1.2 Vocabulaire / Alphabet

Définition

Un **vocabulaire**, ou **alphabet**, noté V, est un ensemble fini, non vide, d'éléments, appelés **lettres** ou **symboles**

Exemples :

$V_1 = \{ a, b, \ldots, z \}$

$V_2 = \{ 0, 1 \}$

$V_3 = \{ 0, 1, et, ou, non, p \}$

1.3 Mot

Définition

Un **mot** est une **suite finie de lettres**.

On note **V* l'ensemble des mots** qui utilisent les lettres de l'alphabet V

Exemple :

p et 0 ou 1 mot sur V_3

Cas particulier

Le mot vide, qui ne contient aucun caractère est noté ε et appartient à tous les V *

Remarque

$V^* = \bigcup V^n$ ($n = 0, \ldots, \omega$)

V^n = mots de longueurs n, produit cartésien n fois de V

Définition récursive d'un mot sur V

(i) ε est un mot

(ii) si w est un mot et x appartient à V
alors x . w est aussi un mot,
où "." est un opérateur qui ajoute une lettre x au début d'un mot w

(iii) rien n'est un mot hors (i) et (ii)

Concaténation de mots " ^ "

Définition

La **concaténation de mots** est une loi de composition interne sur V* :

(v, w) → v ^ w   on place toutes les lettres de v devant w

Définition récursive

(i) ε ^ v = v

(ii) (x . v) ^ w = x . (v ^ w)

" ^ " est associative et possède un élément neutre

V * muni de sa loi de composition " ^ " est un monoïde.

Le monoïde est "libre" : pas d'équivalence entre les mots

C'est-à-dire :

- toutes les suites de lettres sont différentes

- Il n'existe qu'une seule façon d'écrire un mot

1.4 Langage

Définition

Un **langage** sur un vocabulaire V est une partie quelconque de V^*

Exemples

- ϕ est un langage pour tous les alphabets V
- $\{\varepsilon\}$ est un langage pour tous les alphabets V
- {a, b, …, z } est un langage sur V_1 → mots de longueur 1
- { représentations binaires d'entiers pairs } est un langage sur V_2
- { assemblage de parenthèses bien équilibré } est un langage sur { (,) } langage des mots de Dyck

Problème : trouver un moyen fini (qui tient en une suite finie de symboles) pour décrire un ensemble potentiellement infini

1.5 Opérations sur les langages

Les constructions suivantes sont des langages

- L_1 U L_2
- $L_1 . L_2$ = { v ^ w, v mot de L_1, w mot de L_2)
- Fermeture itérative (de Kleene) de L
  L* = { w, $\exists$ k non nul tel que w = w_1 ^ w_2 ^ … ^ w_K
  et $\forall$i, w_i mot de L }
- Complément de L à V*

On note

L^n = L . L . … . L la concaténation n fois de L

L* = U L^n (n = 1, …, infini)

Langage régulier

(i) ϕ et $\{\varepsilon\}$ sont des langages réguliers
(ii) Pour tout x de V , $\{x\}$ est un langage régulier
(iii) Si L_1 et L_2 sont des langages réguliers,

$L_1 \cup L_2$

$L_1 . L_2$

$L_1 *$

sont des langages réguliers

Expression régulière

Expression littérale qui désigne – ***dénote*** **-** un langage régulier
(ι) ϕ et ε sont des expressions régulières
(ii) si a et b sont des expressions régulières, alors

(a + b) ou a + b

(a . b) ou (a b) ou a b

(a) * ou a *

sont aussi des expressions régulières

Notation – expressions régulières qui dénotent les langages

ϕ dénote L (ϕ)

ε dénote L ($\{\varepsilon\}$)

a dénote L ({ a }) pour tout a de V

a + b dénote L ({ a }) U L ({ b })

a b dénote L ({ a }) . L ({ b })

a * dénote L ({ a }) *

Exemple :

Expression régulière qui dénote le langage L :

" tous les mots sur l'alphabet V = {a, b, c } contenant au moins une fois 4 "a" qui se suivent "

(a + b + c) * a a a a (a + b + c) *

Théorème

Un langage est régulier si et seulement si il est dénoté par une expression régulière

Propriétés

Soit a et b 2 expressions régulières

1. $a + b \quad = \quad b + a$
2. $a + \phi \quad = \quad \phi + a \quad = \quad a$
3. $a + a \quad = \quad a$
4. $(a + b) + c \quad = \quad a + (b + c)$
5. $a\, \varepsilon \quad = \quad \varepsilon\, a \quad = \quad a$
6. $a\, \phi \quad = \quad \phi\, a \quad = \quad \phi$
7. $(a\, b)\, c \quad = \quad a\, (b\, c)$
8. $a\, (b + c) \quad = \quad a\, b + a\, c$
9. $(a + b)\, c \quad = \quad a\, c + b\, c$
10. $a^* \quad = \quad a^* a^* = (a^*)^* = (\varepsilon + a)^*$

11. ϕ^* = ε^* = ε

12. $(a + b)^* = (a^* + b^*)^*$ = $(a^* b^*)^*$

13. $a^* a$ = $a a^*$

14. $a (b a)^*$ = $(a b)^* a$

Preuve :

Soit e14 mot du langage L14 dénoté par l'expression régulière

e14 = $a (b a)^*$

Alors il existe un nombre entier " n " tel que

e14 = $a_0 (b_0 a_1) \ldots (b_{n-1} a_n)$

= $(a_0 b_0)(a_1 b_1) \ldots (a_{n-1} b_{n-1}) a_n$

e14 = $(a b)^* a$

Notations

a^+ = $a + a^2 + \ldots + a^k + a^{K+1} a^*$

a^* = $\varepsilon + a a^*$ = $\varepsilon + a^+$

2.1 Définition

Une **grammaire** G est un quadruplet

$G = (V_N, V_T, S, R)$

où :

- V_N : vocabulaire (alphabet) non terminal
- V_T : vocabulaire (alphabet) terminal
- $S \in V_N$: axiome ou racine
- R : ensemble de règles de **production** ou de **réécriture**

- $V_N \cap V_T = \varnothing$

Une **règle de réécriture** est un couple de mots (v, w)

où : $v \in (V_N \cup V_T)^* - \{\varepsilon\}$ et $w \in (V_N \cup V_T)^*$

on note : $v \rightarrow w$

On dit que "v se réécrit w" ou "v produit w" ou "v donne w" dans la grammaire G

v est la partie gauche de la règle, w la partie droite

Notation

S'il existe plusieurs règles de réécriture de même partie gauche v :

$v \rightarrow w_1$, $v \rightarrow w_2$, …, $v \rightarrow w_n$,

on peut écrire les n règles en 1 seule ligne :

$v \rightarrow w_1 \mid w_2 \mid \ldots \mid w_n$ " v se réécrit w_1 ou w_2 ou … ou w_n "

Exemple

$G0 = (V_N, V_T, S, R)$

$V_N = \{ S, A, B \}$

$V_T = \{ 0, 1 \}$

$S \in V_N$: racine

$R = \{ (1), (2), (3), (4), (5) \}$

$$
\begin{array}{llll}
= & \{ S & \rightarrow 0\ A\ 1\ B & (1) \\
 & 1\ B & \rightarrow 1\ A\ B\ B & (2) \\
 & 1\ A & \rightarrow A\ 1 & (3) \\
 & 1\ B & \rightarrow 1\ 1 & (4) \\
 & 0\ A & \rightarrow 0\ 0 & (5) \\
 & \} & &
\end{array}
$$

2.2 Mot engendré par une grammaire

Intuitivement, un mot $w \in V_T{}^*$ est **engendré par une grammaire** G si on peut **l'assembler** au bout d'un nombre fini de réécritures à partir de la racine S.

Exemple intuitif

G0 = (V_N, V_T, S, R)

R =

{ S → 0 A 1 B (1)

1 B → 1 A B B (2)

1 A → A 1 (3)

1 B → 1 1 (4)

0 A → 0 0 (5)

}

le mot v = 0 0 0 0 1 1 1 1 est engendré par cette grammaire ?

S	→ 0 A 1 B	1
	→ 0 A 1 A B B	2
	→ 0 A A 1 B B	3
	→ 0 A A 1 A B B B	2
	→ 0 A A A 1 B B B	3
	→ 0 A A A 1 1 B B	4
	→ 0 A A A 1 1 1 B	4
	→ 0 A A A 1 1 1 1	4
	→ 0 0 A A 1 1 1 1	5
	→ 0 0 0 A 1 1 1 1	5
	→ 0 0 0 0 1 1 1 1	5

2.3 Dérivation immédiate

$v \rightarrow w$

si et seulement si :

$x, y \in V_T$ et $u, v \in (V_N \cup V_T)^*$

- $v \quad = \quad x\,u\,y\,,\ u \neq \varepsilon$
- $w \quad = \quad x\,v\,y$
- $(u \rightarrow v) \quad \in \quad R$

2.4 Dérivation

La dérivation est la fermeture réflexive et transitive de $\rightarrow$

$v \rightarrow^* w$

si et seulement si :

Il existe $k \geq 0$ et une suite v_0, v_1, … v_k, d’éléments de

$(V_N \cup V_T)^*$ tels que

$v = v_0$

$w = v_k$

$\forall i, 0 \leq i \leq k - 1, \quad v_i \rightarrow v_{i+1}$

Exemples sur G0

- S → 0 A 1 B
  → 0 A 1 A B B
  → 0 A A 1 B B
  → 0 A A 1 A B B B
  → 0 A A A 1 B B B
  → 0 A A A 1 1 B B
  → 0 A A A 1 1 1 B
  → 0 A A A 1 1 1 1
  → 0 0 A A 1 1 1 1
  → 0 0 0 A 1 1 1 1
  → 0 0 0 0 1 1 1 1

  S →* 0 0 0 0 1 1 1 1

- 0 A 1 A B B →* 0 0 0 A 1 1 1 1
- 0 A 1 A B B →* 0 A 1 A B B

Remarque

v ➔ * v : autrement dit, la relation ➔ * est réflexive.

Démonstration :

dans la définition, prendre k = 0, alors :

$$v = v_0 = v_k = v$$

La condition

$$\forall i,\ 0 \leq i \leq k - 1 \Rightarrow v_i \rightarrow v$$

est vérifiée car aucun i ne satisfait $0 \leq i \leq -1$

2.5 Langage engendré par une grammaire

Soit une grammaire

G = (V_N, V_T, S, R)

L (G) = $\{v \in V_T^* ;\ S \Rightarrow^* v\}$

Exemple sur G0:

v = 0 0 0 0 1 1 1 1 $\in$ L (G0)

2.6 Types de règles – types de grammaires – hiérarchie de Chomsky

Type 0 : toutes les règles

Type 1 : non raccourcissantes

$v \rightarrow w$ avec longueur (v) $\leq$ longueur (w)

Type 2 : hors-contexte

$X \rightarrow w$ avec $X \in V_N$

Type 3 : linéaires.

linéaires gauches

$X \rightarrow x\,w$ avec $X \in V_N$, $x \in V_T$, et $w \in (V_N \cup V_T)^*$

linéaires droites

$X \rightarrow w\,x$ avec $X \in V_N$, $x \in V_T$, et $w \in (V_N \cup V_T)^*$

Types de grammaires

Une grammaire est de type T si toutes ses règles de réécriture sont de type T

Exemples

- Grammaire de typer 1

$$
\begin{array}{lll}
G1 & = & \{ V_N, V_T, S, R \} \\
V_N & = & \{ S, B, C \} \\
V_T & = & \{ a, b, c \} \\
R & = & \{ S \rightarrow a\ S\ B\ C \\
 & & S \rightarrow a\ b\ C \\
 & & b\ B \rightarrow b\ b \\
 & & b\ C \rightarrow b\ c \\
 & & c\ C \rightarrow c\ c \\
 & & \}
\end{array}
$$

- Grammaire de type 2, ou "hors-contexte"

$G2 = \{ V_N, V_T, S, R \}$

$V_N = \{ S \}$

$V_T = \{ a, b\}$

$R = \{$

$S \rightarrow a\ S\ b$

$S \rightarrow a\ b$

$\}$

$S \Rightarrow a\ b$

$S \Rightarrow a\ S\ b \Rightarrow a\ a\ S\ b\ b \Rightarrow a\ a\ a\ b\ b\ b$

$S \Rightarrow a\ S\ b \Rightarrow a\ a\ S\ b\ b \Rightarrow a\ a\ a\ S\ b\ b\ b \Rightarrow a\ a\ a\ a\ b\ b\ b\ b$

$L(G2) = \{a^n b^n; n \geq 1\}$

- Grammaire de type 3, ou linéaire

G3 = { V_N, V_T, S, R }
V_N = { S, A }
V_T = { a, b}
R = {
S → a S
S → a A (linéaire **gauche**)
A → b A
A → b
}

exemples de dérivation
S ➔ a A ➔ a b
S ➔ a S ➔ a a S ➔ a a a S ➔ a a a a A ➔ a a a a b
S ➔ a S ➔ a a A ➔ a a b
S ➔ a S ➔ a a A ➔ a a b A ➔ a a b b A ➔ a a b b b

L (G3) = $\{a^n b^m ; n, m \geq 1\}$
langage dénoté par l'expression régulière a a * b b * = $a^+ b^+$

Type i étendu = type i + règles avec ε possible en partie droite

Grammaires de type hors-contexte (type 2) étendu

$G21 = \{ V_N, V_T, S, R \}$
$V_N = \{ S \}$
$V_T = \{ a, b \}$
$R = \{$
$S \rightarrow a\ S\ b$
$S \rightarrow \varepsilon$
$\}$

$S \Rightarrow \varepsilon$
$S \Rightarrow a\ S\ b \Rightarrow a\ a\ S\ b\ b \Rightarrow a\ a\ b\ b$
$S \Rightarrow a\ S\ b \Rightarrow a\ a\ S\ b\ b \Rightarrow a\ a\ a\ S\ b\ b\ b \Rightarrow a\ a\ a\ b\ b\ b$

$L (G21) = \{a^n b^n ; n \geq 0\}$

Grammaire de type linéaire (type 3 à étendu

G31 = { V_N, V_T, S, R }
V_N = { S, A }
V_T = { a, b}
R = {
S → a S
S → b A
S → ε linéaire gauche
A → b A
A → ε
}

S ➔ a S ➔ a
S ➔ a S ➔ a a S ➔ a a
S ➔ a S ➔ a a S ➔ a a a S ➔ a a a b A ➔ a a a b
S ➔ a S ➔ a a S ➔ a a a S ➔ a a a b A
➔ a a a b b A ➔ a a a b b
S ➔ ε
L (G31) = a * b *

2.7 Grammaire et définition récursive

Exemple

Langage des mots de Dyck ou des
Structures de Parenthèses Equilibrées (SPE)

(1) ε est une SPE

(2) Schéma d'induction :
- Si A est une SPE, alors (A) est une SPE
- Si A et B sont des SPE, alors A B est une SPE

(3) Rien n'est une SPE hormis par (1) et (2)

traduction sous forme de grammaire

1 17 01 2022 8h20 – 10h20

$G_{Dyck} = \{ V_N, V_T, S, R \}$

$V_N = \{ S \}$

$V_T = \{ (,) \}$

$R = \{$

S	$\rightarrow$	ε	(1)
S	$\rightarrow$	(S)	(2)
S	$\rightarrow$	S S	(3)

$\}$

Exemple de dérivation

S ➔ (S) ➔ ((S)) ➔ ((S S)) ➔ (((S) S))
➔ ((( ) (S))) ➔ ((( ) (S S)))
➔ ((( ) ((S) S))) ➔ ((( ) (( ) S))) ➔ ((( ) (( ))))

2.8 Arbre de dérivation dans une grammaire hors-contexte

Soit G = (V_N, V_T, S, R) une grammaire hors-contexte

Un arbre de dérivation dans G pour $v \in V_T^*$ est un arbre :

- **Racine** : S
- **Feuilles** : symboles terminaux ou ε
- **Sommets** : symboles non terminaux

v = concaténation des feuilles

Si un sommet N a pour descendants immédiats

$N_1, N_2, \ldots, N_k$,

alors

$N \rightarrow N_1 N_2 \ldots N_k$ est une règle de R

Théorème

Si v $\in$ L (G)

alors il existe un arbre de dérivation A pour v dans G

Démonstration

- $\Rightarrow$: récurrence sur le nombre de pas dans la dérivation (démontrer que pour tout non-terminal X et tout mot v,

  si X $\rightarrow^*$ v,

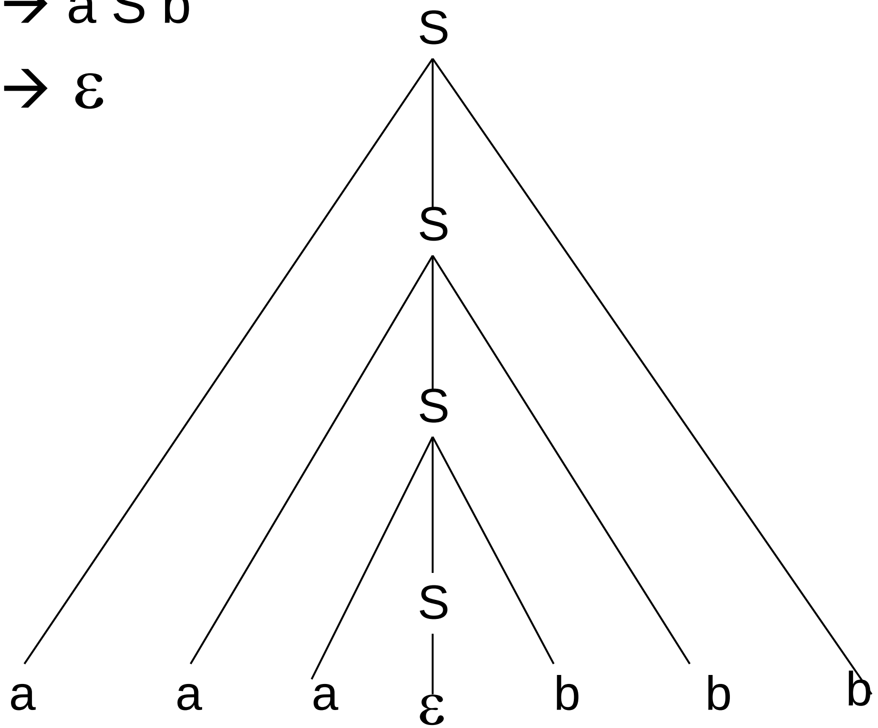
  alors il existe un arbre de dérivation pour v de racine X)

- $\Leftarrow$: récurrence sur la profondeur de l'arbre

Exemple 1

v = a a a b b b
appartient-il à L (G21) ?

G21 = { V_N, V_T, S, R }
V_N = { S }
V_T = { a, b }
R = {
S → a S b
S → ε
}



Concaténation des feuilles :
a a a ε b b b = a a a b b b

Réponse ;
OUI

Exemple 2

G22 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = {S, SN, SV, Det, N', N, Vt, Vi}

V_T = {qui, un, le, chat, garçon, lait, ballon, regarde, boit, frappe, boue}

R = {

S → SN SV

SN → Det N’

N’ → N | N qui SV

SV → Vt SN | Vi

Det → un | le

N → chat | garçon | lait | ballon

Vt → regarde | boit | frappe

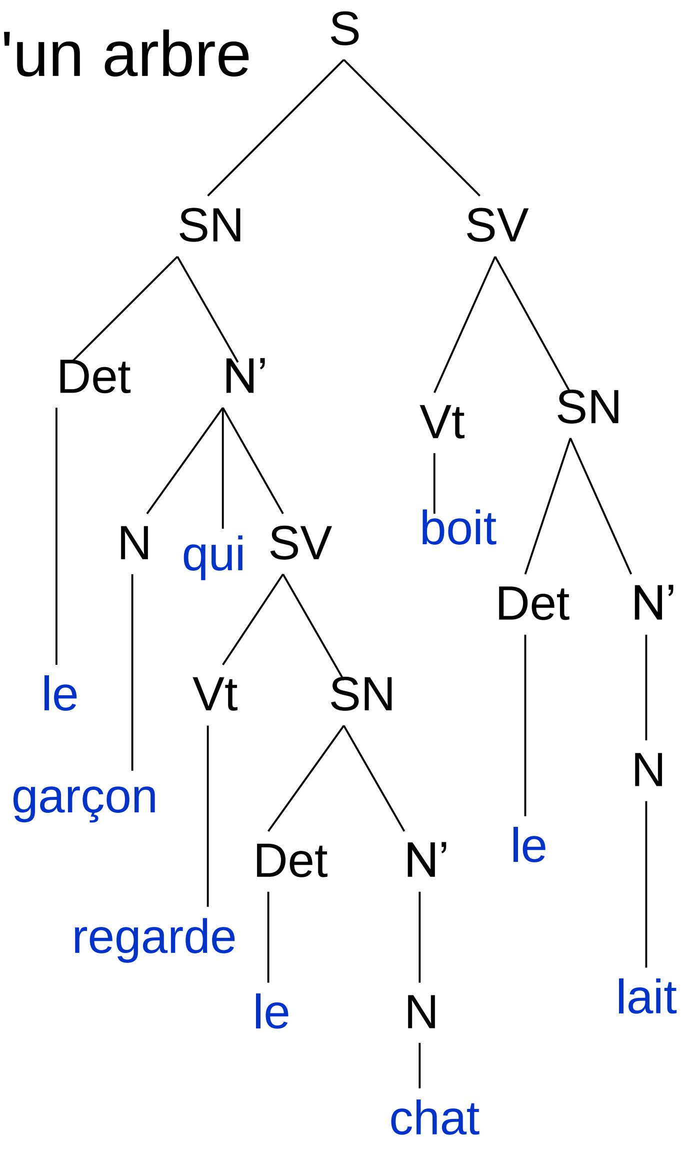
Vi → boue

}

v = le garçon qui regarde le chat boit le lait

généré par G ?

Construction d'un arbre de dérivation



Réponse ; OUI

Symbole récursif

SV ➔ V SN ➔ V Det N’ ➔ V Det N qui **SV**

donc

SV ➔ * V Det N qui **SV**

SV est récursif

d’où :

SV ➔ * V Det N qui SV

➔ * V Det N qui V Det N qui SV

➔ *

…

➔ * V Det N qui V Det N qui … V Det N qui SV

Langage infini

Une sous-expression E d'un mot v **est un constituant de type X** si et seulement si E est la concaténation des feuilles d’un sous-arbre dans l’arbre de dérivation de E de racine X

Exemples

regarde le chat

est un constituant de type SV

garçon qui regarde le chat

est un constituant de type N’

garçon qui regarde le chat boit le lait

n'est pas un constituant

On peut écrire le mot w en indexant ses constituants :

$[\ [\ [\text{ le }]_{\text{Det}}\ [\ [\text{ garçon }]_{\text{N}}\text{ qui }[\ [\text{ regarde}]_{\text{Vt}}\ [\ [\text{ le }]_{\text{Det}}\ [\ [\text{ chat }]_{\text{N}}\ ]_{\text{N'}}]_{\text{SN}}\ ]_{\text{SV}}\ ]_{\text{N'}}\ ]_{\text{SN}}$

$[\ [\text{ boit }]_{\text{Vt}}\ [\ [\text{ le }]_{\text{Det}}\ [\ [\text{ lait }]_{\text{N}}\ ]_{\text{N'}}\ ]_{\text{SN}}\ ]_{\text{SV}}\ ]_{\text{S}}$

2.9 Ambiguïté syntaxique

Un mot v $\in$ L (G) est dit **ambigu** si et seulement si

v admet **plusieurs arbres** de dérivation

G est ambiguë ssi elle engendre des mots ambigus

L est ambigu ssi L n'admet que des grammaires ambiguës

Degré d'ambiguïté d'un mot

Nombre d'arbres de dérivations admis par ce mot

Exemple 1

G23 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = {S, SN, SV, Det, N, A, V, Pro}

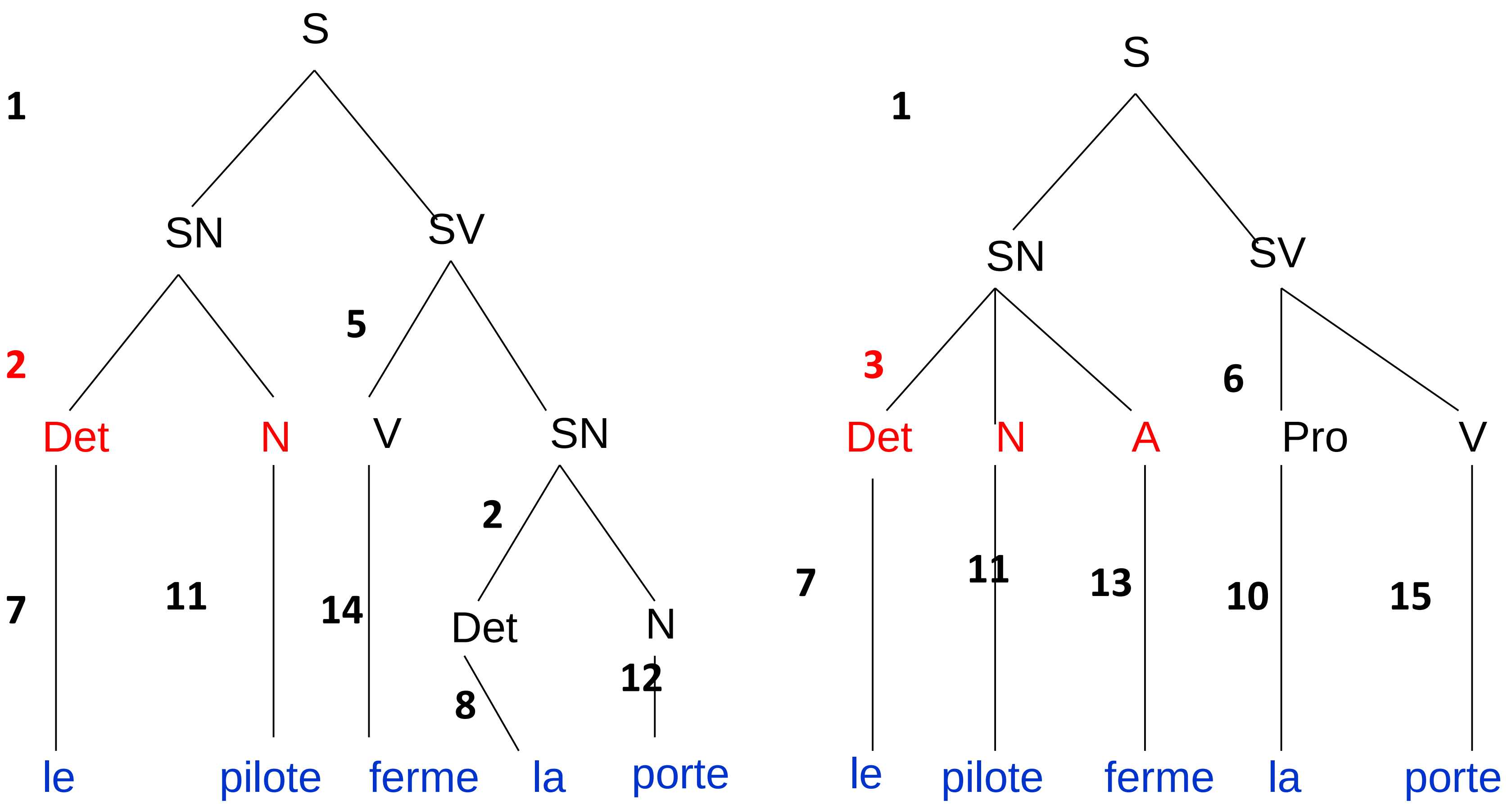
V_T = {le, la, pilote, porte, ferme }

R = {

1	S	→ SN SV
2 3 4	SN	→ Det N | Det N A | Det A N
5 6	SV	→ V SN | Pro V
7 8	Det	→ le | la
9 10	Pro	→ le | la
11 12	N	→ pilote | porte
13	A	→ ferme
14 15	V	→ ferme | porte

}

v = *le pilote ferme la porte* mot de G23 ?



v est un mot de G23 et admet **2** arbres de dérivation

Exemple 2

Extrait de la grammaire d'un langage de programmation

G = $(V_N, V_T$, instruction, R }

V_N = {instruction, expression}

V_T = {if, else, (,) }

Racine = Instruction

R = {

1 instruction → if (expression) instruction else instruction

2 instruction → if (expression) instruction

3 instruction → …

4 instruction → …

}

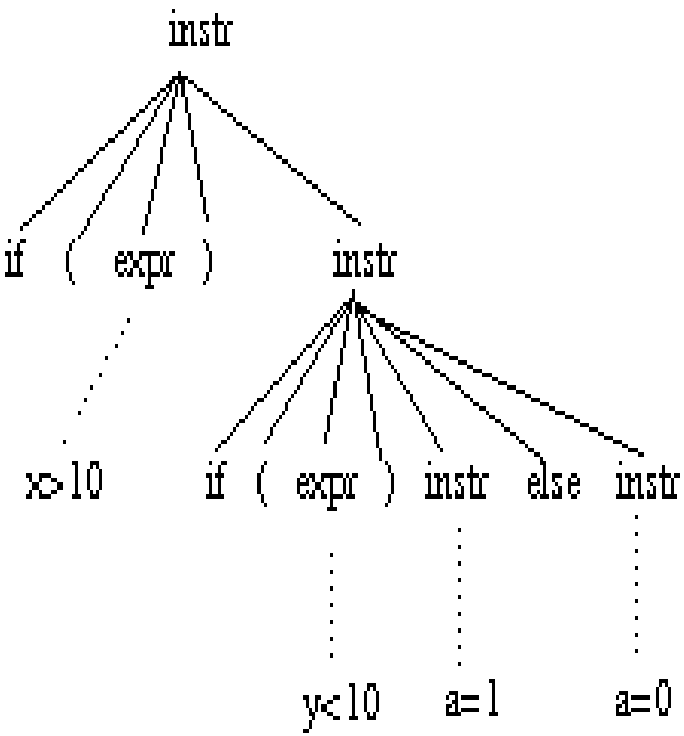
G est ambiguë

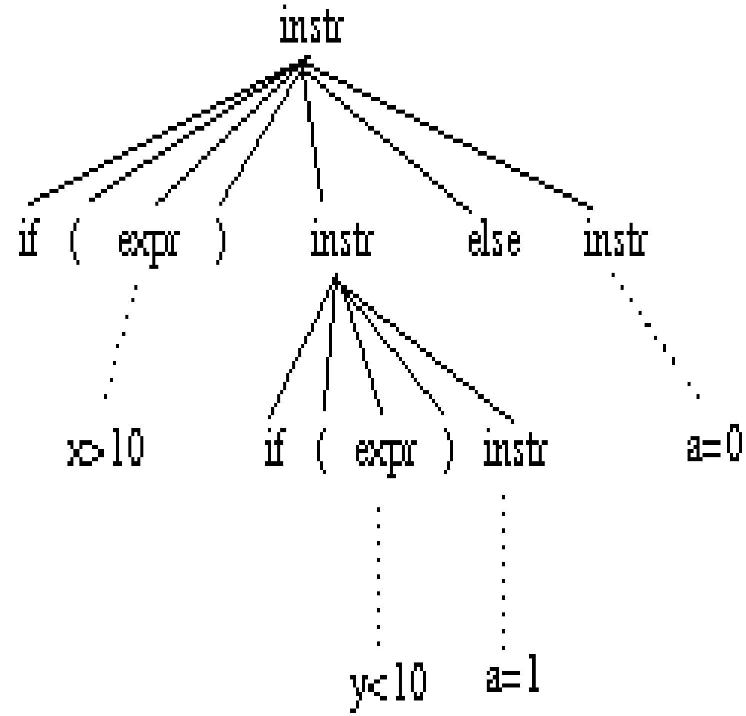
Exemple :

Le mot

v = if (x>10) if (y < 0) a = 1 else a = 0

possède deux arbres de dérivation différents :





deux " interprétations syntaxiques " :

```
if (x>10)
   if (y<0)
         a=1
   else
         a=0
   // finsi
// finsi
```

```
if (x>10)
    if (y<0)
       a=1
    // finsi
 else
      a = 0
// finsi
```

3.0 Introduction

Principe : construire l'arbre de dérivation d'un mot w en partant de la racine – le haut - vers les feuilles - le bas.

Exemples

Exemple 1 :

G1 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = (S, T)

V_T = (a, b, c, d)

Racine = S

R = {

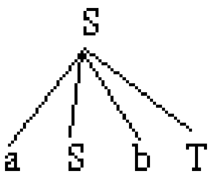
1, 2, 3	S	→	a S b T	| c T	| d
4, 5, 6	T	→	a T	| b S	| c

]

Soit le mot : w = a c c b b a d b c

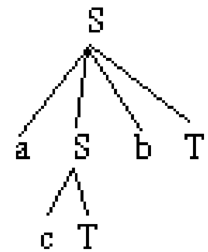
On démarre avec l'arbre contenant la racine S et on cherche une règle qui a la 1ère lettre de w comme 1er symbole de sa partie droite

La lecture de la première lettre du mot "a" permet d'avancer la construction



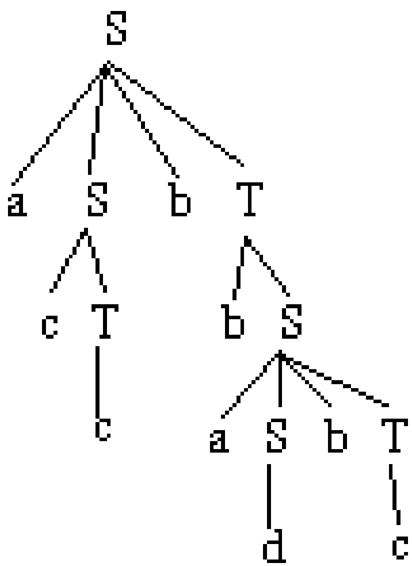
$w = \cancel{a}\,c\,c\,b\,b\,a\,d\,b\,c$

Puis la deuxième lettre "c" amène à la situation



$w = \cancel{a}\,\cancel{c}\,c\,b\,b\,a\,d\,b\,c$

et ainsi de suite jusqu'à



$w = \cancel{a}\,\cancel{c}\,\cancel{c}\,\cancel{b}\,\cancel{b}\,\cancel{a}\,\cancel{d}\,\cancel{b}\,\cancel{c}$

On a trouvé un arbre de dérivation, donc w appartient au langage de G1.

Facile : chaque règle commence par un terminal différent, on n'a pas à choisir.

Exemple 2 :

G2 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = (S, A)

V_T = (a, b, c, d)

Racine = S

R = {

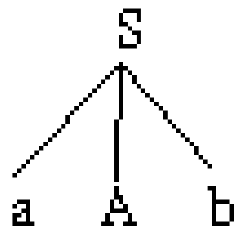
1 S $\rightarrow$ a A b

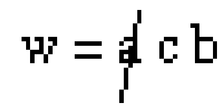
2, 3 A $\rightarrow$ c d | c

}

Soit le mot w = a c b

On se retrouve avec





En lisant *c*, on ne sait pas s'il faut choisir

la règle 2 A $\rightarrow$ c d

ou la règle 3 A $\rightarrow$ c.

Pour le savoir, il faut :

1- soit lire **aussi** la lettre suivante du mot : b,

2- soit faire des **retours en arrière :** on essaie la règle 2 A $\rightarrow$ c d, on aboutit à un échec, alors on retourne en arrière et on essaie 3 A $\rightarrow$ c et ça marche.

Exemple 3 :

G3 $= (V_N , V_T , S, R)$

V_N = (S)

V_T = (a, b, c, d)

R = { S → a S b | a S c | d } 1, 2, 3 }

Soit le mot w = a a a a a a a d b b c b b b c

Pour savoir quelle règle utiliser, il faut connaître aussi la **dernière** lettre du mot.

Exemple 4 : grammaire des expressions arithmétiques

G4 $= (V_N , V_T , E, R)$

V_N = (E, E', T, T', F)

V_T = (+, ⁎, (,), nb)

Racine = E

R = {

1	E →	T E'	
2, 3	E' →	+ T E'	| ε
4	T →	F T'	
5, 6	T' →	⁎ F T'	| ε
7, 8	F →	(E)	| nb

}

Soit le mot *w* = 3 ⁎ 4 + 10 ⁎ (5 + 11) ??????

Ce serait pratique d'avoir une " **table de correspondance "** qui indique :

"quand je lis tel symbole et que j'en suis à dériver tel symbole non-terminal,

alors j'applique telle règle".

3.1 Grammaires LL (1)

Définition

On appelle **grammaire LL(1)** une grammaire pour laquelle la reconnaissance d'un mot peut se faire de la manière suivante :

- on parcourt le mot de gauche à droite (L pour *Left to right scanning*),

- on développe l'arbre de dérivation en choisissant d'abord les non terminaux les plus à gauche (L pour *Leftmost derivation*),

- on ne lit pas plus d'un symbole du mot à la fois (1).

Contre-exemple :

$G2 = (V_N , V_T , S, R)$

$V_N = (S, A)$

$V_T = (a, b, c, d)$

Racine = S

R = {

1	S	→ a A b
2, 3	A	→ c d | c
	}	

Pour pouvoir choisir entre

A → c d

et

A → c

il faut lire la lettre qui suit.

grammaire LL (2) :

Il faut lire 2 symboles à la fois pour décider

Théorème

Une grammaire **récursive à gauche** ou **non factorisée à gauche** ou **ambiguë** n'est pas LL(1).

3.2 Récursivité à gauche

Définition ; récursivité à gauche immédiate

Une grammaire est **immédiatement récursive à gauche** si elle contient un non-terminal A tel qu'il existe une règle

$$A \rightarrow A\, v$$

où v est un mot quelconque composé de symboles terminaux ou non-terminaux

Exemple :

G5 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = (S, A, B)

V_T = (a, b, c, d, e)

Racine = S

R = {

1, 2	S	→	S c A	| B	
3, 4	A	→	A a	| ε	
5, 6, 7	B	→	B b	| d	| e

}

3 récursivités à gauche immédiates : règles 1, 3, 5

Construction d'une grammaire non immédiatement récursive à gauche équivalente

Remplacer tout schéma de règles

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}\ w1 \mid \ldots \mid \mathbf{A}\ wn \mid x1 \mid \ldots \mid xm \mid$$

où les xi ne commencent pas par A

en appliquant la procédure :

1 - ajouter le symbole A1 à V_N
2 – remplacer le schéma de règles par :

$$A \rightarrow x1\ A1 \mid \ldots \mid xm\ A1$$
$$A1 \rightarrow w1\ A1 \mid \ldots \mid wm\ A1 \mid \varepsilon$$

Théorème La grammaire obtenue reconnaît **le même langage** que la grammaire initiale.

Exemple : règles de G51 issue de G5

S	→ B S1	
S1	→ c A S1	| ε
A	→ ε A1	= A1
A1	→ a A1	| e
B	→ d B1	| e B1
B1	→ b B1	| ε

Ici, A1 est un symbole inutile

S	→ B S1	
S1	→ c A S1	| ε
A	→ a A	| ε
B	→ d B1	| e B1
B1	→ b B1	| ε

Exemple : reconnaissance d'un mot avec G5 et G51

w = **d b b c a a** s'obtient à partir de G5 par la suite de dérivations immédiates :

S → S c A → B c A → B b c A
→ B b b c A → d b b c A → d b b c A a
→ d b b c A a a
→ d b b c a a

w = **d b b c a a** s'obtient à partir de G51 par la suite de dérivations immédiates :

S → B S1 → d B1 S1 → d b B1 S1
→ d b b B1 S1 → d b b S1 → d b b c A S1
→ d b b c a A S1 → d b b c a a A S1
→ d b b c a a S1
→ d b b c a a

Remarque : ici on peut se passer de A1.

A → A a | ε est équivalent à :

A → a A | ε immédiatement récursive à droite, ne pose pas de problème.

Définition : récursivité à gauche

Une grammaire est **récursive à gauche** si elle contient un non-terminal **A** tel qu'il existe une dérivation

$$A \rightarrow^{+} A\ v$$

où v est un mot quelconque composé de symboles terminaux ou non-terminaux

Exemple :

G6 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = (S, A)

V_T = (a, b, c, d)

Racine = S

R = {

S → A a | b

A → A c | S d | ε

}

S n'est pas immédiatement récursif à gauche mais récursif à gauche :

en 2 dérivations immédiates

S → A a

→ S d a

Construction d'une grammaire non récursive à gauche équivalente

Renommer et ordonner les non-terminaux $A_1, A_2, \ldots, A_n$

pour i = 1 à n

    pour k = 1 à i - 1

    remplacer chaque ensemble de règles de la forme

$$A_i \rightarrow A_k\, v$$

avec $A_k \rightarrow w_1 \mid \ldots \mid w_m \quad w_i \in (V_N \cup V_T)^+$

et $v = x_1 \mid \ldots \mid x_p \quad x_j \in V_T{}^*$

    par

$$A_i \rightarrow w_1\, v \mid \ldots \mid w_m\, v$$

-- on supprime les A_k k = 1 à i - 1

    fin pour

    éliminer les récursivités à gauche immédiates des règles

$$A_i \rightarrow w_1\, v \mid \ldots \mid w_m\, v$$

fin pour

Théorème La grammaire obtenue reconnaît **le même langage** que la grammaire initiale.

Exemple – G6

On renomme S et A : A1 = S et A2 = A

i = 1

il n'existe aucun k possible

ni de récursivité immédiate dans

S → A a | b —- A1 → A2 a | b

i = 2 et k = 1

A → S d -- A2 → A1 x

S → A a | b -- A1 → w1 | w2

devient

A → A a d | b d --- A2 → w1 x | w2 x

En rassemblant les règles dont A est partie gauche

A → A c | A a d | b d | ε

on élimine la récursivité immédiate :

1- on introduit A1

2- on remplace le schéma de règles A → A c | A a d | b d | ε

par le schéma :

A → b d A1 | ε A1 = A1

A1 → c A1 | a d A1 | ε

On a obtenu la grammaire :

G61 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = (S, A, A1)

V_T = (a, b, c, d)

Racine = S

R = {

S → A a | b

A → b d A1 | A1

A1 → c A1 | a d A1 | ε

}

Exemple – G7

G7 = (V_N , V_T , S, R)
V_N = (S, T)
V_T = (a, b, c, d)
Racine = S
R = {

S	→	S a	| T S c	| d
T	→	T b T	| ε	

}

On obtient la grammaire :

G71 = (V_N , V_T , S, R)
V_N = (S, S1, T, T1)
V_T = (a, b, c, d)
Racine = S
R = {

S	→	T S c S1		| d S1
S1	→	a S1	| ε	
T	→	T1		
T1	→	b T T1	| ε	

}

Mais :

S → T S c S1 → T1 S c S1 → **S** c S1 !!! récursivité à gauche !!!!

L'algorithme n'est pas toujours opérant lorsque la grammaire possède une ε production A → ε

3.3 Factorisation à gauche

Objectif : **supprimer les ambiguïtés** dans la construction d'un arbre de dérivation

Pour développer le nœud du non-terminal A quand il n'est pas évident de choisir la production à utiliser, on doit réécrire les règles de la partie gauche A pour **différer** le choix jusqu'à ce que suffisamment de texte ait été lu pour choisir.

Exemple – G8

G8 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = (S, A, B)

V_T = (a, b, c, d)

Racine = S

R = {

S → b a c d A b d | b a c d B c c a

A → a D

B → c E

C → …

E → …

}

Pour construire l'arbre de dérivation, il faut choisir entre

S → b a c d **A** b d

et

S → b a c d **B** c c a

il faut avoir lu la **5ième lettre** du mot (*A* ou *B*). G8 est une grammaire LL(5).

Construction d'une grammaire factorisée à gauche équivalente

pour chaque symbole non-terminal A

trouver le plus long préfixe w commun à au moins deux parties droites des règles dont A est partie gauche

si w est différent de ε

alors

Ajouter un nouveau symbole A1 à VN

remplacer

$A \rightarrow w\ v_1 \mid \ldots \mid w\ v_n \mid u_1 \mid \ldots \mid u_p$

où les u i ne commencent pas par w

par les 2 ensembles de règles

$A \rightarrow w\ A1 \mid u1 \mid \ldots \mid up$

$A1 \rightarrow v1 \mid \ldots \mid vn$

finpour

Recommencer jusqu'à ne plus trouver de préfixe commun.

Exemple :

G9 = (V_N , V_T , S, R)

V_N = (S, E, B)

V_T = (a, b, c, d)

Racine = S

R = {

S → a E b S | a E b S d B | a

E → b c B | b c a

B → b a

}

Factorisée à gauche, R devient :

S → a S1

S1 → E b S S2 | ε

S2 → d B | ε

E → b c E1

E1 → B | a

B → b a

3.4 Grammaire propre

Définition

Une grammaire est dite **propre** si
1. elle ne contient aucune ε production

   $A \rightarrow \varepsilon$
2. ou si elle ne contient qu'une ε production $S \rightarrow \varepsilon$

Construction d'une grammaire propre équivalente à une grammaire

Pour chaque A qui apparaît dans une règle

$A \rightarrow \varepsilon$

Pour chaque règle où A apparaît dans sa partie droite,

Ajouter à la grammaire une règle dans laquelle A est remplacé par ε,

Finpour

Finpour

Exemple :

G10 = (V_N , V_T , S, R)
V_N = (S, T, U)
V_T = (a, b)
Racine = S
R = {

S	→	a T b	| a U
T	→	b T a T a	| ε
U	→	a U	| b

}

Règles de la grammaire propre équivalente :

S	→	a T b	| a b	| a U
T	→	b T a T a	| b a T a	| b T a a
		| b a a		
U	→	a U	| b	

4.0 Introduction – Notion de graphe

- **Graphe orienté**

Un **graphe orienté G** est défini par un quadruplet
G = (S, A, INITIAL, TERMINAL)
où

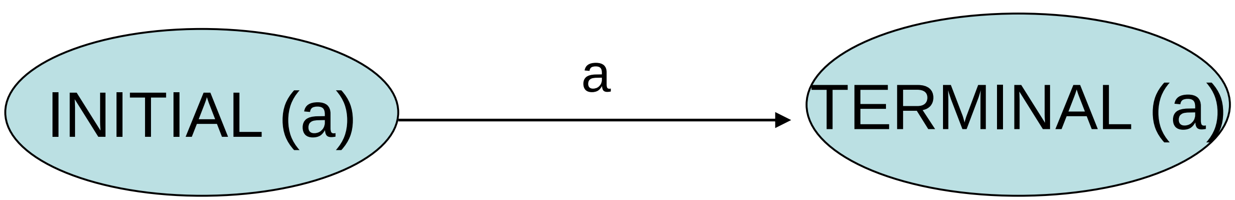
S = ensemble fini d'éléments, appelés **sommets**

A = ensemble fini d'éléments, appelés **arcs**

INITIAL, TERMINAL = applications de A vers S telles que

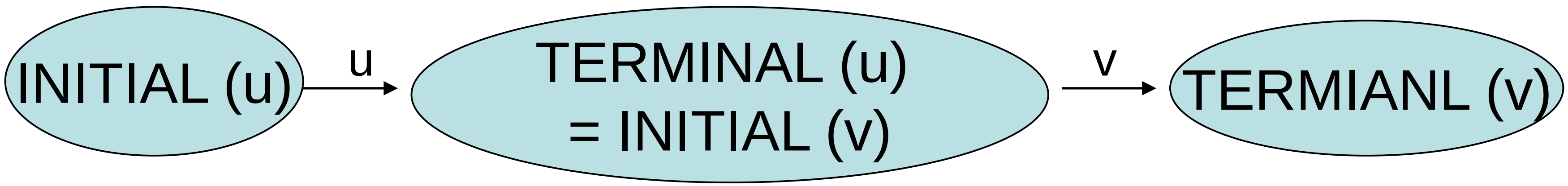
pour tout arc a de A, son **sommet initial INITIAL (a)** et son **sommet terminal TERMINAL (a)** sont définis

Exemple 1 : 1 arc "a" et ses 2 sommets



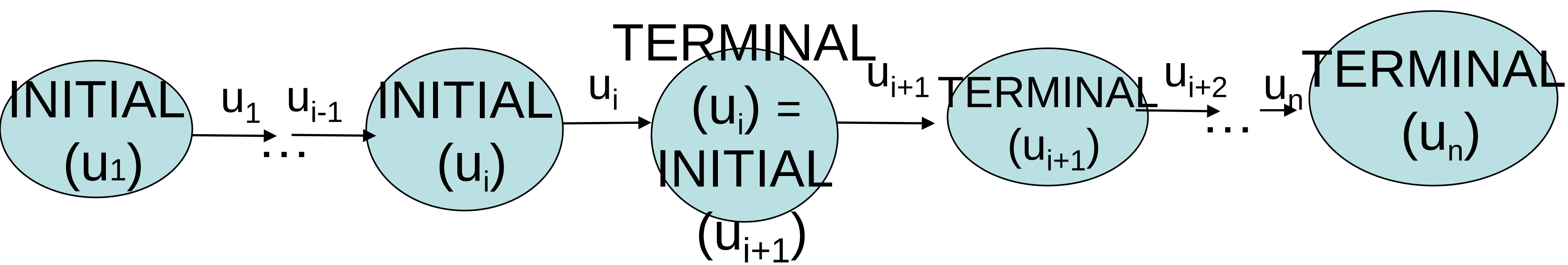
- Arcs adjacents

2 arcs u et v sont dits **adjacents** ssi TERMINAL (u) = INITIAL (v)



- Chemin dans un graphe orienté

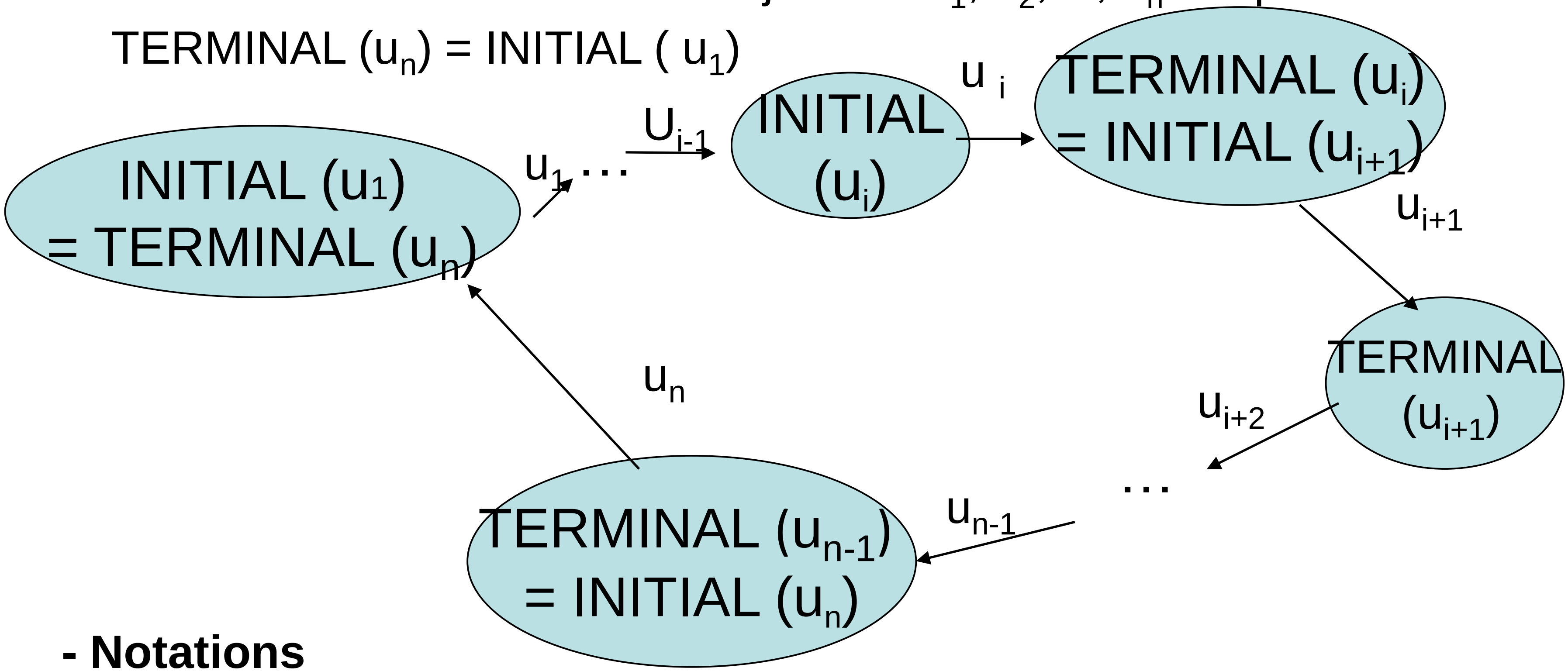
Un **chemin** est une suite d'arcs u_1, u_2,…, u_n telle que pour tout i >=1, u_i et u_{I+1} sont adjacents



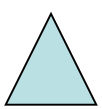
- Circuit dans un graphe orienté

Un **circuit** est un chemin d'arcs adjacents $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tel que

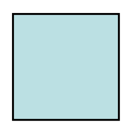
$\text{TERMINAL}(u_n) = \text{INITIAL}(u_1)$



- Notations



Sommet initial



Sommet terminal

- Expressions régulières et graphes

Une expression régulière E peut être représentée par un graphe orienté dont tout arc est étiqueté par un symbole de son alphabet V ou par ε

Un mot v du langage L dénoté par E peut être représenté par un chemin reliant

- un sommet initial
- un sommet terminal

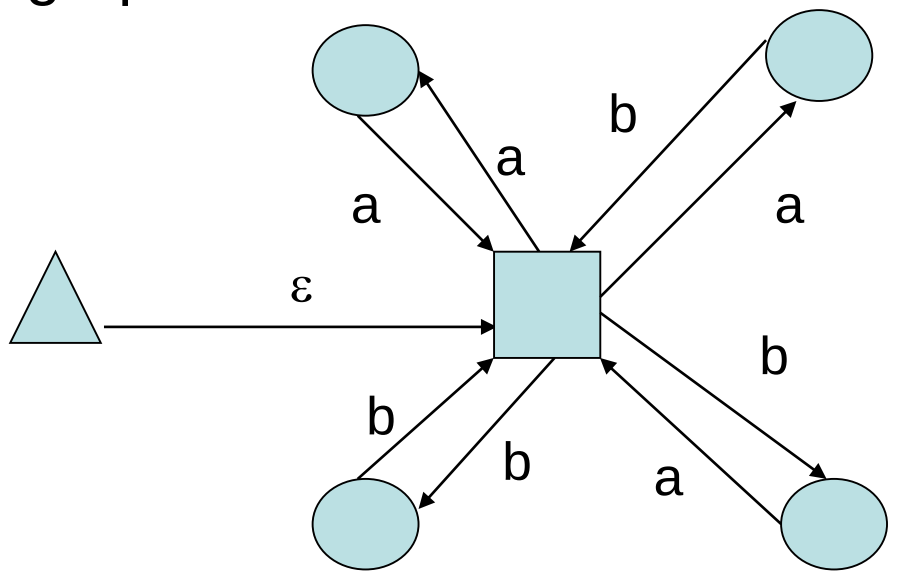
Exemple 2 :

$$v = p\,r\,(\,e\,n\,(\,d\,(\,s + \varepsilon\,) + o\,n\,s + e\,z + n\,e\,n\,t\,) \\ + i\,(s + t + m\,e\,s + t\,e\,s + r\,e\,n\,t\,)\,)$$

Construire un graphe orienté G1 qui représente v

Exemple 3

Soit G2 le graphe



Expression régulière représentant G2

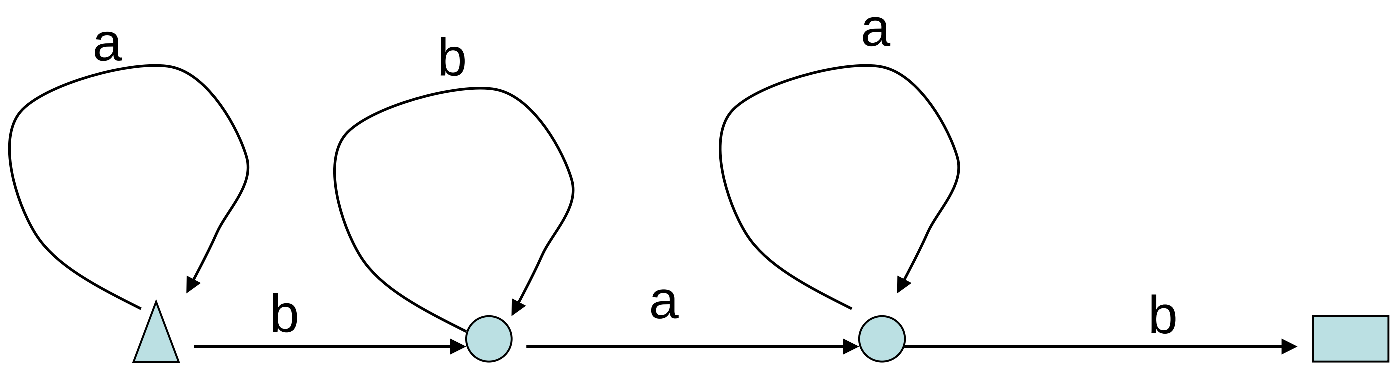
V2 = {a, b}

E2 = (a a + a b + b a + b b) *

"Tous les chemins sont étiquetés par un mot dont le nombre de lettres est pair"

Exemple 3

Soit G3 le graphe



Expression régulière représentant G3

V3 = {a, b}

E3 $= a * b\ b * a\ a * b \quad = a * b^{+} a^{+} b$

4.1 Automates à états finis déterministe AEFD

Définition

Un AEFD M est la donnée d'un quintuplet

$M = (Q, V, q_0, F, T)$

où :

- Q : ensemble d'états
- V : vocabulaire / alphabet
- $q_0 \in Q$: état initial
- $F \subseteq Q$: ensemble d'états finaux / terminaux
- T : ensemble de transitions

  $$(q, x, q') \in (Q, V, Q)$$

  ou fonction de transition

  $$(Q, V) \rightarrow Q$$

Machine composée de :

1. Une mémoire = ruban où on place les symboles d'un mot construit sur un alphabet V
2. Une tête de lecture qui peut lire un symbole x de V à la fois, dans la même direction et qui est dans l'un des états q d'un ensemble d'états Q, dont un état initial q_0 et un sous-ensemble d'état terminaux $F \subseteq Q$
3. Un automate qui commande la tête de lecture

La tête est dans un état q_0 initial, et placée en face du 1er symbole x_0 de V inscrit sur le ruban

- en fonction de son état q et du symbole lu x de V, la tête adopte un nouvel état q' de Q s'il existe une transition de T

$$(q, x, q') \text{ ou } (q, x) \rightarrow q'$$

- la lecture s'arrête quand il n'y a plus de symbole à lire
- La suite de symboles de V "lus" est un mot "reconnu" par l'automate si la tête est dans l'un des états terminaux et qu'il n'y a plus de symbole à lire sur le ruban

Configuration – dérivabilité d'une configuration

Tout "instant" du fonctionnement d'un automate
$M = (Q, V, q_0, F, T)$
est caractérisé par

- un état q de Q
- le mot v, suite des symboles qui restent à lire à cet instant

Configuration

élément (q, v) de Q x V*

Configuration initiale

(q_0, v_0), où v_0 est le mot à lire

Une configuration (q', w) **est une dérivation immédiate** d'une configuration (q,v)

$$(q, v) \rightarrow (q', w)$$

s'il existe un symbole "a" de V tel que : v = a . w

et si (q, a) → (q') $\in$ T ou (q, a, q') $\in$ T ou q' = T (q, a)

Une configuration (q', w) **est dérivable** à partir de (q, v) s'il existe une suite finie de dérivations immédiates

$$(q, v) \rightarrow (q_1, w_1) \rightarrow \ldots \rightarrow (q_k, w_k) = (q', w)$$

on note

$$(q, v) \rightarrow^* (q', w)$$

Un mot v sur V* est reconnu par un automate

M = (Q, V, q_0, F, T) s'il existe une dérivation

$(q_0, v) \rightarrow^* (q_f, \varepsilon)$ où $q_f \in F$ état final (ou terminal)

Tout automate

$M = (Q, V, q_0, F, T)$

peut être représenté par un graphe orienté

$G = \quad (S, A, INITIAL, TERMINAL)$

- Tout sommet s de S est identifié à un état q de Q
- Le sommet initial de S est identifié à l'état initial q_0
- Tout arc a = (INITIAL (a), TERMINAL (a)) de A entre 2 sommets de S est identifié à une transition

  $(q, a, q') \in T$ ou $(q, a) \rightarrow q'$

avec

$a \in V$

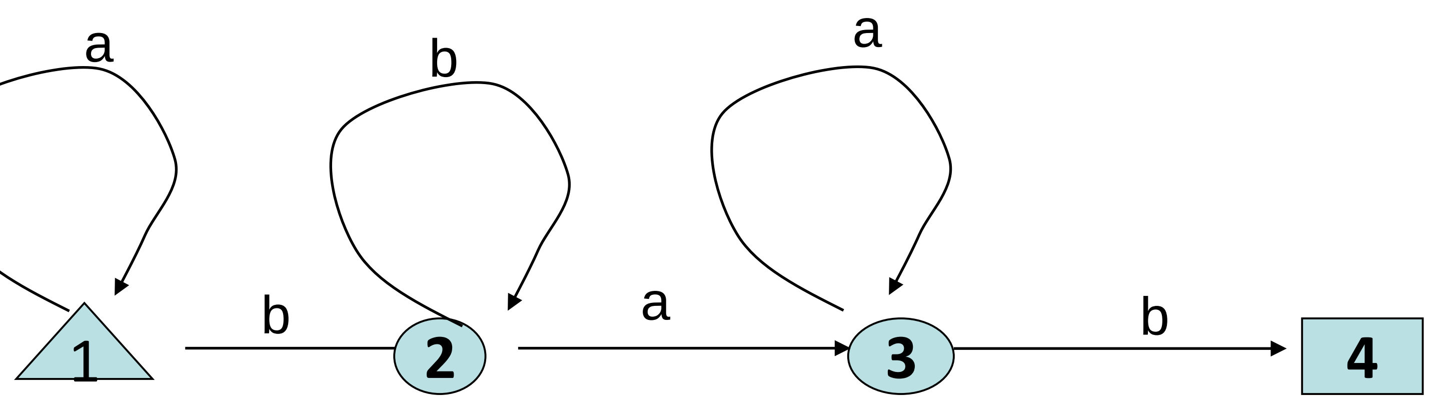
$q = INITIAL (a)$

$q' = TERMINAL (a)$

- On <u>souligne</u> les états terminaux de F

Exemple 3

Soit G3 le graphe



G3 représente l'expression régulière

$E3 = a^* b b^* a a^* b = a^* b^+ a^+ b$

G3 représente un automate

$M = (Q, V, q_0, F, T)$

Q = (1, 2, 3, 4)

V= (a, b)

$q_0 = 1$

F = <u>4</u>

T =

V / Q	a	b
1	1	2
2	3	2
3	3	<u>4</u>
<u>4</u>	-	-

Exemple 4

$M1 = (Q, V, q_0, F, T)$

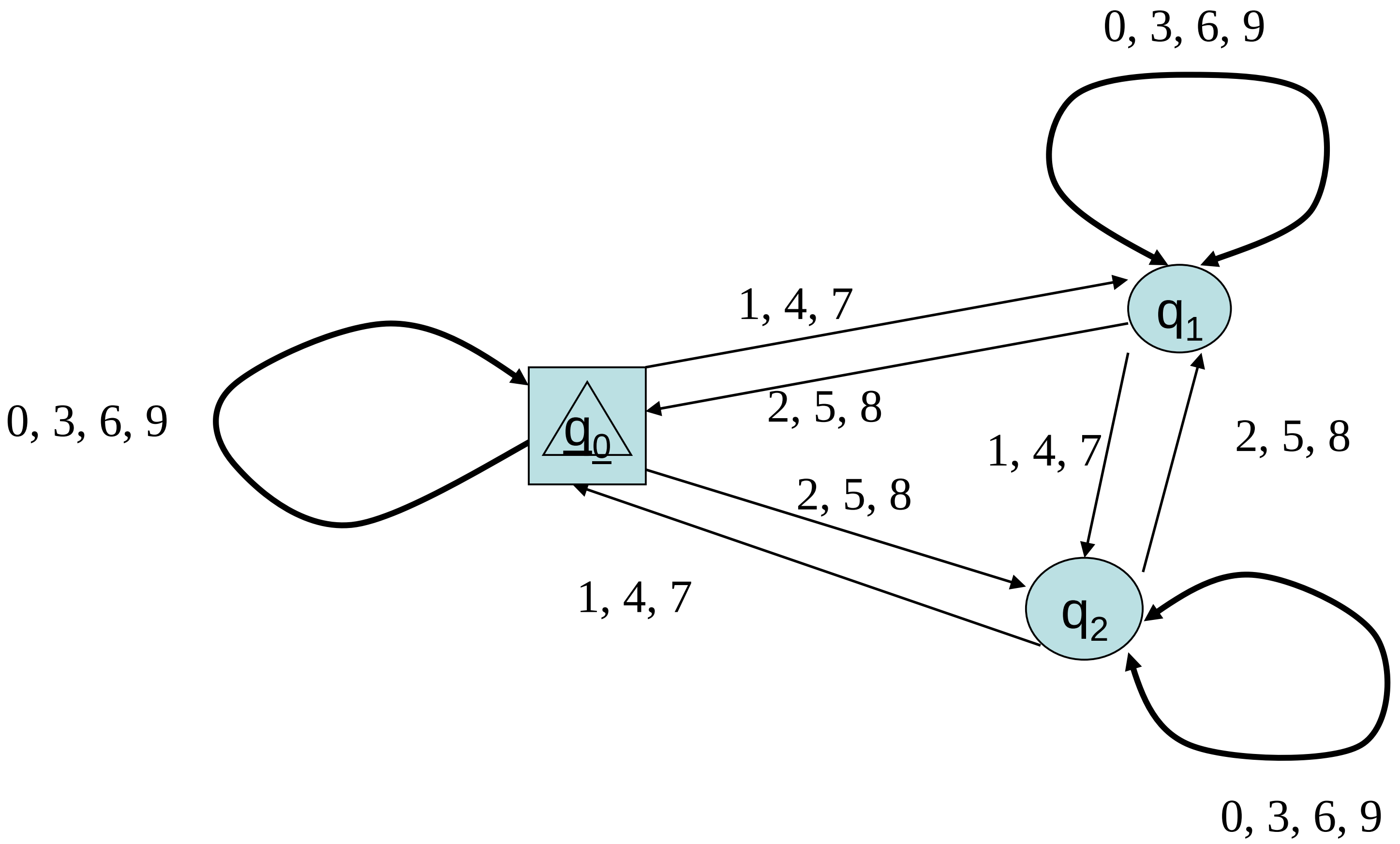
$Q = \{ q_0, q_1, q_2 \}$

$V = \{ 0, \ldots, 9 \}$

$F = \{ \underline{q_0} \}$

T =

V Q	0, 3, 6, 9	1, 4, 7	2, 5, 8
$\underline{q_0}$	$\underline{q_0}$	q_1	q_2
q_1	q_1	q_2	$\underline{q_0}$
q_2	q_2	$\underline{q_0}$	q_1



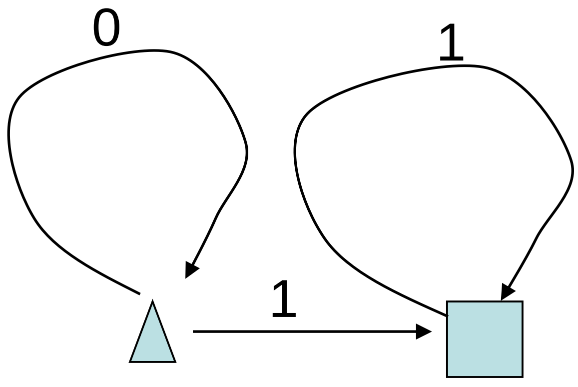
Exemple

v1 = 150 est reconnu par M1,

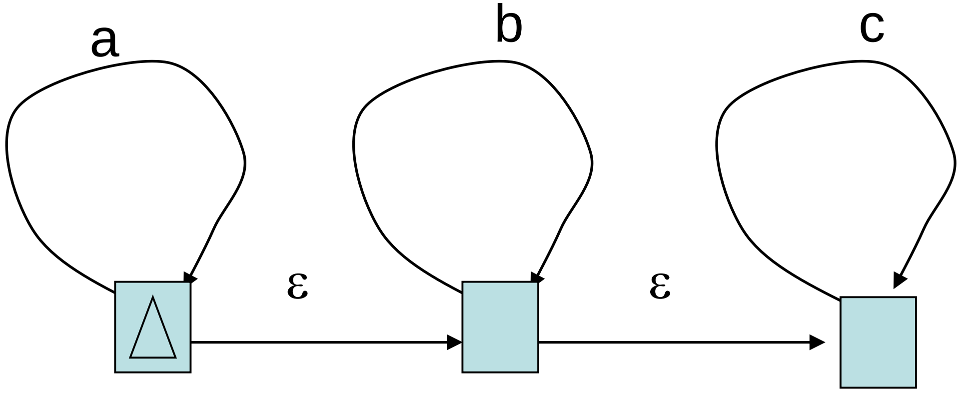
v2 = 149 n'est pas reconnu par M1

Exercices : trouver un AEFD pour les langages L1 et L2

1- L1 = { $0^p 1^n$, p >=0, n >= 1]



2- L2 = { $a^p b^k c^m$, p >=0, k >= 0, m >= 0]



4.2 Automates à états finis non déterministe AEFND

Un AEFND M est la donnée d'un quintuplet

(Q, V, q_0, F, Δ)

où :

- Q : ensemble d'états
- V : vocabulaire / alphabet
- $q_0 \in Q$: état initial
- $F \subseteq Q$: ensemble d'états finaux / terminaux
- Δ : ensemble de transitions

  (Q, V, Q*)

  ou relation de transition

  $(Q, V) \rightarrow Q^*$

Exemple 5 :

M2 = (Q, V, q_0, F, Δ)

Q = { 0, 1, 2, 3 , 4 }

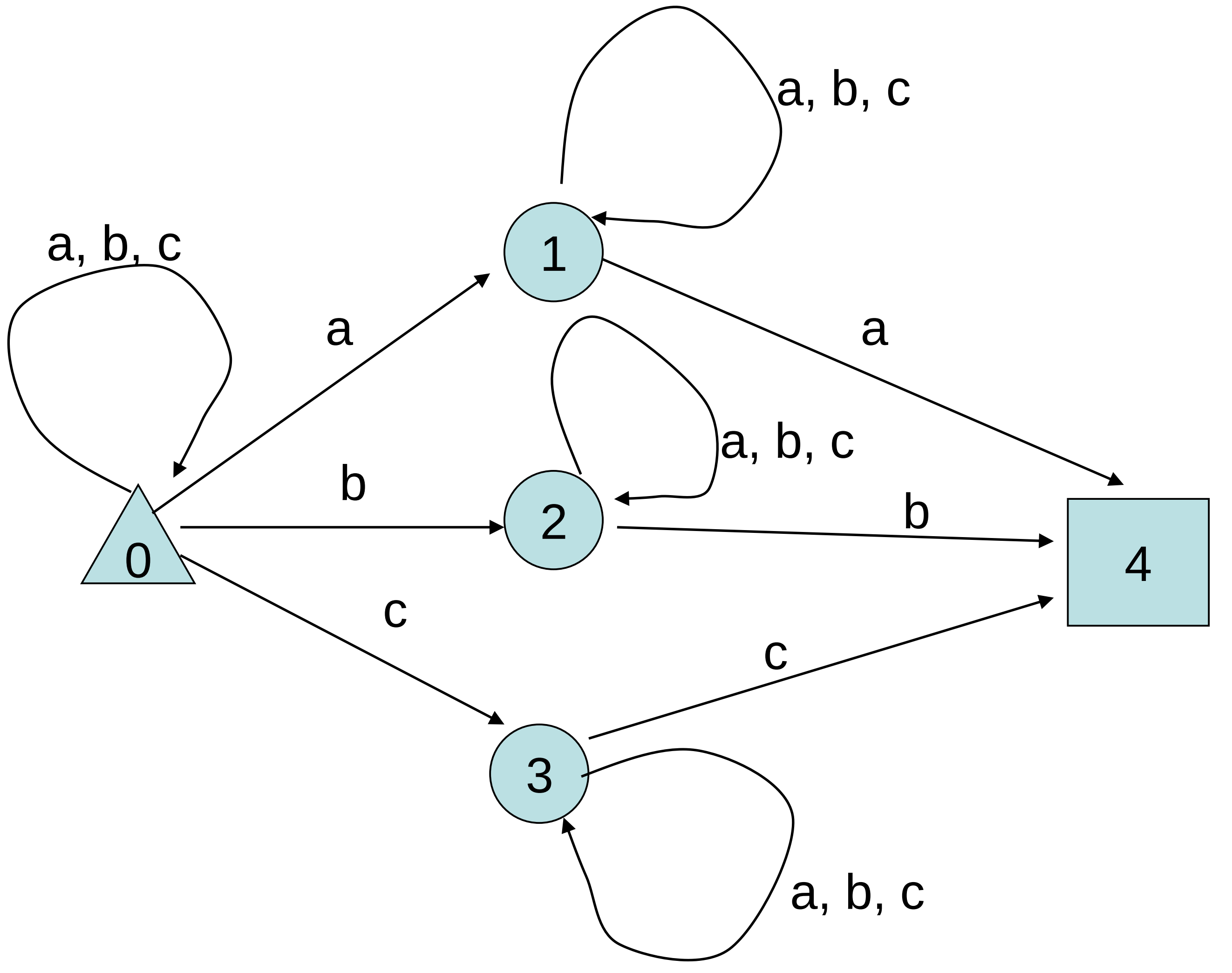
V = { a, b, c }

q_0 = 0

F = { <u>4</u> }

Δ =

V / Q	a	b	c
0	0, 1	0, 2	0, 3
1	1, <u>4</u>	1	1
2	2	2, <u>4</u>	2
3	3	3	3, <u>4</u>
<u>4</u>	-	-	-



Langage = ensemble des mots dont la dernière lettre se trouve déjà dans le mot

4.3 "Déterminisation" d'un AEFND

Principe : Soit M = (Q, V, q_0, F, Δ) un AEFND.

Les états et transitions de l' AEFD MD équivalent sont construits à partir des états et des ensembles de transitions de M

Définition

Une ε transition est une transition (p, ε , q) qui fait changer d'état un automate de p à q sans consommer de lettre de V – "spontanément"

4.3.1 Cas particulier : l'AEFND ne contient pas d'ε transition

- Alphabet de MD = alphabet de M = V

1. Etat initial de MD = état initial de M = q_0
2. Pour chaque lettre "a" de V, ajouter à MD un état qui rassemble l'ensemble $\{q_1,..., q_n\}$ des états de Q accessibles par l'une des transitions (q_0, a, q_i), i = 1,..., n de Δ
3. Pour chaque nouvel état de MD créé, recommencer 2 jusqu'à ce qu'aucun nouvel état soit créé
4. Tout état de MD contenant au moins l'un des états q_f de F est un état terminal de MD
5. Renumérotez tous les états de MD

Exemple 6 :

M3 = (Q, V, q_0, F, Δ)

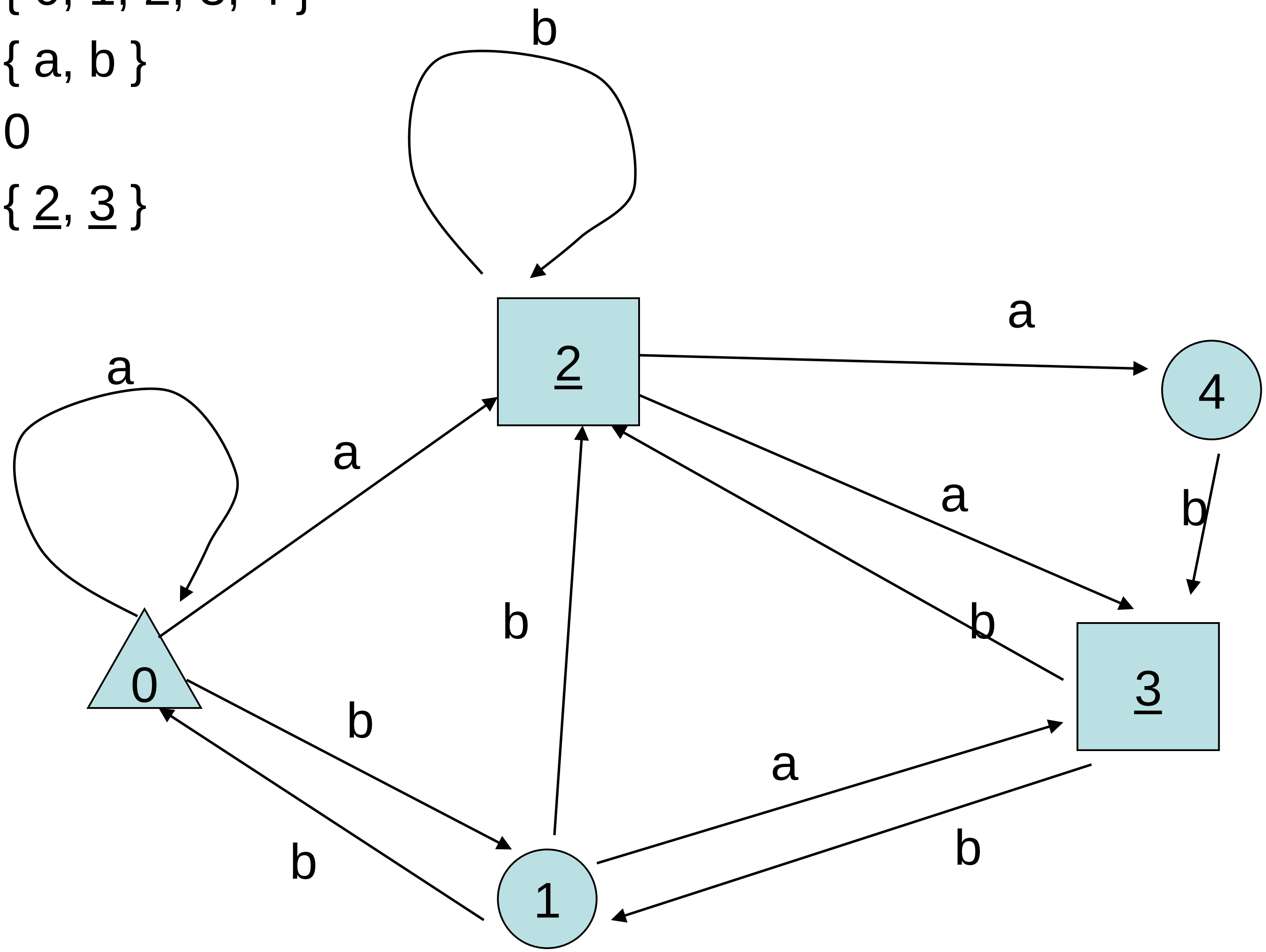
Q = { 0, 1, 2, 3, 4 }

V = { a, b }

q_0 = 0

F = { <u>2</u>, <u>3</u> }

Δ =



Δ =

Q \ V	a	b
0	0, 2	1
1	3	0, 2
2	3, 4	2
3	-	1, 2
4	-	3

Automate M3D : on applique l'algorithme

T =

	Q \ V	a	b
0	0	0, 2	1
1	0, 2	0, 2, 3, 4	1, 2
2	1	3	0, 2
3	0, 2, 3, 4	0, 2, 3, 4	1, 2, 3
4	1, 2	3, 4	0, 2
5	3	-	1, 2
6	1, 2, 3	3, 4	0, 1, 2
7	3, 4	-	1, 2, 3
8	0, 1, 2	0, 2, 3, 4	0, 1, 2

Renumérotation des états du nouvel automate M3D

T =

V Q	a	b
0	1	2
1	3	4
2	5	1
3	3	6
4	7	1
5	-	4
6	7	8
7	-	6
8	3	8

M3D = (QD, V, q_0, FD, T)

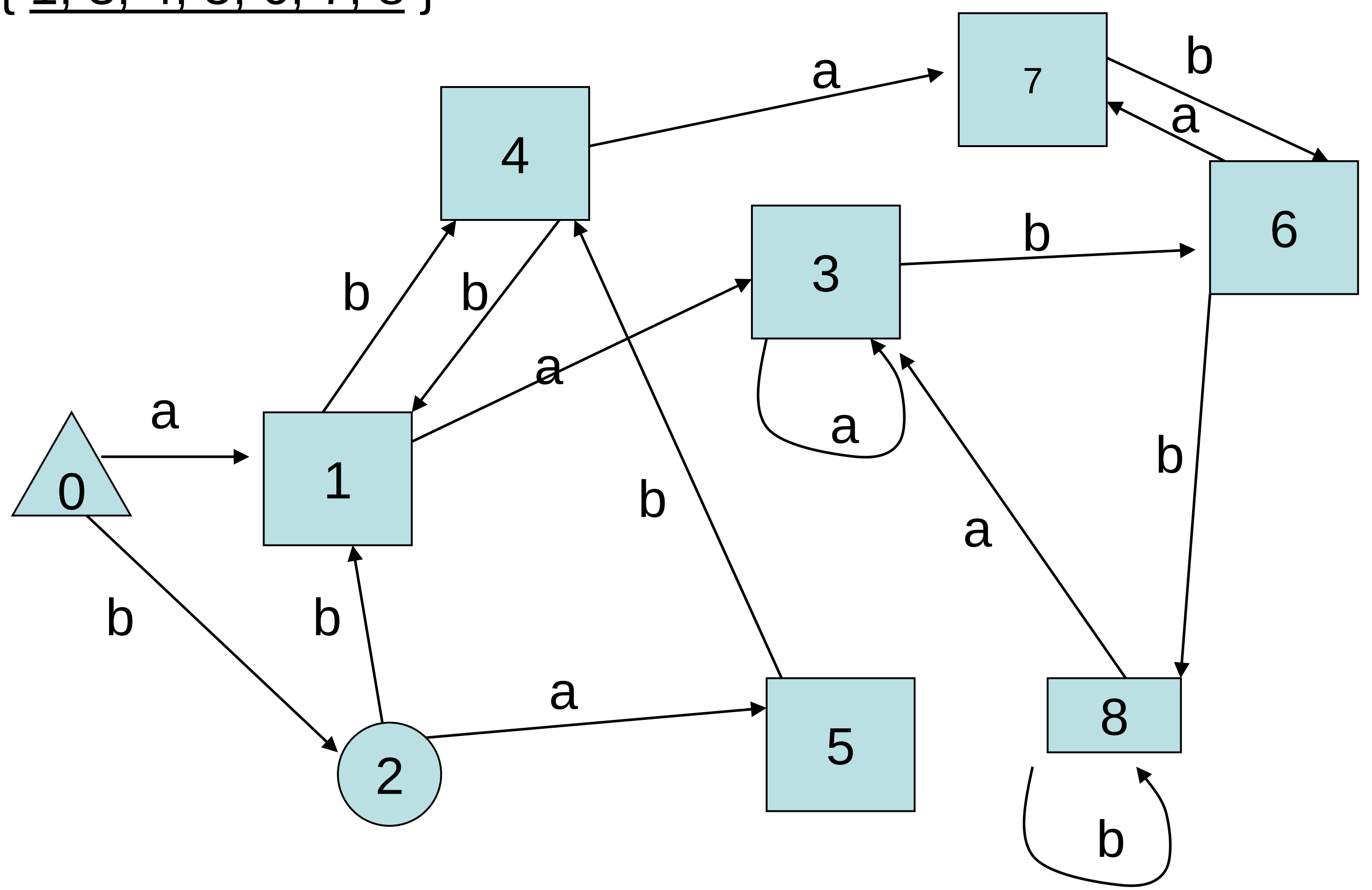
QD = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }

V = { a, b }

q_0 = 0

FD = { 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }

T =



4.3.2 Cas général : : l'AEFND contient des ε transition

Principe : considérer l' ε – fermeture des ensembles d'états

Définition

ε – fermeture de l'ensemble d'états Etats = $\{ q_1, \ldots, q_n \}$

= ensemble des états accessibles depuis un état q_i de Etats par des ε – transitions

Calcul de l'ε – fermeture de Etats = { q_1, … , q_n }

Placer tous les états q_i de Etats dans une pile P
ε – fermeture (Etats) = Etats
Tant que P n'est pas vide
Soit p sommet de P

Pour chaque état q tel que (p, ε ,q) $\in\Delta$
Si q n'est pas dans ε – fermeture (Etats)
Alors
ε – fermeture (Etats) = ε – fermeture (Etats) + q
empiler q dans P
Fin si
Fin pour

Si il n'existe aucun q tel que (p, ε ,q) $\in\Delta$
alors
dépiler p de P
fin si
Fin tant que

Exemple 7 :

M4 = (Q, V, q_0, F, Δ)

Q = { 0, 1, 2, 3, 4 }

V = { a, b, c }

q_0 = 0

F = { <u>4</u> }

Δ =

V / Q	a	b	c	ε
0	2	-	0	1
1	3	<u>4</u>	-	-
2	-	-	1, <u>4</u>	0
3	-	1	-	-
<u>4</u>	-	-	3	2

ε – fermeture ({ 0 }) = { 0, 1 }

ε – fermeture ({ 1, 2 }) = { 1, 2, 0 }

ε – fermeture ({ 3, 4 }) = { 3, 4, 2, 0, 1 } …

Déterminisation d'un AEFND avec des ε – transitions

Alphabet de MD = alphabet de M = V

F = ensemble des états terminaux de M

Etat initial de MD = ε–fermeture (q_0)

1. **Pour** chaque lettre "a" de V
   ajouter un état q_a qui rassemble l'ensemble d'états
   $\{q_1,..., q_n\}$ de Q accessibles par une transition de
   $\Delta : (q_0, a, q_i), i = 1,..., n$
   \+ ε–fermeture (q_0)
   \+ ε–fermeture (q_1)
   \+ . . .
   \+ ε–fermeture (q_n)
3. **Pour** chaque état q_a de MD créé, recommencer 1 jusqu'à ce qu'aucun nouvel état soit créé
4. Tout état de MD contenant au moins l'un des états de F est un état terminal de MD
5. Renumérotez tous les états

Exemple 8 : automate M4D = M4 déterminisé

- état initial de M4D = ε – fermeture (0) = ({ 0, 1 })
- T ({ 0, 1 } , a) =

  Δ ({ 0, 1 }, a) = { 2, 3 }

  \+ ε – fermeture ({ 0, 1 }) = { 0, 1 }

  \+ ε – fermeture ({ 2, 3 }) = { 0, 1 }

d'où :

T (({ 0, 1}), a) = ({ 0, 1, 2, 3 })

- T ({ 0, 1 } , b) =

  Δ ({ 0, 1 }, b) = { 4 }

  \+ ε – fermeture ({ 0, 1 }) = { 0, 1 }

  \+ ε – fermeture ({ 4 }) = ({ 2, 0, 1 })

d'où :

T (({ 0, 1 }), b) = ({ 0, 1, 2, 4 })

etc.

V Q	a	b	c
0, 1	0, 1, 2, 3	0, 1, 2, <u>4</u>	0, 1
0, 1, 2, 3	0, 1, 2, 3	0, 1, 2, <u>4</u>	0, 1, 2, <u>4</u>
0, 1, 2, <u>4</u>	0,1, 2, 3	0, 1, 2, <u>4</u>	0, 1, 2, 3, <u>4</u>
0, 1, 2, 3, <u>4</u>	0, 1, 2, 3, <u>4</u>	0, 1, 2, 3, <u>4</u>	0, 1, 2, 3, <u>4</u>

Après renumérotation des états de M4D

V Q	a	b	c
0	1	$\underline{2}$	0
1	1	$\underline{2}$	$\underline{2}$
$\underline{2}$	1	$\underline{2}$	$\underline{3}$
$\underline{3}$	$\underline{3}$	$\underline{3}$	$\underline{3}$

F = { $\underline{2,\ 3}$ }

Exercice

Dessiner les 2 graphes avant et après déterminisation

4.4 Minimisation d'un AEFD

But : A partir d'un AEFD M donné complet, construire un nouvel automate Mm équivalent ayant le minimum d'états possible.

Principe : on définit des classes d'équivalence entre états par raffinements successifs. Chaque classe d'équivalence obtenue forme un seul et même état du nouvel automate

1. Compléter l'automate : ajouter un état "puit" dans les cases vides de la matrice de transition
2. Constituer 2 classes

   A = { états terminaux }

   B = { états non terminaux }
3. **Pour chaque classe**

   Si il existe un symbole a et 2 états q1, q2 d'une même classe tels que

   Δ (q1, a) et Δ (q2, a) n'appartiennent pas à la même classe,

   Alors créer une nouvelle classe C

   enlever q2 de sa classe et placer q2 dans C

   Fin pour
4. Recommencer 3 jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de classes à séparer
5. Regrouper les classes qui ont "le même comportement"
6. **Chaque classe restante forme un état du nouvel automate Mm**

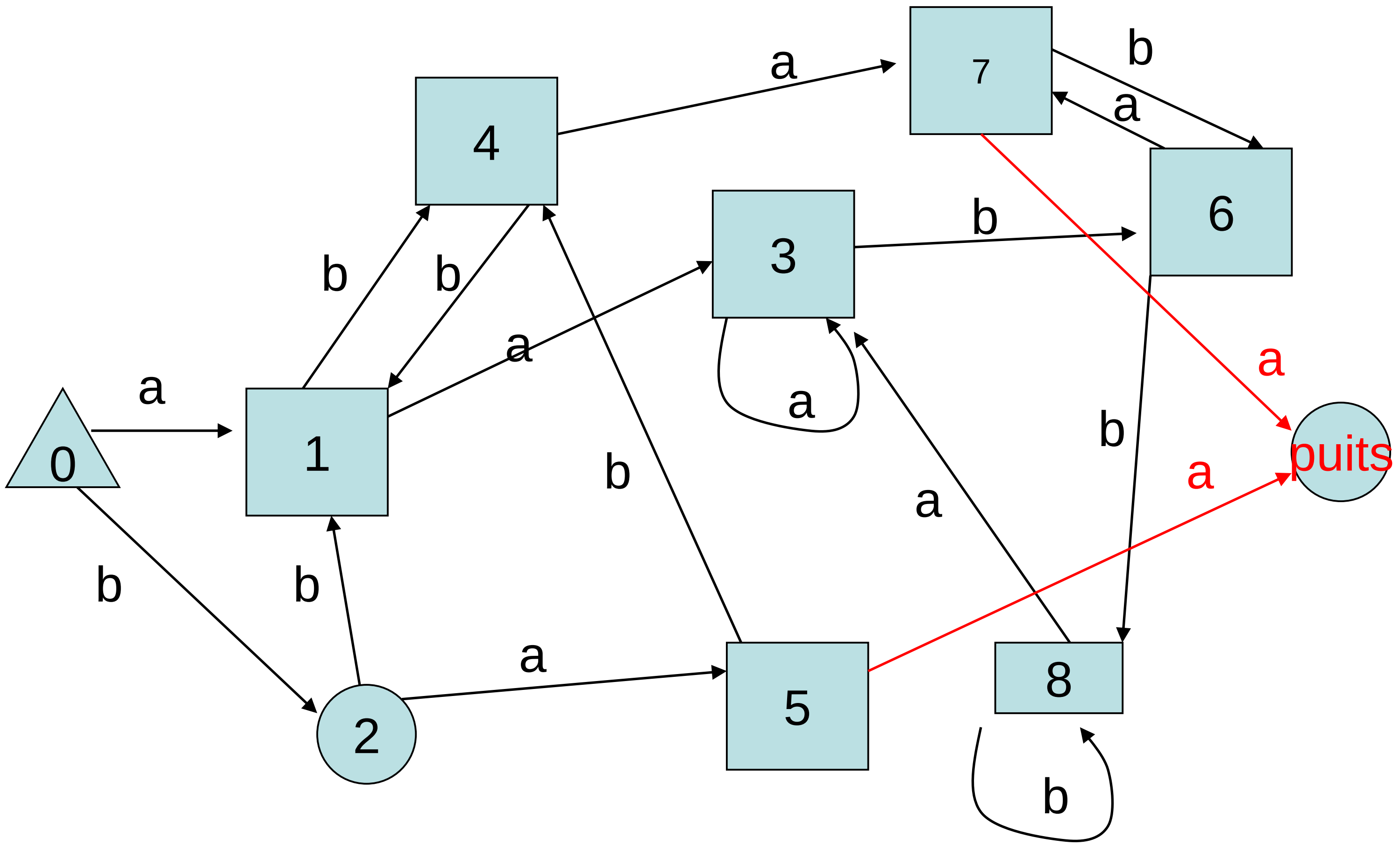
Exemple 9 :
Construction de M3Dm, automate minimal équivalent de M3D

1. On complète M3D avec l'ajout d'un état "puit" pour les transitions manquantes

T =

V / Q	a	b
0	1	2
1	3	4
2	5	1
3	3	6
4	7	1
5	puits	4
6	7	8
7	puits	6
8	3	8

Graphe de M3D complété



2- Classes initiales

A = { 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }

B = { 0, 2 }

3- Etude de la classe A

Les transitions qui partent des états de A restent dans A, sauf 5 qui est projeté vers l'état "puit" avec "a"
On crée une classe A1 pour 5

A = { 1, 3, 4, 6, 7, 8 }   A1 = {5}

Les transitions qui partent des états de A restent dans A, sauf 7 qui est projeté vers l'état "puit" avec "a"
On crée une classe A2 pour 7

A = { 1, 3, 4, 6, 8 }   A1 = {5} A2 = {7}

Les transitions qui partent des états de A restent dans A, sauf 4 qui est projeté vers l'état 7 avec "a"
On crée une classe A3 pour 4

A = { 1, 3, 6, 8 }   A1 = {5}   A2 = {7}   A3 = {4}

Les transitions qui partent des états de A restent dans A, sauf 6 qui est projeté vers l'état 7 avec "a"
On crée une classe A4 pour 6

A = { 1, 3, 8 }   A1 = {5}   A2 = {7}   A3 = {4}   A4 = {6}

Les transitions qui partent des états de A restent dans A, sauf 3 qui est projeté vers l'état A4 avec "b"
On crée une classe A5 pour 3

A = { 1, 8 }   A1 = {5}   A2 = {7}   A3 = {4}   A4 = {6} A5 = {3}

8 est séparable de 1 dans A à cause de "b"
On crée une classe A6 pour 8

A = { 1}   A1 = {5}   A2 = {7}   A3 = {4}   A4 = {6} A5 = {3}   A6 = {8}

La classe A est donc entièrement séparable
Aucun regroupement de classe possible

2- Etude de la classe B

T (0, b) = 2 et T (2, b) = 1 n'appartiennent pas à la même classe, 0 et 2 ne sont pas équivalents

on crée la classe B1 pour 2

B = { 0 }

B1 = { 2 }

Conclusion

Toutes les classes de l'automate M3D sont séparables et aucun regroupement de classes de même comportement

Cet automate est donc minimal