

G9 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = (S, E, B)

V_T = (a, b, c, d)

Racine = S

R = {

S → a E b S | a E b S d B | a

E → b c B | b c a

B → b a

}

Factorisée à gauche, R devient :

S → a S1

S1 → E b S S2 | ε

S2 → d B | ε

E → b c E1

E1 → B | a

B → b a

3.4 Grammaire propre

Définition

Une grammaire est dite **propre** si

1. elle ne contient aucune ε production

   $A \rightarrow \varepsilon$

2. ou si elle ne contient qu'une ε production $S \rightarrow \varepsilon$

Construction d'une grammaire propre équivalente à une grammaire

Pour chaque A qui apparaît dans une règle

$A \rightarrow \varepsilon$

  Pour chaque règle où A apparaît dans sa partie droite,

    Ajouter à la grammaire une règle dans laquelle A est remplacé par ε,

  Finpour

Finpour

Exemple :

G10 = (V_N , V_T , S, R)
V_N = (S, T, U)
V_T = (a, b)
Racine = S
R = {

S	→	a T b	| a U
T	→	b T a T a	| ε
U	→	a U	| b

}

Règles de la grammaire propre équivalente :

S	→	a T b	| a b	| a U
T	→	b T a T a	| b a T a	| b T a a
		| b a a		
U	→	a U	| b	

Sommaire

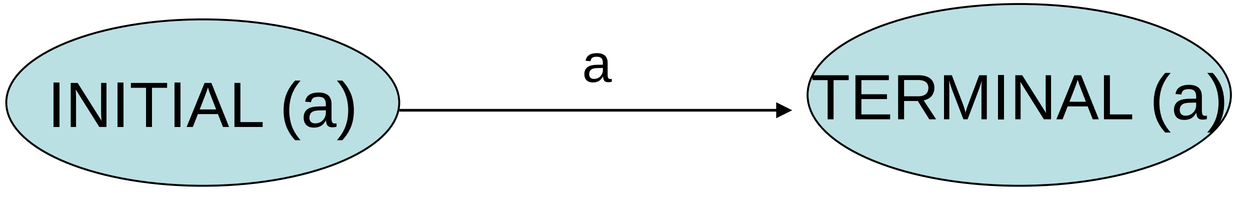
2 19 01 2022 8h20 – 10h20

4.0 Introduction – Notion de graphe

- **Graphe orienté**

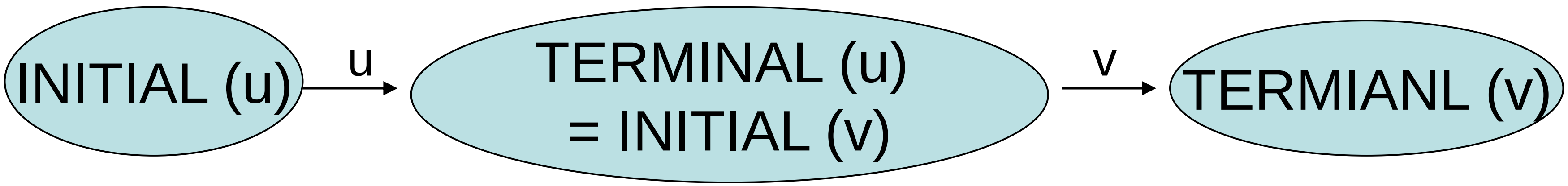
Un **graphe orienté G** est défini par un quadruplet
G = (S, A, INITIAL, TERMINAL)
où
S = ensemble fini d'éléments, appelés **sommets**
A = ensemble fini d'éléments, appelés **arcs**
INITIAL, TERMINAL = applications de A vers S telles que
pour tout arc a de A, son **sommet initial INITIAL (a)** et son **sommet terminal TERMINAL (a)** sont définis

Exemple 1 : 1 arc "a" et ses 2 sommets



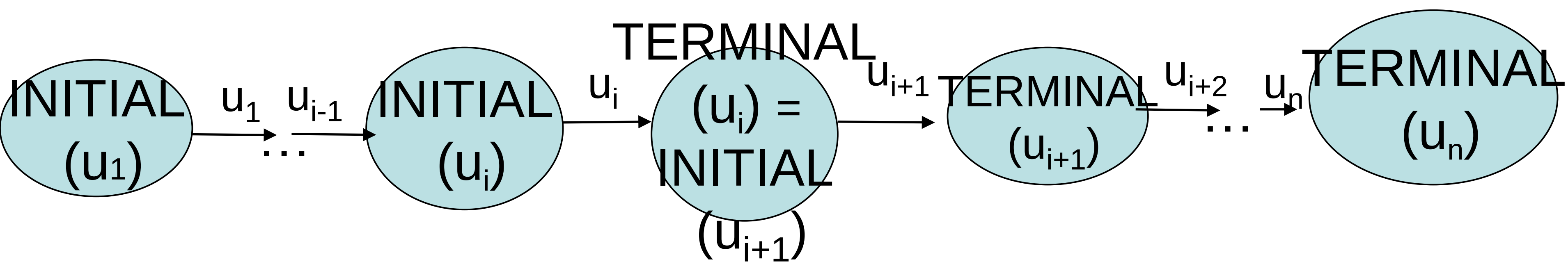
- Arcs adjacents

2 arcs u et v sont dits **adjacents** ssi TERMINAL (u) = INITIAL (v)



- Chemin dans un graphe orienté

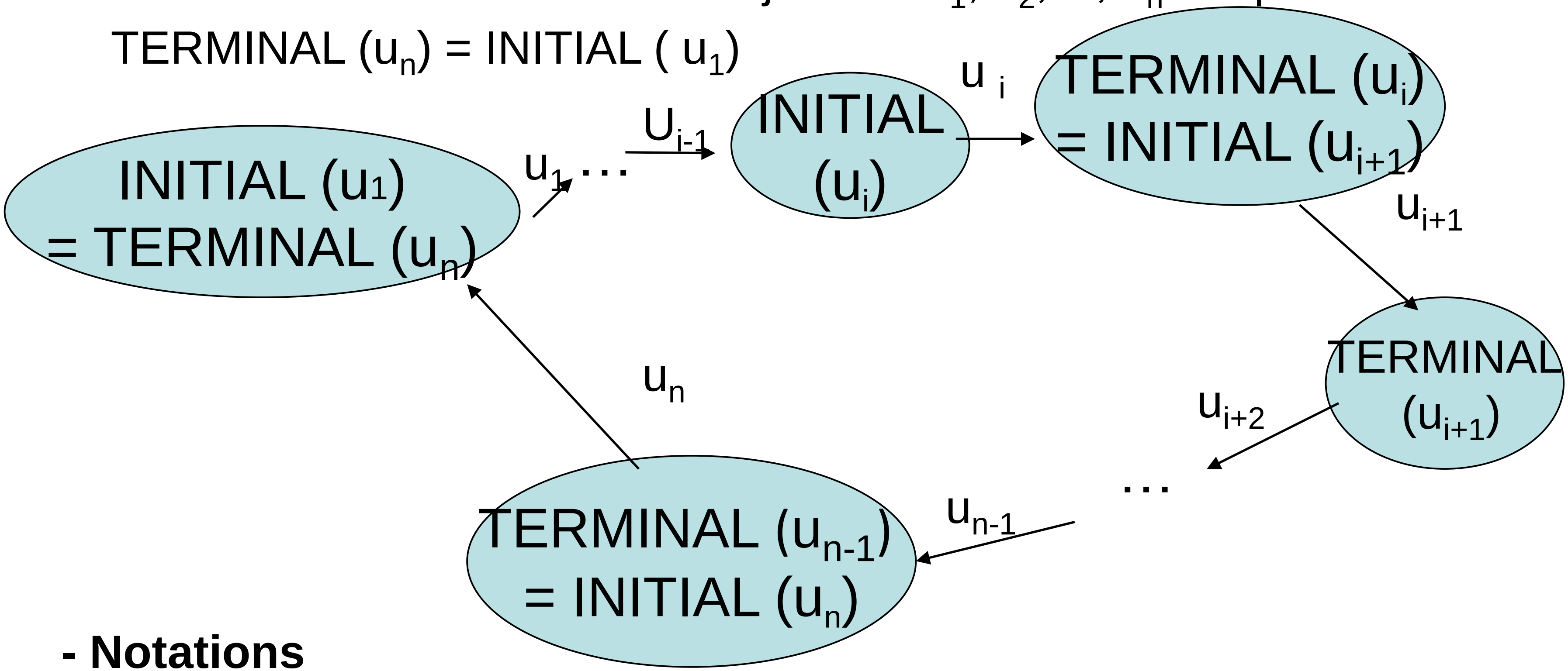
Un **chemin** est une suite d'arcs u_1, u_2,…, u_n telle que pour tout i >=1, u_i et u_{i+1} sont adjacents



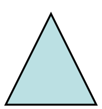
- Circuit dans un graphe orienté

Un **circuit** est un chemin d'arcs adjacents u_1, u_2,…, u_n tel que

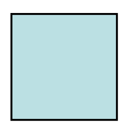
TERMINAL (u_n) = INITIAL (u_1)



- Notations



Sommet initial



Sommet terminal

- Expressions régulières et graphes

Une expression régulière E peut être représentée par un graphe orienté dont tout arc est étiqueté par un symbole de son alphabet V ou par ε

Un mot v du langage L dénoté par E peut être représenté par un chemin reliant

- un sommet initial
- un sommet terminal

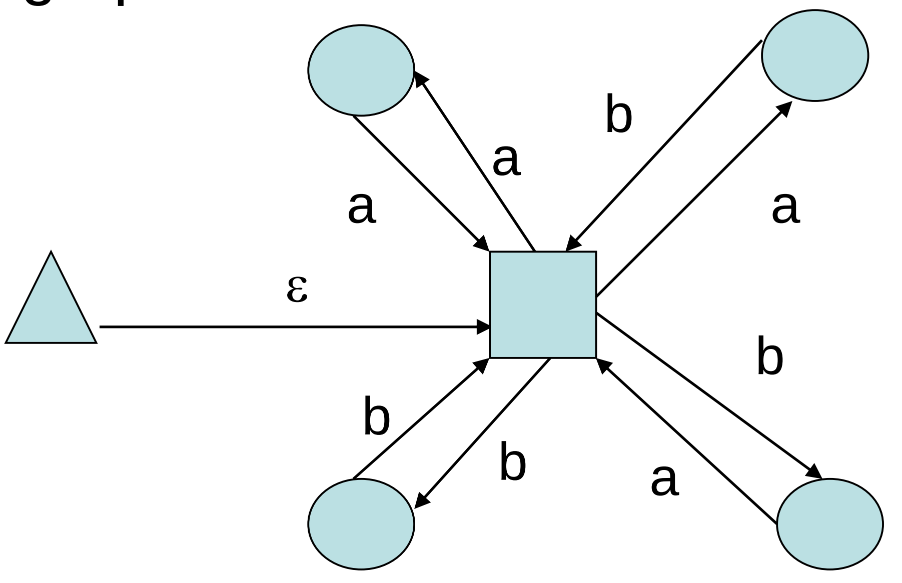
Exemple 2 :

$$v = p\,r\,(\,e\,n\,(\,d\,(\,s + \varepsilon\,) + o\,n\,s + e\,z + n\,e\,n\,t\,) + i\,(s + t + m\,e\,s + t\,e\,s + r\,e\,n\,t\,)\,)$$

Construire un graphe orienté G1 qui représente v

Exemple 3

Soit G2 le graphe



Expression régulière représentant G2

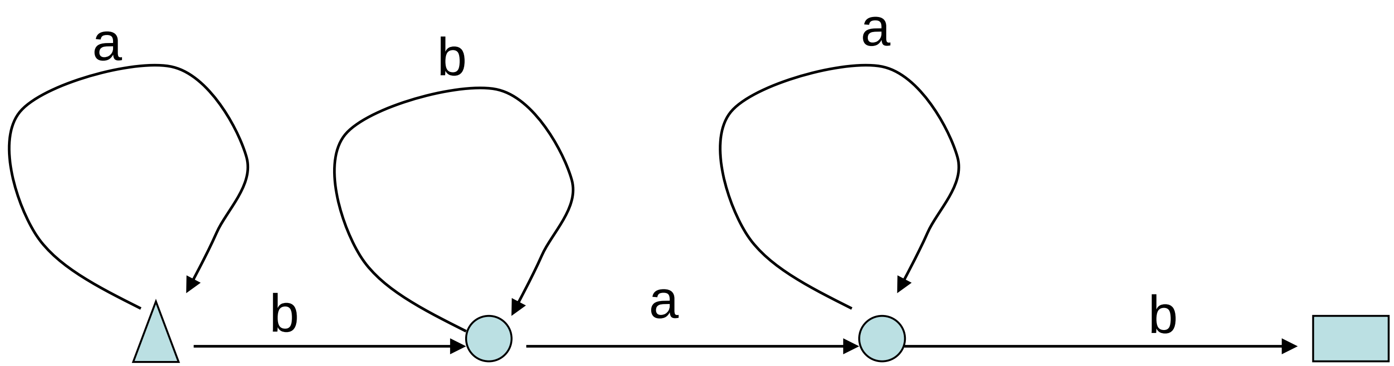
V2 = {a, b}

E2 = (a a + a b + b a + b b) *

"Tous les chemins sont étiquetés par un mot dont le nombre de lettres est pair"

Exemple 3

Soit G3 le graphe



Expression régulière représentant G3

V3 = {a, b}

E3 $= a * b\ b * a\ a * b \quad = a * b^{+} a^{+} b$

4.1 Automates à états finis déterministe AEFD

Définition

Un AEFD M est la donnée d'un quintuplet

$M = (Q, V, q_0, F, T)$

où :

- Q : ensemble d'états
- V : vocabulaire / alphabet
- $q_0 \in Q$: état initial
- $F \subseteq Q$: ensemble d'états finaux / terminaux
- T : ensemble de transitions

$$(q, x, q') \in (Q, V, Q)$$

ou fonction de transition

$$(Q, V) \rightarrow Q$$

Machine composée de :

1. Une mémoire = ruban où on place les symboles d'un mot construit sur un alphabet V
2. Une tête de lecture qui peut lire un symbole x de V à la fois, dans la même direction et qui est dans l'un des états q d'un ensemble d'états Q, dont un état initial q_0 et un sous-ensemble d'état terminaux $F \subseteq Q$
3. Un automate qui commande la tête de lecture

La tête est dans un état q_0 initial, et placée en face du 1er symbole x_0 de V inscrit sur le ruban

- en fonction de son état q et du symbole lu x de V, la tête adopte un nouvel état q' de Q s'il existe une transition de T

$$(q, x, q') \text{ ou } (q, x) \rightarrow q'$$

- la lecture s'arrête quand il n'y a plus de symbole à lire
- La suite de symboles de V "lus" est un mot "reconnu" par l'automate si la tête est dans l'un des états terminaux et qu'il n'y a plus de symbole à lire sur le ruban

Configuration – dérivabilité d'une configuration

Tout "instant" du fonctionnement d'un automate

$M = (Q, V, q_0, F, T)$

est caractérisé par

- un état q de Q
- le mot v, suite des symboles qui restent à lire à cet instant

Configuration

élément (q, v) de Q x V*

Configuration initiale

(q_0, v_0), où v_0 est le mot à lire

Une configuration (q', w) **est une dérivation immédiate** d'une configuration (q,v)

$$(q, v) \rightarrow (q', w)$$

s'il existe un symbole "a" de V tel que : v = a . w

et si $(q, a) \rightarrow (q') \in T$ ou $(q, a, q') \in T$ ou $q' = T(q, a)$

Une configuration (q', w) **est dérivable** à partir de (q, v) s'il existe une suite finie de dérivations immédiates

$$(q, v) \rightarrow (q_1, w_1) \rightarrow \dots \rightarrow (q_k, w_k) = (q', w)$$

on note

$$(q, v) \rightarrow^* (q', w)$$

Un mot v sur V* est reconnu par un automate

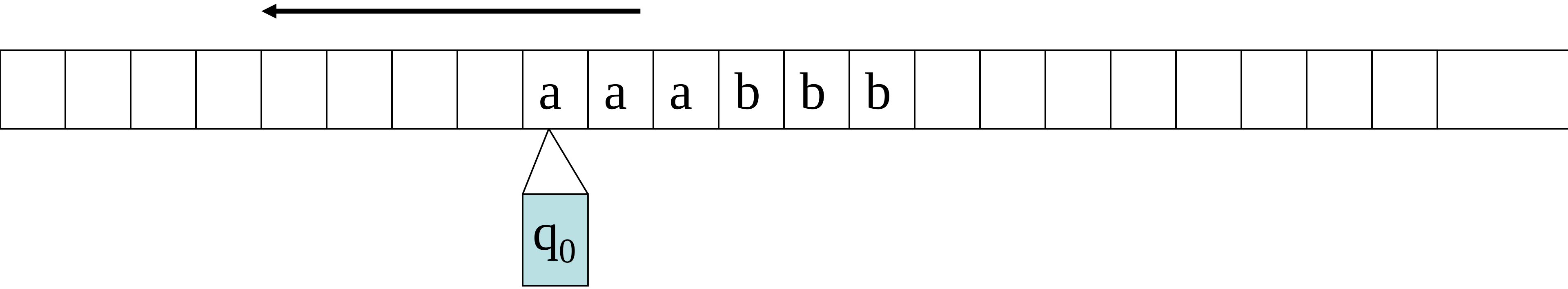
M = (Q, V, q_0, F, T) s'il existe une dérivation

$$(q_0, v) \rightarrow^* (q_f, \varepsilon) \text{ où } q_f \in F \text{ état final (ou terminal)}$$

Illustration

Configuration initiale

$(q_0, a\ a\ a\ b\ b\ b)$



Tête de lecture

Transitions de l'automate :

$(q_0, a) \rightarrow (q)$

$(q, a) \rightarrow (q)$

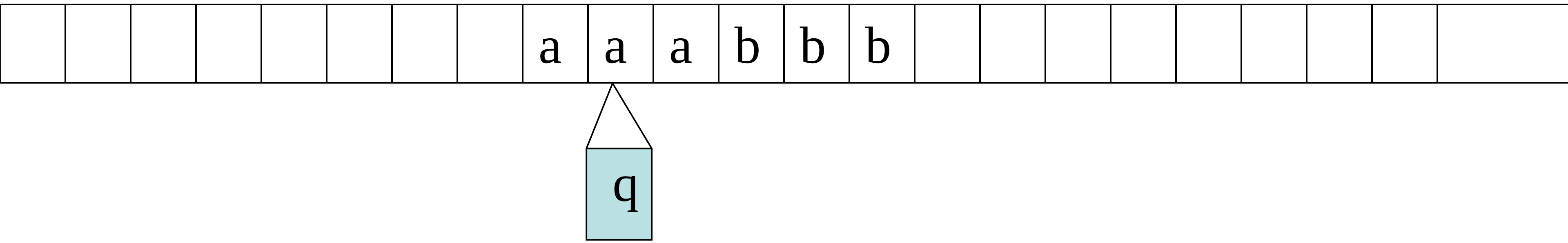
$(q, b) \rightarrow (q)$

$(q, \varepsilon) \rightarrow (q_f)$

a a a b b b est-il un mot reconnu ?

Configuration

(q, a a b b b)



Transitions :

$(q_0, a) \rightarrow (q)$

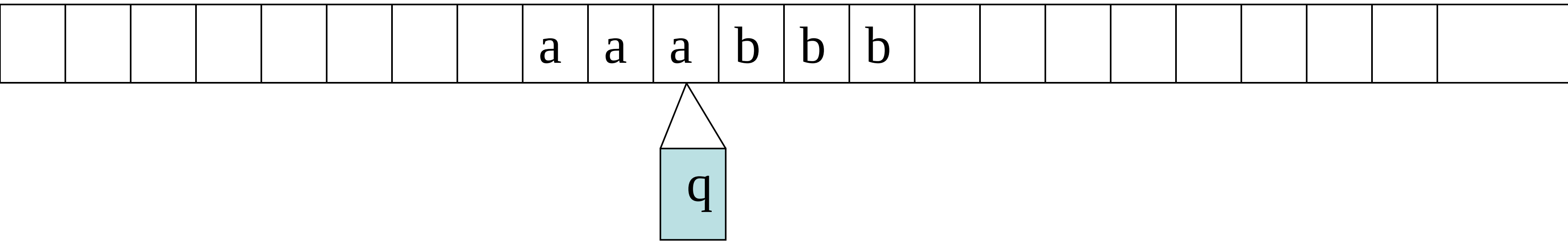
$(q, a) \rightarrow (q)$

$(q, b) \rightarrow (q)$

$(q, \varepsilon) \rightarrow (q_f)$

Configuration

(q, a b b b)



Transitions :

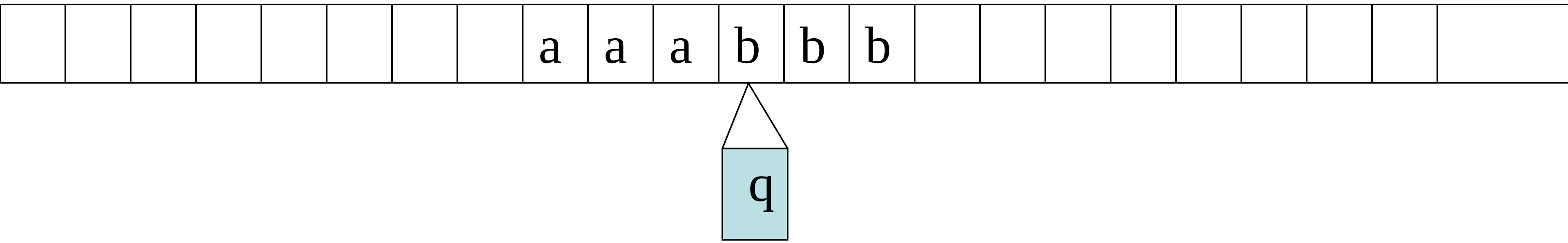
$(q_0, a) \rightarrow (q)$

$(q, a) \rightarrow (q)$

$(q, b) \rightarrow (q)$

$(q, \varepsilon) \rightarrow (q_f)$

Configuration
(q, b b b)



Transitions :

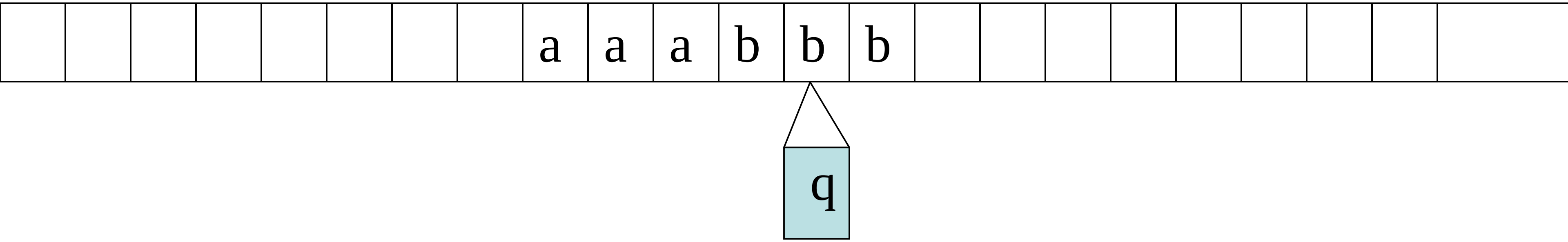
$(q_0, a) \rightarrow (q)$

$(q, a) \rightarrow (q)$

$(q, b) \rightarrow (q)$

$(q, \varepsilon) \rightarrow (q_f)$

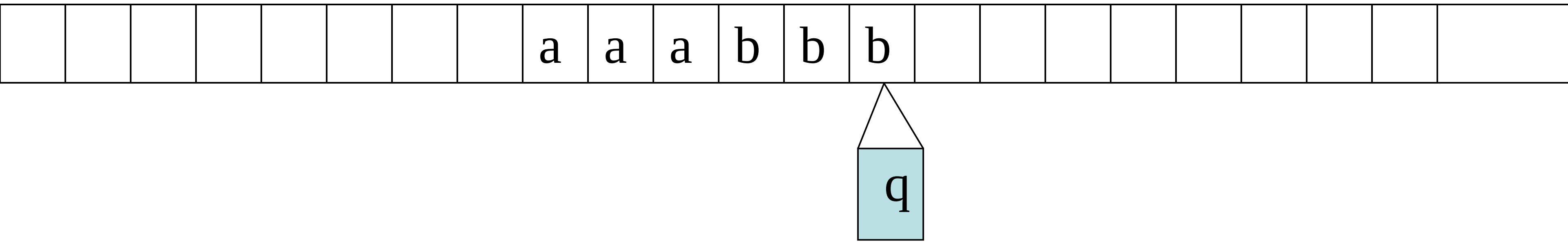
Configuration
(q, b b)



Transitions :
$(q_0, a) \rightarrow (q)$
$(q, a) \rightarrow (q)$
$(q, b) \rightarrow (q)$
$(q, \varepsilon) \rightarrow (q_f)$

Configuration

(q, b)



Transitions :

$(q_0, a) \rightarrow (q)$

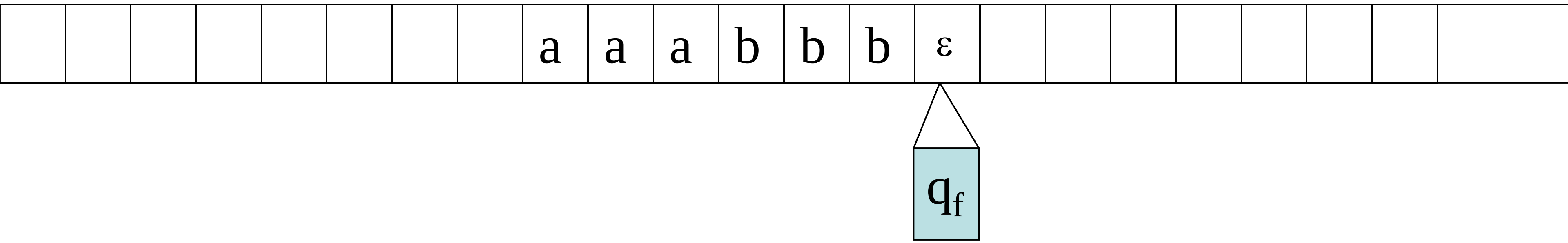
$(q, a) \rightarrow (q)$

$(q, b) \rightarrow (q)$

$(q, \varepsilon) \rightarrow (q_f)$

Configuration terminale

(q_f, ε)



Transitions :

$(q_0, a) \rightarrow (q)$

$(q, a) \rightarrow (q)$

$(q, b) \rightarrow (q)$

$(q, \varepsilon) \rightarrow (q_f)$

Tout automate

$M = (Q, V, q_0, F, T)$

peut être représenté par un graphe orienté

$G = \quad (S, A, INITIAL, TERMINAL)$

- Tout sommet s de S est identifié à un état q de Q
- Le sommet initial de S est identifié à l'état initial q_0
- Tout arc a = (INITIAL (a), TERMINAL (a)) de A entre 2 sommets de S est identifié à une transition

  $(q, a, q') \in T$ ou $(q, a) \rightarrow q'$

avec

$a \in V$

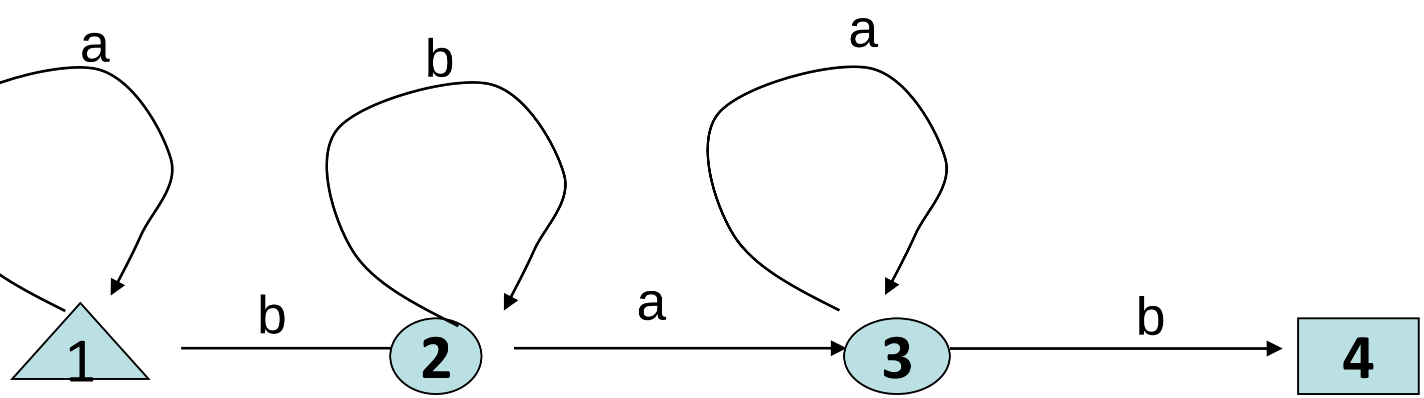
$q = INITIAL (a)$

$q' = TERMINAL (a)$

- On <u>souligne</u> les états terminaux de F

Exemple 3

Soit G3 le graphe



G3 représente l'expression régulière

E3 = a * b b * a a * b = a * b $^+$ a $^+$ b

G3 représente un automate

M =(Q, V, q_0, F, T)

Q = (1, 2, 3, 4)

V= (a, b)

q_0 = 1

F = 4

T =

V / Q	a	b
1	1	2
2	3	2
3	3	4
4	-	-

Exemple 4

M1 = (Q, V, q_0, F, T)

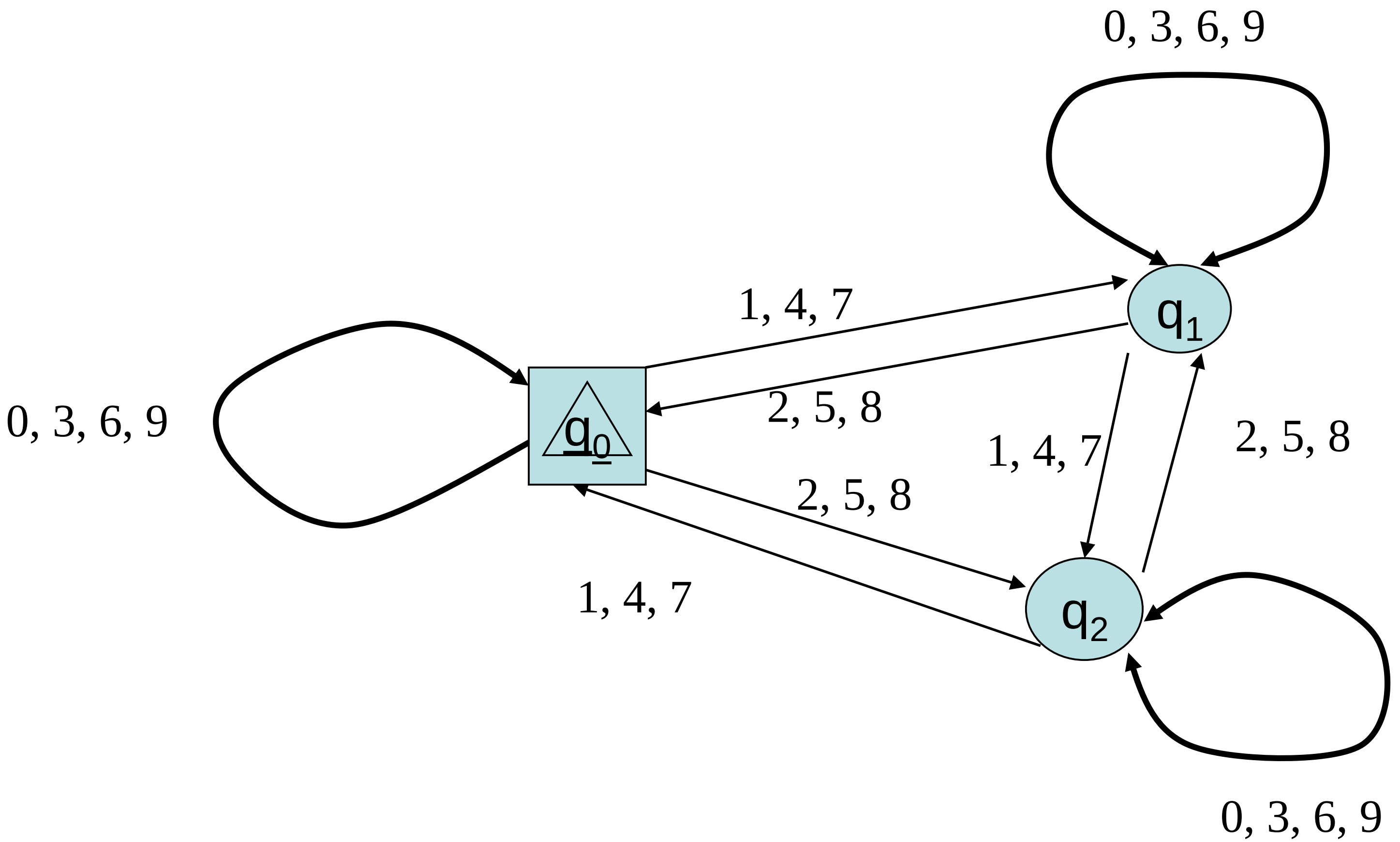
Q = { q_0, q_1, q_2 }

V = { 0, …, 9 }

F = { $\underline{q_0}$ }

T =

V / Q	0, 3, 6, 9	1, 4, 7	2, 5, 8
$\underline{q_0}$	$\underline{q_0}$	q_1	q_2
q_1	q_1	q_2	$\underline{q_0}$
q_2	q_2	$\underline{q_0}$	q_1



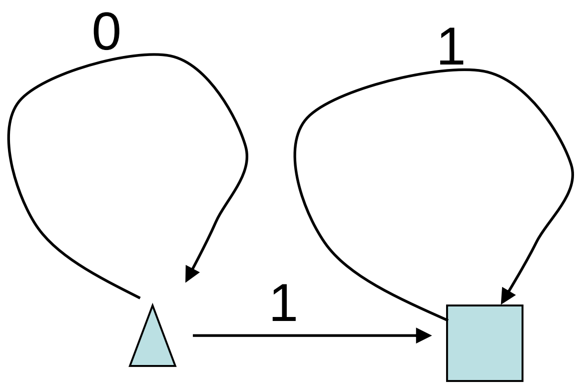
Exemple

v1 = 150 est reconnu par M1,

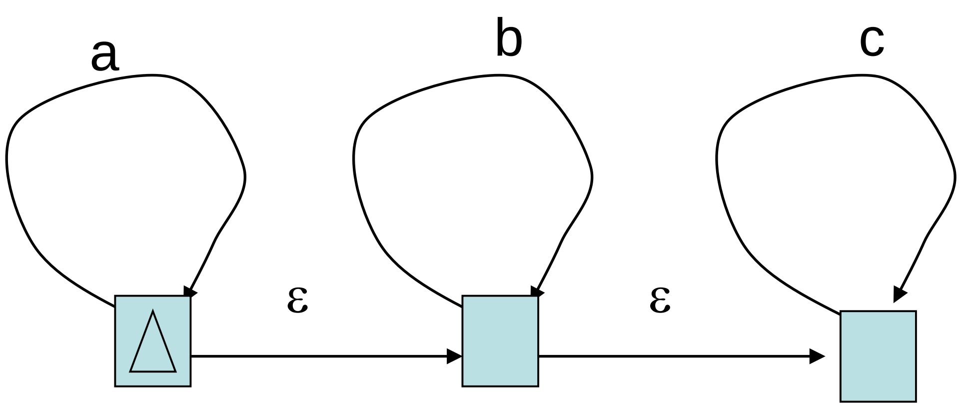
v2 = 149 n'est pas reconnu par M1

Exercices : trouver un AEFD pour les langages L1 et L2

1- L1 = { 0^p 1^n, p >=0, n >= 1]



2- L2 = { a^p b^k c^m, p >=0, k >= 0, m >= 0]



4.2 Automates à états finis non déterministe AEFND

Un AEFND M est la donnée d'un quintuplet

(Q, V, q_0, F, Δ)

où :

- Q : ensemble d'états
- V : vocabulaire / alphabet
- $q_0 \in Q$: état initial
- $F \subseteq Q$: ensemble d'états finaux / terminaux
- Δ : ensemble de transitions

$$(Q, V, Q^*)$$

ou relation de transition

$$(Q, V) \rightarrow Q^*$$

Exemple 5 :

M2 = (Q, V, q_0, F, Δ)

Q = { 0, 1, 2, 3 , 4 }

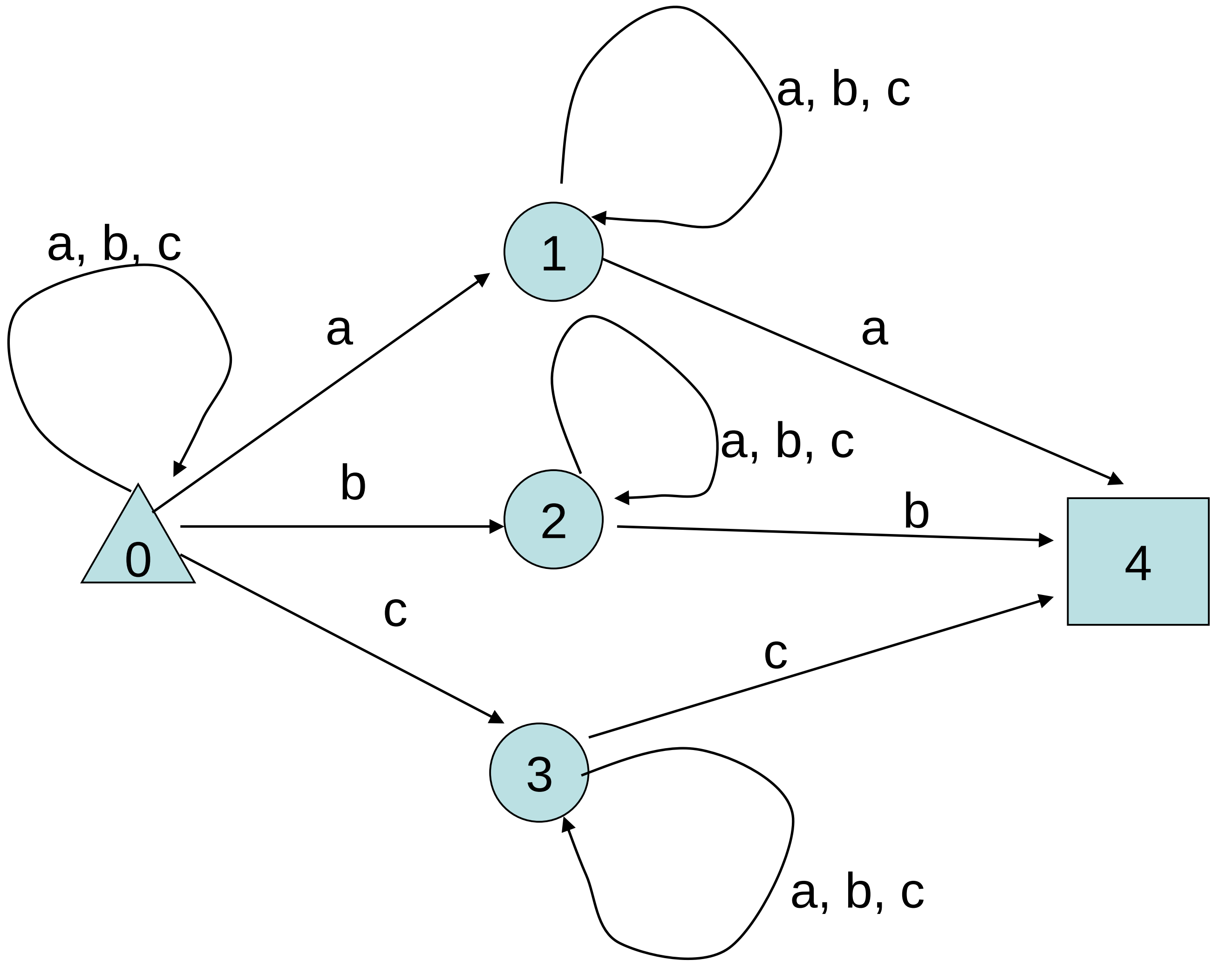
V = { a, b, c }

q_0 = 0

F = { <u>4</u> }

Δ =

V / Q	a	b	c
0	0, 1	0, 2	0, 3
1	1, <u>4</u>	1	1
2	2	2, <u>4</u>	2
3	3	3	3, <u>4</u>
<u>4</u>	-	-	-



Langage = ensemble des mots dont la dernière lettre se trouve déjà dans le mot

4.3 "Déterminisation" d'un AEFND

Principe : Soit M = (Q, V, q_0, F, Δ) un AEFND.

Les états et transitions de l' AEFD MD équivalent sont construits à partir des états et des ensembles de transitions de M

Définition

Une ε transition est une transition (p, ε , q) qui fait changer d'état un automate de p à q sans consommer de lettre de V – "spontanément"

4.3.1 Cas particulier : l'AEFND ne contient pas d'ε transition

- Alphabet de MD = alphabet de M = V

1. Etat initial de MD = état initial de M = q_0
2. Pour chaque lettre "a" de V, ajouter à MD un état qui rassemble l'ensemble $\{q_1, ..., q_n\}$ des états de Q accessibles par l'une des transitions (q_0, a, q_i), i = 1,..., n de Δ
3. Pour chaque nouvel état de MD créé, recommencer 2 jusqu'à ce qu'aucun nouvel état soit créé
4. Tout état de MD contenant au moins l'un des états q_f de F est un état terminal de MD
5. Renumérotez tous les états de MD

Exemple 6 :

M3 $= (Q, V, q_0, F, \Delta)$

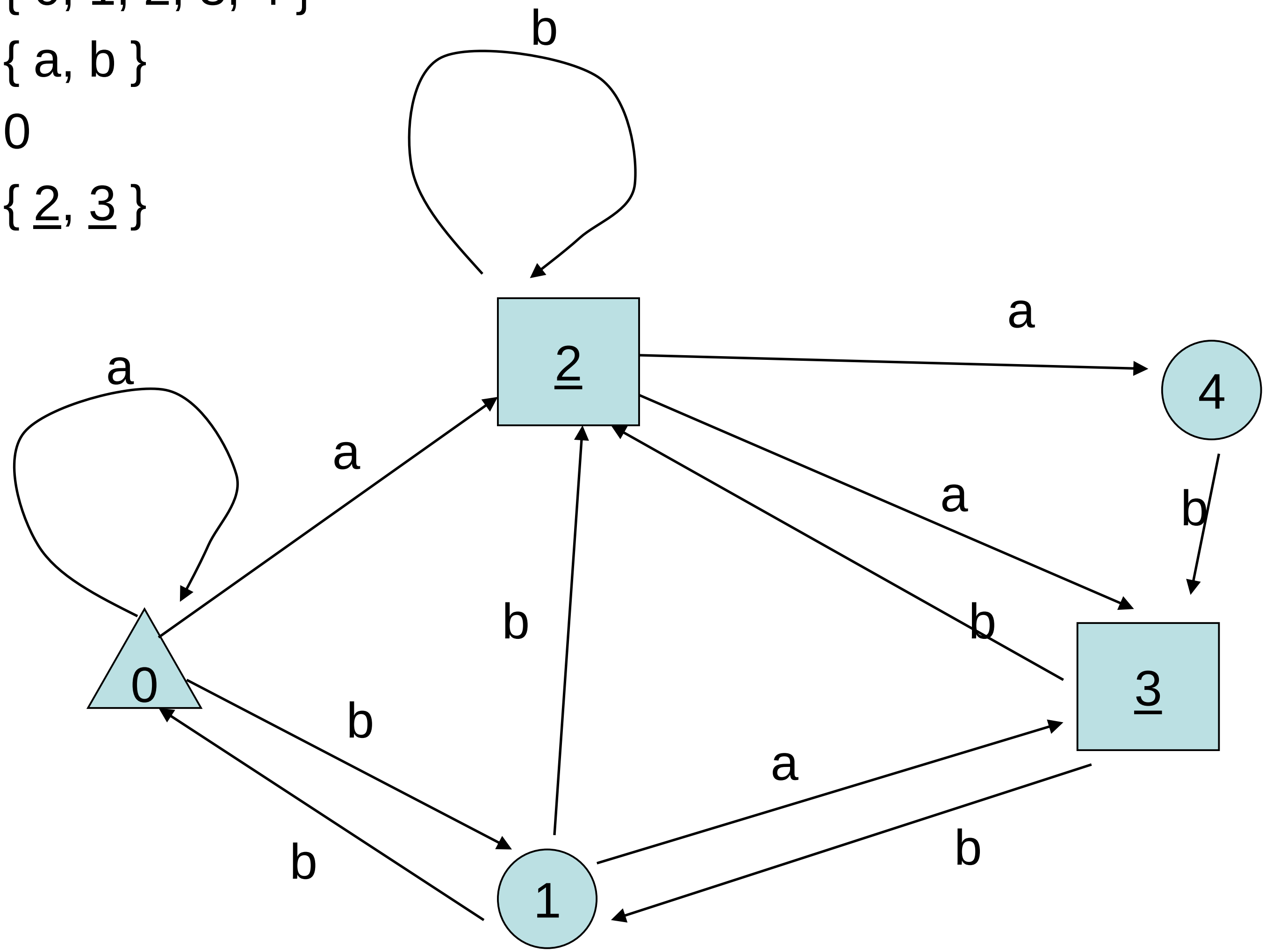
Q $= \{0, 1, 2, 3, 4\}$

V $= \{a, b\}$

q_0 $= 0$

F $= \{\underline{2}, \underline{3}\}$

Δ $=$



Δ =

Q \ V	a	b
0	0, 2	1
1	3	0, 2
2	3, 4	2
3	-	1, 2
4	-	3

Automate M3D : on applique l'algorithme

T =

	Q \ V	a	b
0	0	0, 2	1
1	0, 2	0, 2, 3, 4	1, 2
2	1	3	0, 2
3	0, 2, 3, 4	0, 2, 3, 4	1, 2, 3
4	1, 2	3, 4	0, 2
5	3	-	1, 2
6	1, 2, 3	3, 4	0, 1, 2
7	3, 4	-	1, 2, 3
8	0, 1, 2	0, 2, 3, 4	0, 1, 2

Renumérotation des états du nouvel automate M3D

T =

V Q	a	b
0	1	2
1	3	4
2	5	1
3	3	6
4	7	1
5	-	4
6	7	8
7	-	6
8	3	8

M3D = (QD, V, q_0, FD, T)

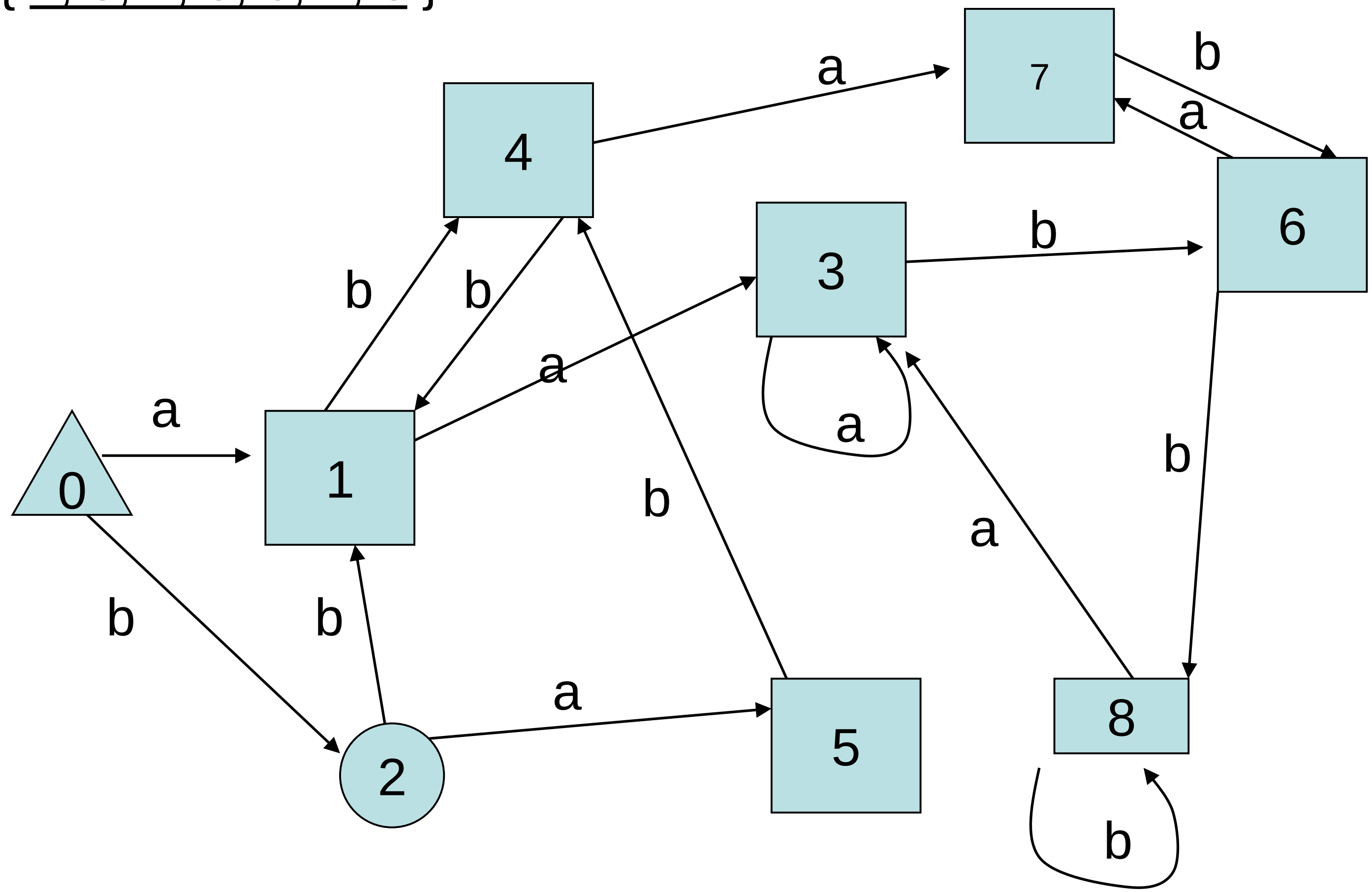
QD = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }

V = { a, b }

q_0 = 0

FD = { <u>1, 3, 4, 5, 6, 7, 8</u> }

T =



4.3.2 Cas général : : l'AEFND contient des ε transition

Principe : considérer l' ε – fermeture des ensembles d'états

Définition

ε – fermeture de l'ensemble d'états Etats = $\{ q_1, \ldots, q_n \}$

= ensemble des états accessibles depuis un état q_i de Etats par des ε – transitions

Calcul de l'ε – fermeture de Etats = { $q_1, \ldots, q_n$ }

Placer tous les états q_i de Etats dans une pile P
ε – fermeture (Etats) = Etats
Tant que P n'est pas vide
Soit p sommet de P

Pour chaque état q tel que (p, ε ,q) $\in \Delta$
Si q n'est pas dans ε – fermeture (Etats)
Alors
ε – fermeture (Etats) = ε – fermeture (Etats) + q
empiler q dans P
Fin si
Fin pour

Si il n'existe aucun q tel que (p, ε ,q) $\in \Delta$
alors
dépiler p de P
fin si
Fin tant que

Exemple 7 :

M4 = (Q, V, q_0, F, Δ)

Q = { 0, 1, 2, 3, 4 }

V = { a, b, c }

q_0 = 0

F = { <u>4</u> }

Δ =

V / Q	a	b	c	ε
0	2	-	0	1
1	3	<u>4</u>	-	-
2	-	-	1, <u>4</u>	0
3	-	1	-	-
<u>4</u>	-	-	3	2

ε – fermeture ({ 0 }) = { 0, 1 }

ε – fermeture ({ 1, 2 })= { 1, 2, 0 }

ε – fermeture ({ 3, 4 })= { 3, 4, 2, 0, 1 } …

Déterminisation d'un AEFND avec des ε – transitions

Alphabet de MD = alphabet de M = V

F = ensemble des états terminaux de M

Etat initial de MD = $\mathcal{E}$–fermeture (q_0)

1. **Pour** chaque lettre "a" de V
   ajouter un état q_a qui rassemble l'ensemble d'états
   $\{q_1,..., q_n\}$ de Q accessibles par une transition de
   Δ : (q_0, a, q_i), i = 1,..., n
   \+ ε–fermeture (q_0)
   \+ ε–fermeture (q_1)
   \+ . . .
   \+ ε–fermeture (q_n)
3. **Pour** chaque état q_a de MD créé, recommencer 1 jusqu'à ce qu'aucun nouvel état soit créé
4. Tout état de MD contenant au moins l'un des états de F est un état terminal de MD
5. Renumérotez tous les états

Exemple 8 : automate M4D = M4 déterminisé

- état initial de M4D = ε – fermeture (0) = ({ 0, 1 })
- T ({ 0, 1 } , a) =

  Δ ({ 0, 1 }, a) = { 2, 3 }

  \+ ε – fermeture ({ 0, 1 }) = { 0, 1 }

  \+ ε – fermeture ({ 2, 3 }) = { 0, 1 }

d'où :

T (({ 0, 1}), a) = ({ 0, 1, 2, 3 })

- T ({ 0, 1 } , b) =

  Δ ({ 0, 1 }, b) = { 4 }

  \+ ε – fermeture ({ 0, 1 }) = { 0, 1 }

  \+ ε – fermeture ({ 4 }) = ({ 2, 0, 1 })

d'où :

T (({ 0, 1 }), b) = ({ 0, 1, 2, 4 })

etc.

Q \ V	a	b	c
0, 1	0, 1, 2, 3	0, 1, 2, 4	0, 1
0, 1, 2, 3	0, 1, 2, 3	0, 1, 2, 4	0, 1, 2, 4
0, 1, 2, 4	0,1, 2, 3	0, 1, 2, 4	0, 1, 2, 3, 4
0, 1, 2, 3, 4	0, 1, 2, 3, 4	0, 1, 2, 3, 4	0, 1, 2, 3, 4

Après renumérotation des états de M4D

V Q	a	b	c
0	1	<u>2</u>	0
1	1	<u>2</u>	<u>2</u>
<u>2</u>	1	<u>2</u>	<u>3</u>
<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>

F = { <u>2, 3</u> }

Exercice

Dessiner les 2 graphes avant et après déterminisation

4.4 Minimisation d'un AEFD

But : A partir d'un AEFD M donné complet, construire un nouvel automate Mm équivalent ayant le minimum d'états possible.

Principe : on définit des classes d'équivalence entre états par raffinements successifs. Chaque classe d'équivalence obtenue forme un seul et même état du nouvel automate

1. Compléter l'automate : ajouter un état "puit" dans les cases vides de la matrice de transition
2. Constituer 2 classes

   A = { états terminaux }

   B = { états non terminaux }
3. **Pour chaque classe**

   Si il existe un symbole a et 2 états q1, q2 d'une même classe tels que

   Δ (q1, a) et Δ (q2, a) n'appartiennent pas à la même classe,

   Alors créer une nouvelle classe C

   enlever q2 de sa classe et placer q2 dans C

   Fin pour
4. Recommencer 3 jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de classes à séparer
5. Regrouper les classes qui ont "le même comportement"
6. **Chaque classe restante forme un état du nouvel automate Mm**

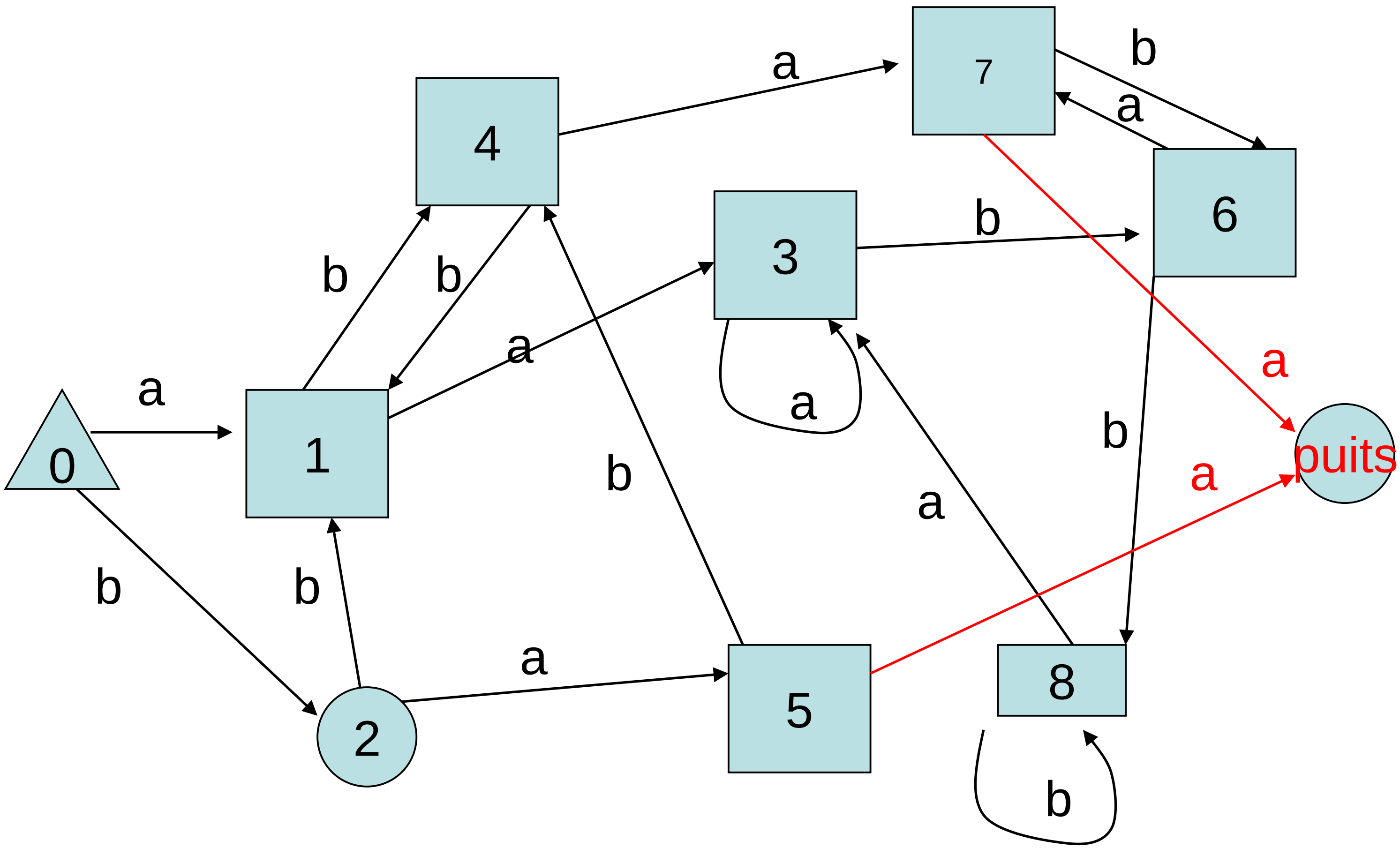
Exemple 9 :
Construction de M3Dm, automate minimal équivalent de M3D

1. On complète M3D avec l'ajout d'un état "puit" pour les transitions manquantes

T =

V Q	a	b
0	<u>1</u>	2
<u>1</u>	<u>3</u>	<u>4</u>
2	<u>5</u>	<u>1</u>
<u>3</u>	<u>3</u>	<u>6</u>
<u>4</u>	<u>7</u>	<u>1</u>
<u>5</u>	puits	<u>4</u>
<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>
<u>7</u>	puits	<u>6</u>
<u>8</u>	<u>3</u>	<u>8</u>

Graphe de M3D complété



2- Classes initiales

A = { 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }

B = { 0, 2 }

3- Etude de la classe A

Les transitions qui partent des états de A restent dans A, sauf 5 qui est projeté vers l'état "puit" avec "a"
On crée une classe A1 pour 5

A = { 1, 3, 4, 6, 7, 8 }   A1 = {5}

Les transitions qui partent des états de A restent dans A, sauf 7 qui est projeté vers l'état "puit" avec "a"
On crée une classe A2 pour 7

A = { 1, 3, 4, 6, 8 }   A1 = {5} A2 = {7}

Les transitions qui partent des états de A restent dans A, sauf 4 qui est projeté vers l'état 7 avec "a"
On crée une classe A3 pour 4

A = { 1, 3, 6, 8 }   A1 = {5}   A2 = {7}   A3 = {4}

Les transitions qui partent des états de A restent dans A, sauf 6 qui est projeté vers l'état 7 avec "a"
On crée une classe A4 pour 6

A = { 1, 3, 8 }   A1 = {5}   A2 = {7}   A3 = {4}   A4 = {6}

Les transitions qui partent des états de A restent dans A, sauf 3 qui est projeté vers l'état A4 avec "b"
On crée une classe A5 pour 3

A = { 1, 8 }   A1 = {5}   A2 = {7}   A3 = {4}   A4 = {6} A5 = {3}

8 est séparable de 1 dans A à cause de "b"
On crée une classe A6 pour 8

A = { 1}   A1 = {5}   A2 = {7}   A3 = {4}   A4 = {6} A5 = {3}   A6 = {8}

La classe A est donc entièrement séparable
Aucun regroupement de classe possible

2- Etude de la classe B

T (0, b) = 2 et T (2, b) = 1 n'appartiennent pas à la même classe, 0 et 2 ne sont pas équivalents

on crée la classe B1 pour 2

B = { 0 }

B1 = { 2 }

Conclusion

Toutes les classes de l'automate M3D sont séparables et aucun regroupement de classes de même comportement

Cet automate est donc minimal

4.5 AEFD associé à une expression régulière

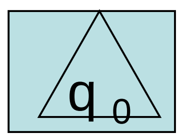
Théorème

Pour toute expression régulière E définie sur un vocabulaire V, il existe un automate M_E qui accepte le langage $L(E)$ dénoté par E

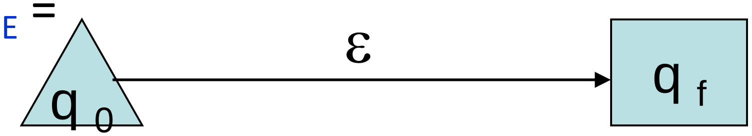
Démonstration

soit E une expression régulière

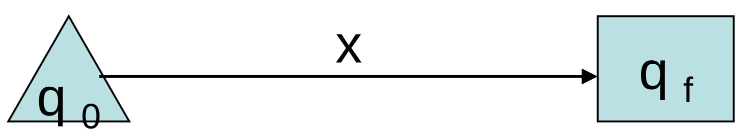
1. $E = \phi$: M_E =



2. $E = \varepsilon$: M_E =

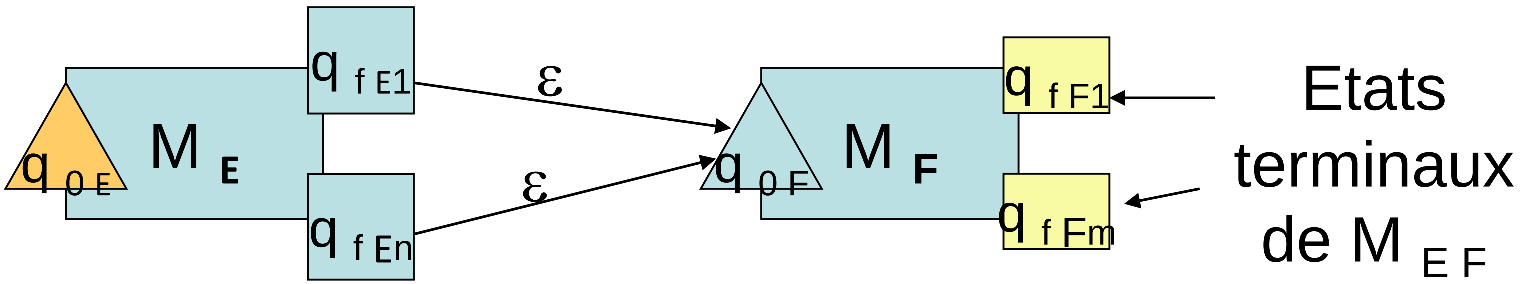


3. **E** = x appartient à V : M_E =



Soient **E** et F 2 expressions régulières et $M_{\mathbf{E}}$ et M_F les 2 automates associés

Automate $M_{\mathbf{E\,F}}$ associé à l'expression E F



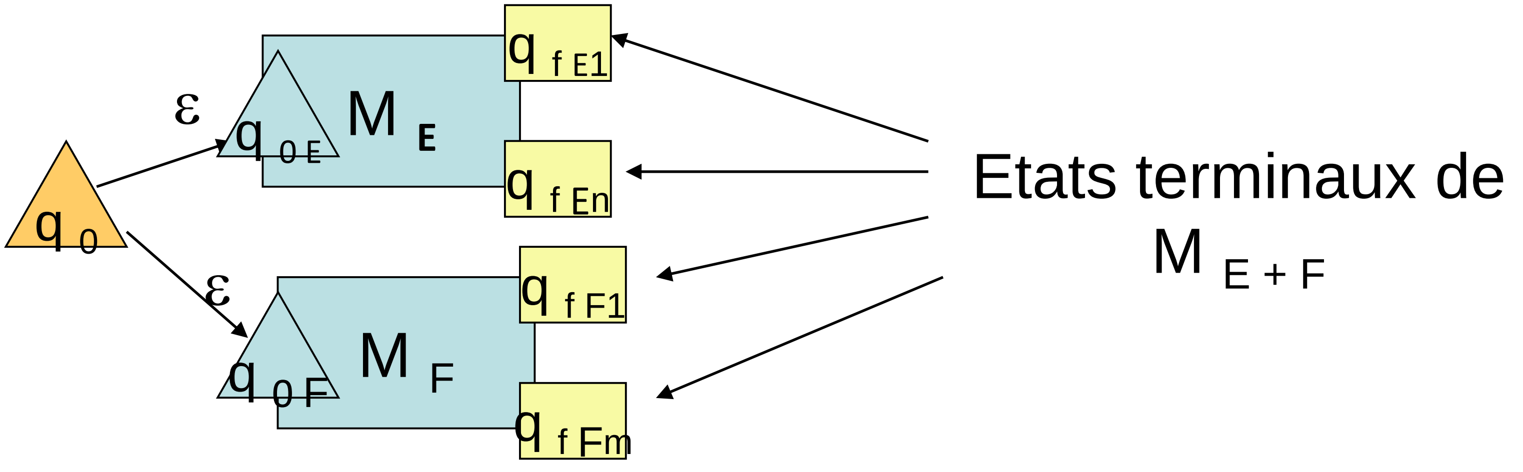
Etat initial de $M_{E\,F}$

= $q_{0\,E}$ état initial de $M_{\mathbf{E}}$

Etats terminaux de $M_{E,F}$

= { q_{F1} , …, q_{Fm} } états terminaux de M_F

Automate M_{E+F} associé à l'expression E + F



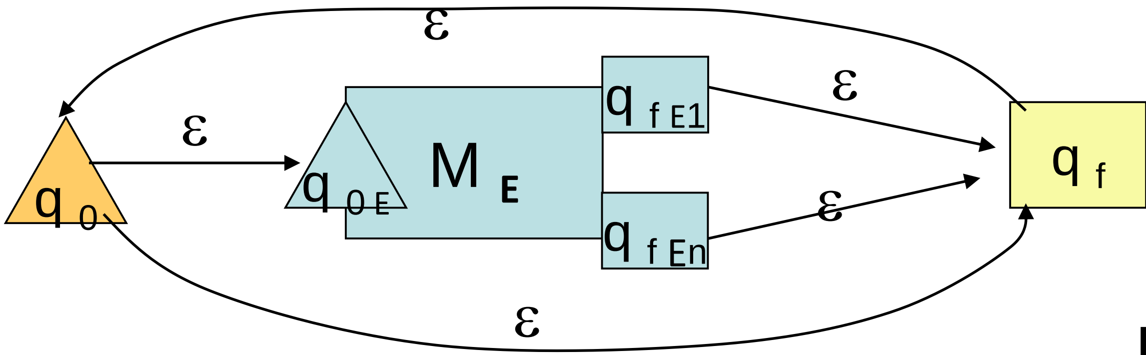
Etat initial de M_{E+F}

= nouvel état q_0

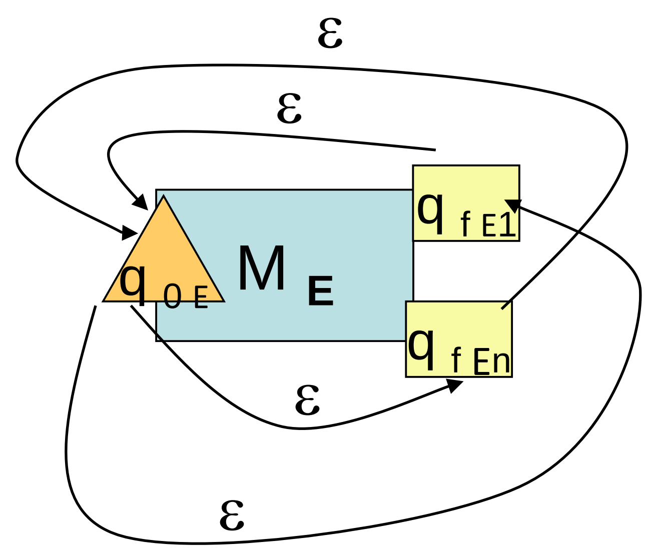
Etats terminaux de M_{E+F}

= tous les états terminaux de M_E et de M_F

Automate M_{E^*} associé à l'expression $\mathbf{E}^*$



Forme simplifiée



Etat initial de M_{E^*}

= nouvel état q_0

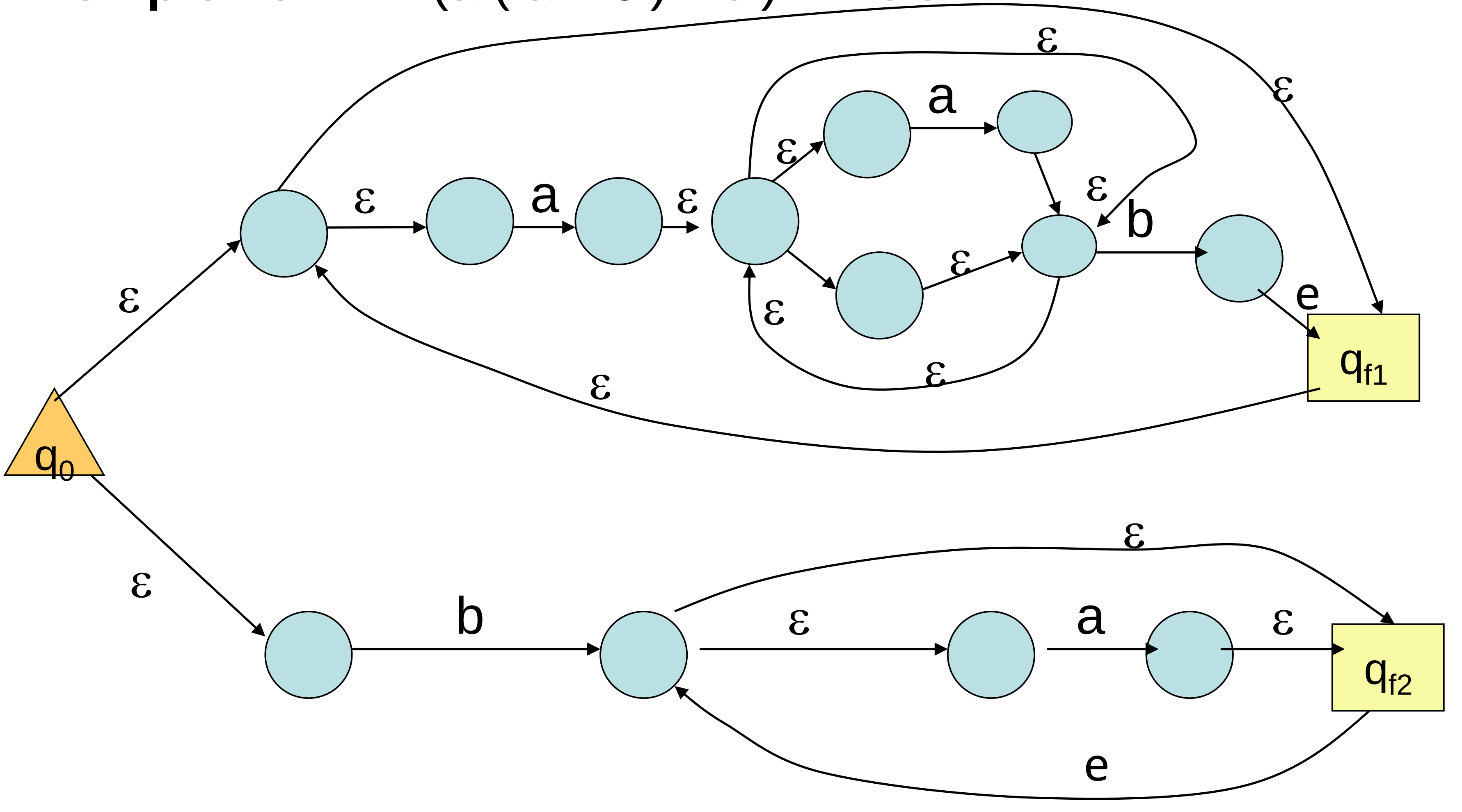
Etat terminal de M_{E^*}

= nouvel état q_f

ε-transitions

3 31 01 2022 8h20 – 10h20

Exemple 10 : E = (a (a + ε) * b) * + b a *



4.6 Expression régulière associée à un AEFD

Soit L le langage que reconnaîtrait l'automate si q était son état initial et E l'expression régulière qui dénote L

On va produire un système d'équations liant toutes les E_i associés à tous les états q_i

Chaque transition $(q_i, a) \rightarrow q_k$ produit l'équation :

$E_i = a E_k$

Pour chaque q_i terminal, on produit l'équation :

$E_i = \varepsilon$

Les équations $E_i = a$ et $E_i = b$ se regroupent et produisent l'équation :

$E_i = a + b$

Remarque

L'équation $E_i = a E_i + b$ est équivalente à l'équation :

$E_i = a^* b$

On cherche à **réduire le système** d'équation pour **résoudre** l'équation associée à $\mathbf{E_0}$

Exemple 11 :

Trouver l'expression régulière associée à l'AEFD

M5 = (Q, V, q_0, F, T)

Q = { 0, 1, 2, 3 }

V = { a, b, c }

q_0 = 0

F = { 1, 3 }

T =

Q \ V	a	b	c
0	1	2	-
<u>1</u>	3	0	-
2	-	-	3
<u>3</u>	2	-	-

Système d'équations

$$
\begin{aligned}
E_0 &= a\,E_1 + b\,E_2 \\
E_1 &= a\,E_3 + b\,E_0 + \varepsilon \\
E_2 &= c\,E_3 \\
E_3 &= a\,E_2 + \varepsilon
\end{aligned}
$$

On cherche à calculer E_0

$$E_3 = a\,c\,E_3 + \varepsilon = (a\,c)^*\,\varepsilon$$
$$= (a\,c)^*$$

$$E_2 = c\,(a\,c)^*$$

$$E_1 = a\,(a\,c)^* + b\,E_0 + \varepsilon$$

$$E_0 = a\,E_1 + b\,E_2$$
$$= a\ (a\,(a\,c)^* + b\,E_0 + \varepsilon) + b\ c\,(a\,c)^*$$
$$= a\,b\,E_0 + a\,a\,(a\,c)^* + a + b\,c\,(a\,c)^*$$

$$E_0 = (a\,b)^*\,(a\,a\,(a\,c)^* + a + b\,c\,(a\,c)^*)$$

4.7 Automates à pile

Un automate à pile P est la donnée d'un heptuplet

(Q, VR, VP, \$, q_0, F, Δ)

où :

- Q : ensemble d’états
- VR : alphabet (du "ruban")
- VP : alphabet (de la "pile")
- $\$ \in VP$: symbole initial de pile
- $q_0 \in Q$: état initial
- $F \subseteq Q$: ensemble d’états finaux
- Δ : ensemble de transitions

Un élément de Δ = quintuplé

$(q, u, \alpha) \rightarrow (q', \beta)$

$q, q' \in Q$

$u \in VR^*$

$\alpha, \beta \in VP^*$

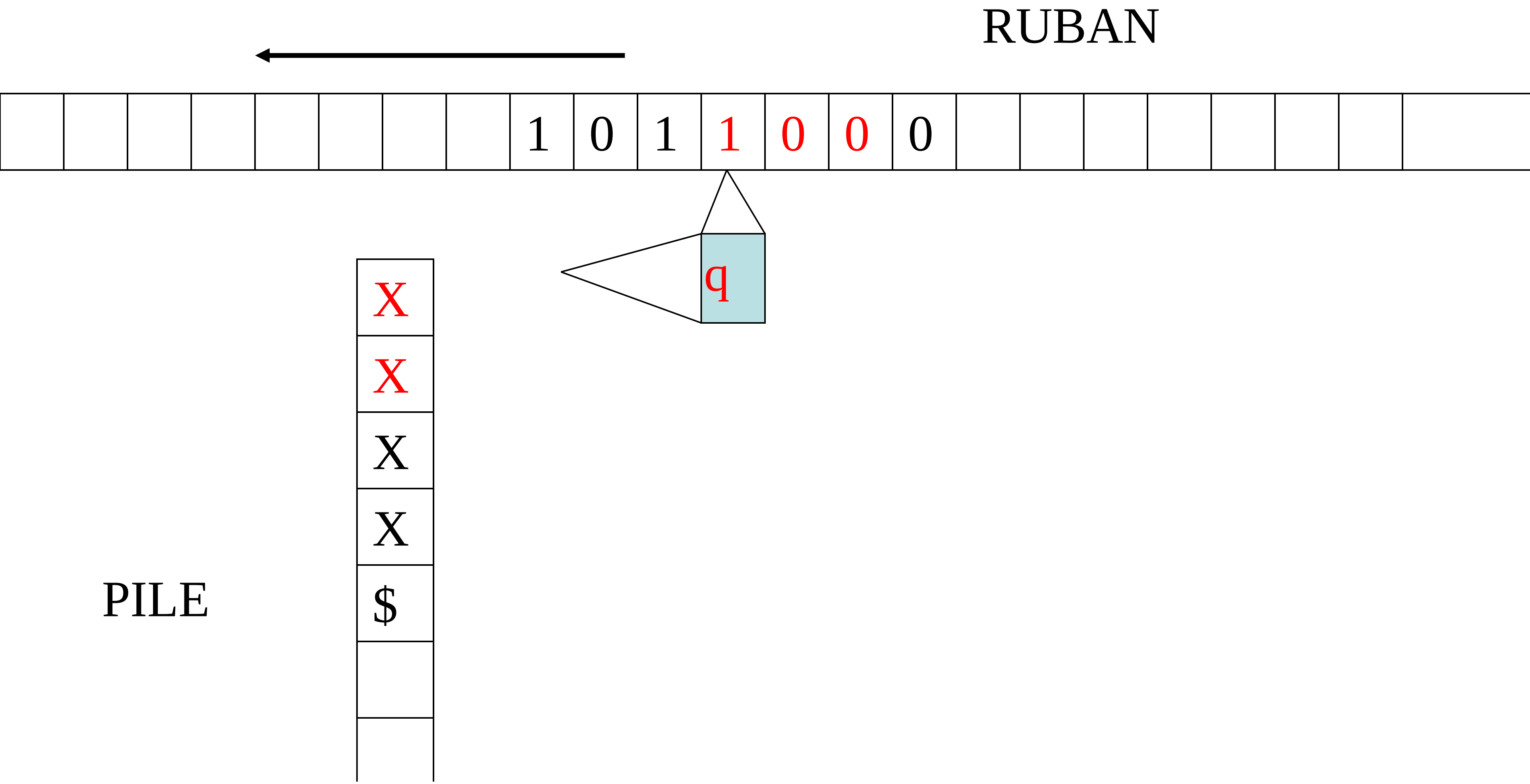
si dans l'état q, l'automate peut lire le mot u sur le ruban (de gauche à droite),

et si le mot α figure en haut de la pile (on lit α de haut en bas),

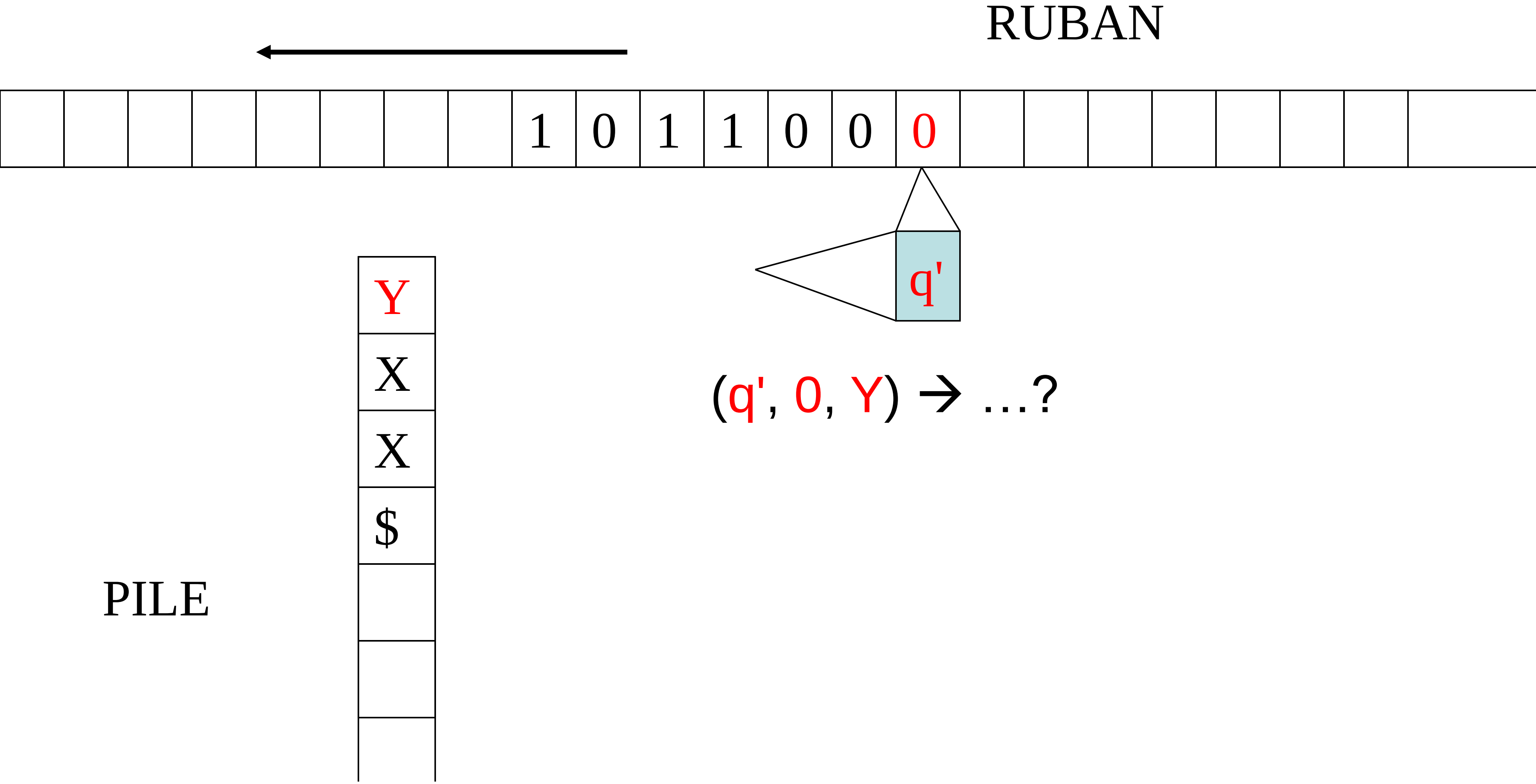
alors l'automate peut

1. passer dans l'état q',
2. lire u
3. remplacer α par β au sommet de la pile

$(q, 100, XX) \rightarrow (q', Y)$:



(q, 100, XX) → (q', Y) :



(q', 0, Y) → …?

Cas particuliers des 2 types de transitions

$(q, u, \varepsilon) \rightarrow (q', \beta)$

EMPILER β

$(q, u, \alpha) \rightarrow (q', \varepsilon)$

DEPILER α

4.8 Configuration

Triplet (q, u, v) où:

$q \in Q$; $u \in VR^*$; $v \in VP^*$

- q : état courant
- u : mot restant à lire (de gauche à droite)
- v : contenu de la pile (de haut en bas)

- **configuration initiale** : $(q_0, w, \$)$

  w = mot à reconnaître

- **configuration terminale**:
  - (q, ε, v) où $q \in F$: automate acceptant sur état final
  - $(q, \varepsilon, \varepsilon)$: automate acceptant sur pile vide

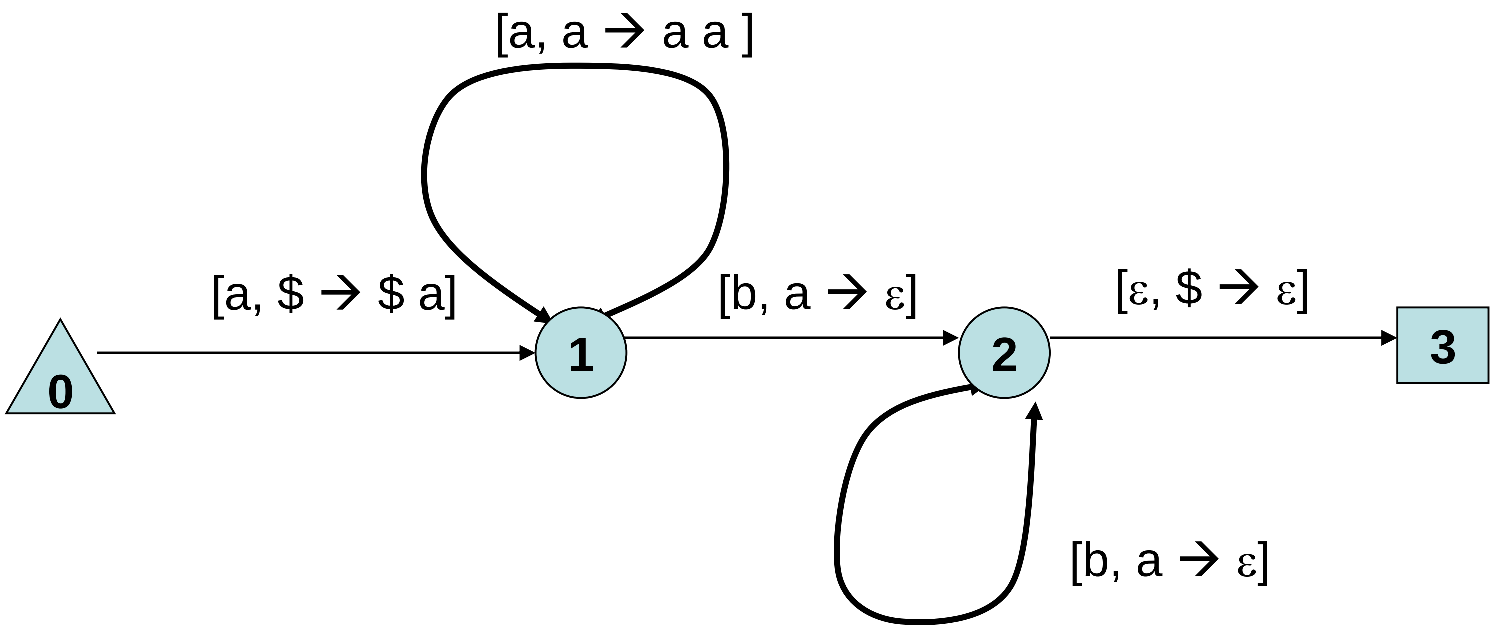
Exemple 12

Reconnaître $\{a^n b^n; n \geq 1\}$ "sur pile vide"

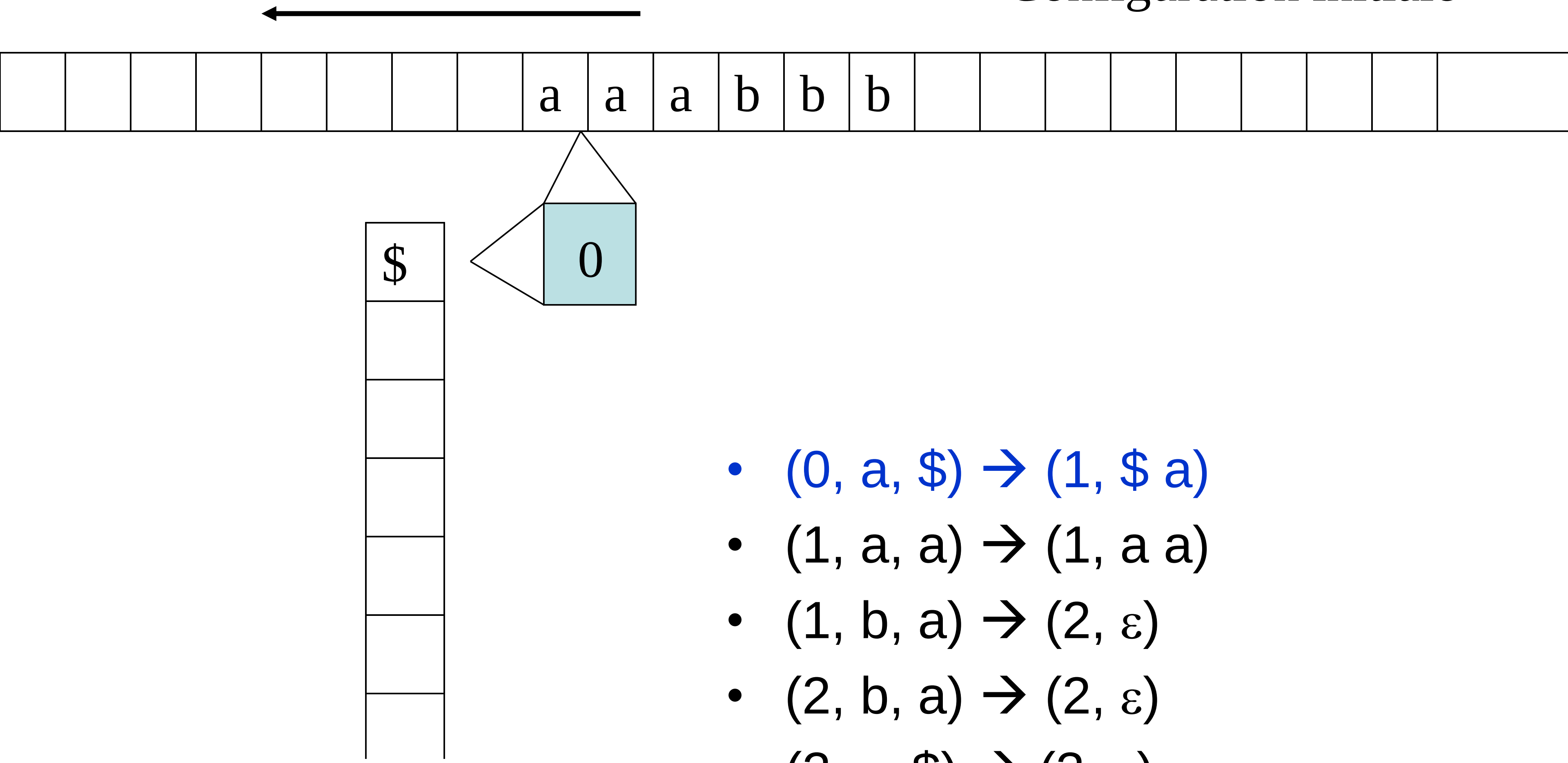
- **principe** : empiler des "a" tant que l'automate lit des "a", les dépiler tant que il lit des "b"
- conséquence : un automate à pile "sait" compter!

P = (Q, VR, VP, \$, q_0, F, Δ)
Q = { 0, 1, 2, 3 }
VR = { a, b)
VP = (\$, a, b }
q0 = 0
F = 3

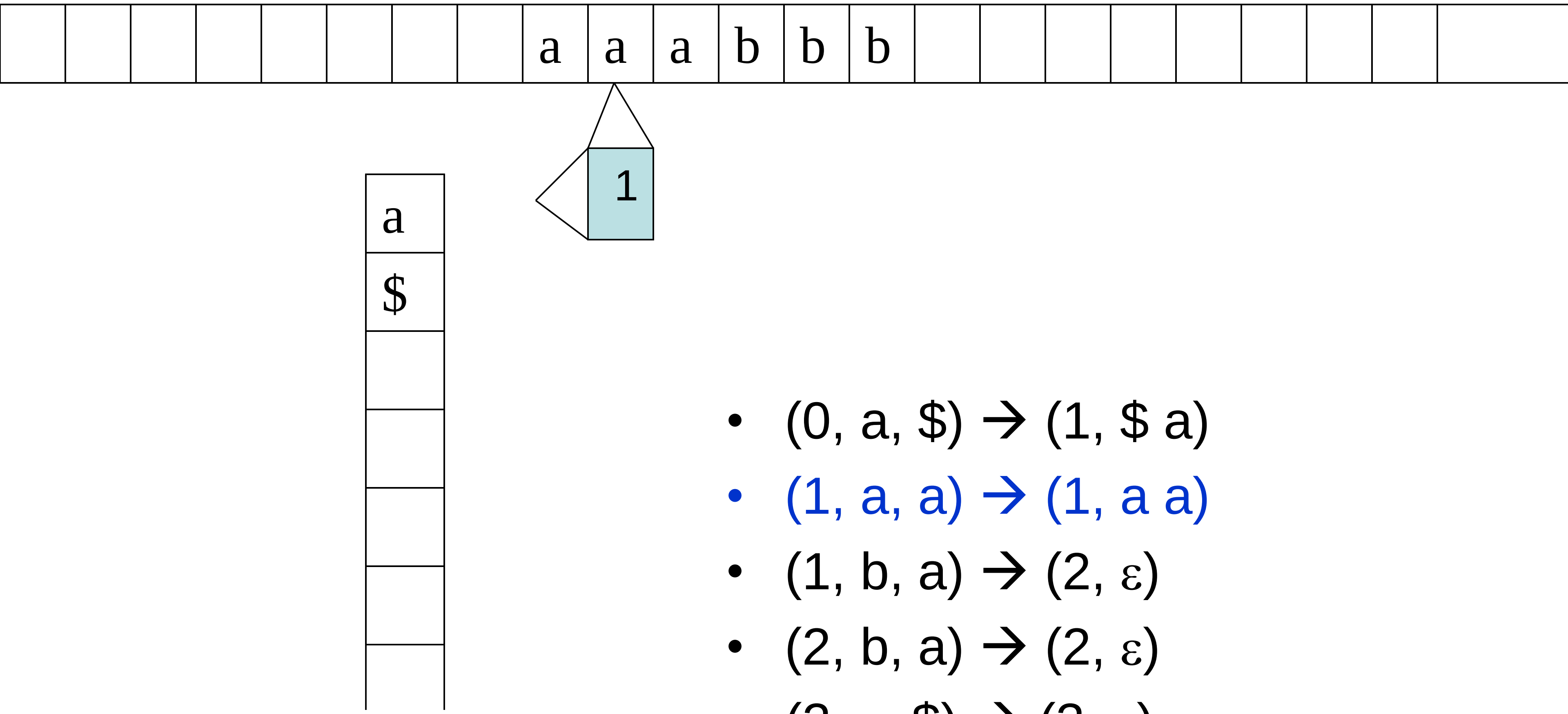
Δ =
(0, a, \$) → (1, \$ a)
(1, a, a) → (1, a a)
(1, b, a) → (2, ε)
(2, b, a) → (2, ε)
(2, ε, \$) → (3, ε)



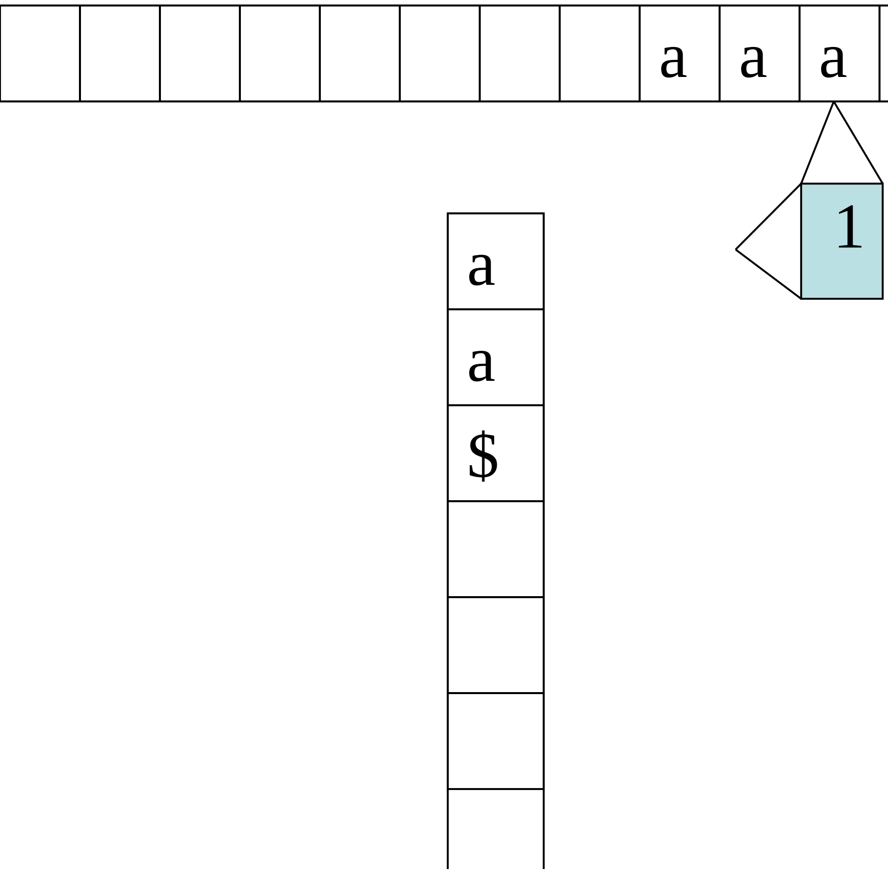
Configuration initiale



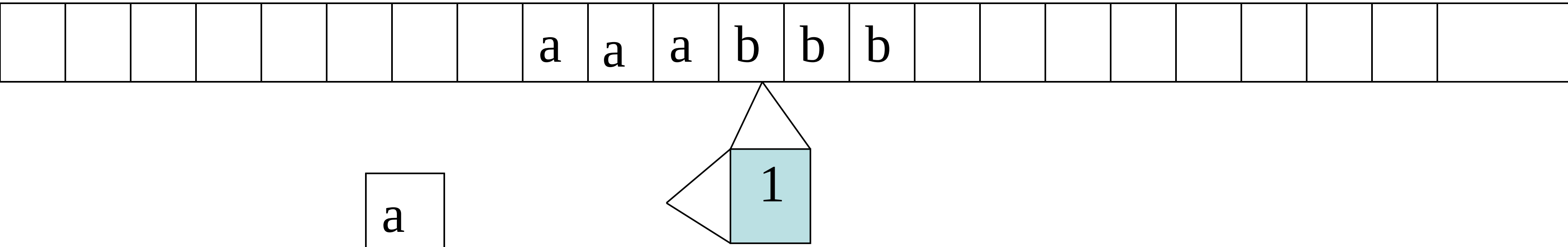
- $(0, a, \$) \rightarrow (1, \$\ a)$
- $(1, a, a) \rightarrow (1, a\ a)$
- $(1, b, a) \rightarrow (2, \varepsilon)$
- $(2, b, a) \rightarrow (2, \varepsilon)$
- $(2, \varepsilon, \$) \rightarrow (3, \varepsilon)$

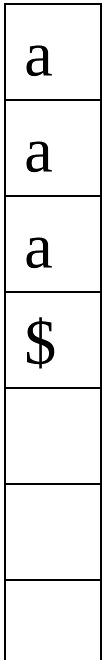


- $(0, a, \$) \rightarrow (1, \$\ a)$
- $(1, a, a) \rightarrow (1, a\ a)$
- $(1, b, a) \rightarrow (2, \varepsilon)$
- $(2, b, a) \rightarrow (2, \varepsilon)$
- $(2, \varepsilon, \$) \rightarrow (3, \varepsilon)$

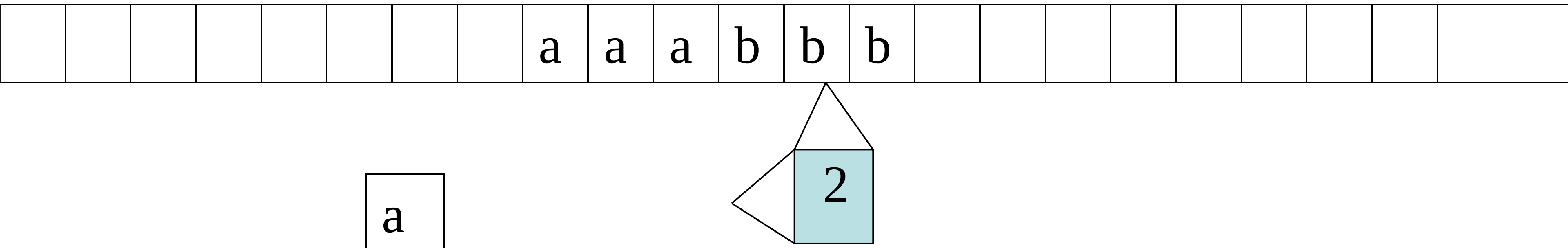


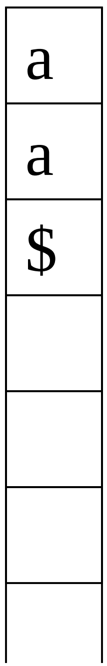
- (0, a, \$) → (1, \$ a)
- (1, a, a) → (1, a a)
- (1, b, a) → (2, ε)
- (2, b, a) → (2, ε)
- (2, ε, \$) → (3, ε)



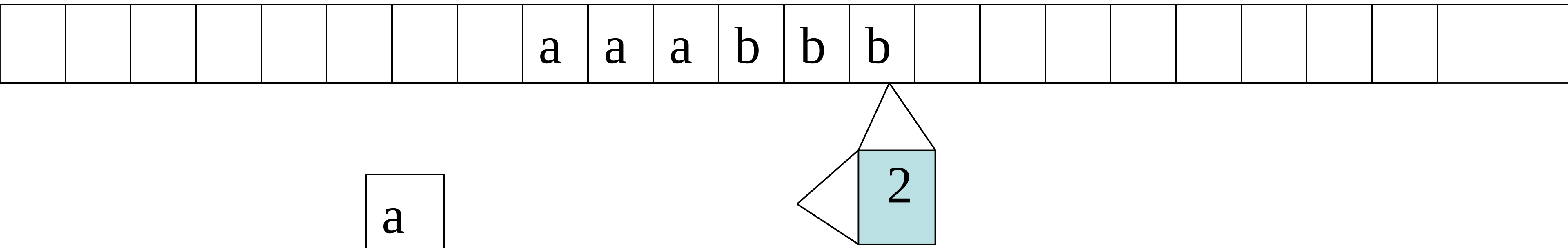


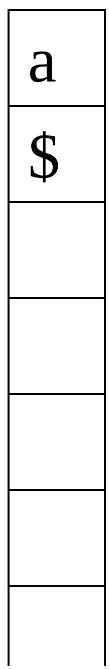
- (0, a, $) → (1, $ a)
- (1, a, a) → (1, a a)
- (1, b, a) → (2, ε)
- (2, b, a) → (2, ε)
- (2, ε, $) → (3, ε)



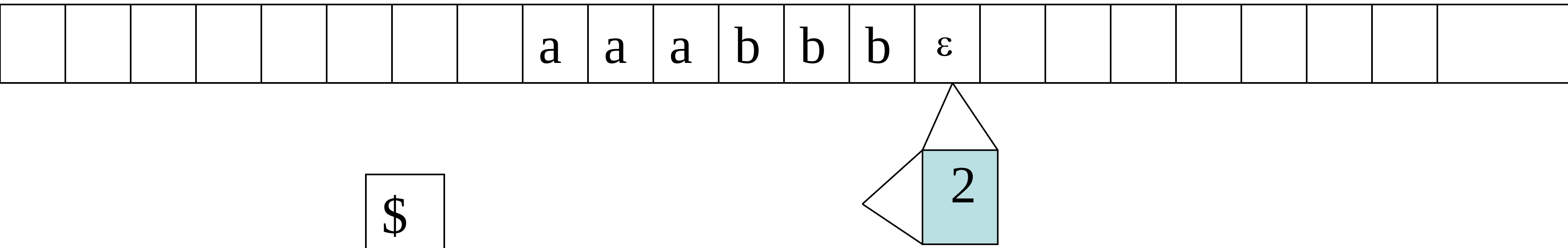


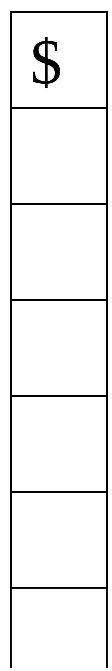
- $(0, a, \$) \rightarrow (1, \$\ a)$
- $(1, a, a) \rightarrow (1, a\ a)$
- $(1, b, a) \rightarrow (2, \varepsilon)$
- $(2, b, a) \rightarrow (2, \varepsilon)$
- $(2, \varepsilon, \$) \rightarrow (3, \varepsilon)$



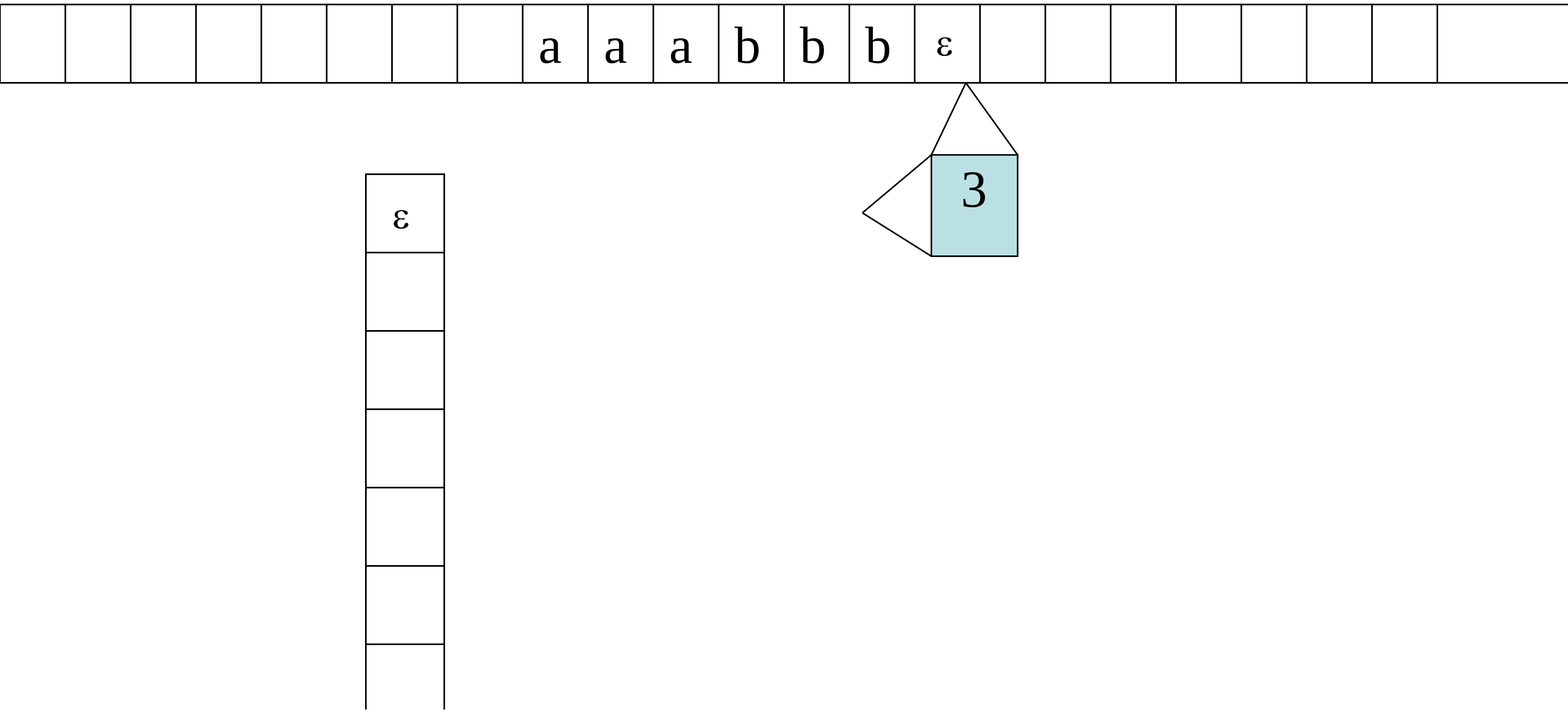


- (0, a, \$) → (1, \$ a)
- (1, a, a) → (1, a a)
- (1, b, a) → (2, ε)
- (2, b, a) → (2, ε)
- (2, ε, \$) → (3, ε)





- (0, a, $) → (1, $ a)
- (1, a, a) → (1, a a)
- (1, b, a) → (2, ε)
- (2, b, a) → (2, ε)
- (2, ε, $) → (3, ε)


a a a b b b ε
3
ε

4.9 Transformation d'une grammaire hors-contexte en un automate à pile

$G = (V_T, V_N, S, R)$

Trouver P, automate à pile, qui reconnaît exactement le langage engendré par G

$Q = \{ p, q, r \}$

$VR = V_T$

$VP = V_N \cup V_T \cup \{ \$ \}$ ($\$ \notin V_N$ et $\$ \notin V_T$)

$\$ \in VP$: symbole initial de pile

p = état initial

r = état final

Δ : ensemble de transitions (quintuplés)

Algorithme de construction de l'automate à pile

-- empiler l'axiome, initialise la dérivation
ajouter la transition (p, ε, ε) $\rightarrow$ (q, \$ S)

pour chaque symbole terminal x
    -- accepte x comme l'un des symboles du mot à reconnaître
    -- dépile x
    ajouter la transition (q, x, x) $\rightarrow$ (q, ε)

finpour
pour chaque règle de la grammaire A $\rightarrow$ w
    -- dérive A en w
    -- remplace le sommet de pile A par w
    ajouter la transition (q, ε, A) $\rightarrow$ (q, w)
finpour

-- la pile est vide et le reste du mot à reconnaître est vide
ajouter la transition (q, ε, \$) $\rightarrow$ (r, ε)

$P = (Q, VR, VP, \$, q_0, F, \Delta)$

$Q = \{p, q, r\}$

$VR = V_T$

$VP = V_T \cup V_N \cup (\$\}$

$q_0 = p$

$F = r$

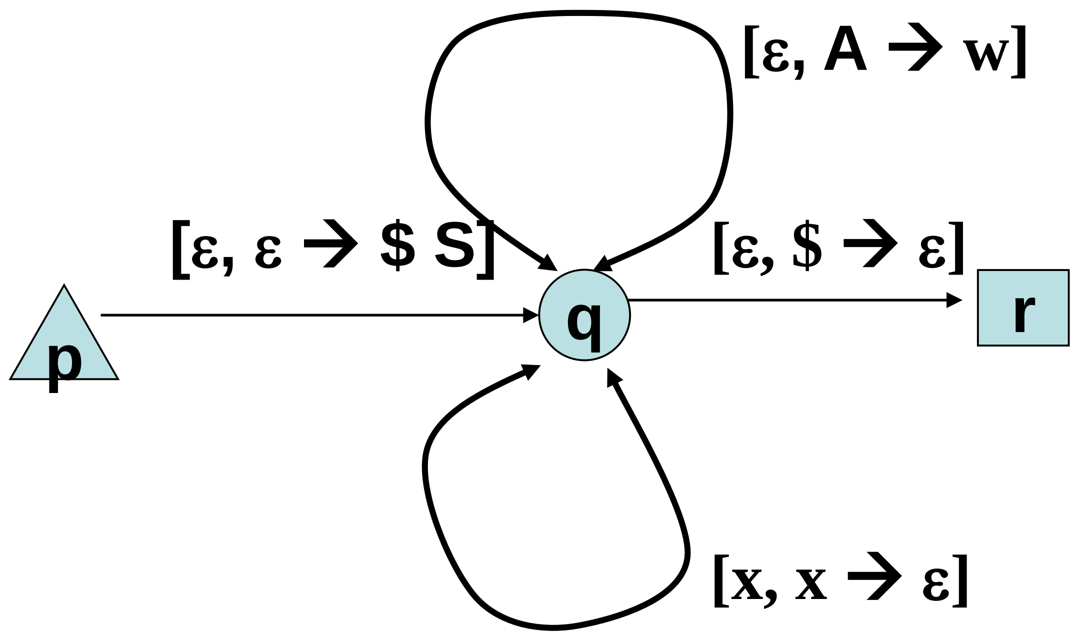
$\Delta =$

$(p, \varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (q, \$ S)$

$\{ (q, x, x) \rightarrow (q, \varepsilon) \}$ pour tout x de $VR = V_T$

$\{ (q, \varepsilon, A) \rightarrow (q, w) \}$ pour toutes les règles $A \rightarrow w$

$(q, \varepsilon, \$) \rightarrow (r, \varepsilon)$



Sommaire

5.0 Principe

Construire l'arbre de dérivation du haut (la racine, c'est à dire l'axiome de départ) vers le bas (les feuilles).

Table d'analyse LL(1)

Pour construire une table d'analyse, on a besoin des ensembles PREMIER et SUIVANT

5.1 Calcul de PREMIER

Pour toute chaîne α composée de symboles terminaux et non-terminaux, on cherche PREMIER (α) : l'ensemble de tous les **terminaux** qui peuvent **commencer** une chaîne qui se dérive de α :

On cherche tous les symboles terminaux **a** tels qu'il existe une dérivation

$$\alpha \rightarrow^* \mathbf{a}\ \beta$$

β étant une chaîne quelconque composée de symboles terminaux **et** non-terminaux.

Exemple

G1 = { V_N, V_T, S, R }

V_N = {S, B, P }

V_T = { a, b, c, d }

Racine = S

R = {

S → B a

B → c P | b P | P | ε

P → d S

}

S →* a donc a appartient à PREMIER (S)

S →* c P a donc c appartient à PREMIER (S)

S →* b P a donc b appartient à PREMIER (S)

S →* d S a donc d appartient à PREMIER (S)

Pas de dérivation S →* e

Donc PREMIER (S) = {a, b, c, d}

Algorithme de construction de PREMIER (X)

1. **Si *X* est un terminal**, PREMIER (X) = { X }

2. **Si *X* est un non-terminal et X → ε** est une production **alors**
   ajouter ε dans PREMIER (*X*)

3. **Si *X* est un non-terminal et X → Y_1 Y_2 … Y_n** est une production (avec Y_i symbole terminal ou non-terminal) **alors**

   ajouter les éléments de PREMIER(Y_1) **sauf** e dans PREMIER(*X*)

   si il existe *j* dans [2,n] tel que pour tout i=1,…, j - 1, ε appartient à PREMIER (Y_i) **alors**

   ajouter les éléments de PREMIER(Y_j) **sauf** ε dans PREMIER (*X*)

   si pour tout i=1,…,n ε appartient à PREMIER (Y_i) **alors**
   ajouter e dans PREMIER (*X*)

4. Recommencer jusqu'à ce qu'on n'ajoute **rien de nouveau** dans les ensembles PREMIER

Algorithme de construction de PREMIER (α)

Soit α **une suite de terminaux (de** V_T**) et non-terminaux (de** V_N **)**

α = X1 X2 … Xn

Pour i = 1, ..., n
calculer PREMIER (Xi)
fin pour

Si pour tout i = 1, … , n ε appartient à PREMIER (Xi)
Alors
ajouter ε dans PREMIER (α)

Ajouter les éléments de PREMIER (X_1) **sauf** ε dans PREMIER (α)

Si il existe *j* dans [2, n] tel que pour tout i = 1, … , j - 1,
ε appartient à PREMIER (X_i)
Alors
ajouter les éléments de PREMIER (X_j) **sauf** ε dans PREMIER (α)

Exemple 1 :

G2 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = (E, E', T, T', F)

V_T = (+, *, (,), nb)

Racine = E

R = {

1	E	→ T E'	
2 3	E'	→ + T E'	| ε
4	T	→ F T'	
5 6	T'	→ * F T'	| ε
7 8	F	→ (E) | nb	

}

PREMIER (E) = PREMIER (T) = { (, nb }

PREMIER (E') = { +, ε }

PREMIER (T) = PREMIER (F) = { (, nb }

PREMIER (T') = { *, ε }

PREMIER (F) = { (, nb }

	PREMIER
E	(, nb 7 8
E'	+, ε 2 3
T	(, nb 7 8
T'	*, ε 5 6
F	(, nb 7 8

Exemple 2 :

G3 = { V_N, V_T, S, R }

V_N = {S, A, B, C }

V_T = { a, b, c, d }

Racine = S

R = {

1	S	→ A B C		
2 3	A	→ a A	| ε	
4 5 6	B	→ b B	| c B	| ε
7,8,9	C	→ d e	| d a	| d A

}

PREMIER (S) = { a, b, c, d }

PREMIER (A) = { a, ε }

PREMIER (B) = { b, c, ε }

PREMIER (C) = { d }

	PREMIER
S	a, b, c, d 1 2 3 4 5 6 7 8 9
A	a, ε 2 3
B	b, c, ε 4 5 6
C	d 7 8 9

5.2 Calcul de SUIVANT

Pour tout non-terminal *A*, on cherche SUIVANT (*A*) : l'ensemble de tous les symboles terminaux **a** qui peuvent apparaître immédiatement à droite de *A* dans une dérivation

$S \rightarrow^* \alpha\ A\ \mathbf{a}\ \beta$

Exemple

G3 = { V_N, V_T, S, R }

V_N = {S, A, B, C }

V_T = { a, b, c, d, e }

R = {

S → A B C

A → a A | ε

B → b B | c B | ε

C → d e | d a | d A

}

b, c ,d appartiennent à SUIVANT (A) à cause des dérivations

B → b B | c B | ε

La 3è met en jeu C et ses PREMIER

C → d e | d a | d A

Algorithme de construction de SUIVANT (X)

Ajouter un marqueur de fin de chaîne (symbole $ par exemple) au texte à analyser

SUIVANT (*S*) = { *$* } où S est l'axiome de la grammaire)

Repeter

Si A → α B β est une production, où B est un non-terminal, **alors**
ajouter le contenu de PREMIER (β) à SUIVANT (B), **sauf** ε

Si A → α B est une production **alors**
ajouter SUIVANT (A) à SUIVANT (B)

Si A → α B β est une production avec ε dans PREMIER (β) **alors**
ajouter SUIVANT (A) à SUIVANT (B)

Jusqu'à ce qu'on n'ajoute rien de nouveau dans les ensembles SUIVANT.

Exemple 1 :

G2 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = (E, E', T, T', F)

Racine = E

V_T= (+, *, (,), nb)

R = {

1	E	→ T E'	
2 3	E'	→ + T E'	| ε
4	T	→ F T'	
5 6	T'	→ * F T'	| ε
7 8	F	→ (E)	| nb

}

	PREMIER	SUIVANT
E	(, nb	$,) 7
E'	+, ε	$,) 1
T	(, nb	$,), + 1,2
T'	*, ε	$,), + 4
F	(, nb	$,), +, * 4,5

Exemple 2 :

G4 = { V_N, V_T, S, R }

V_N = {S, A, B }

V_T = { a, b, c, d, e }

Racine = S

R = {

1 2 3 S → a S b | c d | S A e

4 5 A → a A d B | ε

6 B → b b

}

	PREMIER	SUIVANT
S	A, c	$,b,a,e 2, 5, 3
A	A, ε	e,d 3, 4
B	b	e,d 4

5.3 Construction de la table d'analyse

La table d'analyse est une matrice M à deux dimensions qui indique pour chaque symbole non-terminal A et chaque symbole terminal a ou symbole $ la règle de production à placer dans une des cases M (A, x)..

Pour chaque production A → v
1. **Pour** tout a de PREMIER (v) différent de ε, **faire**
   rajouter la production A → v dans la case M [A, a]

2. **Si** ε est dans PREMIER (v),
   Alors
   Pour chaque b de SUIVANT (A)
   ajouter A → v dans M [A, b]
   Fin pour

Fin pour

-- Chaque case M [A, a] vide est une erreur de syntaxe .

Exemple :

Avec G2

1 E → T E'
2 3 E' → + T E' | ε
4 T → F T'
5 6 T' → * F T' | ε
7 8 F → (E) | nb

Table d'analyse

VT / VN	nb	+	*	(	)	$
E	E → T E'			E → T E'		
E'		E' → +T E'			E' → ε	E' → ε
T	T → F T'			T → F T'		
T'		T' → ε	T' → *F T'		T' → ε	T' → ε
F	F → nb			F → (E)		

5.4 Analyseur

Maintenant qu'on a la table, comment l'utiliser pour déterminer si un mot *w* donné est tel que :

$$S \rightarrow^* w$$

On utilise une **pile**.

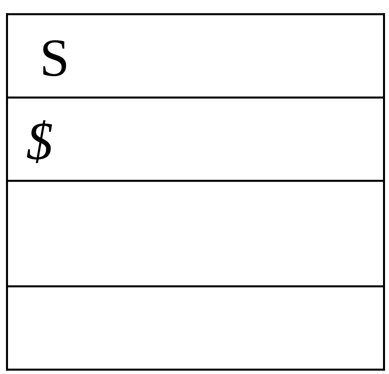
Algorithme :

données : mot *w à reconnaître*, table d'analyse *M*

Initialisation

- placer $ comme dernière lettre du mot w
- placer $ puis S dans la pile
- lire la 1ère lettre "a" du mot w

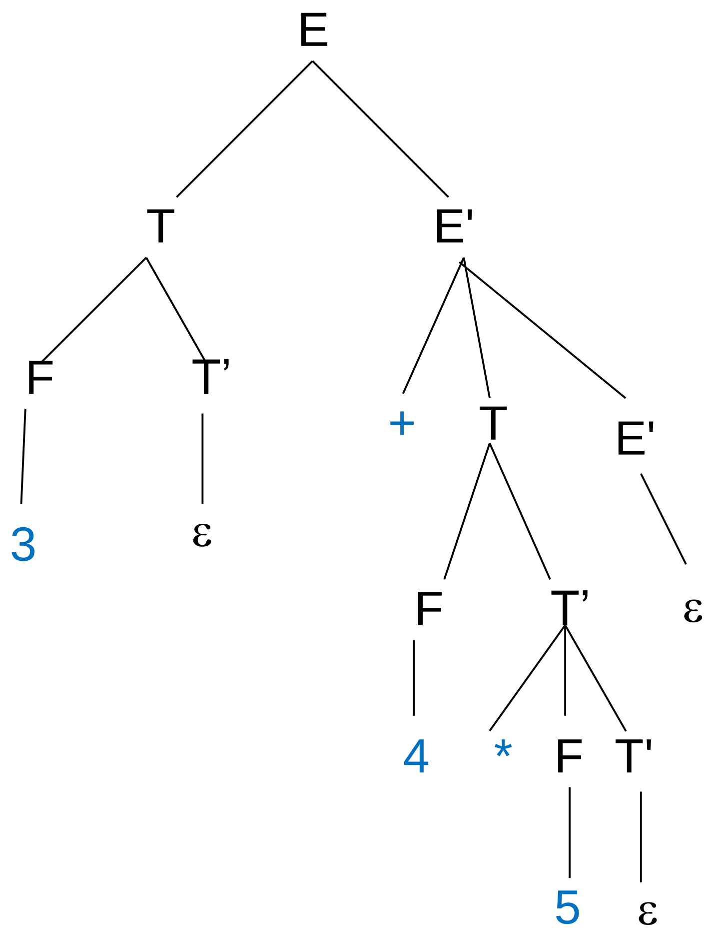
Pile



```
Repeter
    Soit "X" le symbole en sommet de pile et "a" la lettre du mot lue
    Si X est un non terminal alors
      Si M [ X, a ] = X → Y1…Yn Alors
            enlever X de la pile
            mettre Yn puis Yn-1 puis ...puis Y1 dans la pile
            émettre en sortie la production X → Y1…Yn
      Sinon
            ERREUR
      Finsi
    Sinon
            Si X = $ Alors
                Si a = $ Alors ACCEPTER w
                Sinon ERREUR
                Finsi
            Sinon
                Si X = a Alors
                    enlever X de la pile
                    avancer la lecture d'un caractère
                Sinon
                     ERREUR
                Finsi
            Finsi
    Finsi
Jusqu'à ERREUR ou ACCEPTER  w
```

Analyse du mot

w = 3 + 4 * 5

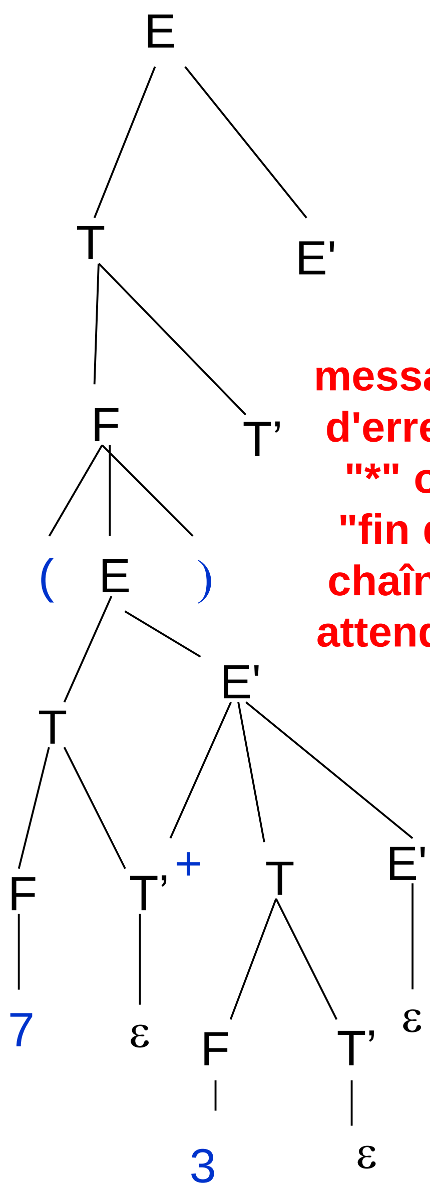


PILE	Entrée	Sortie
$ E	3 + 4 * 5 $	E → T E'
$ E' T	3 + 4 * 5 $	T → F T'
$ E' T' F	3 + 4 * 5 $	F → nb
$ E' T' 3	3 + 4 * 5 $	
$ E' T'	+ 4 * 5 $	T' → ε
$ E'	+ 4 * 5 $	E' → + T E'
$ E' T +	+ 4 * 5 $	
$ E' T	4 * 5 $	T → F T'
$ E' T' F	4 * 5 $	F → nb
$ E' T' 4	4 * 5 $	
$ E' T'	* 5 $	T' → * F T'
$ E' T' F*	* 5 $	
$ E' T' F	5 $	F → nb
$ E' T' 5	5 $	
$ E' T'	$	T' → ε
$ E'	$	E' → ε
$	$	

arbre complet = analyse syntaxique réussie

Analyse du mot

w = (7 + 3) 5



message d'erreur "*" ou "fin de chaîne" attendus

PILE	**Entrée**	**Sortie**
\$ E	(7 + 3) 5 \$	E → T E'
\$ E' T	(7 + 3) 5 \$	T → F T'
\$ E' T' F	(7 + 3) 5 \$	F → (E)
\$ E' T') E (	(7 + 3) 5 \$	
\$ E' T') E	7 + 3) 5 \$	E → T E'
\$ E' T') E' T	7 + 3) 5 \$	T → F T'
\$ E' T') E' T' F	7 + 3) 5 \$	F → nb
\$ E' T') E' T' 7	7 + 3) 5 \$	
\$ E' T') E' T'	+ 3)5 \$	T' → ε
\$ E' T') E'	+ 3) 5 \$	E' → + T E'
\$ E' T') E' T +	+ 3) 5 \$	
\$ E' T') E' T	3) 5 \$	T → F T'
\$ E' T') E' T' F	3) 5 \$	F → nb
\$ E' T') E' T' 3	3) 5 \$	
\$ E' T') E' T'	) 5 \$	T' → ε
\$ E' T') E'	) 5 \$	E' → ε
\$ E' T')	) 5 \$	
\$ E' T'	5 \$	arbre incomplet = ERREUR de

syntaxe : M [T, nb] est vide <=> 5 n'est pas le 1er caractère de la partie gauche des règles 5 et 6: * ou ε

Sommaire

6. Conclusion

Faire exécuter

```
For i := 1 to vmax do
   a := a + i ;
```

par un ordinateur qui ne reconnaît que du binaire

Moyen : Traduire le texte en binaire

Comment traduire ?

A l'aide d'un **compilateur** ou traducteur de langages

En 1957

1er compilateur :

langage Fortran (Backus et al.)

18 hommes années de développement

Depuis 2000

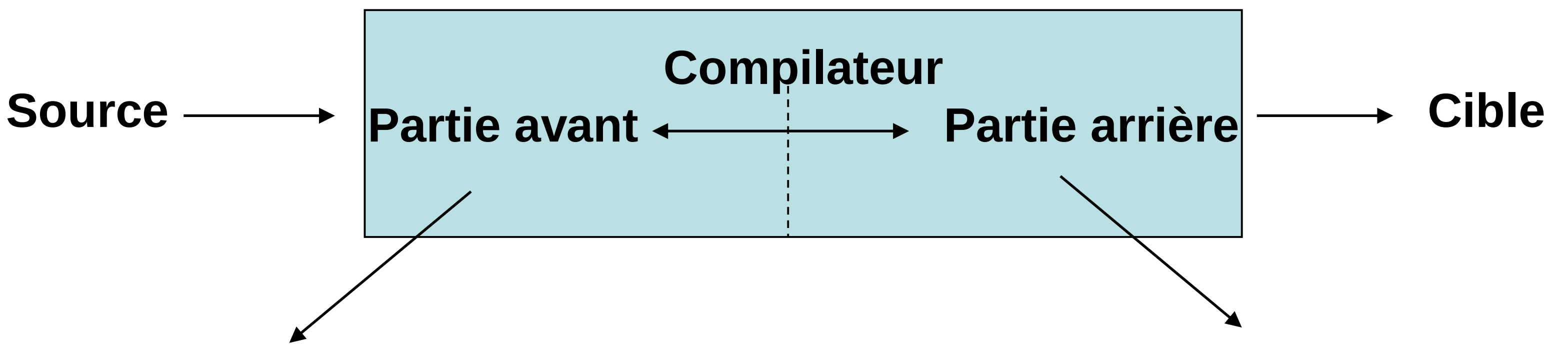
compilateur standard :

1 semestre étudiant

De 1957 à 2022 :

- compréhension des tâches à réaliser
- définitions formelles
- découverte de fondements théoriques qui apportent des résultats pratiques
- avancées méthodologiques dans la production de logiciels de grande taille
- développement d'outils logiciels puissants et fiables

Modèle de compilateur



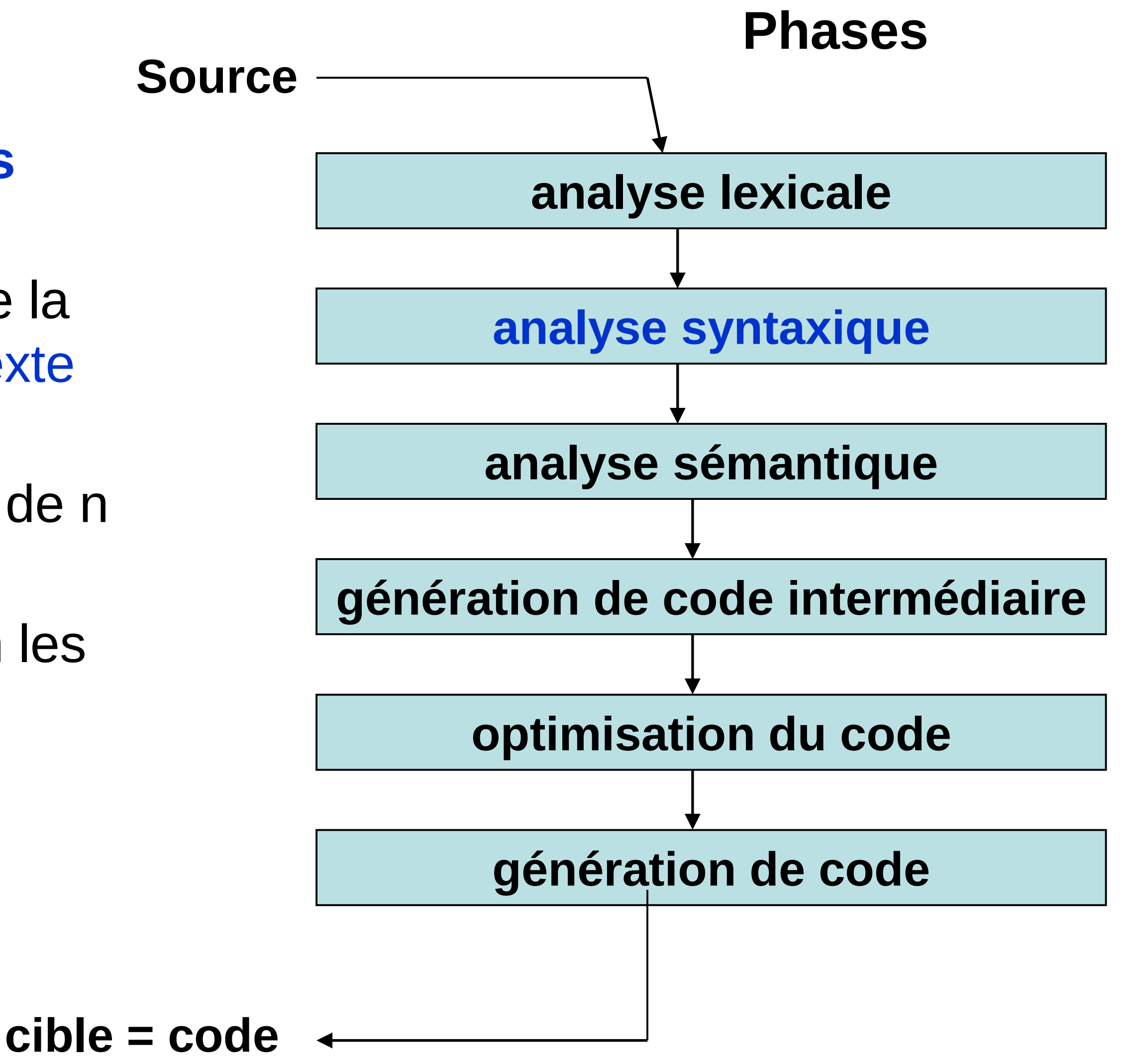
Analyse le **texte source** (programme) conformément à la définition du **langage source** **indépendamment** du langage **cible**

Produit le **texte cible** (programme) conformément à la définition du **langage cible** **indépendamment** du langage **source**

Les parties avant et arrière communiquent grâce à des structures de données intermédiaires : tables, graphes

1 ou plusieurs passes

- Passe ; processus de parcours complet de la représentation du texte source
- 1 passe est composée de n phases
- Plusieurs passes selon les langages



Phase d'analyse lexicale

Traite le texte source

1- découpe le texte en unités lexicales : lexèmes ou "tokens"

mots clés
mots réservés
constantes entières
identificateurs
séparateurs, opérateurs
espaces, caractères spéciaux
commentaires

2 - élimine les unités lexicales inutiles pour la compilation

espaces, caractères spéciaux
commentaires

Phase d'analyse lexicale

for i := 1 to vmax do
  a := a + i ;

for	mot clé
i	identificateur
:=	affectation
1	entier
to	mot clé
vmax	identificateur
do	mot clé
a	identificateur
:=	affectation
a	identificateur
+	opérateur
i	identificateur
;	séparateur

Phase d'analyse lexicale

3 – Interagit avec

- Gestionnaires de la **table des symboles**

- Analyseur syntaxique
  (entrée = unités lexicales)

4- Mémorise le source pour l'environnement de développement :

éditeurs, messages d'erreurs, débogueurs,…

Table des symboles

n° symbole	token	type
10	for	mot clé
11	to	mot clé
12	do	mot clé
13	;	séparateur
…	…	…
100	:=	affectation
101	+	opérateur
…	…	…
1000	i	identificateur
1001	vmax	identificateur
…	…	…
5001	1	entier

Phase d’analyse lexicale

5- Produit la sortie

10 1000 100 5001 11 1001 12 1002 100 1002 101 1000 13

Phase d'analyse syntaxique

1 - Analyse le flot d'unités lexicales conformément à la syntaxe du langage source, à sa **grammaire**

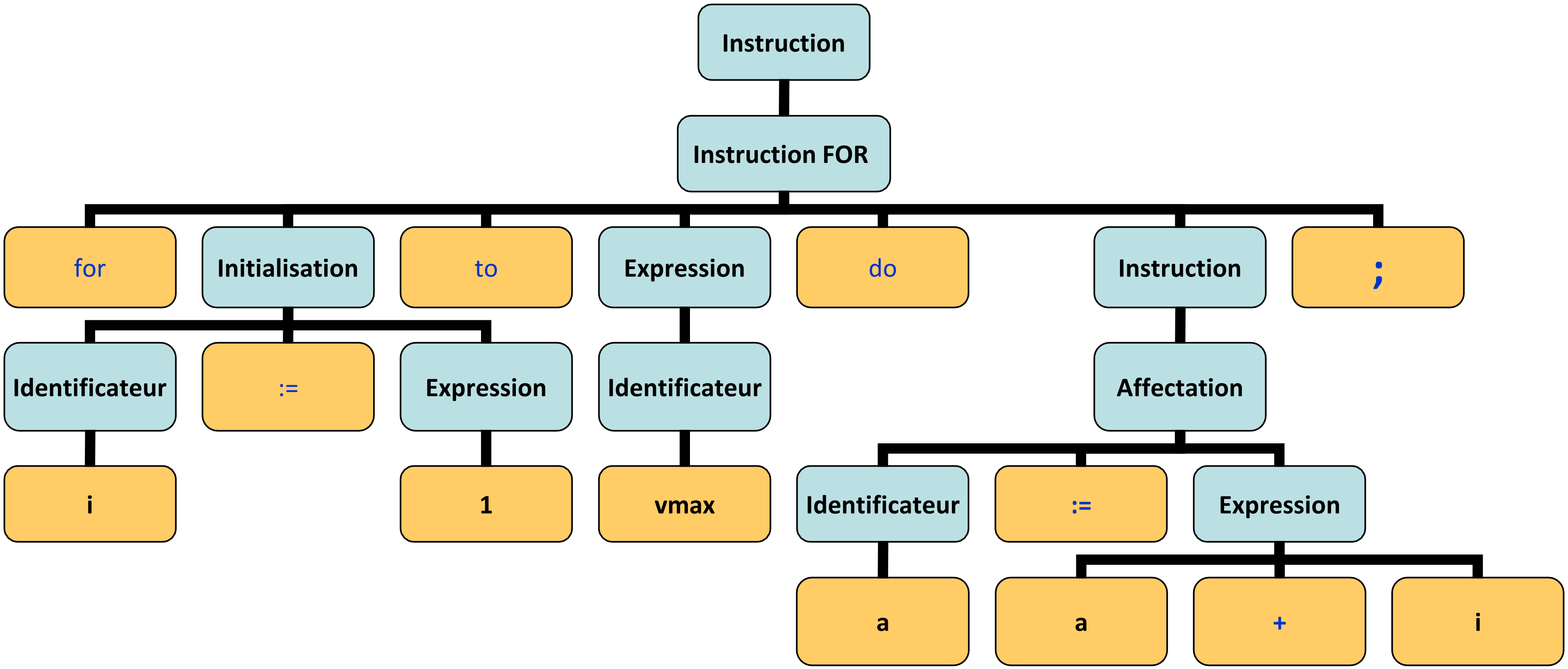
2 - Produit

- un **arbre de dérivation** : donnée codant la structure syntaxique reconnue
- d'éventuels messages d'erreurs (syntaxiques)

3- Interagit avec

Analyseur sémantique

Phase d'analyse syntaxique : arbre de dérivation / arbre syntaxique



V_N = Instruction, Instruction FOR, Initialisation, Expression, Identificateur, Affectation

V_T = for, to, do, ";", :=, +, i, a, 1

R = ... Instruction FOR → for Initialisation to Expression do Instruction ; ...

Phase d'analyse sémantique

Vérification

- du type des variables

Exemple : i de type entier

a est un nombre

- des opérations à tous les niveaux de l'arbre syntaxique

Génération de code

Code généré pour du langage machine ou d'assemblage

Exemple

```
    var_a         A000
    var_i         A001     ➔ étiquettes des variables
    var_vmax      A002
loop :
    mov  A0, (var_i)
    jge  A0, (var_vmax, fin_for)      ➔ si i > v_max alors fin_for
    mov  A0, (var_a)
    add  A0, A0, (var_i)     ➔ a := a + i
    mov  var_a, A0
    mov  A0, (var_i)
    add  A0, A0, 1           ➔ i := i + 1
fin_for
```

Bibliographie

- Aho Alfred, Ullman Jeffrey, Concepts fondamentaux de l'Informatique, Dunod, 1993 (version française)
- Wolper Pierre, Introduction à la calculabilité, Interéditions, 1991