Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Quellcodeverzeichnis

2 Theoretische und technische Grundlagen

2.1 Datenstrukturen

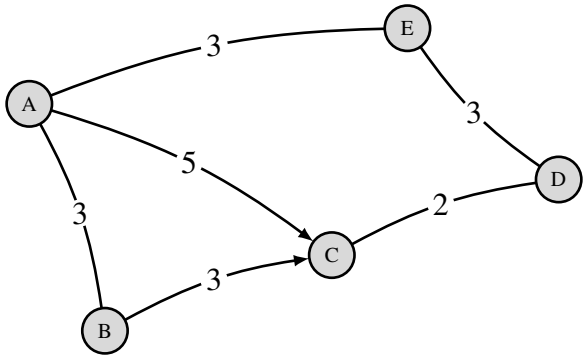
2.1.1 Graph

Um das kürzeste-Wege-Problem zu lösen, muss zunächst das reale Straßennetz in eine abstrakte Form gebracht werden. Hierzu wird das Straßennetz als Graph modelliert. Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge von Knoten V und einer Menge von Kanten E. Jede Kante $e = (u, v) \in E$ verbindet zwei Knoten $u, v \in V$. Knoten bilden Kreuzungen ab und Kanten Straßensegmente zwischen zwei Kreuzungen. Ein Graph kann als gerichtet oder ungerichtet definiert werden. Bei einem ungerichteten Graphen sind die Kanten bidirektional und können in beide Richtungen durchlaufen werden, während bei einem gerichteten Graphen die Kanten nur in eine Richtung durchlaufen werden können.

Der Graph in dieser Arbeit ist gerichtet und gewichtet. Die Kantenrichtung spiegelt dabei die Richtung des Verkehrs wieder, d. h. sie gibt an, ob eine Straße in einer bestimmten Richtung befahren werden darf oder nicht. Zusätzlich wird auf jede Kante eine Kostenfunktion angewandt, die dann ein Gewicht $w(e)$ festgelegt. In der Routenplanung ist normalerweise nicht die kürzeste Strecke von Interesse, sondern die Strecke mit der kürzesten Reisezeit. Diese lässt sich aus der Länge des Straßensegments S und der maximal erlaubten Geschwindigkeit V auf dieser Straße $t = \frac{V}{S}$ in Sekunden berechnen.

Es gibt generell zwei Möglichkeiten, einen Graphen als Datenstruktur darzustellen. Eine davon ist die Verwendung von Adjazenzlisten. Dabei wird für jeden Knoten $u \in V$ eine Liste der benachbarten Knoten bzw. ausgehenden Kanten $e(u, v) \in E$ gespeichert. Die Summe der Länge aller Adjazenzlisten in einem gerichteten Graph entspricht der Anzahl an Kanten $|E|$, bzw. $2|E|$ in einem ungerichteten Graph. Der Speicherverbrauch für die Adjazenzliste ist damit $\Theta(|V| + |E|)$ [1].
Die zweite Möglichkeit ist die Verwendung einer Adjazenzmatrix. Hier wird eine zweidimensionale Matrix der Größe $|V| \times |V|$ verwendet, bei der die Zeilen und Spalten den Knoten entsprechen. Der Eintrag an Position (i, j) in der Matrix gibt an, ob eine Kante zwischen den Knoten i und j existiert. Unabhängig von der Anzahl an Kanten ist der Speicherverbrauch $\Theta(|V|^2)$ [1]. Ein Beispiel für beide Darstellungen anhand eines einfachen Graph befindet sich in Abbildung 1.

Für diese Arbeit werden Adjazenzlisten verwendet, da zum einen Straßennetze dünne Graphen sind ($|E| << |V|^2$), und damit die Speichereffizienz gegenüber einer Adjazenzmatrix deutlich effizienter ist. Zum anderen ist für es wichtig, für den Aufbau der Contraction Hierarchies (CHs) und der Suche, schnell auf alle Nachbarn eines Knotens zuzugreifen zu können. Der Zugriff auf eingehende Kanten ist allerding nur sehr aufwendig möglich, wird aber für den Aufbau der Kontraktionshierarchien benötigt. Das Problem lässt sich jedoch lösen indem auch Adjazenzlisten für alle eingehenden Kanten eines Knotens angelegt werden. Damit erhöht sich der Speicherverbrauch auf $\Theta(|V|+2|E|)$, was aber immer noch deutlich effizienter ist als eine Darstellung als Adjazenzmatrix.



(a)

	A	B	C	D	E
A	0	3	5	0	3
B	3	0	3	0	0
C	0	0	0	2	0
D	0	0	2	0	3
E	3	0	0	3	0

(b)

A → [B | C | E]
B → [A | C]
C → [D]
D → [C | E]
E → [A | D]

(c)

Abbildung 1: Der oben gezeigte gerichtete Graph (a) dargestellt als Adjazenzmatrix(b) oder Adjazenzliste (c). Viele Einträge der Matrix sind 0, da der Graph dünn ist, d. h. $|E|$ um einiges kleiner ist als $|V^2|$.

2.1.2 Vorrangwarteschlangen

Eine Vorrangwarteschlange (eng. Priority Queue) (PQ) ist eine Datenstruktur, in der nur auf das Element mit der höchsten Priorität zugegriffen werden kann. Eine PQ unterstützt in der Regel die folgenden Operationen:

1. Einfügen (Push): Ein Element wird mit seiner zugehörigen Priorität in die Warteschlan-

ge eingefügt. Das Element wird entsprechend seiner Priorität platziert.

2. Entfernen (Pop): Das Element mit der aktuell höchsten Priorität wird aus der Warteschlange entfernt und zurückgegeben.

PQs werden allen nachfolgenden Suchalgorithmen verwendet, daher hat die Implementierung der Warteschlange einen großen Einfluss auf die Laufzeit der Algorithmen. In der Arbeit wird die Implementierung als binärern Min-Heap verwendet mit einer Zeitkompexität für das Einfügen von $\theta(1) \sim$ und für das Entfernen von $\theta(\log n)$.

2.2 Kürzeste-Wege-Algorithmen

Grundsätzlich arbeiten kürzeste-Wege-Algorithmen daran, den kürzesten Weg zwischen einem Startknoten s und einem Zielknoten t in einem gewichteten Graph zu finden. Der kürzeste Weg P bezieht sich dabei auf den Weg mit dem geringsten Gesamtgewicht $dist(s,t)$, der sich aus der Summe der Kosten zum Überqueren der einzelnen Kanten ergibt. Neben dem Punkt-zu-Punkt-kürzeste-Wege-Problem existieren noch weitere Varianten, wie das Eins-zu-Viele-Problem, bei dem der kürzeste Weg von einem Knoten s zu allen anderen Knoten im Graphen gesucht wird, oder das Viele-zu-Viele-Problem, bei dem jeder kürzeste Weg zwischen einer Knotenmenge S und einer Knotenmenge T gesucht wird [2]. In dieser Arbeit wird sich hauptsächlich auf das Punkt-zu-Punk-Problem fokusiert.

2.2.1 Grundlegende Technik

Der Algorithmus von Dijkstra löst das Eins-zu-Viele-Problem auf einem gewichteten gerichten Graphen. Dabei ist zu beachten dass alle Kanten $e \in E$ nicht-negativ gewichtet sind, also $e(u,v) \geq 0$.
Der Algorithmus besteht aus einer Initialisierungsphase, in der die Kosten *dist* für alle Knoten auf den Wert ∞ gesetzt werden. Bereits besuchte Knoten werden in der Menge S gespeichert, um zu verhindern, dass Knoten doppelte besucht werden. Um am Ende nicht nur die Kosten, sondern auch den Weg zu erhalten wird zusätzlich der Vorgänger P für jeden Knoten gespeichert. In folgender Implementierung wird eine Min-Vorrangwarteschlange Q verwendet, in der zu Beginn der Startknoten s mit Kosten 0 eingefügt wird. In der Hauptschleife wird nun solange ein Knoten $u \in V - S$ aus der Warteschlange entnommen, bis diese leer ist. Wenn ein Nachbarknoten v von u noch nicht besucht wurde, werden die Kosten $dist(v)$ aktualisiert, falls der Weg über u kürzer ist. Der Vorgänger $P(v)$ wird ebenfalls

aktualisiert und der Knoten v in die Warteschlange eingefügt. Der Algorithmus terminiert, wenn alle Knoten besucht wurden.

Algorithm 1 Algorithmus nach Dijkstra

```
function DIJKSTRA(G, s)
    Kosten dist für alle Knoten außer s mit ∞ bewerten
    dist(s) = 0
    Besuchte Knoten S = ∅
    Vorgänger P = ∅
    Q.push(s)
    while Q ≠ ∅ do
        u = Q.pop()
        M = M ∪ {u}
        for alle ausgehenden Kanten e(u,v) ∈ Adj[u] do
            if v ∉ S und dist(u) + w(u,v) < dist(v) then
                dist(v) = dist(u) + w(u,v)
                P(v) = u
                Q.push(v)
            end if
        end for
    end while
end function
```

Die Laufzeit des Algorithmus hängt hauptsächlich von der Implementierung der Prioritätswarteschlange ab. Mit der verwendeten Implementierung ergibt sich eine Laufzeit von $\Theta(|E| + |V| \log |V|)$, wenn Adjazenzlisten verwendet werden [1].

2.2.2 Bidirektionale Suche

Eine Variante des klassischen Dijkstra-Algorithmus ist die Erweiterung um Bidirektionalität. Im Gegensatz zum herkömmlichen Algorithmus, der nur in einer Richtung vom Startknoten zum Zielknoten arbeitet, führt der bidirektionale Dijkstra-Algorithmus eine Suche von beiden Knoten gleichzeitig durch. Die Rückwärtssuche traversiert dabei den transponierten Graphen, d. h. die Richtung der Kanten sind invertiert.
Der Algorithmus verwendet zwei Prioritätswarteschlangen, eine für die Vorwärtsrichtung und eine für die Rückwärtsrichtung. Der Ablauf des Algorithmus ist in Abbildung 2 illustriert.

1. Initialisierung: Jede Prioritätswarteschlange wird mit dem Startknoten bzw. dem Zielknoten initialisiert. Die vorläufigen Werte werden auf 0 für den Startknoten bzw. auf unendlich für den Zielknoten gesetzt.

2. Expansionsschritt: In jedem Schritt wird der Knoten mit dem kleinsten vorläufigen Wert von beiden Warteschlangen ausgewählt. In der Schlange mit dem kleineren Knoten wird eine Dijkstra-Iteration ausgeführt.

3. Überprüfung des Treffpunkts: Bei jedem Expansionsschritt wird überprüft, ob der aktuelle Knoten in beiden Richtungen erreicht wurde. Wenn ein Knoten in beiden Richtungen erreicht wurde, gibt es einen potenziellen Pfad von Start zu Ziel.

4. Terminierung: Der Algorithmus terminiert, wenn beide Prioritätswarteschlangen leer sind oder ein Treffpunkt gefunden wurde.

5. Kürzester Weg: Für jeden Knoten u der von beiden Seiten erreicht wurde (u besitzt eine endliche Distanz von s und t), wird die Summe $dist(s,t) = dist(s,u) + dist(t,u)$ berechnet. Der kürzeste Weg verläuft über den Knoten, bei dem die Summe minimal ist.

6. Rückverfolgung des kürzesten Pfades: Wenn ein Treffpunkt u gefunden wurde, kann der kürzeste Pfad durch Rückverfolgung der Vorgängerknoten von Startknoten bis zum Treffpunkt in der Vorwärtsrichtung und von Zielknoten bis zum Treffpunkt in der Rückwärtsrichtung rekonstruiert werden.

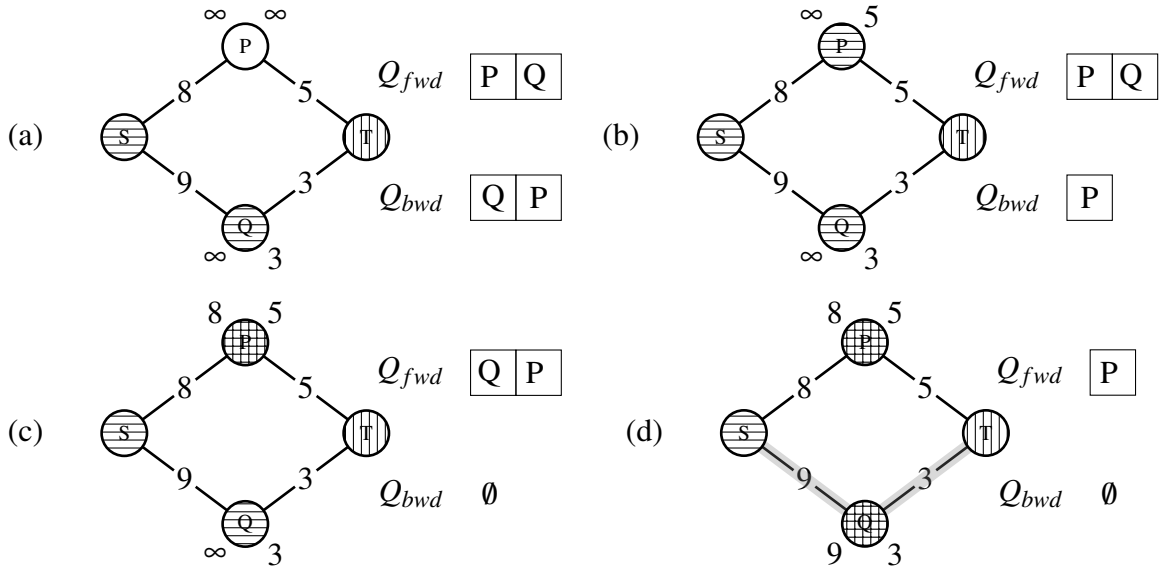


Abbildung 2: Bidirektionale Suche von S nach T: In Schritt (a) und (b) wird zuerst Knoten Q und P von der Rückwärtssuche relaxiert. In den Schritten (c) und (d) wird P und Q von der Vorwärtssuche relaxiert. Obwohl P der erste Knoten ist, der von beiden Suchen relaxiert wurde, ist der Weg über Q am kürzesten.

Der bidirektionale Dijkstra Algorithmus kann die Anzahl der untersuchten Knoten im Vergleich zum herkömmlichen Dijkstra reduzieren, insbesondere in großen Graphen. Durch die gleichzeitige Suche in beiden Richtungen kann er die Laufzeit verbessern, indem er die Anzahl der Expansionsschritte und die Anzahl der Knoten, die in Betracht gezogen werden, reduziert. In der Praxis wird der Suchraum etwa um die Hälfte reduziert (siehe Abbildung 3):

$$A = \pi r^2$$
$$A_{bidir} = 2\pi(\frac{r}{2})^2 = \frac{A}{2}$$

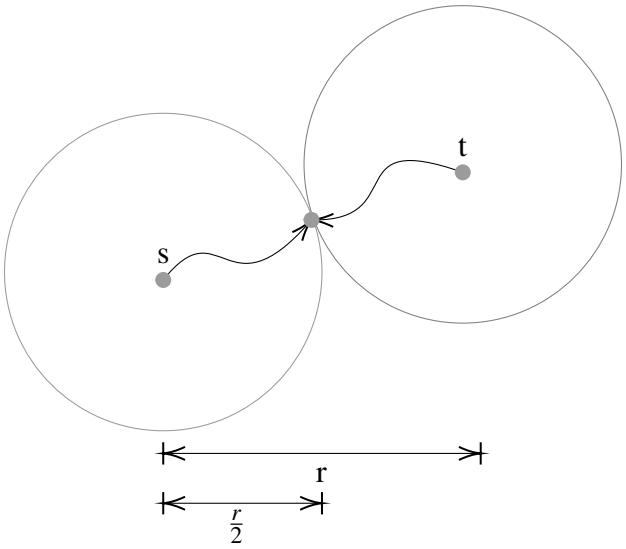


Abbildung 3: Suchraum einer bidirektioanlen Suche. Die Anzahl der Knoten die untersucht werden müssen, halbiert sich.

Korrektheitsbeweis

Lemma 2.1. *Für alle Knoten u die von beiden Seiten erledigt wurden, gilt:*
$$dist(s,t) = min\{dist(s,u) + dist(t,u)\}.$$

Beweis. Gegeben sei der Graph in Abbildung 4. Die Länge des kürzesten Pfads von s nach t wird als D bezeichnet. Der Knoten p ist der erste Knoten der von beiden Suchen erledigt wurde. Wenn gilt $dist(s,p) = dist(t,p)$, dann ist p garantiert auf dem kürzesten Weg.
Angenommen $dist(s,p)$ und $dist(t,p)$ sind ungleich D/2, dann muss entweder $dist(s,p) < D/2$ oder $dist(t,p) < D/2$ gelten. Dies wiederum bedeutet , dass alle Knoten mit einem kürzesten-Pfad-Wert, der kleiner oder gleich $D/2$ ist, bereits gesetzt wurden.

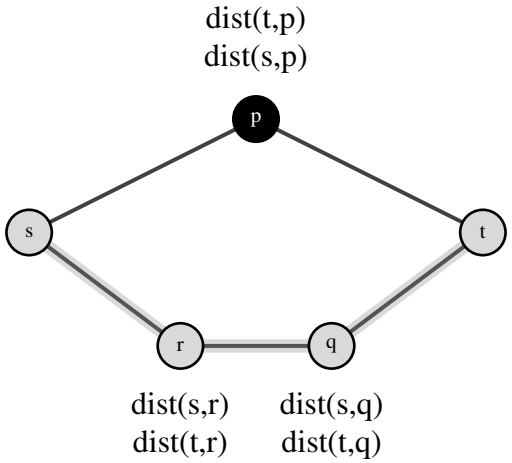


Abbildung 4: Graph für den Korrektheitsbeweis der bidirektionalen Suche

Knoten r und q liegen auf dem kürzesten Weg von s nach t und $dist(s,r) \leq D/2$ und $dist(t,q) \leq D/2$. Knoten r wurde von s erledigt und Knoten q von t. Dann wurde die Kante $e(r,q)$ bereits von beiden Seiten aus relaxiert uns somit haben r und q Distanzwerte von beiden Richtungen erhalten.
Die länge des kürzesten Weges von s nach t ist der kleinere Wert aus $dist(s,r) + dist(t,r)$ und $dist(s,q) + dist(t,q)$, welche in diesem Fall den gleichen Wert haben.
Somit ist der Knoten, der zuerst von beiden Seiten erledigt wurde nicht unbedingt auf dem kürzesten Weg, aber es wurde zumindest ein Knoten mit einer kürzeren Distanz gefunden, der auf dem kürzesten Weg liegt und einen Distanzwert von beiden Seiten erhalten hat. □

2.3 Contraction Hierarchies

2.3.1 Überblick

Straßennetzwerke sind extrem hierarchisch aufgebaut. Es gibt „wichtigere“ Straßen wie z. B. Autobahnen und „unwichtigere“ Straßen wie z. B. Straßen in Wohnsiedlungen (siehe Abbildung 5). Um von einem weit entfernten Ort zum anderen zu gelangen, macht es daher nur Sinn sich über immer wichtiger werdende Straßen zu bewegen. Bei einer Suche könnte die Information des Straßentyps und der damit verbundenen Wichtigkeit als Heuristik verwendet werden, um bestimmte Kanten, die auf weniger wichtige Straßen führen, zu ignorieren und damit die Suche zu beschleunigen. Das Problem hierbei ist allerding, dass mit dieser Methode keine Garantie besteht, dass der gefundene Weg auch wirklich der *exakt* kürzeste Weg ist. Die Methode der Contraction Hierarchies nach Geisberger et al. [3] [4] [5] löst dieses Problem, indem in einer Vorverarbeitungsphase Abkürzungskanten in den Graph eingefügt werden, die

Abbildung 5: Hierarchie in Straßennetzen. Autobahnen (schwarz) sind ganz oben in der Hierarchie und sind sehr „wichtig“. Dagegen sind Straßen in Wohnsiedlungen weniger wichtig. © OpenStreetMap contributors

in der Suche ausgenutzt werden. Die Abkürzungen erhalten dabei die kürzesten Wege [2]. Während der Suche wird ein modifizieren bidirektioanlen Dijkstra-Algorithmus angewendet, der Kanten die zu Knoten mit niedrigerem Level führen ignoriert. Dadurch wird der Suchraum extrem verkleinert, was zu schnellen Antwortzeiten führt. Der CH-Algorithmus lässt sich in zwei Komponenten unterteilen:

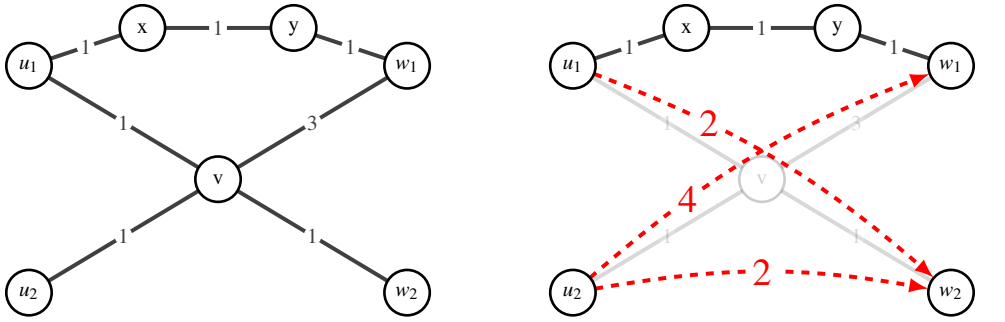
1. Vorverarbeitung: In dieser Phase werden die Knoten geordnet und die Hierarchie augebaut.

2. Suche: Ausführung der bidirektionale Suche auf dem erweiterten Graph.

2.3.2 Vorverarbeitung

In dieser Phase wird der Graph $G = (V,E)$ um zusätzliche Abkürzungskanten erweitert. Der neu entstandene Graph wird als *Overlaygraphh* $G^* = (V,E')$ bezeichnet, wobei E' alle ursprünglichen sowie Abkürzungskanten enthält. Die Abkürzungskanten werden im Prozess der Knotenkontraktion (eng. Node Contraction) eingefügt. Wenn ein Knoten $v \in V$ *kontraktiert* wird, dann wird er und alle Kanten die mit v inzident sind aus dem Graphen entfernt. Wenn v auf dem kürzesten Weg zwischen zwei benachbarten Knoten u und w liegt, dann wird eine Abkürzungskante $e(u,w)$ mit $w(u,w) = w(u,v) + w(v,w)$ eingefügt, um den kürzesten Weg zu erhalten.
Abbildung 6 demonstriert den Prozess: Knoten v soll kontraktiert werden und damit er und

seine inzidenten Kanten entfernt werden. Sei U die Menge aller eingehenden Kanten und W die Menge aller ausgehenden Kanten, dann muss für jedes Paar überprüft werden, ob v auf dem kürzesten Weg $<u_i, v, w_j>$, $u \in U, w \in W$ zwischen zwei benachbarten Knoten u_i und w_j liegt. Zum Beispiel ist dies zwischen u_1 und w_2 der Fall, denn es gibt keine andere Möglichkeit w_2 zu erreichen, als über v. Um den kürzesten Weg zu erhalten, wird eine Abkürzungskante $e(u_1, w_2)$ mit dem Gewicht $w(u_1, w_2) = w(u_1, v) + w(v, w_2) = 1 + 1 = 2$ eingefügt. Das gleiche gilt für $<u_2, v, w_1>$ und $<u_2, v, w_2>$. Der Weg von u_1 nach w_1 kann allerding über $< u_1, x, y, w_1 >$ über einen kürzeren Weg erreicht werden und es muss daher keine Abkürzungskante eingefügt werden.



(a) Graph $G = (V, E)$ (b) Graph $G' = (V', E')$ mit $V' = V - \{v\}$

Abbildung 6: Beispiel einer Knotenkontraktion

2.3.3 Suche

2.4 OpenStreetMap

OpenStreetMap (OSM) ist ein Projekt, das sich der Erstellung und Bereitstellung von freien geografischen Daten verschrieben hat. Es handelt sich dabei um Daten die von einer weltweiten Gemeinschaft von Freiwilligen erstellt und gepflegt wird [6].

Das grundlegende Konzept von OpenStreetMap basiert auf OpenData, was bedeutet, dass die Daten frei verfügbar und für jeden zugänglich sind. Im Gegensatz zu kommerziellen Kartenanbietern, die ihre Daten schützen und für den Zugriff hohe Gebühren verlangen, ermutigt OpenStreetMap Menschen dazu, ihre eigenen Daten beizutragen und von den vorhandenen Daten zu profitieren.

Das OpenStreetMap-Projekt verwendet eine Kombination aus verschiedenen Datenquellen, um eine detaillierte und umfassende Karte zu erstellen. Dazu gehören zum Beispiel Satellitenbilder, GPS-Tracks, Luftaufnahmen und auch öffentlich verfügbare geografische Daten. Die Daten werden von Freiwilligen erfasst, indem sie Straßen, Gebäude, Gewässer, Landnutzung

und andere geografische Merkmale auf der Karte markieren oder Informationen darüber hinzufügen.
Die OpenStreetMap-Daten sind unter einer offenen Lizenz, der Open Data Commons Open Database Lizenz (ODbL), verfügbar. Das bedeutet, dass die Daten frei verwendet, kopiert, modifiziert und weiterverbreitet werden können, solange die Lizenzbedingungen eingehalten werden [7]. Dadurch wird Entwicklern ermöglicht, die OpenStreetMap-Daten in ihre eigenen Anwendungen und Dienste zu integrieren.

Literatur

[1] Thomas H. Cormen u. a. *Introduction to Algorithms, 3rd Edition*. MIT Press, 2009, S. 589–592, 661–662. ISBN: 978-0-262-03384-8. URL: http://mitpress.mit.edu/books/introduction-algorithms.

[2] Hannah Bast u. a. *Route Planning in Transportation Networks*. URL: http://arxiv.org/pdf/1504.05140v1.

[3] Robert Geisberger u. a. „Contraction Hierarchies: Faster and Simpler Hierarchical Routing in Road Networks“. In: *Experimental Algorithms*. Hrsg. von Catherine C. McGeoch. Springer, 2008, S. 319–333.

[4] Robert Geisberger. „Diploma Thesis - Contraction Hierarchies: Faster and Simpler Hierarchical Routing in Road Networks“. In: 2008.

[5] Robert Geisberger u. a. „Exact Routing in Large Road Networks using Contraction Hierarchies“. In: *Transportation Science*. Bd. 46. 2012, S. 388–404.

[6] OpenStreetMap Foundation. *About OpenStreetMap*. 2023. URL: https://www.openstreetmap.org/about (besucht am 16. 07. 2023).

[7] OpenStreetMap Foundation. *OpenStreetMap License*. 2023. URL: https://www.openstreetmap.org/copyright (besucht am 16. 07. 2023).