Primer Parcial

Práctica 1: Repaso álgebra lineal

1. $v^t u u^t v = (u^t v)^2$
2. Si $x^t x = 0 \Rightarrow x = 0$
3. $AB \neq BA$
4. $C(A+B) = CA + CB$
5. Regla general multiplicación AB:
   $\begin{pmatrix} a_1^t \\ a_2^t \\ a_3^t \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} a_1^t B \\ a_2^t B \\ a_3^t B \end{pmatrix}$
   $A \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ab_1 & Ab_2 & Ab_3 \end{pmatrix}$
6. $(AB)_{ij} = fila_i(A) * col_j(B)$
7. $Ae_i = col_i(A)$
8. $e_i^t A = fila_i(A)$
9. $e_i^t A e_i = a_{ii}$
10. Producto de matrices triangulares (sup o inf) es triangular (sup o inf)
11. $dim(Im(A)) = rango(A)$ (cantidad de columnas linealmente independientes)
12. Teorema de la dimensión: $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, $dim(Nu(A)) + dim(Im(A)) = n$
13. Matriz estrictamente diagonal dominante: $|a_{ii}| > \sum_{j=i} |a_{ij}|$
    - A es estrictamente diagonal dominante cuando lo es por **filas** ó por **columnas**
    - **Por filas**: para cada fila, el módulo del elemento de la diagonal es estrictamente mayor a la norma de los elementos de la fila.
    - **Por columnas**: análogo para columnas.
14. Matriz inversa
    - A inversible es equivalente a:
      - $rango(A) = n$ (todas sus columnas son li)
      - $det(A) \neq 0$
      - $Nu(A) = \{0\}$
      - $Ax = b$ tiene única solución
      - $A^t A$ es inversible
    - $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
    - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
    - $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
    - $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$, $k \in \mathbb{R}$
    - Sea A matriz triangular, es inversible si los elementos de la diagonal son distintos de cero.
    - La inversa de una matriz triangular superior es triangular superior, y viceversa
    - Si A es estrictamente diagonal dominante entonces es **inversible**
    - **NO VALE** que $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
15. Matriz traspuesta
    - **SI VALE** que $(A+B)^t = A^t + B^t$
    - $(AB)^t = B^t A^t$
16. Traza
    - $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

- $tr(AB) = tr(BA)$
- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$

17. Determinante
    - $det(AB) = det(A) * det(B)$
    - $det(I) = 1$
    - $det(A) = det(A^t)$
    - $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1} \iff A$ es inversible
    - $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \iff A$ es triangular
    - Si $A \in \mathbb{R}^{nxn} \Rightarrow det(kA) = k^n det(A)$ – Chequear qué pasa si A no es cuadrada.
    - $A \in \mathbb{R}^{2x2} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Práctica 2: Eliminación Gaussiana, Factorización LU y Normas

1. $\kappa_2(A) = ||A||_2||A^{-1}||_2$
2. Normas vectoriales
   - **Cauchy** $|z^t x|^2 \leq ||z||_2^2||x||_2^2$
   - **Desigualdad triangular** $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$
   - $||u + v||_2^2 = ||u||_2^2 + ||v||_2^2 + 2u^t v$
   - $||x||_p = \sqrt{|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots |x_n|^p}$
   - $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
   - $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
   - $||x||_\infty = \max_{i=1\ldots n} x_i$
   - $||x||_2^2 = x^t x$
   - $||x||_\infty \leq ||x||_1$
   - $||x||_1 \leq n||x||_\infty$
   - $||x||_\infty \leq ||x||_2$
3. Normas Matriciales
   - $||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (máxima suma de cada columna)
   - $||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (máxima suma de cada fila)
   - $||A||_2 = \max_{||x||_2=1} ||Ax||_2$
   - $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{\|c_1(A)\|_2^2 + \ldots + \|c_n(A)\|_2^2}$ donde c_i es la columna i de A
   - $||A||_F = ||A^t||_F$ (ya que la $||.||_F$ es la raíz de la suma de todos sus elementos al cuadrado)
   - $||I|| = 1$
   - $||Ax|| \leq ||A|| * ||x||$
   - $||AB|| \leq ||A|| * ||B|| \iff$ A,B son matrices cuadradas
   - $||A||_M \leq ||A||_2 \leq n||A||_M$
4. Factorización LU
   - L (”Lower”) es triangular inferior **con unos en la diagonal**. Debajo de la diagonal tiene los multiplicadores usados para la triangulación en la eliminación gaussiana.
   - U (”Upper”) es triangular superior, y es el resultado de la triangulación de A en la eliminación gaussiana.
   - A estrictamente diagonal dominante $\Rightarrow$ tiene factorización LU
   - Submatrices de A inversibles $\Rightarrow$ tiene factorización LU
   - A inversible **no necesariamente** tiene factorización LU
   - Si A inversible y tiene LU $\Rightarrow$ la LU es única
   - $M_k M_{k-1} \ldots M_1 A = U$
   - $M_1 = I - r_1 e_1^t$, donde $r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \end{pmatrix}$ y $m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$

Práctica 3: SDP y factorización de Cholesky

1. Matriz simétrica: $A = A^t$
2. Matriz antisimétrica: $A^t = -A$
3. $A + A^t$ es una matriz simétrica
4. $A - A^t$ es una matriz antisimétrica
5. Toda matriz puede escribirse como la suma entre una matriz simétrica y una antisimétrica
6. Definida positiva $\iff x^t Ax > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n x \neq 0$
7. Si A es simétrica definida positiva $\Rightarrow A^t = A$ y A^t es definida positiva
8. Si A no es inversible, AA^t es simétrica semi-definida positiva, es decir que $x^t AA^t x \geq 0 \forall x$
9. Si A es SDP entonces:
   - A inversible
   - $a_{ii} > 0$
   - Toda submatriz de A es sdp y por lo tanto inversible
   - A tiene factorización LU (por prop anterior)
   - La submatriz 2 a n (despues del primer paso de triangulación de la eliminación gaussiana) es SDP
10. $A \ sdp \iff B^t AB \ sdp$ con B inversible
11. Si tiene fact LU y es simétrica, si es toda positiva $\Rightarrow$ tiene factorización de Cholesky
12. Si A es *sdp*, el elemento de módulo máximo de A está en la diagonal.
13. Si A es $sdp \Rightarrow |x^t Ay| \leq \sqrt{x^t Ax}\sqrt{y^t Ay}$
14. Si A es $sdp \Rightarrow |a_{ij}|^2 \leq a_{ii}a_{jj}$
15. Factorización de Cholesky
    - A tiene factorización de Cholesky $\iff$ A es *sdp*
    - $A = LU = LDL^t = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^t = \hat{L}\hat{L}^t$ donde $D = L^{-1}U^t$ y $\hat{l}_{ii} = l_{ii}\sqrt{d_{ii}} = \sqrt{u_{ii}}$
    - D es diagonal, con elementos estrictamente positivos
    - $\hat{L}$ **no necesariamente** tiene "unos" en la diagonal, pero $l_{ii} > 0$

Práctica 4: Matrices ortogonales y factorización QR

1. $u \perp v \iff u^t v = 0$
2. $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ ortogonal $\iff QQ^t = Q^t Q = I \wedge Q^t = Q^{-1}$
3. $||Q||_2 = 1$
4. $\kappa_2(Q) = 1$
5. $||Qx||_2 = ||x||_2$
6. Producto de matrices ortogonales es ortogonal
7. Sus columnas (filas) son ortogonales entre sí y tienen norma 2 igual a 1, entonces forman un conjunto ortonormal
8. $det(Q) = 1$ ó -1
9. $Ax = b \Rightarrow Rx = Q^t b$, Q ortogonal y R triangular superior
10. Si Q es ortogonal y triangular, entonces Q es diagonal y además $col_i(Q) = \pm e_i$
11. Si A es inversible, entonces tiene una única factorización QR posible, donde R triangular superior con $r_{ii} > 0$

12. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} ||x||_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

13. Matrices de rotación (Givens)

    - W $= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
    - Rotación hacia el eje x:
      W $= \begin{bmatrix} \frac{x_1}{||x||_2} & \frac{x_2}{||x||_2} \\ -\frac{x_2}{||x||_2} & \frac{x_1}{||x||_2} \end{bmatrix}$

14. Matrices de reflexión (Householder)

    - $v = x + y$
    - $u = \frac{x-y}{||x-y||_2}$
    - $H = I - 2uu^t$
    - H es simétrica y ortogonal

Segundo Parcial

Propiedades generales

- $||Ax||_2^2 = (Ax)^t Ax$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- $||QA|| = ||A||$ para cualquier Q matriz ortogonal
- $||(v,w)|| = ||v||_2^2 + ||w||_2^2$ concatenación de vectores
- **Pitágoras:**$||u+v||_2^2 = ||u||_2^2 + ||v||_2^2 + 2u^t v$. Si $u \perp v \Rightarrow ||u+v||_2^2 = ||u||_2^2 + ||v||_2^2$
- $A^t A$ es simétrica semidefinida positiva, tiene base ortonormal de autovectores reales y autovalores no negativos.
- Sea $\{x_1, x_2 \dots x_n\}$ base, puedo escribir a cualquier vector como $v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ donde $\alpha_i = x_i^t v$

Práctica 5: Autovalores y Autovectores

1. $x \neq 0$ autovector con autovalor λ de $A \iff Ax = \lambda x$
2. **Radio espectral:** $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } A\}$
3. $det(A - \lambda I) = 0$ por lo tanto no es inversible
4. **Polinomio característico:** $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$, λ autovalor de A $\iff$ λ es raíz de $P(\lambda)$
5. Si v es autovector de A, αv también lo es.
6. Si λ es autovalor de $A \Rightarrow \lambda - \alpha$ es autovalor de $A - \alpha I$
7. Si λ es autovalor de A, entonces los autovalores de $\alpha\mathbb{I} - \beta A$ son $\alpha + \beta\lambda$
8. Si $Av = \lambda v \Rightarrow A^k v = \lambda^k v$
9. Un λ puede estar asociado a lo sumo a m autovectores l.i., donde m es la multiplicidad en el polinomio característico
10. Si A es *ortogonal* $\implies$ todos sus autovalores son 1 o -1
11. Si A es *definida positiva* o *semi definida positiva*, todos sus autovalores $\lambda > 0$
12. Si A no es *inversible* $\Rightarrow \lambda = 0$ es autovalor de A
13. Si $\lambda = 0$ no es autovalor de $A \Rightarrow$ A es inversible
14. Si A es *inversible*, si $\lambda \neq 0$ es autovalor $\Rightarrow \lambda^{-1}$ es autovalor de A^{-1}
15. Si $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ son autovalores distintos, con autovectores asociados $v^1, v^2, \dots, v^n$ entonces A tiene n autovalores distintos, entonces tiene base de autovectores son todos l.i. Si A es simétrica también son ortonormales
16. Si A es *triangular* $\implies$ sus autovalores son los elementos de su diagonal
17. Si v es un autovector asociado a λ entonces αv también es un autovector asociado a α
18. A y A^t tienen los mismos autovalores, por lo tanto si λ es autovalor de AA^t lo es de $A^t A$
19. Si A es simétrica, todos sus autovalores son reales y existen sus autovectores con coeficientes reales, además tiene base ortonormal de autovectores.
20. **Matrices semejantes:** A y B son *semejantes* si existe una matriz P inversible tal que: $A = P^{-1}BP$. blueSi son semejantes, comparten autovalores.
21. Sea Q matriz ortogonal, λ es autovalor de $A \iff \lambda$ es autovalor de $Q^t AQ$

22. Si A tiene todos sus autovalores reales, existe Q ortogonal tal que $Q^tAQ = T$ con T triangular superior. Si A es simétrica, $T = D$ diagonal conteniendo sus autovalores.

23. Si A tiene base de autovectores es **diagonalizable**: $\exists S$ inversible con sus autovectores como columnas y D con sus autovalores en la diagonal, se escribe como $A = SDS^{-1}$

24. Si A es diagonalizable, $tr(A) = \sum_i \lambda_i$ y $det(A) = \prod_i \lambda_i$

25. **Método de potencia** A con base de autovectores y $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$, el autovalor principal se obtendrá a partir de un $x^{(0)}$ cualquiera iterando $x_{k+1} = \frac{Ax_k}{||Ax_k||}$

26. **Método de deflación** $A' = A - \lambda_1 v_1 v_1^t$ donde v_1 es el autovector asociado al máximo autovalor λ_1. A esta matriz se le vuelve a aplicar el método de la potencia para conseguir el segundo mayor autovalor.

Práctica 6: Descomposición en Valores Singulares

Idea. $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, $r = rg(A)$, existe descomposición $A = U\Sigma V^t$ con $U \in \mathbb{R}^{mxm}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{mxn}$, $V \in \mathbb{R}^{nxn}$

1. **Valores singulares:** $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0 \in \Sigma$
2. $\frac{Av_i}{\sigma_i} = u_i$, si $i = 1, \ldots, r$
3. $Av_i = 0$,si $i = r+1, \ldots, n$
4. $A^t u_i = \sigma_i v_i$ si $i = 1, \ldots, r$
5. $A^t u_i = 0$,si $i = r+1, \ldots, n$
6. $A^tAv_i = \sigma_i^2 u_i$, si $i = 1, \ldots, r$
7. $A^tAv_i = \lambda_i v_i$ ya que $\sigma_i^2 = \lambda_i$
8. $A^tAv_i = 0$,si $i = r+1, \ldots, n$
9. Obtener descomposición en valores singulares:
   - $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ con λ_i autovector de A^tA
   - Las columnas $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son base ortonormal de autovectores de A^tA, V ortogonal
   - Calcular U según 3 y completar el resto de las columnas con base ortonormal del $Nu(A^t)$, o usar que las columnas $u_1, u_2, \ldots, u_n$ son base ortonormal de autovectores de AA^t, con U ortogonal
10. $AA^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$
11. $A^tA = V\Sigma\Sigma^t V^t$
12. $||A||_2 = \sigma_1$ valor singular mas grande
13. Si A inversible, el número de condición basado en la norma 2: $\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$
14. Si A inversible, los valores singulares de A^{-1} son $\frac{1}{\sigma_n} \geq \cdots \geq \frac{1}{\sigma_1}$
15. $||A||_F = \sqrt{(\sigma_1)^2 + \cdots + (\sigma_r)^2}$
16. Si $\Sigma \in \mathbb{R}^{nxn} \Rightarrow \Sigma^t\Sigma = \Sigma\Sigma^t = \Sigma^2$
17. $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ simétrica definida positiva $\Rightarrow$ los autovalores de A coinciden con sus valores singulares.

Práctica 7: Métodos iterativos

Idea. Aproximar $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{nxn}, b \in \mathbb{R}^n$ reescribimos $A = D - L - U$

1. Esquema de iteración: $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$ donde $T \in \mathbb{R}^{nxn}, c \in \mathbb{R}^n$
2. **Jacobi:**
   - Solo puede ser aplicado a una matriz A tal que $a_{ii} \neq 0$
   - Si A es estrictamente diagonal dominante $\Rightarrow$ el método converge
   - $T = D^{-1}(L + U)$, $c = D^{-1}b$

3. **Gauss Seidel:**
    - Si A es estrictamente diagonal dominante $\Rightarrow$ el método converge
    - $T = (D-L)^{-1}U$, $c = (D-L)^{-1}b$
4. A es convergente si $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$
5. Si $||T|| < 1$ o $\rho(T) < 1$ el sistema converge
6. Si $\rho(A) < 1 \iff \lim_{k\to\infty} ||A^k|| = 0 \iff \lim_{k\to\infty} A^k x = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$
7. Si $\rho(A) < 1$ entonces $I - A$ es inversible
8. Si A es simétrica definida positiva, GS converge
9. Si $L \in \mathbb{R}^{mxn}$ es estrictamente triangular superior (ceros en la diagonal) entonces $L^n = \emptyset$ ya que al multiplicarla por si misma se anulan sus supradiagonales

Práctica 8: Cuadrados mínimos lineales

Idea. *Dado un conjunto de pares ordenados* (x_i, y_i) *para* $i = 1, \ldots, m$ *buscamos una función* $f(x)$ *perteneciente a una familia* $\mathcal{F}$ *que "mejor aproxime" a los datos.*

1. $Im(A) \bigoplus Nu(A^t) = \mathbb{R}^n$
2. $Im(A)^{\perp} = Nu(A^t)$
3. $Nu(A)^{\perp} = \{y \in \mathbb{R}^n | y \perp x, \forall x \in Nu(A)\}$
4. Si $b \in \mathbb{R}^n \Rightarrow b = b^1 + b^2$ donde $b^1 \in Im(A)$ y $b^2 \in Nu(A^t)$
5. Todo $y \in Im(A)$ puede escribirse como combinación lineal de las columnas de A
6. CML : $\min_{x\in\mathbb{R}^n} ||Ax - b||_2^2$
7. **Ecuaciones normales:** $A^tAx = A^tb$ cualquier solucion de ecuaciones normales es solución de cuadrados mínimos para $Ax = b$
8. $||u + v||_2^2 = ||u||_2^2 + ||v||_2^2 + 2u^tv$
9. Si $u \perp v \Rightarrow ||u + v||_2^2 = ||u||_2^2 + ||v||_2^2$
10. $Ax^* = b \iff x - x^* \in Nu(A)$
11. *Cuadrados mínimos siempre tiene solución.* La solución es **única** $\iff Nu(A) = Nu(A^tA) = \{0\}$ o sea si las columnas de A son linealmente independientes.
12. Si $Nu(A^tA) = \{0\}$ entonces A^tA es inversible, por lo tanto $x^* = (A^tA)^{-1}A^tb$
13. $||Ax||_2^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0$
14. $A \in \mathbb{R}^{mxn}$:
    - A^tA semidefinida positiva
    - Si $m < n$ A^tA no es definida positiva
    - Si $m \geq n$ A^tA definida positiva si y solo si A tiene rango máximo
15. Si $s \in S$ y $t \in S^{\perp}$, entonces existe una única forma de escribir $w = s + t$ para todo $w \in \mathbb{R}^n$
16. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^m$ subespacio, sea $s \in S$ la proyección ortogonal P de x sobre el subespacio $S \Rightarrow Px = s$
17. Caso cuadrados mínimos Ax es la proyección ortogonal de b sobre la imagen de A
18. $Ax \in Im(A) \wedge (b - Ax^*) \in Im(A)^{\perp}$ donde x^* solución de cuadrados minimos

Práctica 9: Interpolación. Integración numérica

Interpolación

Idea. *Dado un conjunto de pares ordenados de valores* (x_i, y_i) *para* $i = 0, \ldots, n$ *buscamos un polinomio* $P(x)$ *de grado a lo sumo* n *tal que interpole los datos:*

$$P(x_i) = y_i \qquad \forall i = 0, \ldots, n$$

.

1. Dados (x_i, y_i) para $i = 0, \ldots, n$, el **polinomio interpolante** de grado menor o igual a n *existe* y es *único.*

2. **Polinomio de Lagrange:**

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{nk}(x_i) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

3. **Fórmula del error:** Si $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ y $\xi_x \in [a, b]$

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

4. **Diferencias divididas:**

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})$$

- **Orden 0:** $f[x_i] = f(x_i)$
- **Orden 1:** $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$
- **Orden** k**:** $f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$

Integración

Idea. *Aproximar la integral* $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$

1. **Regla del trapecio:** Usando polinomio interpolador de grado 1 sobre a, b

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_1) - f(x_0)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi) \qquad h = x_1 - x_0$$

2. **Regla de Simpson:** Usando polinomio interpolador de grado 2 sobre $a, \frac{a+b}{2}, b$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(x_2 - x_0)}{6}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu) \qquad h = x_1 - x_0 \text{ y } \mu \in (a, b)$$

3. **Regla compuesta:** *Sumar las distintas aproximaciones de las integrales en los distintos intervalos, aprovechando el hecho que* $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} (\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx)$

   (a) **Regla compuesta de trapecios:** *Dividir* $[a, b]$ *en* n *intervalos de longitud* $h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right)$$

$$Error = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\mu) \qquad \mu \in (a, b)$$

   (b) **Regla compuesta de Simpson:**