Primer Parcial:

Caos y atractor de Rössler

Docentes: Dibarbora Carlos

Alumno:

Apellido, Nombres	Nº Legajo
Dominikow, Daiana M.	32529

Fecha de realización: 17/07/2022

Observaciones:

Índice

1. Objetivos

- Realizar una simulación de la dinámica del sistema de Rössler, utilizando el método de Euler en Python.
- Observar el comportamiento caótico del atractor en el tiempo.
- Obtener los retratos de fase del sistema.

2. Marco teórico

2.1. La teoría del caos

La primera investigación del caos vino de la mano del meteorólogo Edward Lorentz, quien en 1960 utilizaba un modelo matemático para predecir ciertas condiciones climáticas y la convección térmica de los fluídos . Su modelo consistía de un sistema de ecuaciones no lineales calculados por computadora.

En una oportunidad quizo repetir una medición cambiando las cifras significativas de los parámetros que le pasaba a su sistema de ecuaciones, y notó que su modelo no se comportaba como hubiese esperado. Sus resultados dependían en gran medida de la exactitud de sus parámetros, lo que denominó Teoria del caos.

Lorentz ya no podía predecir con exactitud el comportamiento de un sistema ya que todas sus mediciones se verían afectadas por errores de calibración de sus intrumentos dando a desconocer las condiciones iniciales absolutas del sistema, a partir de ésto estudió el comportamiento caótico

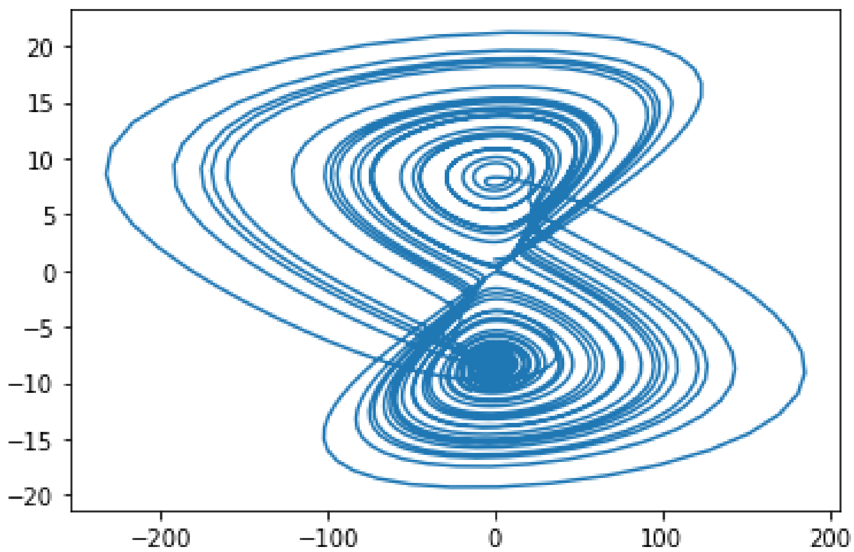

Figura 1: Retrato de Fase - Atractor de Lorentz

2.2. Definicion de sistema caótico

Para que un sistema se considere caótico, debe:

- Ser determinista, es decir, no es azaroso, sino que seguirá el mismo patrón dadas las mismas exactas condiciones iniciales
- Involucrar mas de 3 variables
- Ser irregular en el tiempo, y dado su carácter no lineal no puede ser la superposición de movimientos periódicos
- Ser imprevisible a largo plazo y sensible a las condiciones iniciales
- Su retrato de fases está formado por fractales complicados

Un retrato de fase es una representación geométrica de todas las trayectorias de un sistema dinámico en el plano. Cada curva representa una condición inicial diferente. Usualmente se representa como la derivada de una variable en función de la misma.

La configuración de las curvas en el espacio de fase revela información sobre la existencia de atractores y repulsores.

Los sistemas dinámicos no lineales exhiben atractores, estos se definen como puntos en el retrato de fases donde todas las trayectorias cercanas convergen, un conjunto de valores numéricos hacia los cuales un sistema tiende a evolucionar

2.3. Atractor de Rössler

Originalmente estudiado por el bioquímico Otto Rössler en los 70s, el atractor es el resultado de un sistema de ecuaciones diferenciales dos lineales y una no lineal, continuas y dependientes del tiempo, que exhiben una dinámica caótica asociada a las propiedades fractales del atractor.Se caracteriza por su densidad de órbitas caóticas en torno a un punto fijo, el centro del atractor.

Este atractor estaba pensado para comportarse como el de Lorentz pero de manera mas sencilla de explicar y analizar, aunque actualmente se utiliza para modelar el equilibrio químico de ciertas reacciones donde las variables (parámetros) de las ecuaciones representan la concentracion de la sustancia.

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -y - z \\ \frac{\partial y}{\partial t} = x + ay \\ \frac{\partial z}{\partial t} = b + z(x - c) \end{cases} \tag{1}$$

2.4. Método de Euler

El método numérico de Euler es un procedimiento de integración numérica para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de un valor inicial dado. Solamente sirve para ecuaciones diferenciales de grado uno y es válido si el paso (dt) es lo suficientemente pequeño.

Éste método se utiliza cuando no tenemos la función real que representa la solución de la EDO, pero si la pendiente de la curva en cualquier punto, es decir su derivada.

Partiendo de un valor inicial conocido x_0 y avanzando con un paso dt, se pueden obtener los valores de la solucion de la siguiente manera:

$$x = x + \frac{\partial x}{\partial t} * dt \tag{2}$$

Que podemos generalizar como:

$$x_n = x_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) * dt \tag{3}$$

3. Desarrollo

3.1. Procedimientos

Para la realización del parcial se creó un script en Python 3.9, adjunto a este documento, utilizando las siguientes librerías

- numpy
- mayplotlib

El intervalo de tiempo utilizado para todas las ejecuciones fue $t = 400s$ y su paso $dt = 0{,}001s$. Para todas las ejecuciones, la posicion inicial preferida fue $(x, y, z) = (0{,}1, 0{,}1, 0{,}1)$, por consistencia en los resultados, solo se analizó el atractor con este valor.

Ya que este sistema es dependiente de las condiciones iniciales y muy sensible al valor de las variables a, b y c, se ejecutó el script con las siguientes variaciones:

Ejecución	a	b	c
1	0.2	0.2	2
2	0.2	0.2	8
3	0.2	0.2	15

Cuadro 1: Parámetros utilizados

Para la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales, se utilizó el método numérico de Euler.

4. Análisis de los resultados

4.1. Resultados Obtenidos para: a = 0.2 , b = 0.2 , c = 1

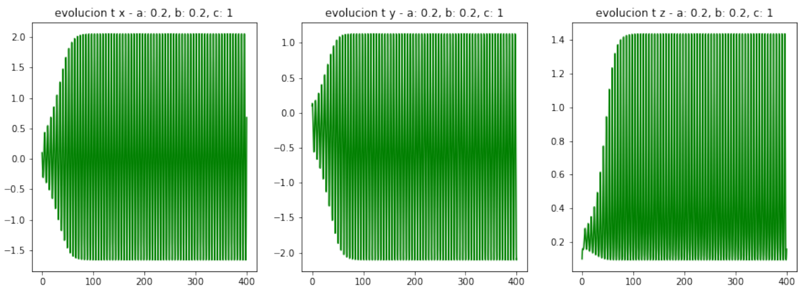

Figura 2: Posición en función del tiempo

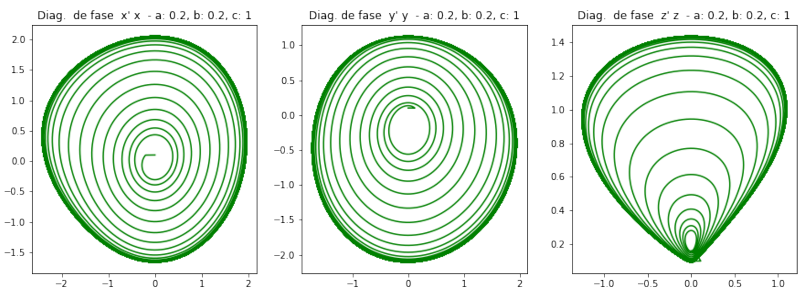

Figura 3: Diagrama de fases

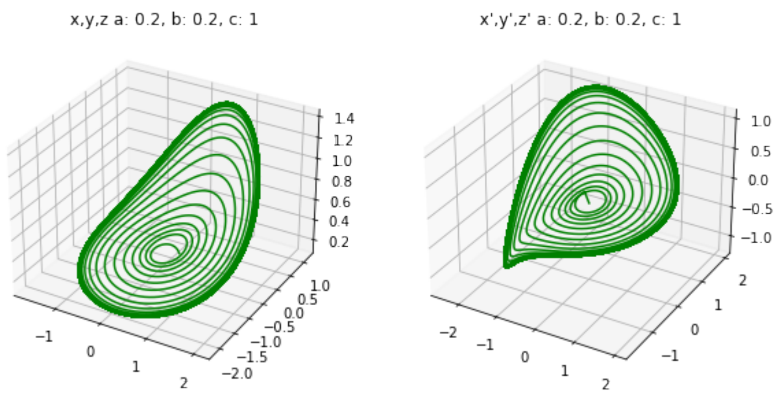

Figura 4: Atractor en el espacio

4.2. Resultados Obtenidos para: a = 0.2 , b = 0.2 , c = 8

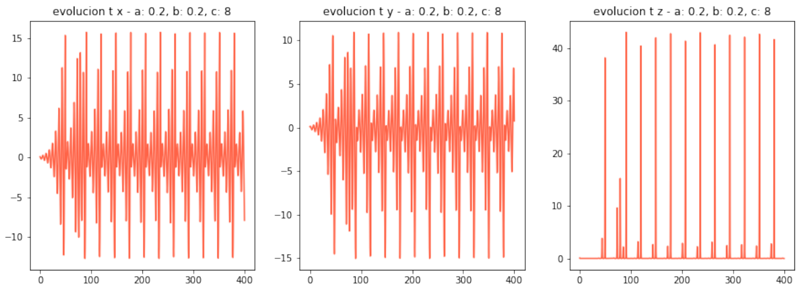

Figura 5: Posición en función del tiempo

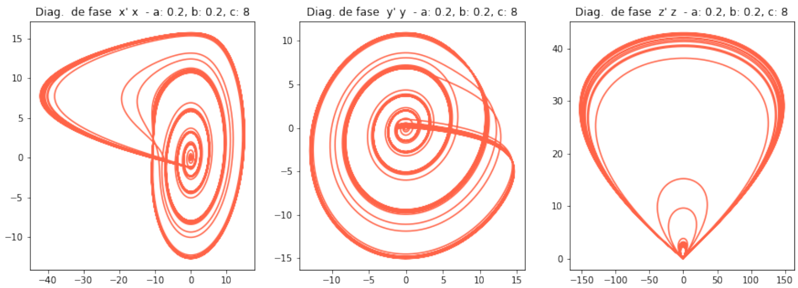

Figura 6: Diagrama de fases

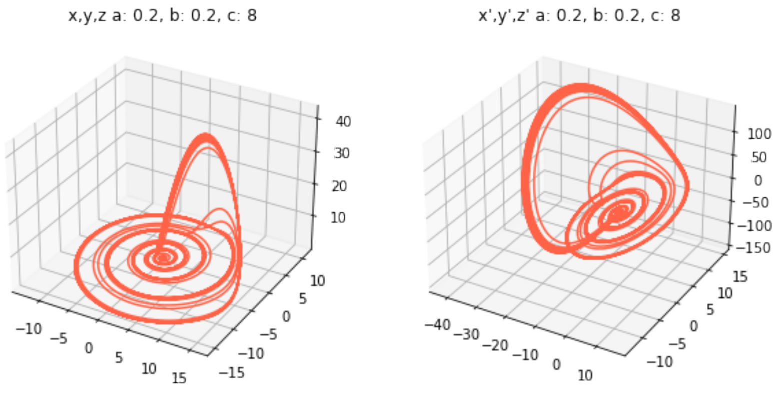

Figura 7: Atractor en el espacio

4.3. Resultados Obtenidos para: a = 0.2 , b = 0.2 , c = 15

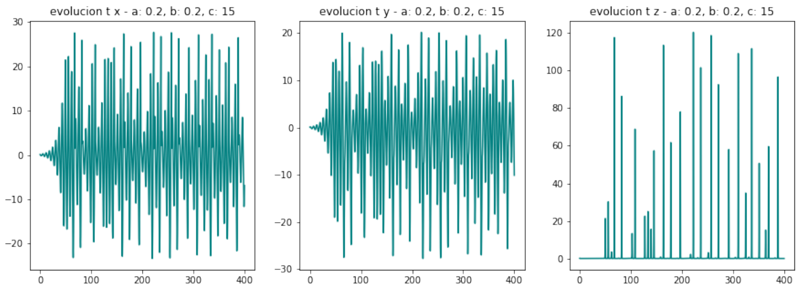

Figura 8: Posición en función del tiempo

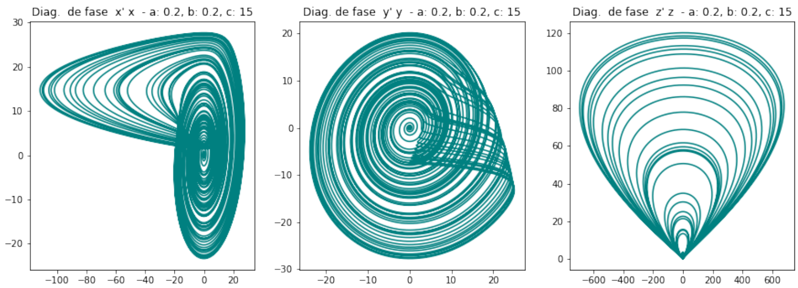

Figura 9: Diagrama de fases

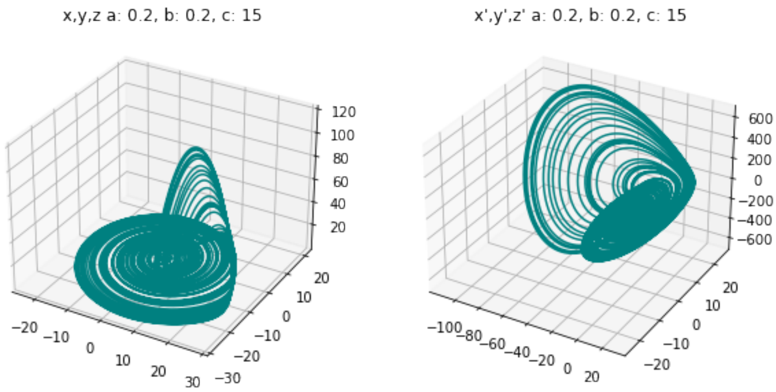

Figura 10: Atractor en el espacio

4.4. Análisis de resultados

Con los resultados obtenidos, se pudo corroborar que para pequeñas variaciones en las condiciones iniciales los resultados son completamente distintos.

Fijando los valores de los parámetros a y b, y variando solamente el parámetro c, en principio a mas de una corrida para los mismos parámetros, se obtuvieron iguales resultados, haciendo de este un sistema determinista.

Observamos que para pequeños valores de c, el retrato de fases parte de un punto central y tiende a formar una órbita elíptica a su alrededor pero a mayor valor de c, el comportamiento del atractor se torna caótico, donde parece presentar otro punto atractor que desvía el sistema hacia el eje z.

Por otro lado, se observa que su evolución en el tiempo cuando $c = 1$ tiende a la periodicidad, mientras que para $c > 8$, el ciclo se torna dificil de predecir perdiendo esta propiedad cuasiperiódica.

5. Referencias

[Cue] Jorge Cuesta. «Atractor de Rössler, Análisis y programación en python». En: (). URL: https://docs.google.com/document/d/1O3gIUvjcmocOUlBdJLfgrQwcOtfpTT edit?usp=sharing&ouid=112190004895647494235&rtpof=true&sd=true.

[San] Miguel Ángel Fernández Sanjuán. «Dinámica No Lineal, Teoría del Caos y Sistemas Complejos: una perspectiva histórica». En: (). URL: https://rac.es/ficheros/doc/01213.pdf.

[tea] John Hunter The Matplotlib Development team. *Matplotlib Tutorials*. Matplotlib Development Team. URL: https://matplotlib.org/stable/tutorials/index.html.

[Wika] Wikipedia. *Attractor*. From Wikipedia, the free encyclopedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Attractor.

[Wikb] Wikipedia. *Chaos Theory*. From Wikipedia, the free encyclopedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory.