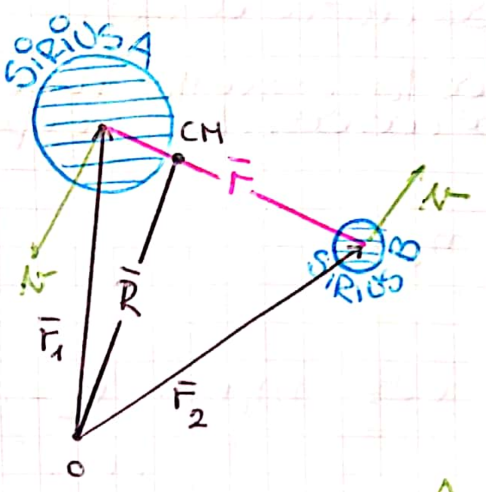
Dominikau Daiana. 2022

Problema de los dos cuerpos. - Sistema Sirius.



Conocida como 'Alfa Canis Maioris', la más brillante del cielo terrestre, es en realidad una estrella binaria formada por

Sirius A: Estrella blanca de
masa = $3,978 \times 10^{30}$ kg
radio = $1,190 \times 10^{6}$ Km

Sirius B: Enana blanca
masa = $2,025 \times 10^{30}$ kg
radio = 5843,9 Km

la distancia que separa estas estrellas es de
$r = 3 \times 10^{9}$ Km

Movimiento del sistema

→ para describir el movimiento, debemos reducir el problema a su equivalente al problema de un cuerpo, ya que son cuerpos regulares, y vamos a trabajar con el centro de masa del sistema como referencia.

→ Se puede modelar el sistema
1. con el movimiento respecto al centro de masa → este
2. con el movimiento del centro de masa

→ En principio tenemos $\boxed{6}$ grados de libertad

$\bar{r}_1 = \langle x_1 ; y_1 ; z_1 \rangle$

$\bar{r}_2 = \langle x_2 ; y_2 ; z_2 \rangle$

1. lo primero que necesito es el vector $\bar{r}$ (separación entre A y B)

$$\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$$

2. Ahora, necesito el vector $\bar{R}$ al centro de masa

$$\bar{R} = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2}{m_1 . m_2} = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2}{M}$$

3. Vamos al lagrangiano

$L = T - U$ ⟶ depende únicamente de $r = |\bar{r}_2 - \bar{r}_1|$

→ $T = 1/2\, m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + 1/2\, m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2)$

$$T = 1/2\, m_1 |\dot{\bar{r}}|_2^2 + 1/2\, m_2 |\dot{\bar{r}}|_2^2 \quad (I)$$

→

Cambio de coordenadas:

(4) $\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$; $\bar{R} = \dfrac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2}{M}$

posición relativa

posición del centro de masa

Para determinar la posición de las estrellas respecto al CM, debo hacer un cambio de coordenadas y expresar r_1 y r_2 en función a este.

$$\bar{R} = \frac{m_1(\bar{r}_2 - \bar{r}) + m_2 \bar{r}_2}{M}$$

$$\bar{R} = \frac{m_1 \bar{r}_2 - m_1 \bar{r} + m_2 \bar{r}_2}{M} = \frac{(m_1 + m_2)\bar{r}_2 - m_1 \bar{r}}{M}$$

$$\bar{R} = \bar{r}_2 - \frac{m_1 \bar{r}}{M} \rightarrow \boxed{\bar{r}_2 = \bar{R} + \frac{m_1 \bar{r}}{M}} \quad (II)$$

y de manera análoga

$$\boxed{\bar{r}_1 = \bar{R} - \frac{m_2 \bar{r}}{M}} \quad (III)$$

(5) Tengo que derivar (II) y (III)

$$\dot{\bar{r}}_2 = \dot{\bar{R}} + \frac{m_1 \dot{\bar{r}}}{M}$$

$$\dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{R}} - \frac{m_2 \dot{\bar{r}}}{M}$$

y reemplazarlo en (I)

$$T = \tfrac{1}{2} m_1 \left(\dot{R} - \frac{m_2 \dot{r}}{M}\right)^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \left(\dot{R} + \frac{m_1 \dot{r}}{M}\right)^2$$

$$T = \tfrac{1}{2} m_1 \left[\dot{R}^2 - 2\dot{R}\frac{m_2 \dot{r}}{M} + \left(\frac{m_2 \dot{r}}{M}\right)^2\right] + \tfrac{1}{2} m_2 \left[\dot{R}^2 + 2\dot{R}\frac{m_1 \dot{r}}{M} + \left(\frac{m_1 \dot{r}}{M}\right)^2\right]$$

$$T = \underbrace{\tfrac{1}{2} m_1 \dot{R}^2} - \cancel{\frac{2 m_1 m_2}{2} \frac{\dot{r}\dot{R}}{M}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2 \dot{r}}{M}\right)^2} + \underbrace{\tfrac{1}{2} m_2 \dot{R}^2} + \cancel{\frac{2 m_1 m_2}{2} \frac{\dot{r}\dot{R}}{M}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1 \dot{r}}{M}\right)^2}$$

$$T = \underbrace{\tfrac{1}{2} M \dot{R}^2} + \underbrace{\tfrac{1}{2} \mu \dot{r}^2}$$

→ respecto al centro de masa

→ respecto al origen.

(6) volviendo al lagrangiano

$$L = \tfrac{1}{2} M \dot{R}^2 + \tfrac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - U(r)$$

→ Todavía no la definimos, pero sabemos que es función de $\bar{r}$

← Por la anterior ecuación podemos determinar que $\dot{R}$ es una coordenada cíclica, el lagrangiano no contiene a R, por lo tanto el centro de masa está fijo o se mueve con una V constante.

Podemos describir entonces nuestro sistema binario en coordenadas polares. Sabiendo que el momento angular será constante

7

$$\bar{P} = M\dot{\bar{R}} = cte \qquad \bar{R} = \bar{R}_0 + \frac{\bar{P}}{M}t$$

$$\bar{R} = \bar{R}_0 + \bar{V}t$$

↳ Velocidad del centro de masa

Pero como vamos a analizar el sistema del centro de masas

$$\bar{P} = 0, \ \bar{R} = 0$$

Por lo tanto el movimiento de las estrellas entorno al CM

$$\boxed{L = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 - U(r)}$$

→ Vamos a trabajar el sistema en polares:

$$T = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}_x^2 + \dot{r}_y^2)$$

$$\dot{r}_x = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta$$

$$\dot{r}_y = \dot{r}\operatorname{sen}\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\dot{r}_x^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta - \cancel{2r\dot{r}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta} + r^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\dot{r}_y^2 = \dot{r}^2\operatorname{sen}^2\theta + \cancel{2r\dot{r}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta} + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta$$

$$(\dot{r}_x^2 + \dot{r}_y^2) = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

8

$$T = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Nuevamente encontramos una coordenada cíclica θ, entonces su momento se conserva

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \underbrace{\mu r^2\dot{\theta} = l}_{} \qquad \text{(III)}$$

El momento P_θ es una primera integral de movimiento y es igual a la magnitud del momento angular.

CONSTANTE

La masa reducida se mueve un dθ en el tiempo dt, el área dA recorrida por el radiovector r está dada por ←

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu} = cte \longrightarrow \text{2da ley de Kepler.}$$

Escaneado con CamScanner

← Volviendo al lagrangiano

9

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\mu(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) - U(r)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \mu r\dot\theta - \frac{\partial U}{\partial r} \quad (I)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r} = \mu \dot r \quad (II) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot r} = \frac{\partial}{\partial t}\mu\dot r = \mu\ddot r \quad (III)$$

(I) = (III) por $\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot r}$

$$\mu\ddot r = \mu r\dot\theta - \frac{\partial U}{\partial r} \quad (V)$$

reemplazo (IV) en (V)

$$\mu\ddot r = \mu r\left(\frac{l}{\mu r^2}\right)^2 - \frac{\partial U}{\partial r}$$

llegamos a un grado de libertad!

$$\mu\ddot r = \underbrace{\frac{l^2}{\mu r^3}}_{\text{Fuerza centrífuga}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial r}U(r)}_{\text{Fuerza real}}$$

Fuerza real

↳ $$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{|r|^2}\check r}$$

Fuerza centrífuga

Para obtener la energía potencial efectiva del sistema.

$$U_{ef} = U(r) + U_c = U(r) + \int -F_c\,dr = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

positivo

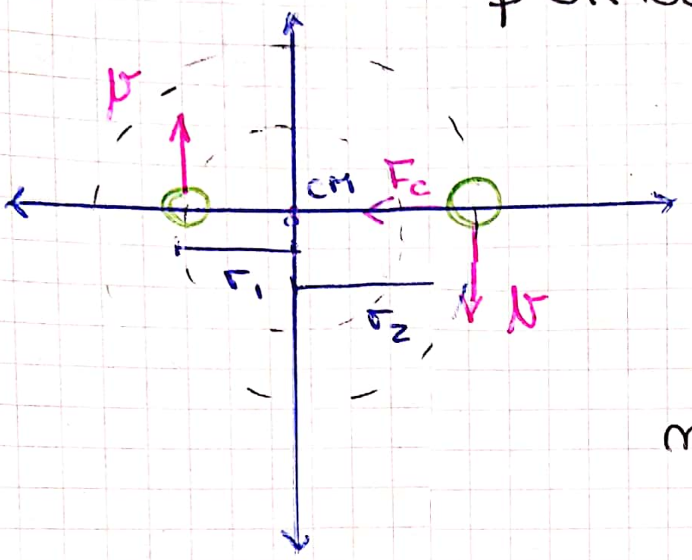
el potencial gravitatorio es negativo

$$U(r) = U_g = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec r|}$$

b)

→ para la simulación necesito el momento inicial de uno de los cuerpos, ya que por conservación del momento

$$p_{\text{Sirios A}} = -p_{\text{Sirios B}}.$$



$$F_c = m_1 \bar{a}_\alpha$$

$$|\bar{a}| = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

$$m_1 \cdot \bar{a}_\alpha = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

$$\bar{a}_x = \frac{G m_2}{r^2}$$

$$\frac{v^2}{r_1} = \frac{G m_2}{r^2} \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{G m_2 r_1}{r^2}}$$

donde $r_1 = \frac{-m_2 \bar{r}}{M}$

$$v_1 = \sqrt{\frac{G m_2}{r^2} \cdot \frac{-m_2 r}{M}} = \boxed{-\sqrt{\frac{G m_2^2}{r \cdot M}}}$$