Haute École Léonard de Vinci

LOGIQUE DES PROPOSITIONS

Mathématiques 1 : outils fondamentaux

OBJECTIFS

À la fin de ce module, vous serez capable de :

- Reconnaître une proposition.
- Utiliser les symboles formels de la logique des propositions.
- Abstraire une proposition exprimée en langage naturel à l'aide d'une formule.
- Trouver la valeur de vérité d'une proposition logique.
- Déterminer la validité d'un raisonnement.

LES LANGAGES

Langages naturels

Un langage naturel (ou informel) émerge spontanément au sein d'une communauté humaine par le biais d'un processus d'utilisation, de répétition et de changement sans planification délibérée.

Les langages naturels peuvent avoir des **ambiguïtés**.

EXEMPLES

Le professeur a dit à l'élève qu'il était intelligent.

Je vais manger un sandwich avec ma sœur.

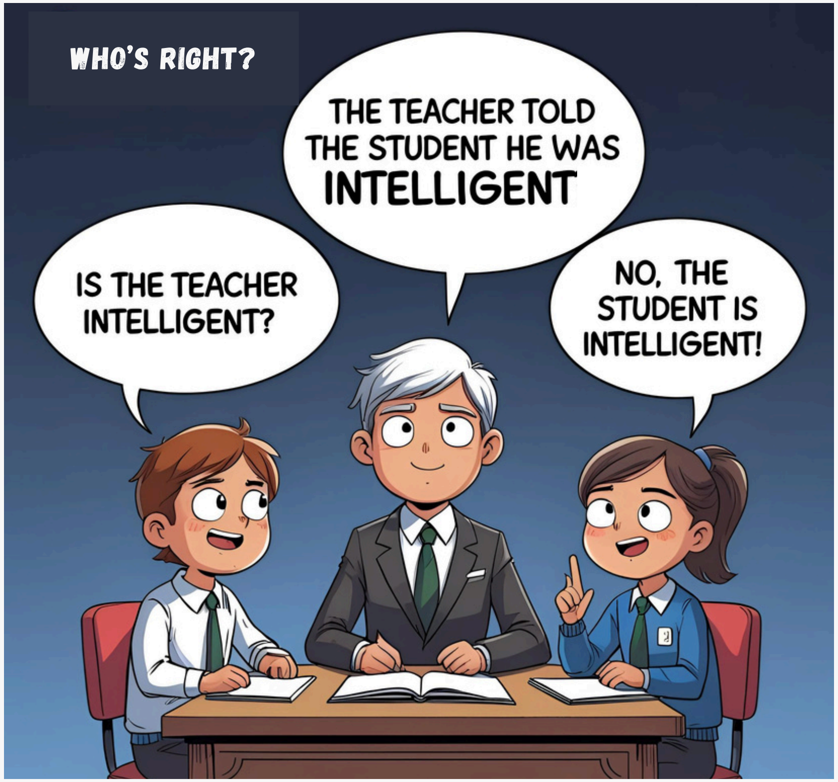
LES LANGAGES

Le contexte

Le contexte est l'ensemble des informations qui entourent une expression et qui peuvent influencer son interprétation.

Le professeur a dit à l'élève qu'il était intelligent.

Pour résoudre cette ambiguïté, nous devrions connaître le contexte dans lequel cette phrase a été prononcée (contexte situationnel).



LES LANGAGES

Je vais manger un sandwich avec ma sœur

Dans ce cas, l'ambiguïté est résolue par le contexte culturel, car aucune de nos cultures ne tolère le cannibalisme.

Mais un ordinateur n'a pas de contexte culturel... il n'a aucun contexte si ce n'est celui que nous lui fournissons.

LOGIQUE

Logos

raisonnement

parole

discours

Ensemble de règles qui nous permettent d'éliminer les ambiguités du langage

…et donc d'établir avec certitude
la validité d'un raisonnement

LES LANGAGES

Langages formels

Les langages formels suivent des **règles** strictes.

Les langages formels jouent un rôle crucial en mathématiques et en informatique et sont essentiels pour le développement de logiciels et la vérification de programmes.

EXEMPLES

Langage naturel (informel)

"les nombres pairs sont divisibles par 2"

Langage logique (formel)

$\forall x\ (pair(x) \rightarrow estDivisible(x, 2))$

Langage Java (formel)

```
public boolean pair(int x) {return x% 2 == 0;}
```

LES PROPOSITIONS

Les propositions

Une proposition est une phrase qui est soit vraie, soit fausse.

EXEMPLES

a. Dix est inférieur à sept. ✓

b. A quelle heure se termine le cours ? ✗

c. Il existe des formes de vie sur d'autres planètes de l'univers. ✓

d. Arrête de déranger les autres élèves ! ✗

e. Elle est très douée. ✗ (Sans contexte on ne sait pas à qui cela fait référence)

f. Cette phrase est fausse ???

LES PROPOSITIONS

La phrase "Cette phrase est fausse" est vraie ou fausse ?

Supposons que la phrase soit vraie → la phrase est fausse

Supposons que la phrase soit fausse → la phrase est vraie

Paradoxes

Un paradoxe est une phrase (ou un raisonnement) qui, si elle est supposée vraie, s'avère fausse et qui, si elle est supposée fausse, s'avère vraie.

Quand on utilise un langage formel, les paradoxes peuvent créer des situations problématiques.

→ les paradoxes ne sont pas des propositions

CE QU'IL FAUT RETENIR

- *Une proposition est toujours une phrase affirmative*
- *Les phrases interrogatives ne sont pas des propositions*
- *Les phrases exclamatives ne sont pas des propositions*
- *Les phrases impératives ne sont pas des propositions*
- *Le sujet d'une proposition doit être bien défini*
- *Les langages formels ne prévoient pas de paradoxes*

SYNTAXE

Quelles sont les expressions valides dans notre langage ?

- Symboles autorisés
- Règles de construction

SEMANTIQUE

Que signifient ces expressions ?

- Attribution de valeurs de vérité
- Interprétation

SYNTAXE

Formules atomiques (p, q, r, ...)

Les lettres minuscules de l'alphabet, telles que p, q et r, sont utilisées pour représenter des propositions atomiques et sont appelées **variables propositionnels** ou **formules atomiques**.

EXEMPLE

La pomme est ronde → *p*

La pomme est rouge → *q*

Une variable propositionnelle peut représenter n'importe quelle proposition et n'est caractérisée que par sa valeur de vérité

SYNTAXE

La negation

Le symbole de négation est utilisé pour nier une affirmation

Le symbole utilisé pour exprimer la negation est $\neg$

EXEMPLE

La pomme est rouge $\longrightarrow$ p

La pomme n'est pas rouge $\longrightarrow$ $\neg p$

La négation est un **opérateur unaire**: il modifie une seule proposition pour en produire une deuxième.

SYNTAXE

Connecteurs

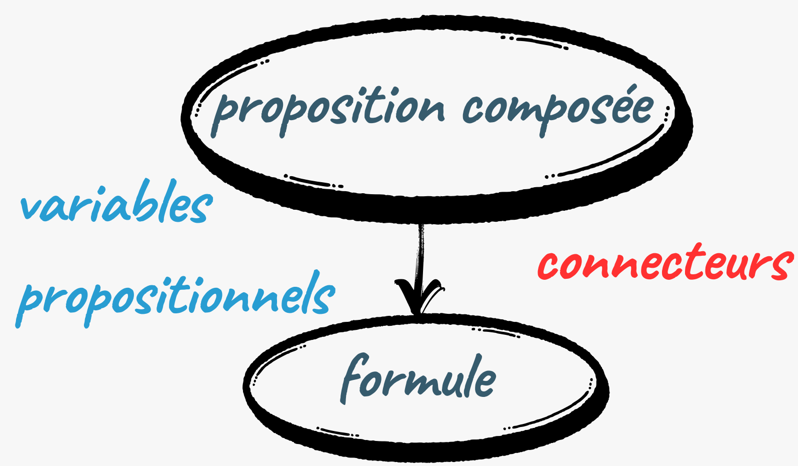
Série de symboles qui nous permettent de connecter des propositions atomiques pour obtenir des **propositions composées**. Les propositions composées seront représentées par des **formules**.

EXEMPLE

Le symbole $\wedge$ représente le connecteur logique qui réalise la **conjonction** de deux propositions.

La pomme est ronde ET rouge

$p \wedge q$



SYNTAXE

La conjonction

Le symbole de conjonction est utilisé pour indiquer que deux propositions sont toutes les deux vraies.

Le symbole utilisé pour exprimer la conjonction est $\wedge$

La disjonction

Le symbole de disjonction est utilisé pour indiquer qu'au moins une des deux propositions est vraie.

Le symbole utilisé pour exprimer la disjonction est $\vee$

Ce soir, je lirai un livre OU je regarderai un film

$p \vee q$

SYNTAXE

L'implication

Le symbole d'implication est utilisé pour indiquer qu'une proposition en entraîne une autre.

Le symbole utilisé pour exprimer l'implication est $\rightarrow$

EXEMPLE

SI Alice va à la soirée, ALORS Jérôme sera heureux

$$p \rightarrow q$$

En logique, on dit que la proposition p est l'**antécédent** et la proposition q est le **conséquent**.

SYNTAXE

L'équivalence

Le symbole d'équivalence est utilisé pour indiquer que deux propositions sont vraies ou fausses simultanément.

Le symbole utilisé pour exprimer l'équivalence est $\longleftrightarrow$

EXEMPLE

Il pleut **SI ET SEULEMENT SI** *le ciel est couvert*

$$p \longleftrightarrow q$$

Conjonction, disjonction, implication et équivalence sont des **opérateurs binaires** : ils connectent deux propositions pour en produire une troisième.

SYNTAXE

Les parenthèses

Pour représenter des propositions de plus en plus complexes, nous enchaînons les formules.
Les parenthèses nous permettent d'isoler des formules et donc d'établir un **ordre de priorité**.

EXEMPLE

La pomme est rouge et goûteuse

$$p \wedge q$$

Si la pomme est rouge et goûteuse, alors je la mange.

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Ordre de priorité des connecteurs

Pour réduire le nombre de parenthèses nécessaires dans une formule, nous pouvons établir un ordre dans lequel les connecteurs sont appliqués.

PRIORITÉ ↑

- $\neg$ *Négation*
- $\wedge$ *Conjonction* $\vee$ *Disjonction*
- $\rightarrow$ *Implication*
- $\leftrightarrow$ *Équivalence*

Notez qu'**il n'y a pas d'ordre de priorité établi entre la conjonction et la disjonction**, donc des formules telles que $p \wedge q \vee r$ sont interdites et l'utilisation de parenthèses pour établir une priorité est obligatoire.
Les parenthèses peuvent également être utilisées quand elles ne sont pas nécessaires, si l'on estime qu'elles améliorent la lisibilité de la formule.

SYNTAXE

Règles syntaxiques

Un connecteur binaire doit toujours être précédé et suivi de formules ou de symboles propositionnels.

Deux variables propositionnels ou deux formules ne peuvent se suivre sans la présence d'un connecteur binaire

$p \wedge q$

$(p \wedge q)\ r$

$p \wedge q \rightarrow r$

$\rightarrow p \wedge q$

Règles syntaxiques

La négation (connecteur unaire) doit toujours précéder une formule ou une variable propositionnelle.

Les seuls symboles autorisés sont ceux définis par la syntaxe: **variables propositionnelles**, **connecteurs** et **parenthèses**.

$\neg\neg p$

$p \neg \wedge q$

$p \wedge \neg(q \to r)$

$p + q$

CE QU'IL FAUT RETENIR

- *Dans la logique des propositions, la syntaxe est l'ensemble des règles qui nous permettent d'abstraire des propositions complexes.*
- *Les variables propositionnelles nous permettent d'abstraire les propositions atomiques.*
- *Les connecteurs nous permettent de créer des formules à partir de propositions atomiques.*
- *Les parenthèses permettent d'établir un ordre de priorité pour les connecteurs qui opèrent dans une formule.*

SYNTAXE

Quelles sont les expressions valides dans notre langage ?

- Symboles autorisés
- Règles de construction

SEMANTIQUE

Que signifient ces expressions ?

- Attribution de valeurs de vérité
- Interprétation

SÉMANTIQUE

La sémantique

La syntaxe fournit les règles pour combiner des propositions atomiques afin d'abstraire des propositions composées avec une **formule**.

Les formules sont des chaînes de symboles sans signification précise tant que nous ne leur attribuons pas de **valeurs de vérité**.

En logique propositionnelle, la **sémantique** définit les règles permettant de trouver la valeur de vérité d'une formule.

La valeur de vérité d'une formule est appelée **interprétation**.

LE MODÈLE *(Xavier)*

Modèle : personne ou objet possédant certaines qualités ou caractéristiques propres à en faire le type d'une catégorie.

(Dictionnaire de la langue Française Larousse)

Exemple : un modèle de beauté
(selon Iréne, influenceuse)

Musclé	V
Cheveux courts	V
Cheveux blonds	X
Mâchoire carrée	V
Petites mains	X
Nœud papillon	X

Ces valeurs définissent le modèle de beauté d'Irène

SÉMANTIQUE

Modèle

Dans la logique des propositions, un modèle est une attribution de valeurs de vérité à des variables propositionnelles.

EXEMPLE

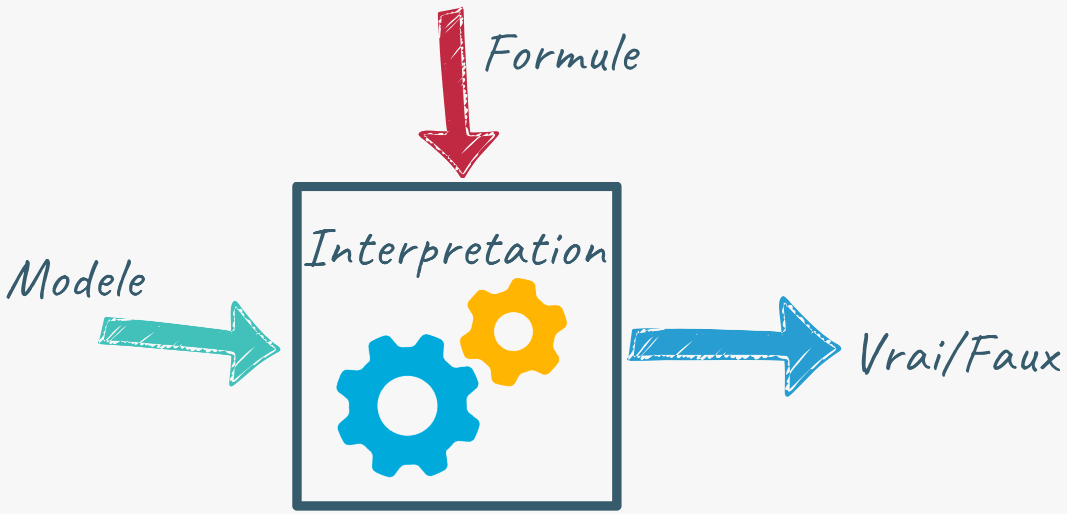
2 variables propositionnelles → 4 modèles possibles

p	q
Faux	Faux
Faux	Vrai

p	q
Vrai	Faux
Vrai	Vrai

Interpretation

L'interprétation fait le lien entre les formules et les modèles et renvoie une valeur de vérité unique pour l'ensemble de l'expression logique.



Pour des raisons historiques, la définition de modèle et d'interprétation différé entre le monde francophone et le monde anglophone. La définition proposée dans ce cours est celle utilisée dans le monde anglophone. Attention donc, certaines sources trouvées sur le web pourraient utiliser des définitions différentes.

SÉMANTIQUE

Table de vérité

Les tables de vérité sont un outil qui permet de calculer l'interprétation d'une proposition composée pour tous les modèles possibles, c'est-à-dire pour toutes les configurations possibles des valeurs de vérité associées aux variables de notre formule.

Combien de modèles possibles existe-t-il ?

Pour une seule variable, nous avons 2 modèles possibles (vrai et faux).

Chaque fois que nous ajoutons une variable, le nombre de modèles possibles double.

Pour 2 variables, nous avons 2x2 = 2^2 = 4 modèles possibles.
Pour 3 variables, nous avons 2x2x2 = 2^3 = 8 modèles possibles
Pour n variables, nous avons 2^n modèles possibles

Négation - Table de vérité

L'opérateur de négation est un opérateur unaire qui, lorsqu'il est appliqué à une proposition p, modifie la valeur de vérité de p.

p	$\neg p$
Vrai	Faux
Faux	Vrai

Conjonction - Table de vérité

La conjonction de p et q est la proposition qui est vraie lorsque p et q sont toutes deux vraies et fausse dans le cas contraire.

p	q	$p \land q$
Faux	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Vrai	Faux	Faux
Vrai	Vrai	Vrai

Disjonction - Table de vérité

La disjonction de p et q est la proposition qui est vraie lorsque soit p est vrai, soit q est vrai, soit les deux sont vrais, et qui est fausse dans le cas contraire.

p	q	$p \vee q$
Faux	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Vrai	Vrai	Vrai

Implication - Table de verité

L'opérateur d'implication est faux si l'antécédent est vrai et le consequent est faux. Il est vrai dans tous les autres cas

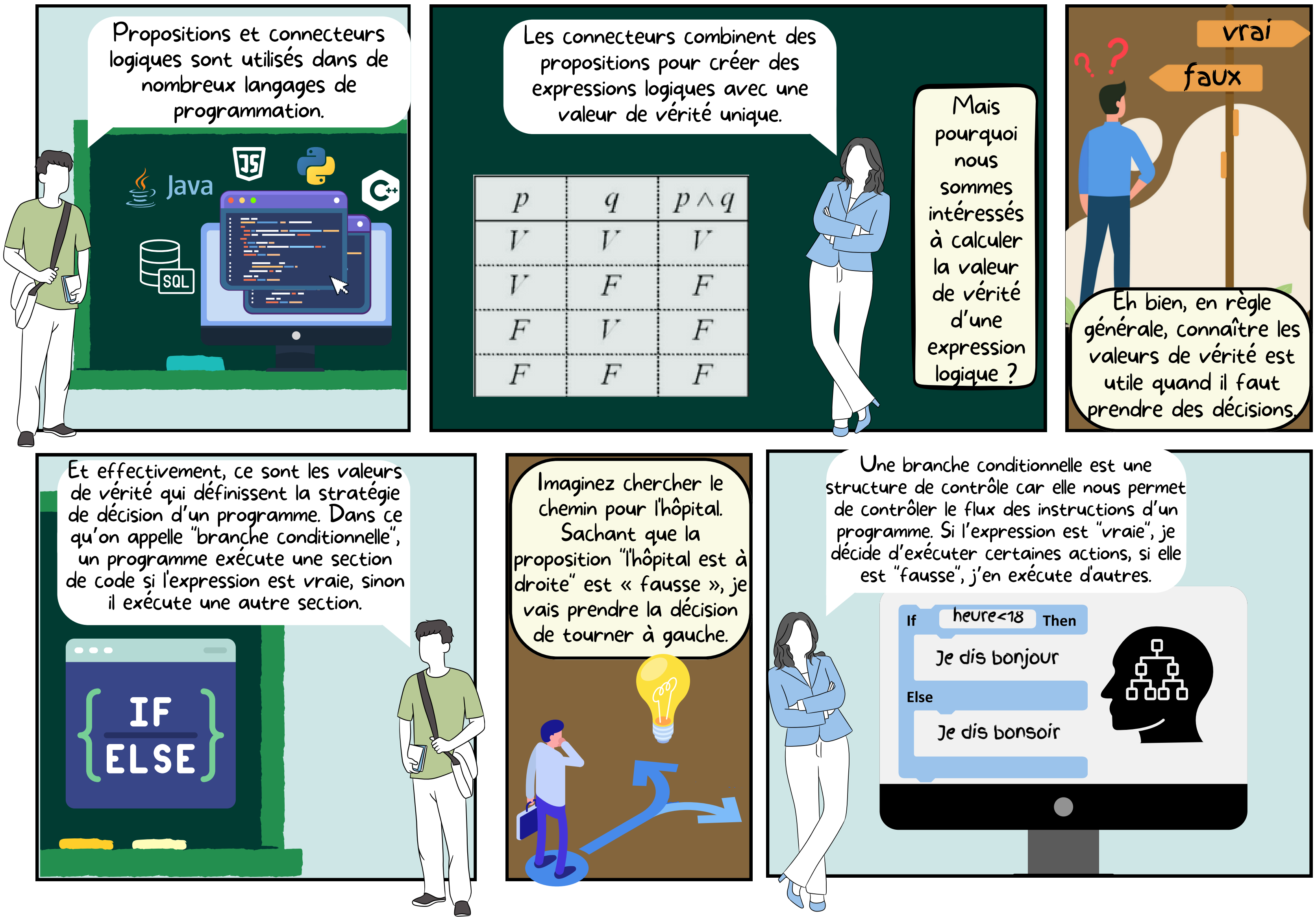
p	q	$p \rightarrow q$
Faux	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Vrai	Vrai	Vrai

Équivalence - Table de vérité

L’opérateur d’équivalence est utilisé pour indiquer que deux propositions logiques ont la même valeur de vérité.

p	q	$p \longleftrightarrow q$
Faux	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Faux
Vrai	Faux	Faux
Vrai	Vrai	Vrai

LOGIQUE DES PROPOSITIONS ET PROGRAMMATION CONDITIONNELLES



SÉMANTIQUE

Arbre syntaxique

Un outil extrêmement efficace pour trouver l'interprétation d'expressions complexes est la décomposition d'une formule via son arbre syntaxique.

Un arbre syntaxique en logique des propositions est une représentation qui montre comment une proposition peut être dérivée à partir des éléments de base (variables et connecteurs).

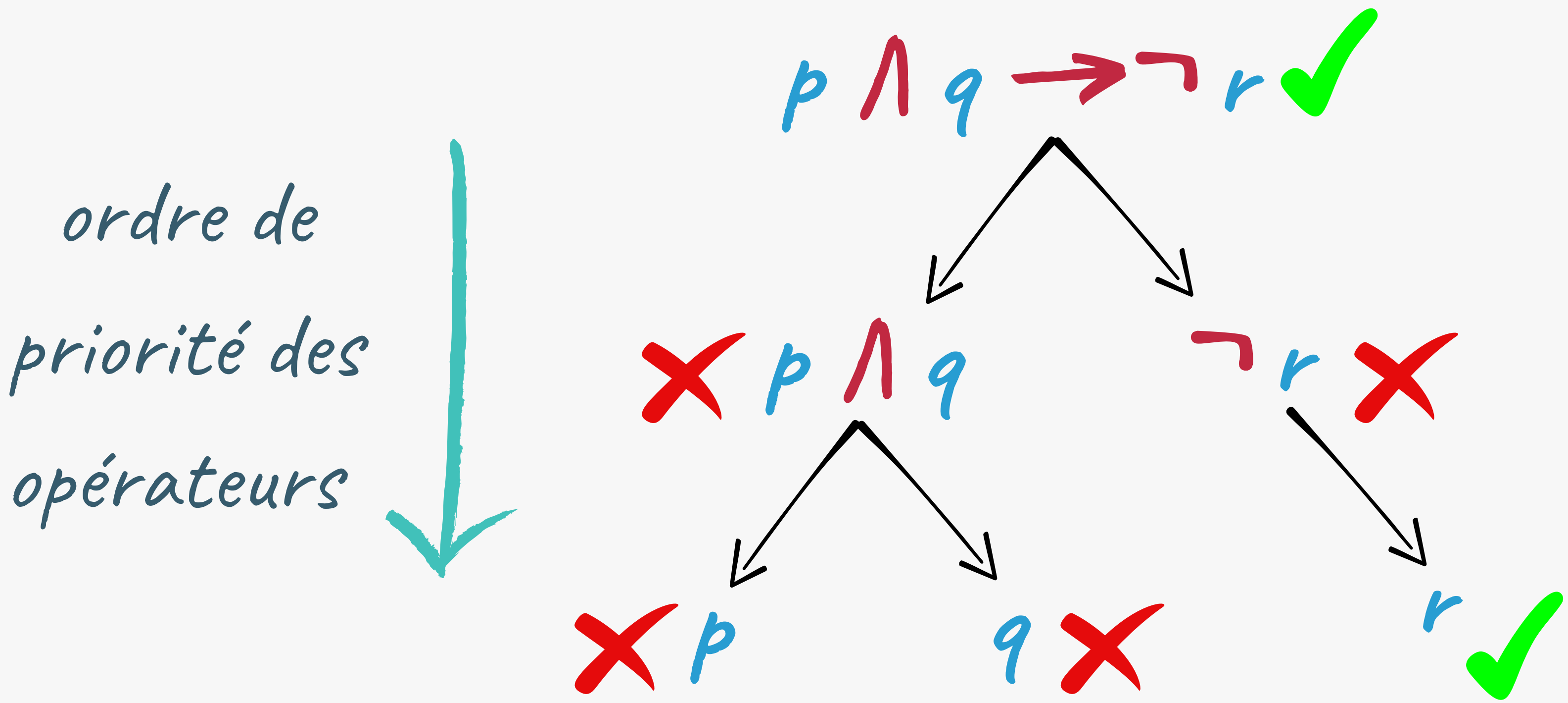
Chaque nœud de l'arbre représente une sous-proposition et les branches montrent comment ces éléments sont combinés pour former la proposition complète.

cliquez ici pour télécharger la vidéo explicative

EXAMPLE (DÉCOMPOSITION EN ARBRE)

Modèle: *{p:faux, q:faux, r:vrai}*

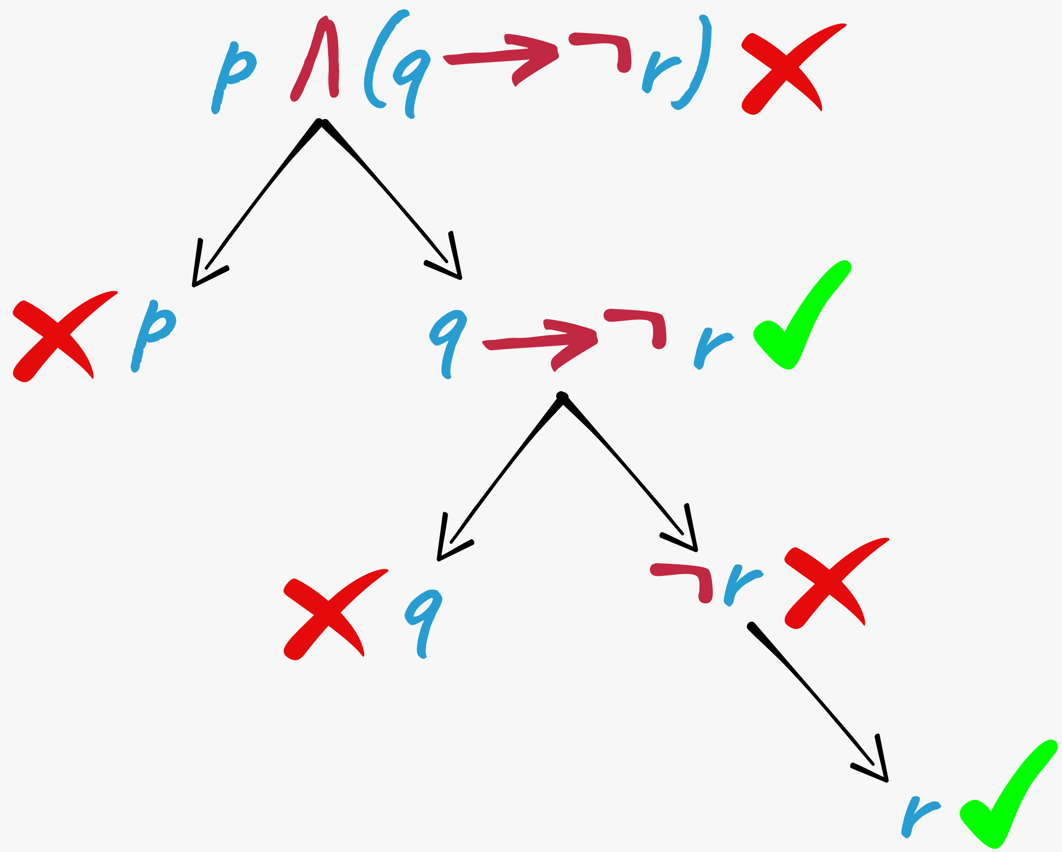
Formule: $p \wedge q \rightarrow \neg r$



EXAMPLE (DÉCOMPOSITION EN ARBRE)

Modèle: *{p:faux, q:faux, r:vrai}*

Formule: $p \land (q \rightarrow \neg r)$



ordre de priorité des opérateurs

Table de vérité - procédure de construction

Les tables de vérité peuvent également être utilisées pour des expressions complexes.

Dans ce cas, le nombre de lignes et de colonnes peut être important et il est facile de faire des erreurs lors de la construction de la table de vérité.

Dans la vidéo suivante, nous vous proposons une procédure systématique de construction des tables de vérité qui permet de réduire ce type d'erreurs.

cliquez ici pour télécharger la vidéo explicative

Contradiction

Une proposition dont les valeurs de vérité sont toujours fausses, est appelé une contradiction.

EXEMPLE

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
Faux	Vrai	Faux
Vrai	Faux	Faux

Principe de **non contradiction**: une proposition ne peut être à la fois vraie et fausse

SÉMANTIQUE

Tautologie

Une proposition dont les valeurs de vérité sont toujours vraies, est appelé une tautologie.

EXEMPLE

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
Faux	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai

Le principe du **tiers exclu**: une proposition est soit vraie, soit fausse, il n'y a pas de troisième option.

CE QU'IL FAUT RETENIR

- *Dans le langage formel de la logique propositionnelle, la sémantique concerne l'attribution de valeurs de vérité aux propositions.*
- *Une formule est constituée de propositions atomiques. Les valeurs de vérité attribuées à ces propositions sont appelées le modèle.*
- *L'interprétation est la valeur de vérité d'une formule pour un modèle donné.*
- *Les tables de vérité permettent d'obtenir toutes les interprétations possibles pour une formule donnée.*

LE RAISONNEMENT

Que signifie analyser un problème ?

L'analyse d'un problème comprend les étapes suivantes

1. *Décomposer*

   identifier les éléments fondamentaux qui caractérisent le problème

2. *Formaliser*

   abstraire les relations entre les éléments en appliquant des règles claires

3. *Tirer de conclusions*

   utiliser des outils rationnels (par exemple des outils mathématiques) pour trouver une solution au problème initial

LE RAISONNEMENT

ÉTAPE 1 : DÉCOMPOSER

Phrase en langage naturel

Si le film est hollywoodien, le héros est un homme musclé et le méchant n'est pas américain.

Propositions atomiques

p: le film est hollywoodien

q: le héros est un homme musclé

r: le méchant est américain

ÉTAPE 2 : FORMALISER

Formule

$$p \rightarrow q \wedge \neg r$$

Définition du modèle

p: le film est hollywoodien ✓

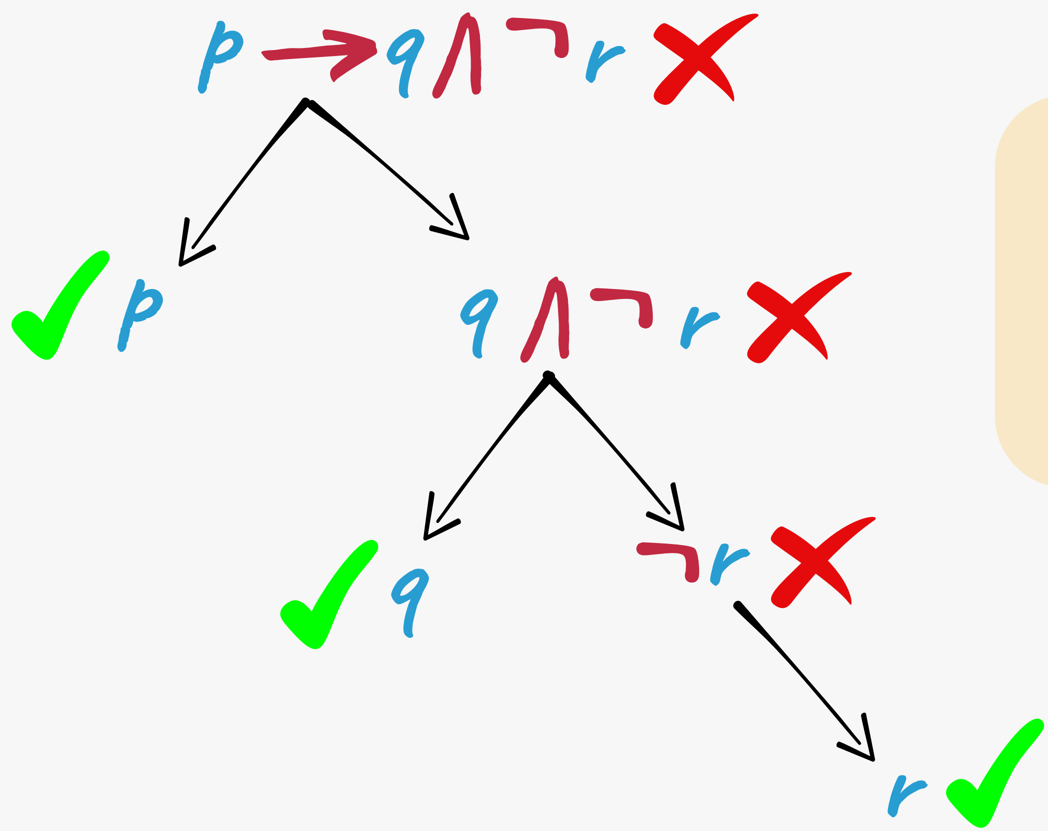
q: le héros est un homme musclé ✓

r: le méchant est américain ✓

ÉTAPE 3 : TIRER DES CONCLUSIONS

Modèle: *{p:vrai, q:vrai, r:vrai}*

Formule: $p \to q \wedge \neg r$



Pour le modèle considéré, la phrase doit être interprétée comme une proposition fausse

LE RAISONNEMENT

Le raisonnement deductif

Un raisonnement deductif peut être représenté sous forme symbolique comme suit

$$[\text{formule } 1] \rightarrow [\text{formule } 2]$$

où [formule1] et [formule2] représentent n'importe quelle formule.

[formule 1] représente les prémisses (**hypothèse**)

[formule 2] représente les conclusions (**thèse**)

EXEMPLE

Si l'éléphant a une trompe et la Belgique est en Europe, alors la terre est ronde.

$$p \wedge q \rightarrow r$$

Dans cette proposition, l'hypothèse est vraie et la thèse est vraie.
Peut-on dire qu'il s'agit d'un raisonnement valide ?

LE RAISONNEMENT

Le raisonnement direct (Modus Ponens)

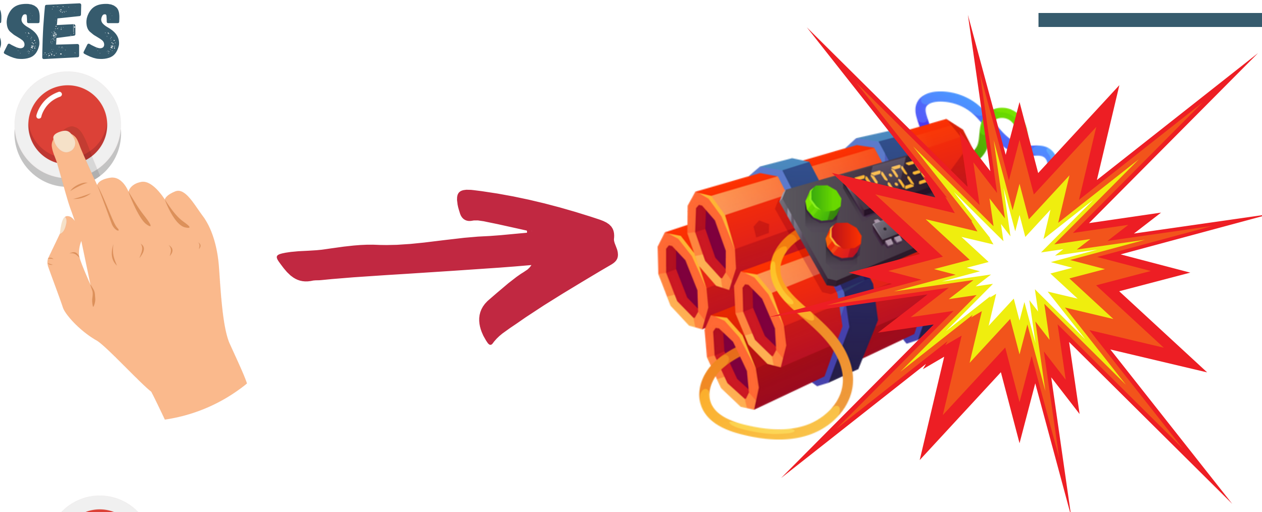
Si nous supposons que l'implication est vraie et que l'antécédent de cette implication est vrai, alors le conséquent doit **nécessairement** être vrai.

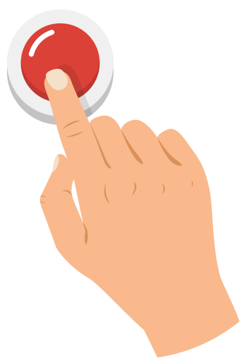
$$\underbrace{p \wedge (p \rightarrow q)}_{\text{hypothèse}} \rightarrow \underset{\text{thèse}}{q}$$

Cette proposition est vraie sur la base de la relation entre la conclusion et les hypothèses, et non sur la base d'une circonstance fortuite.

Une implication dans la forme proposée ci-dessus est vraie pour sa structure et non sur la base du modèle considéré. En d'autres termes, **un raisonnement valide est une tautologie**.

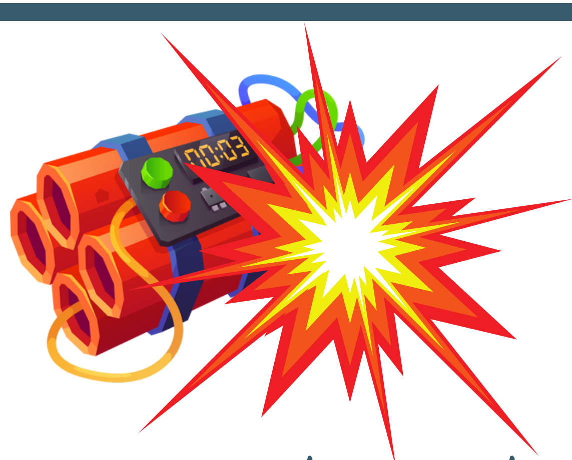
PREMISSES





Si les prémisses sont vraies...

CONCLUSION



...la conclusion est nécessairement vraie.

EXEMPLE

S'il pleut, et s'il fait froid quand il pleut, alors il fait froid.

p	q	$p \rightarrow q$	$p \land (p \rightarrow q)$	$p \land (p \rightarrow q) \rightarrow q$
Faux	Faux	Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai	Faux	Vrai
Vrai	Faux	Faux	Faux	Vrai
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai

p:il pleut; q:il fait froid

LE RAISONNEMENT

Le raisonnement par contraposé (Modus Tollens)

Si nous supposons que l'implication est vraie et que le conséquent de cette implication est faux, alors l'antecedent doit nécessairement être faux.

$$\neg q \land (p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$$

La contraposition

Si on a une implication de la forme :

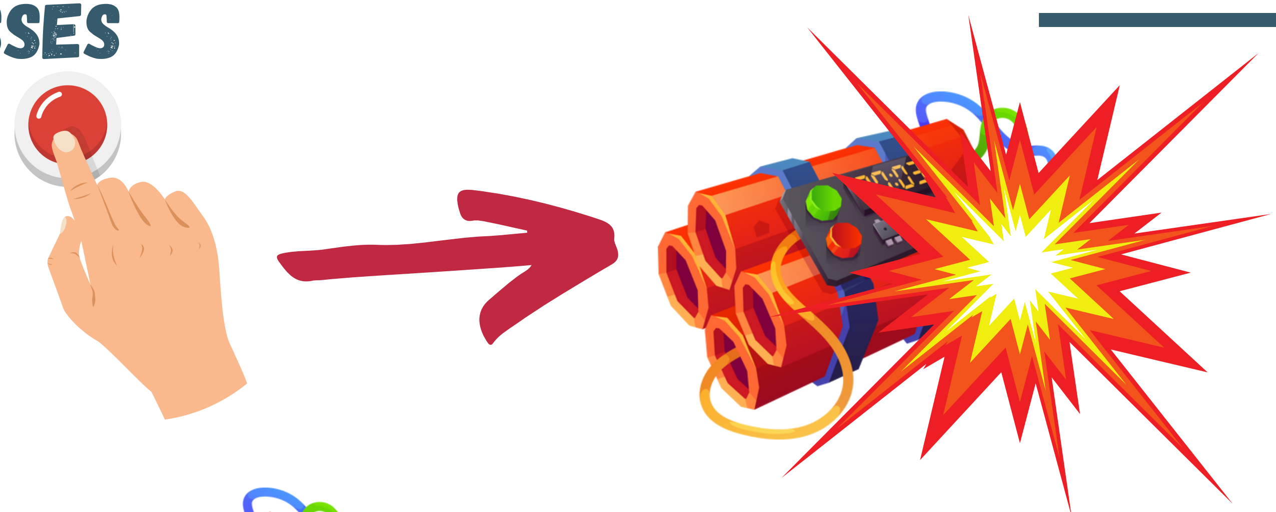
$$p \rightarrow q$$

Sa contraposée est :

$$\neg q \rightarrow \neg p$$

Une implication et sa contraposée sont **logiquement équivalentes**, c'est-à-dire qu'elles ont toujours la même table de vérité.

PREMISSES



Si nous ne constatons pas les effets attendues...

CONCLUSION

...cela veut dire que la cause est absente.

LE RAISONNEMENT

Raisonnement transitif (syllogisme hypothétique)

Un syllogisme hypothétique est une forme de raisonnement déductif qui repose sur des implications en chaîne.

$$(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Si je révise, je comprends la matière et si je comprends la matière, je réussis l'examen.

Donc, si je révise, je réussis l'examen.

Raisonnement par élimination (syllogisme disjonctif)

Un syllogisme disjonctif est un raisonnement basé sur une disjonction (une alternative) et l'élimination d'une des possibilités.

$$(p \lor q) \land \neg q \rightarrow p$$

Soit je prends le bus, soit je prends le métro. Je ne prends pas le bus. Donc, je prends le métro.

LE RAISONNEMENT

Les raisonnements fallacieux (trompeurs)

En logique, une fallace est une erreur dans le raisonnement qui, bien que semblant valide, ne l'est pas.

EXEMPLE

$$\underbrace{q \wedge (p \rightarrow q)}_{\text{hypothèse}} \rightarrow \underset{\text{thèse}}{p}$$

Une forme courante d'erreur dans le raisonnement consiste à croire que si la conséquence est vraie, alors la cause l'est également. Cette erreur est appelée **affirmation du conséquent**.

EXEMPLE

S'il fait froid, et s'il fait froid quand il pleut, alors il pleut.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \wedge (p \rightarrow q)$	$q \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow p$
Faux	Faux	Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
Vrai	Faux	Faux	Faux	Vrai
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai

p:il pleut; q:il fait froid

CE QU'IL FAUT RETENIR

- Le langage de la logique formelle est un outil d'analyse.
- Le raisonnement déductif peut être formalisé comme une implication, où l'antécédent est appelé l'hypothèse et le conséquent est appelé la thèse.
- Un argument est solide s'il est vrai en raison de sa structure syntaxique et il est interprété comme vrai quel que soit le modèle adopté.
- Un raisonnement solide est une tautologie