Fiche 3 – Logique des prédicats

Exercice 1 (interpréter des propositions quantifiées)

Sur l'univers des stations du métro bruxellois, (ligne 1, ligne 2, ligne 5, ligne 6), on dispose des prédicats :

- **p(x) : x commence par la lettre m**
- **q(x,y) : x est sur la même ligne que y**

et des constantes ARTSLOI, MERODE, STOCKEL, HERMMANNDEBROUX.

À l'aide de la carte du métro de Bruxelles que vous trouverez en annexe de ce document, donnez les valeurs de vérité des propositions suivantes :

a. $\forall x\ p(x)$ — Faux

b. $\exists x\ p(x)$ — Vrai

c. $\forall x\ (\ q(x, \text{ARTSLOI})\ )$ — Vrai

d. $\exists x\ (\ \neg p(\text{MERODE})\ \wedge\ q(x, \text{MERODE})\ )$ — F

e. $\exists y\ \forall x\ q(y, x)$ Il existe au moins 1 arrêt qui est sur toute les lignes — V — => Arts loi

f. $\neg(\ \forall x\ (\ q(x, \text{STOCKEL})\ \vee\ q(x, \text{HERMANNDEBROUX})\ )\ )$ — V

g. $\forall x\ (\ \neg(\ q(x, \text{STOCKEL})\ \vee\ q(x, \text{HERMANNDEBROUX})\ )\ )$ — F

h. $\forall x\ \exists y\ (\ p(y)\ \wedge\ q(x, y)\ )$ — V

i. $\exists y\ \forall x\ (\ p(y)\ \wedge\ q(x, y)\ )$ — F

j. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (\ q(x, y)\ \wedge\ q(y, z)\ \rightarrow\ q(x, z)\ )$ — F

Exercice 2 (définir les prédicats)

Sur l'univers des stations du métro bruxellois, (ligne 1, ligne 2, ligne 5, ligne 6), définissez deux prédicats p(x) et q(x,y) pour lesquels l'interprétation des formules suivantes donne la valeur vraie.
Conseil : inspirez-vous des prédicats définis dans l'exercice 1.

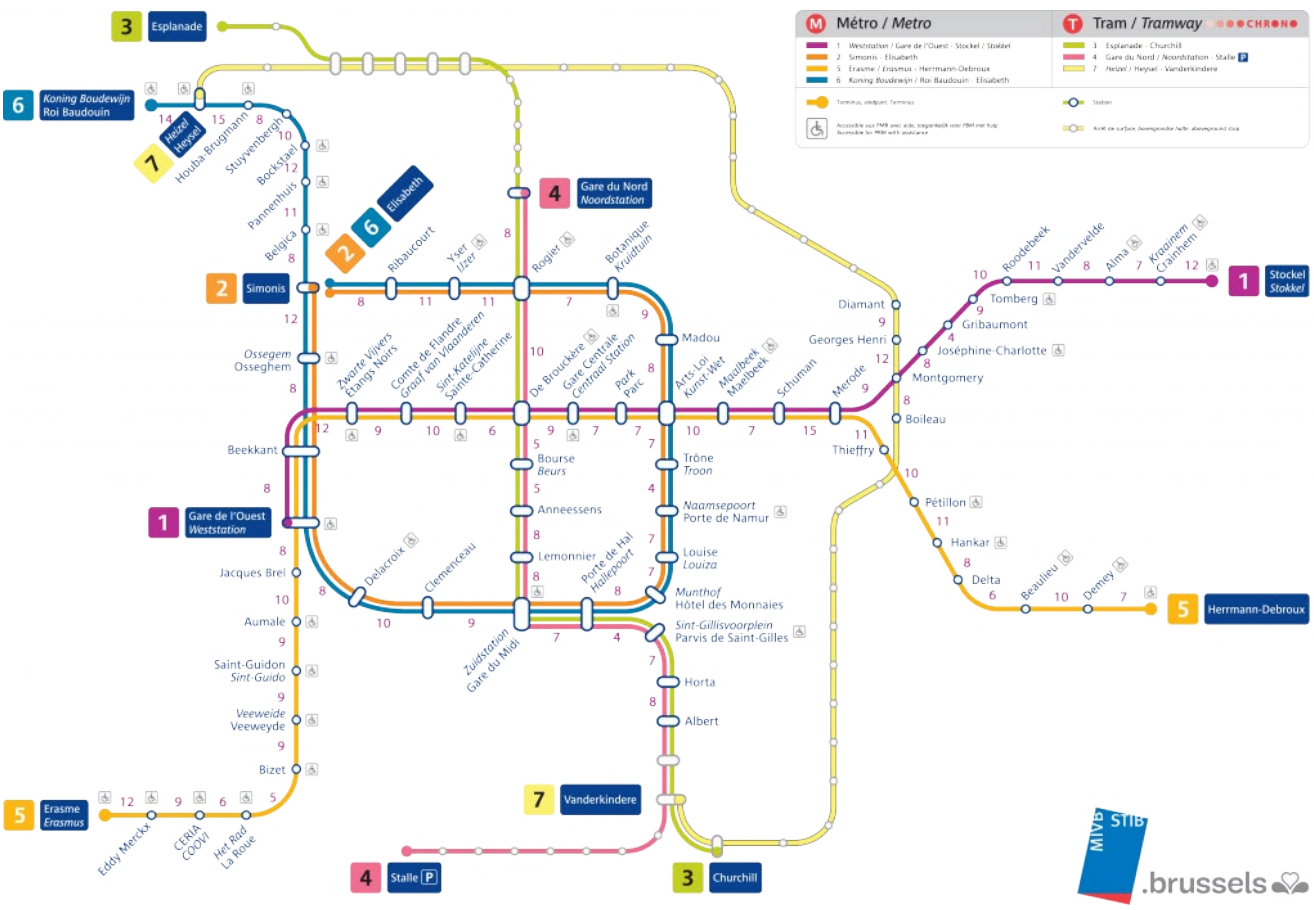
a. $\exists x(\ p(x)\ \wedge\ \forall y\ q(x, y)\ )$

P(x) = x commence par la lettre A
q(x,y) = x est pas sur la même ligne que y

b. $\forall x\ (p(x) \rightarrow \exists y\ q(x,y))$

Faites valider votre réponse par un.e enseignant.e.

Annexe (carte du métro de Bruxelles)



Exercice 3 (règles d'équivalence)

Trouvez une forme équivalente des propositions suivantes dans laquelle l'opérateur de négation ne porte que sur les propositions atomiques.

En d'autres termes vous devez appliquer les règles d'équivalence vu au cours (lois de De Morgan, équivalence de l'implication, négation des quantificateurs, etc.) pour déplacer les négations le plus possible vers l'intérieur.

Exemple : La proposition $\neg(\forall x\ p(x))$ doit être réécrite dans sa forme équivalente $\exists x\ (\neg p(x))$.

a. $\neg\big(\exists x(p(x) \wedge q(x))\big)$

$\forall x\ (\neg p(x) \vee \neg q(x))$

b. $\neg\big(\forall x(p(x) \rightarrow q(x))\big)$

$\exists x\ (p(x) \wedge \neg q(x))$

c. $\neg\big(\forall x(p(x) \rightarrow \forall y\ q(x,y))\big)$

$\exists x\ (p(x) \Rightarrow \exists y\ \neg q(x,y))$

d. $\neg\left(\exists x \left(p(x) \wedge \neg(\exists y\, q(x,y))\right)\right)$

$\forall x \,(\neg p(x) \vee \exists y\; q$

Exercice 4 (traduire en langage symbolique)

Sur l'univers des êtres vivants, on dispose des prédicats suivants :

- **a(x) : x est un animal**
- **o(x) : x est un ours**
- **f(x) : x a faim**
- **l(x) : x est un loup**

À l'aide de ceux-ci, traduisez chacune des phrases suivantes par une formule de la logique des prédicats :

a. Aucun loup n'est un ours.
b. Si tous les loups ont faim, alors au moins un ours a également faim.
c. Un animal ne peut être à la fois un ours et un loup.
d. Tous les ours ont faim mais aucun loup n'a faim.
e. Si un animal n'a pas faim, alors il s'agit d'un ours ou d'un loup.

a.

b.

c.

d.

e.

Exercice 5 (traduire en langage symbolique)

Sur l'univers de tous les romans, on dispose des prédicats suivants :

- **e(x) : x est un roman d'espionnage**
- **l(x) : x est long**
- **f(x) : x est un roman fantastique**
- **m(x, y) : x est meilleur que y**

À l'aide de ceux-ci, traduisez chacune des phrases suivantes par une formule de la logique des prédicats :

a. Chaque roman fantastique est meilleur qu'au moins un roman d'espionnage.
b. Seul un roman d'espionnage peut être meilleur qu'un roman fantastique.
c. Il existe au moins un roman fantastique qui n'est pas long et qui est meilleur que tous les romans d'espionnage.
d. Si tous les romans d'espionnage sont longs, alors il existe au moins un roman fantastique qui est meilleur de n'importe quel roman d'espionnage.

a.

b.

c.

d.

Exercice 6 (tester l'unicité)

L'objectif du pseudocode suivant est de vérifier l'existence et l'unicité d'un objet dans une collection par rapport à la propriété p(x). Autrement dit, nous voulons que notre pseudocode interprète la proposition

$$\exists x\ (\ p(x) \wedge \forall y\ (p(y)\ \rightarrow\ x = y)\ )$$

Complétez le pseudocode fourni en insérant, dans les zones prévues, les valeurs de vérité que l'algorithme doit retourner.

```
POUR chaque valeur x dans l'univers
      SI p(x) est vrai ALORS
            POUR chaque valeur y dans l'univers
                  SI p(y) est vrai ET x≠y ALORS
                        RETOURNER [          ]
                        quitter le test
                  FIN SI
            FIN POUR
            RETOURNER [          ]
            quitter le test
      FIN SI
FIN POUR
RETOURNER [          ]
quitter le test
```

Exercice 7 (exercice récapitulatif)

On considère un univers contenant des objets de différentes couleurs (une seule couleur par objet). Chacun de ces objets porte un numéro entier et possède une (et une seule) forme géométrique particulière (cube, sphère, prisme, …).

On dispose de prédicats suivants :

- **cube(x) : x est un cube**
- **sphere(x) : x est une sphere**
- **pair(x) : x porte un numéro pair**
- **vert(x) : x est vert**
- **rouge(x) : x est rouge**

À l'aide de ceux-ci, traduisez chacune des phrases suivantes par une formule de la logique des prédicats:

a. Tout objet vert portant un numéro pair est cubique.
b. Si un objet est sphérique, cet objet n'est pas vert ou porte un numéro impair.
c. S'il existe un objet vert sphérique, alors il existe un objet vert portant un numéro impair.
d. Si tout objet vert porte un numéro pair, aucun objet sphérique n'est vert.

a.

b.

c.

d.

Si on suppose vraie la proposition a., quelle est la valeur de vérité des trois autres ?

Toujours en supposant vraie la proposition (1), peut-il exister dans cet ensemble un objet cubique rouge portant le numéro 4 ? Justifiez votre réponse !

Décrivez, en français et de la façon la plus élégante possible, ce qu'on peut déduire à propos des objets de l'univers si les affirmations suivantes sont vraies. :

a. $\forall x\ (\text{vert}(x) \rightarrow \text{cube}(x) \wedge \neg\text{pair}(x))$
b. $\forall y\ (\text{pair}(y) \rightarrow (\text{rouge}(y) \vee \neg\text{sphere}(y)))$
c. $\exists x\ (\neg\text{pair}(x) \wedge \text{rouge}(x)\ ) \leftrightarrow \forall y\ (\text{cube}(y))$

a.

b.

c.

Exercice 8 (interpréter des propositions quantifiées en Java)

Considérez la classe Java suivante

```
public class MathObjet {

      private String couleur;
      private String forme;

      public MathObjet(String couleur, String forme) {
            this.couleur = couleur;
            this.forme = forme;
      }

      public boolean estVert() {
            return "vert".equals(this.couleur);
      }

      public boolean estRouge() {
            return "rouge".equals(this.couleur);
      }

      public boolean estUnCube() {
            return "cube".equals(this.forme);
      }

      public boolean estUneSphere() {
            return "sphère".equals(this.forme);
      }
}
```

Sachant que la boucle for

```
for (MathObjet x : universMathObjets) {
      [bloc d'instructions]
}
```

permet de parcourir tous les objets de notre univers et que `!x` représente la négation de x, `(x||y)` représente la disjonction de x et y et , `(x && y)` représente la conjonction de x et y, associez à chacune des propositions suivantes :

a. $\forall x\,(\text{vert}(x) \rightarrow \text{cube}(x))$
b. $\exists x\,(\text{vert}(x) \wedge \text{cube}(x))$
c. $\forall x\,(\text{vert}(x) \wedge \text{cube}(x))$

le bloc d'instructions Java ci-dessous qui permet de vérifier que la proposition est vraie.

1.

```
for (MathObjet x : universMathObjets) {
      if (!x.estVert() || !x.estUnCube()) {
            return false;
      }
}
return true;
```

2.

```
for (MathObjet x : universMathObjets) {
      if (x.estVert() && x.estUnCube()) {
            return true;
      }
}
return false;
```

3.

```
for (MathObjet x : universMathObjets) {
      if (x.estVert() && !x.estUnCube()) {
            return false;
      }
}
return true;
```

Exercice 9 (Exercice de niveau examen)

Sur l'univers des compagnie aériennes et leurs destinations, on dispose des prédicats suivants :

- *m(x) : x est une destination au Maroc*
- *b(x) : x est une compagnie aérienne belge*
- *p(x) : x est une destination populaire*
- *j(x, y) : x est une destination joignable par la compagnie aérienne y*
- *x≠y : x est différent de y*

À l'aide de ceux-ci et de la constante « RABAT », traduisez chacune des phrases suivantes par une formule de la logique des prédicats :

i. S'il existe au moins une destination populaire au Maroc qui n'est pas Rabat alors aucune destination populaire au Maroc n'est joignable par une compagnie belge.

ii. Si une destination au Maroc est joignable par au moins deux compagnies aériennes belges alors c'est une destination populaire.

iii. Il existe au moins deux destinations au Maroc qui sont populaires.

i.

ii.

iii.

Exercice 10 (Exercice de niveau examen)

Dans l'univers des stations du Métro de Bruxelles, on dispose des prédicats suivants :

- *i(x) : x est située à Ixelles*
- *a(x) : x est située à Anderlecht*
- *f(x) : x est fermée*
- *j(x, y) : y est joignable à partir de x*

À l'aide de ceux-ci et de la constante « MERODE », traduisez chacune des phrases suivantes par une formule de la logique des prédicats :

i. Si la station Mérode est fermée, au moins une station située à Anderlecht n'est pas joignable à partir des stations situées à Ixelles.

ii. Aucune station située à Anderlecht n'est joignable à partir de Mérode si au moins une station située à Ixelles est fermée.

iii. Si au moins une station est fermée, alors aucune station située à Ixelles n'est joignable à partir d'une station située à Anderlecht.

iv. Si Mérode n'est pas joignable à partir d'au moins une station située à Ixelles, alors il existe au moins une station située à Anderlecht qui est fermée.

i.

ii.

iii.

iv.

Fiche 3 – Solutions

1. FAUX, VRAI, VRAI, FAUX, VRAI, VRAI, FAUX, VRAI, FAUX, FAUX

2. Demandez à un.e enseignant.e de valider votre réponse.

3.
   a. $\forall x(\, p(x) \rightarrow \neg q(x)\,)$ ou $\forall x(\neg p(x) \vee \neg q(x)\,)$
   b. $\exists x(\, p(x) \wedge \neg q(x)\,)$
   c. $\exists x(\, p(x) \wedge \exists y(\neg q(x,y))\,)$
   d. $\forall x(\, p(x) \rightarrow \exists y\, q(x,y)\,)$ ou $\forall x(\, \neg\, p(x) \vee \exists y\, q(x,y)\,)$

4.
   a. $\forall x(\, l(x) \rightarrow \neg o(x)\,)$
   b. $\forall x(\, l(x) \rightarrow f(x)) \rightarrow \exists y(\, o(y) \wedge f(y)\,)$
   c. $\forall x(\, a(x) \rightarrow \neg(\, l(x) \wedge o(x)\,)\,)$
   d. $\forall x(\, o(x) \rightarrow f(x)\,) \wedge \forall y(\, l(y) \rightarrow \neg f(y)\,)$
   e. $\forall x(\, a(x) \wedge \neg f(x) \rightarrow l(x) \vee o(x)\,)$

5.
   a. $\forall x(\, f(x) \rightarrow \exists y\,(\, e(y) \wedge m(x,y)\,)$
   b. $\forall x \forall y(\, m(x,y) \wedge f(y) \rightarrow e(x)\,)$
   c. $\exists x(\, f(x) \wedge \neg l(x) \wedge \forall y\,(\, e(y) \rightarrow m(x,y)\,)\,)$
   d. $\forall x\,(\, e(x) \rightarrow l(x)\,) \rightarrow \exists y(\, f(y) \wedge \forall z\,(e(z) \rightarrow m(y,z)\,)\,)$

6. FAUX, VRAI, FAUX

7.

a. $\forall x$ (vert(x) $\wedge$ pair(x) $\rightarrow$ cube(x))
b. $\forall x$ (sphère(x) $\rightarrow \neg$vert(x) $\vee \neg$pair(x))
c. $\exists x$ (sphère(x) $\wedge$ vert(x)) $\rightarrow \exists y$ (vert(y) $\wedge \neg$pair(y))
d. $\forall x$ (vert(x) $\rightarrow$ pair(x)) $\rightarrow \forall x$ (sphère(x) $\neg$vert(x))

Les 3 sont vraies.

Oui. Un objet vert et pair doit être un cube, mais pais le contraire. Donc, rien n'empêche d'avoir aussi des objets rouge et pair qui sont des cubes.

a. Tous les objets verts sont cubiques et portent un numéro impair.
b. Si un objet porte un numéro pair, il est rouge ou non sphérique.
c. Il existe un objet rouge portant un numéro impair si et seulement si tout objet est cubique.

8.

Le code 1 interprète la proposition c
Le code 2 interprète la proposition b
Le code 3 interprète la proposition a