Tema 1, Primer Parcial Computación 3 - 2024

Montecarlo - Teorema de Stockes

El teorema de Stockes nos relaciona la integral de línea de un campo vectorial sobre la frontera de una superficie, con el flujo (o integral rotacional) a traves de esta.

$$\oint \vec{F}\ d\vec{r} = \iint \vec{\nabla} \times \vec{F}\ \hat{n}\ dA$$

Se pide obtener numéricamente con los métodos utilizados a lo largo del año, el valor, y de ser posible, una visualizacion del flujo que atravieza una superficie compuesta por media esfera con $z > 0$ para un campo $\vec{F} = (y, -x, z)$

Lo primero que deberíamos hacer para modelarlo es calcular el rotor del campo. Recordando que el operador nabla es un vector conformado por las derivadas parciales de las tres coordenadas

$$\nabla = (\hat{i}\frac{d}{dx}, \hat{j}\frac{d}{dy}, \hat{k}\frac{d}{dz})$$

Entonces el rotor se puede resolver numéricamente como el determinante

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (\frac{dF_z}{dy} - \frac{dF_y}{dz})\hat{i} + (\frac{dF_x}{dz} - \frac{dF_z}{dx})\hat{j} + (\frac{dF_y}{dx} - \frac{dF_x}{dy})\hat{k}$$

Acá se viene el tip Prestá atencion a los vectores unitarios. Create una función a la cual pases por parámetro el vector con los puntos random y devuelva este versor, ya que te será de ayuda para utilizarla dentro de la función Rotor.
Supongamos que esa función vector unitario la llamamos n, y devuelve un vector numpy donde las componentes las podés invocar por sus índices así

```
vecunitario = n(vector)
x = vecunitario[0]
y = vecunitario[1]
z = vecunitario[2]
```

Luego, para calcular la derivada parcial de R_x respecto de y, por ejemplo, podés utilizar el métodos de diferencias hacia adelante con los vectores numpy así

```
ndy_ad =  n(np.array([x,y+h,z]))
ndy =  n(np.array([x,y,z]))
dRxdy = ( ndy_ad[0] - ndy[0])/h
```

Te animás a crear el algoritmo que devuelva el rotor dado un campo?
Con MonteCarlo lo que podemos hacer es resolver el flujo para cada dA , y el área que deberían sumar todos mis dA corresponde a la superficie media esfera

$$dA = \frac{\pi \ R^2}{2 \ N}$$

Donde N vá a ser la cantidad de puntos.
Graficá y acumulá los pequeños pequeños flujitos calculados para obtener el flujo neto del rotor a travez de la superficie.
Qué conclusión puede sacar al respecto?

Tema 2, Primer Parcial Computación 3 - 2024

Euler - Dos cuerpos: Sistema Tierra Luna

En mecánica, el problema de los dos cuerpos consiste en determinar el movimiento de dos partículas puntuales que sólo interactúan entre sí.
Los ejemplos comunes incluyen la Luna orbitando la Tierra y en ausencia del Sol, es decir aislados, un planeta orbitando una estrella, dos estrellas que giran en torno al centro de masas (estrella binaria), y un electrón orbitando en torno a un núcleo atómico.
Las ecuaciones de la dinámica del problema son dos ecuaciones vectoriales, donde en principio cada una de estas ecuaciones tiene 3 dimensiones.

$$m_1\ddot{r_1} = -\frac{dV}{dr}(|r_1 - r_2|)\frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|}$$
$$m_2\ddot{r_2} = \frac{dV}{dr}(|r_1 - r_2|)\frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|}$$

¿Qué es V? V es el potencial gravitatorio, que se calcula de manera similar al potencial eléctrico.

$$V = \frac{U}{m0} = \frac{G.M}{r1 - r2}$$

Vamos a plantearlo de varias maneras. En una primera instancia vamos a plantear el problema de un solo cuerpo girando alrededor de un campo central. De esta manera, podría plantearse la fuerza sobre, por ejemplo, la tierra, como

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = \frac{G\,M_{sol}\,m}{r^2}\hat{r}$$

Esto significa que la función fuerza terminaría siendo algo así

```
def fuerzaG(x,y,M,m):
    G=6.67e-11
    rx=M*x/(M+m)
    ry=M*y/(M+m)
    r=(rx**2+ry**2)**0.5
    Fy=-G*(M*m/r**3)*ry
    Fx=-G*(M*m/r**3)*rx
    return Fx, Fy
```

y la aceleración de la luna tendría que ser

$$a_x = \frac{F_x}{m} a_y = \frac{F_y}{m}$$

Proponer una solución numérica para el problema de dos cuerpos usando el método de Euler. Podemos plantear cualquiera de los problemas propuestos, aunque aquí se incluyen los datos para tierra-luna. Los datos que vamos a necesitar son las coordenadas de masa de la luna y de la tierra, las coordenadas de ambas(que armaremos usando las distancias entre ambos cuerpos celestes) y las velocidades iniciales de ambos astros, aunque por ahora supondremos a la tierra inmóvil en el origen.

- $m_{luna} = 7{,}349e22kg$
- $m_{tierra} = 5{,}972e24kg$
- $v_{luna} = 3978km/h = 1105m/s$
- $v_{tierra} = 0$
- $G = 6{,}67e - 11$
- posición inicial Tierra $(x_0, y_0) = (0, 0)$
- posición inicial (km) Luna durante perigeo $(x_0, y_0) = (356500, 0)$

Importante. Este problema hay que plantearlo de manera vectorial.

a) Calcular la trayectoria de la luna, suponiendo que la tierra está inmóvil y en el origen de coordenadas 0,0.
En una etapa posterior se mejorará el cálculo considerando el movimiento de la tierra.
Para la primera etapa entonces son importantes 6 coordenadas. La posición, velocidad y aceleración de la luna, cada una en sus dos dimensiones. La posición y la velocidad se calcularán de la manera usual para el método de Euler, aunque la aceleración ahora depende de la posición.

$$a_x = \frac{F_x}{m_{luna}}, a_y = \frac{F_y}{m_{luna}}$$

Habrá que realizar una función que entregue ambas componentes de la fuerza aplicada sobre la luna
Fx, Fy = FuerzaG(xluna, yluna, mLuna, mTierra)
No es necesario realmente usar la masa reducida, ya que de todas formas se resolverá el problema de dos cuerpos completos posteriormente.
Siendo el vector $\vec{r}$ el vector que marca las posiciones relativas de ambos planetas. Dado que la posición inicial de la tierra es 0, y la posición de la tierra no cambia, podemos escribir la posición de la luna como

$$\vec{r} = (rx, ry) = (x_{luna}, y_{luna})r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

Es importante pensar que si todas las variables están en S.I. entonces el tiempo estará en segundos, por lo que dt debe ser pequeño (10 s o 15 s) pero que no se pueden graficar todas las posiciones de la luna y de la tierra cada 15 s. Por lo menos habría que simular un ciclo lunar que es de 28 días. Es decir, 28 x 24 x 3600 s. . . . Sería apropiado graficar 4 posiciones por día, por ejemplo

```
if   t  %(3600*6) == 0:
     plt.plot(x1,y1,ro)
```

b) En un segundo momento, se puede calcular la trayectoria de la tierra también.
Al agregar estos elementos, hay que tener en cuenta que la velocidad del centro de masa del sistema debería valer 0.
Para ello, se debe incluir una velocidad inicial para la tierra tal que la cantidad de movimiento o momento lineal del centro de masa del sistema sea cero.

$$x_{CM} = \frac{(m_{luna}\, x_{luna} + m_{tierra}\, x_{tierra})}{m_{luna} + m_{tierra}}$$

donde $x_{cm} = 4670km$, $Pcm = 0 => vt = ?$
Además hay que tener en cuenta que ahora la posición de la tierra ya no será (0,0) y ya no hay que tener en cuenta la masa reducida del sistema, si no que podemos utilizar la masa de cada elemento.

$$Fx = G\, m\, Mr^2 \frac{r_x}{r}$$

$$Fy = G\, m\, Mr^2 \frac{r_y}{r}$$

siendo el vector $\vec{r}$ el vector que marca las posiciones relativas de ambos planetas.
$\vec{r} = (r_x, r_y) = (x_{luna} - x_{tierra}, y_{luna} - y_{tierra})$ y $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$

Tema 3, Primer Parcial Computación 3 - 2024

Montecarlo - Campo debido a una esfera cargada

Se puede definir la magnitud de un campo eléctrico debido a una esfera con carga Q a una distancia r como

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Si queremos obtener el campo dado por cada cachito de carga que conforma nuestra esfera, y recordando que el campo eléctrico es una magnitud vectorial

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{|\vec{r}|^2}\hat{r}$$

Siendo $\vec{r} = \vec{r_0} - \vec{r_q}$
Donde $\vec{r_0}$ es la distancia de donde observamos y $\vec{r_q}$ la posición de la carga respecto al centro.
Si sumamos todos los $d\vec{E}$ de cada una de nuestras cargas, obtendremos el campo eléctrico total y podremos contrastarlo contra su magnitud calculada analíticamente.

a) Determinar por MonteCarlo el campo a $5cm$ debido a una esfera de radio $R = 1{,}0cm$ con carga $Q = 3 \times 10^{-6}C$.

b) Y si la esfera fuera hueca y el espesor de su superficie $R/20$?.

c) Y si nuestra distancia al centro fuera $r_0 < \frac{r_q}{2}$

Tema 4, Primer Parcial Computación 3 - 2024

Euler - Modelando una epidemia

Utilizaremos para ello uno de los modelos determinísticos matemáticos más sencillos.
Directamente sacado de wikipedia:
En 1927, W. O. Kermack y A. G. McKendrick crearon el modelo SIR que considera una enfermedad que se desarrolla a lo largo del tiempo y únicamente tres clases de individuos (de donde proviene el nombre):

- S(t) representa a los individuos susceptibles, es decir, aquellos que no han enfermado anteriormente y por lo tanto pueden resultar infectados al entrar en contacto con la enfermedad.
- I(t) representa a los individuos infectados y por lo tanto en condiciones de transmitir la enfermedad a los del grupo S.
- R(t) representa a los individuos recobrados de la enfermedad, y que ya no están en condiciones ni de enfermar nuevamente ni de transmitir la enfermedad a otros.

Dada una población fija $N = S(t) + I(t) + R(t)$, Kermack y McKendrick obtuvieron las siguientes ecuaciones diferenciales que describen el modelo:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

Con los siguientes parámetros.

- S - Individuos susceptibles (ver modelo SIR).
- I - Individuos infectados (ver modelo SIR).
- R - Individuos recobrados (ver modelo SIR).
- N - Población total.
- β - Tasa de contagios (media de personas infectadas por un infectado en una unidad t).
- $\frac{1}{\gamma}$ tiempo promedio de infección (para un solo individuo).

Realizar corridas con unidades de tiempo arbitrarias (t=dias?), y estudiar diferentes casos de enfermedades (ficticias. Muy contagiosas, poco contagiosas) para diferentes condiciones iniciales.