Fiche 2 – Équivalence logique et algèbre de Boole

Exercice 1

Regardez la formule suivante :

V a F = F

$$(p \land q \land r \land s) \rightarrow (s \land \neg s)$$

Combien de modèles donnent la valeur VRAI comme interprétation ? Répondez à la question sans construire la table de vérité. Justifiez !

15 cas possible

car si A = est vrais alors c'est faux

Exercice 2

Les formules suivantes sont-elles équivalentes ? Justifiez en utilisant la contraposition.

- $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ $\neg r \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$
- $\neg r \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow \neg p)$

$\neg r \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$

$\neg r \rightarrow \neg(\neg p \lor q)$

$\neg r \rightarrow (p \land \neg q)$

$\neg r \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow \neg p)$

$\neg r \rightarrow \neg(q \lor \neg p)$

$\neg r \rightarrow (\neg q \land p)$

$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \lor q$

$\neg(p \lor q) \leftrightarrow (\neg p \land \neg q)$

$\neg(p \land q) \leftrightarrow (\neg p \lor \neg q)$

$\neg p \rightarrow \neg q \leftrightarrow q \rightarrow p$

$\neg q \rightarrow \neg p \leftrightarrow q \lor \neg p$

Exercice 3

Parmi les formules suivantes, identifiez celles qui sont équivalentes à la formule :

$$\neg p \wedge \neg q \rightarrow \neg(r \vee s)$$

$\neg(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r \wedge \neg s$

$p \vee q \vee \neg r \wedge \neg s$

Utilisez les lois de De Morgan, la contraposition et l'équivalence logique du connecteur d'implication pour justifier vos réponses.

$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$

$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

$\neg p \rightarrow \neg q \leftrightarrow q \rightarrow p$

$\neg q \rightarrow \neg p \leftrightarrow q \vee \neg p$

a. $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg(r \vee s)$

Faux

b. $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg r \wedge \neg s$

Vrai

c. $(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg(r \vee s)$

Faux

d. $p \vee q \vee \neg(r \vee s)$

Vrai

$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$

e. $p \lor q \lor (\neg r \land \neg s)$

Vrai

f. $r \lor s \rightarrow p \land q$

Faux

g. $r \lor s \rightarrow p \lor q$

Vrai

$\land = \times$
$\lor = +$
$\bar{p} = 1 - p$

$\rightarrow = \bar{p} + q$

$p = p$
$p.p = p$
$p + p = p$
$\bar{p} + p = 1$
$\bar{p} . p = 0$

$1 . p = p$
$1 + p = 1$
$0 . p = 0$
$0 + p = p$

lois de Morgan
$\overline{p.q} = \bar{p} + \bar{q}$
$\overline{p+q} = \bar{p} . \bar{q}$

Exercice 4

Traduisez les propositions suivantes en expressions booléennes :

a. $p \land \neg(q \land r)$ $\neg q \lor \neg r$

$p . \overline{(q . r)}$ $\overset{1}{p} . \overset{0}{\bar{q}} . \overset{1}{\bar{r}} =$ $p . \bar{q} + \bar{r} = 1 . 0 + 1$
$0 + 1$
$= 1$

b. $(p \land q) \rightarrow r$

$(\overline{p . q}) + r = \bar{p} + \bar{q} + r = 0 + 0 + 0$
$= 0$

c. $\neg r \land p \rightarrow \neg q$

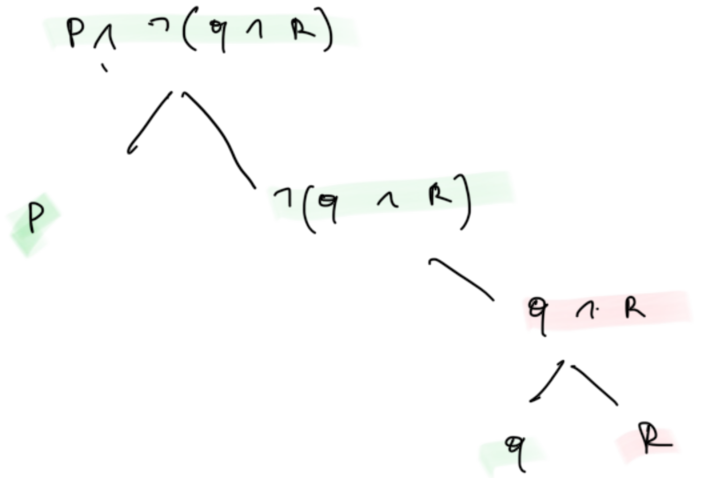
$$\overline{(\overline{r} . p)} + \overline{q} = r . \overline{p} + \overline{q} = 0 . 0 + 0 = 0$$

d. $(p \land \neg q) \lor (p \land \neg r)$

$$(p . \overline{q}) + (p . \overline{r}) = 1 . 0 + 1 . 1$$
$$= 0 + 1 = 1$$

Utilisez les expressions algébriques trouvées pour calculer les interprétations des propositions pour le modelé p = VRAI ; q = VRAI ; r = FAUX.

$p = 1 \quad q = 1 \quad r = 0$



= Vrai

$\land = \times$
$\lor = +$
$\overline{p} = 1 - p$

$\rightarrow\ = \overline{p} + q$

$p = p$
$p . p = p$
$p + p = p$
$\overline{p} + p = 1$
$\overline{p} . p = 0$

$1 . p = p$
$1 + p = 1$
$0 . p = 0$
$0 + p = p$

Loi de Morgan
$\overline{p . q} = \overline{p} + \overline{q}$
$\overline{p + q} = \overline{p} . \overline{q}$

Exercice 5

Simplifiez les expressions booléennes suivantes :

a) $(c + d) \cdot (a + b) \cdot \bar{c} \cdot \bar{d}$

$c + d \cdot a + b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d}$

$0 + 0 \cdot (a + b)$

$= 0$

$\wedge = \times$
$\vee = +$
$\bar{p} = 1 - p$

$\rightarrow = \bar{p} + q$

$p = p$
$p \cdot p = p$
$p + p = p$

$\bar{p} + p = 1$
$\bar{p} \cdot p = 0$

$1 \cdot p = p$
$1 + p = 1$
$0 \cdot p = 0$
$0 + p = p$

Loi de Morgan
$\overline{p \cdot q} = \bar{p} + \bar{q}$
$\overline{p + q} = \bar{p} \cdot \bar{q}$

b) $a \cdot \bar{b} + b \cdot c + a \cdot b + \bar{b} \cdot c$

$a \cdot \bar{b} + b \cdot c + a \cdot b + \bar{b} \cdot c$

$a \cdot (\bar{b} + b) = a$

$a + b \cdot c + \bar{b} \cdot c$

$a + c \quad c(b + \bar{b}) = c$

c) $b + \overline{\bar{a} + \bar{c}} + \overline{c \cdot b} + \overline{a + \bar{c}}$

$b + \overline{\bar{a} + \bar{c}} + \overline{c \cdot b} + \overline{a + \bar{c}}$

$= b + a + c + \overline{c \cdot b} + \bar{a} + c$

$b + c + \bar{c} \cdot b + 1$

d) $\overline{\overline{\bar{a} + b} + \bar{a}} + \overline{\bar{a} + \overline{b + \bar{a}}}$

$\bar{a} + b + a + a + b + \bar{a}$

$(\bar{a} + a) + (\bar{b} + b)$

Demande a Stoufio

Exercice 6

Considérez le pseudocode ci-dessous, où NON représente l'opérateur de négation, ET l'opérateur de conjonction, OU l'opérateur de disjonction, et impair(nombre) est une fonction qui renvoie la valeur « VRAI » si le nombre est impair et la valeur « FAUX » si le nombre est pair.

```
SI NON((nombre1 < nombre2) OU impair(nombre))
   OU (NON(nombre1 < nombre2) ET impair(nombre))
ALORS
   Instruction 1
SINON
   Instruction 2
FIN SI
```

Réécrivez le pseudocode en simplifiant la condition contenue dans la structure de contrôle « SI ... ALORS ... SINON ».
Conseil : définissez des variables propositionnelles pour chaque proposition atomique de la condition à tester dans le SI.

Exercice 7

Ouvrez le classeur Excel Fiche2_Calcul_Prop.xlsx que vous trouverez sur Moodle.

Chaque feuille correspond à un exercice différent.

Dans la première feuille de calcul vous devez compléter les tables de vérités des propositions correspondants.

Dans la deuxième et troisième feuille vous devriez compléter les tables de vérité pour les propositions données et vérifier si elles sont logiquement équivalentes.

Exercices de niveau examen

1) Traduisez la proposition suivante en expression algébrique et utilisez les règles d'équivalence de l'algèbre de Boole pour la simplifier au maximum.

$$r \wedge (\neg p \wedge (r \rightarrow p \wedge q))$$

S'agit-il d'une tautologie, d'une contradiction ou d'aucune des deux ? Justifiez !

2) Traduisez la proposition suivante en expression algébrique et utilisez les règles d'équivalence de l'algèbre de Boole pour la simplifier au maximum.

$$(q \wedge r \rightarrow \neg p) \vee \neg (q \wedge r \wedge \neg p)$$

S'agit-il d'une tautologie, d'une contradiction ou d'aucune des deux ? Justifiez !

3) Traduisez la proposition suivante en expression algébrique et utilisez les règles d'équivalence de l'algèbre de Boole pour la simplifier au maximum.

$$\neg(r \vee \neg q) \rightarrow (r \vee p \rightarrow \neg(r \wedge q))$$

S'agit-il d'une tautologie, d'une contradiction ou d'aucune des deux ? Justifiez !

Fiche d'Autoévaluation – Équivalence et Algèbre de Boole

🎯 Objectifs d'apprentissage

- Comprendre les notions d'équivalence logique.

- Démontrer une équivalence logique.

- Appliquer les lois de la logique propositionnel (De Morgan, distributivité, etc.).

- Traduire des propositions en expressions algébriques.

- Simplifier des expressions booléennes.

- Analyser des structures conditionnelles (pseudocode).

- Utiliser Excel pour le calcul propositionnel

☑ Autoévaluation par compétence

Équivalence logique

[ ] Je comprends ce que signifie que deux formules soient logiquement équivalentes.
[ ] Je sais démontrer une équivalence à l'aide des lois de la logique propositionnelle.

Lois de l'algèbre de Boole

[ ] Je connais les lois de De Morgan, de distributivité, d'absorption, etc.
[ ] Je sais les appliquer pour déterminer des formules équivalentes.

Traduction et simplification

[ ] Je sais traduire une formule en expression algébrique.
[ ] Je sais simplifier une expression booléenne au maximum.

Analyse de pseudocode

[ ] Je sais identifier les propositions atomiques dans un pseudocode.
[ ] Je sais simplifier une condition logique dans une structure de contrôle.

Calcul propositionnel (Excel)

[ ] Je sais introduire une formule en Excel.
[ ] Je sais utiliser les fonctions ET(), OU(), NON() et SI() en Excel.

Auto-score

Pour chaque compétence, attribue-toi une note de 1 à 5 :

- 1 = Je ne comprends pas du tout

- 3 = Je comprends mais je fais encore des erreurs

- 5 = Je maîtrise complètement

Mes points forts

Mes points à améliorer

Fiche 2 – Solutions

1. L'interprétation de la proposition donne la valeur VRAI pour 15 modelés sur 16

2. Oui

3. Les propositions b, d, e et g sont équivalentes

4.

   a. $p \cdot \overline{q \cdot r}$
   b. $\overline{p \cdot q} + r$
   c. $\overline{\bar{r} \cdot p} + \bar{q}$
   d. $p \cdot \bar{q} + p \cdot \bar{r}$

   Interprétations :

   a. $VRAI$
   b. $FAUX$
   c. $FAUX$
   d. $VRAI$

5.

   a. 0
   b. $a + c$
   c. 1
   d. $a \cdot b$