컴파일러: 3장

국민대학교 소프트웨어학부
강 승 식

제3장 정규표현식과 유한자동

- 정규 문법
  - 우선형 문법: $A \rightarrow aA \mid b$
  - 좌선형 문법: $A \rightarrow Aa \mid b$

- 시작기호 $S \rightarrow \varepsilon$ 이면, S가 타 생성규칙의 RHS에 나타나지 않아야 함

- 아래 문법은 정규 문법이 아님

$$A \rightarrow aA \mid Bb \mid c$$

Regular Expression

- L_{mn}은 정규 언어, L_{nn}는 정규 언어 아님
  - $L_{mn} = \{a^m b^n \mid m,n \geq 1\}$
  - $L_{nn} = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

- 정규표현식(Regular Expression)
  - 특정 스트링 유형(string pattern)을 기술하는 표현 방식
  - $(0+1)^*$ -- 0 또는 1로 이루어진 스트링 유형
  - $(ba)^*a$ -- ba가 0번 이상 반복된 후에 a로 끝나는 스트링 유형

- 정규표현식에 사용되는 메타 문자

+ : 또는
· : 스트링 결합(string concatenation)
( ) : 괄호 연산자
* : 윗첨자 Kleene closure, 0번 이상 반복
$^+$: 윗첨자 dagger, 1번 이상 반복

정규표현식 예제

- 식별자(identifier)에 대한 정규표현식
  <letter>(<letter>+<digit>)*

- 식별자에 대한 BNF
  <id> ::= <letter> | <id><ld>
  <ld> ::= <letter> | <digit>
  <letter> ::= a | b | … | z
  <digit> ::= 0 | 1 | … | 9

- Nonterminal 기호 대문자 1개 → 최대 26개 제약
  - BNF의 nonterminal 기호: <> 안에 의미있는 이름을 부여

- 정수, 실수, 주석(comment)에 대한 정규표현식은?

정규표현식의 등가성(equality)

- 정규표현식 형태가 다르더라도 이것으로 표현되는 스트링 집합이 동일하면 동일한 언어에 대한 정규표현식이다.

$$aa^* \equiv a^*a$$

$$(ab)^*a \equiv a(ba)^*$$

- $(ab)^*a$ 과 $a(ba)^*$ 에 대한 정규 문법은?

정규표현식 계산 방법

- 정규 문법으로 기술되는 정규 언어는 정규표현식을 계산할 수 있음
  - CFG 등 정규 언어가 아닌 언어는 정규표현식으로 기술할 수 없음
- 유한 언어의 정규표현식은 모든 스트링 나열

  S → a | b | aX | bX
  X → a | b

  X = a + b 을 S에 대입
  S = a + b + aX + bX
  = a + b + a(a+b) + b(a+b)
  = a + b + aa +ab + ba + bb

- 무한 언어의 정규표현식은 반복되는 부분을 *(0번 이상 반복) 또는 $^+$(1번 이상 반복) 형태로 구해야 함

우순환 규칙의 정규표현식

- 우순환 규칙(right recursive rule)의 정규표현식

$$X \rightarrow \alpha X \mid \beta$$
$$X = \alpha^{*}\beta$$

- 무한 언어에 대한 정규표현식 구하기 예제

$$S \rightarrow 0S \mid 1S \mid 0 \mid 1$$

$$\begin{aligned} S &= 0S + 1S + 0 + 1 \\ &= (0+1)S + (0+1) \\ &= (0+1)^{*}(0+1) = (0+1)^{+} \end{aligned}$$

- 아래 정규 문법 G_1에 대한 정규표현식은?

$$G_1 = (\{O, E\}, \{a,b\}, P, O)$$

$$P: \quad O \rightarrow a \mid bE$$

$$E \rightarrow aO$$

$O = a + bE = a + baO = baO + a$ 이므로

$O = (ba)^* a$

- 아래 정규 문법 G_2에 대한 정규표현식은?

  $G_2 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$

  P: $S \rightarrow aA$

  $A \rightarrow aA \mid bB$

  $B \rightarrow bB \mid cC$

  $C \rightarrow cC \mid d$

  $C = cC + d$ 로부터 $C = c^*d$

  $B = bB + cC$

  $= bB + cc^*d$

  $= bB + c^+d$

  $B = b^*c^+d$

  $A = aA + bB$

  $= aA + bb^*c^+d$

  $= aA + b^+c^+d$

  $A = a^*b^+c^+d$

  $S = aA = aa^*b^+c^+d = a^+b^+c^+d$

정규표현식 구하는 연습

- 정규문법-1

  X → aX | bY | a
  Y → bX | aY | b

- 정규문법-2

  X → aX | bY | cZ | a
  Y → bX | cY | aZ | b
  Z → cX | aY | bZ | c

- 좌선형 문법에 대한 정규표현식을 구하는 방법은?

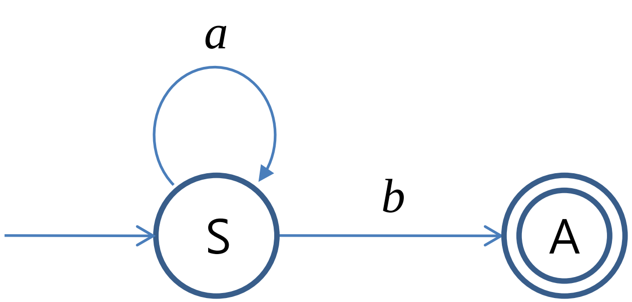
  S → Sb | Aa | c
  A → Aa | b

  X → Xa | Yb | a
  Y → Xb | Ya | b

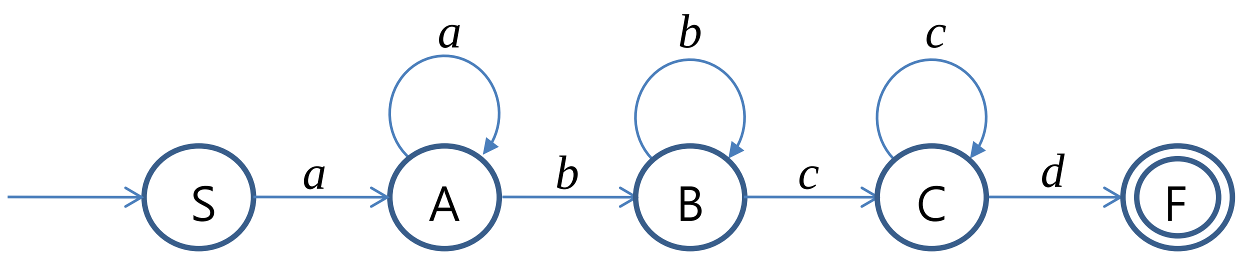
유한 오토마타(Finite Automata)

- 유한 오토마타의 기술 방법
  - 상태(state 또는 node)와 레이블 있는 지시선(labelled arc)으로 구성
  - 시작 상태(start state)는 시작 지시선으로 표시
  - 끝 상태(final state)는 이중 원으로 표시

- a^*b 에 대한 유한 오토마타

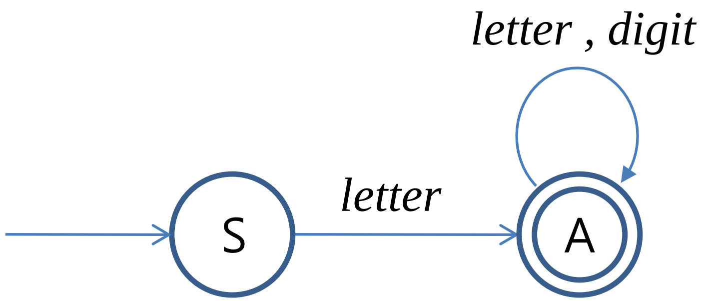


- $a^+b^+c^+d$ 에 대한 유한 오토마타



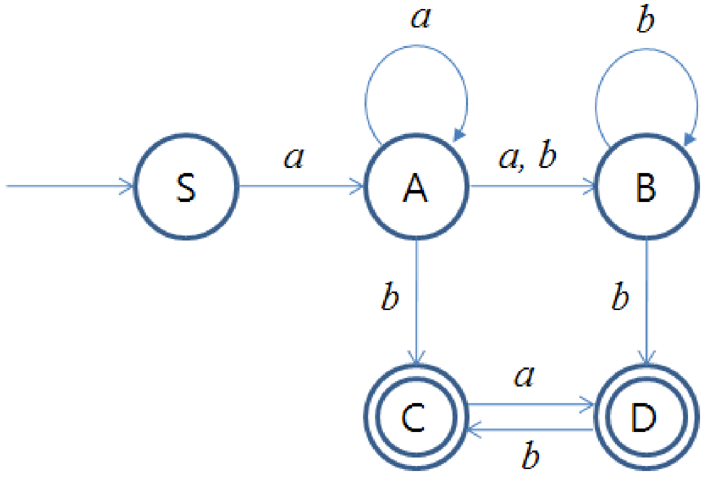
	a	b	c	d
S	A			
A	A	B		
B		B	C	
C			C	F
F				

- 식별자에 대한 유한 오토마타



- 아래 상태전이도(state transition diagram)로 기술된 유한 오토마타는?

	a	b
S	$\{A\}$	
A	$\{A,B\}$	$\{B,C\}$
B		$\{B,D\}$
C	$\{D\}$	
D		$\{C\}$



δ

- 유한 오토마타의 구성 요소
  - state 집합: {S, A, B, C, D}
  - 입력 심볼 집합: {a, b}
  - <u>전이 함수(mapping function)</u>
  - start state: S
  - final state 집합: {C, D}

DFA와 NFA

- 결정적 유한 오토마타(DFA)
  - 각 state에서 입력 심볼에 대해 next state가 항상 1개로 결정

$$A \rightarrow aA \mid bB$$

- 비결정적 유한 오토마타(NFA)
  - 입력 심볼에 대해 next state가 1개로 결정되지 않는 것이 있는 경우

$$A \rightarrow aA \mid aB$$

DFA와 NFA의 차이점

- DFA는 next state가 항상 유일하게 결정됨
  - 백트래킹(back tracking) 없이 O(n) 시간에 해당 언어를 인식하는 프로그램 구현 가능
- NFA는 next state가 유일하게 결정되지 않는 경우가 발생
  - 언어 인식 프로그램 구현이 어려움

δ

NFA를 DFA로 변환

- 변환 방법
  - next state가 2개 이상인 state 집합을 새로운 1개의 state로 다시 정의
- 변환 예
  - NFA:

	a	b
S	$\{A\}$	
A	$\{A,B\}$	$\{B,C\}$
B		$\{B,D\}$
C	$\{D\}$	
D		$\{C\}$

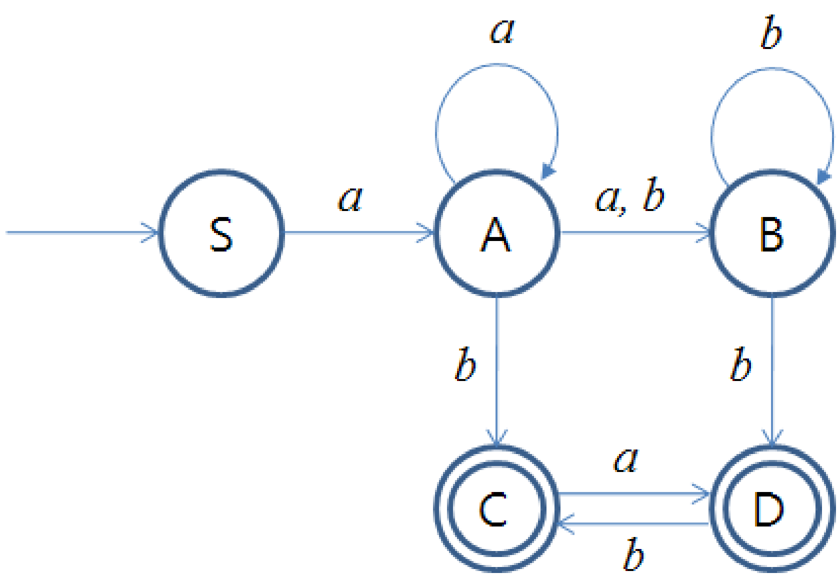
NFA를 DFA로 변환 예제

	a	b
S	$\{A\}$	
A	$\{A,B\}$	$\{B,C\}$
B		$\{B,D\}$
C	$\{D\}$	
D		$\{C\}$

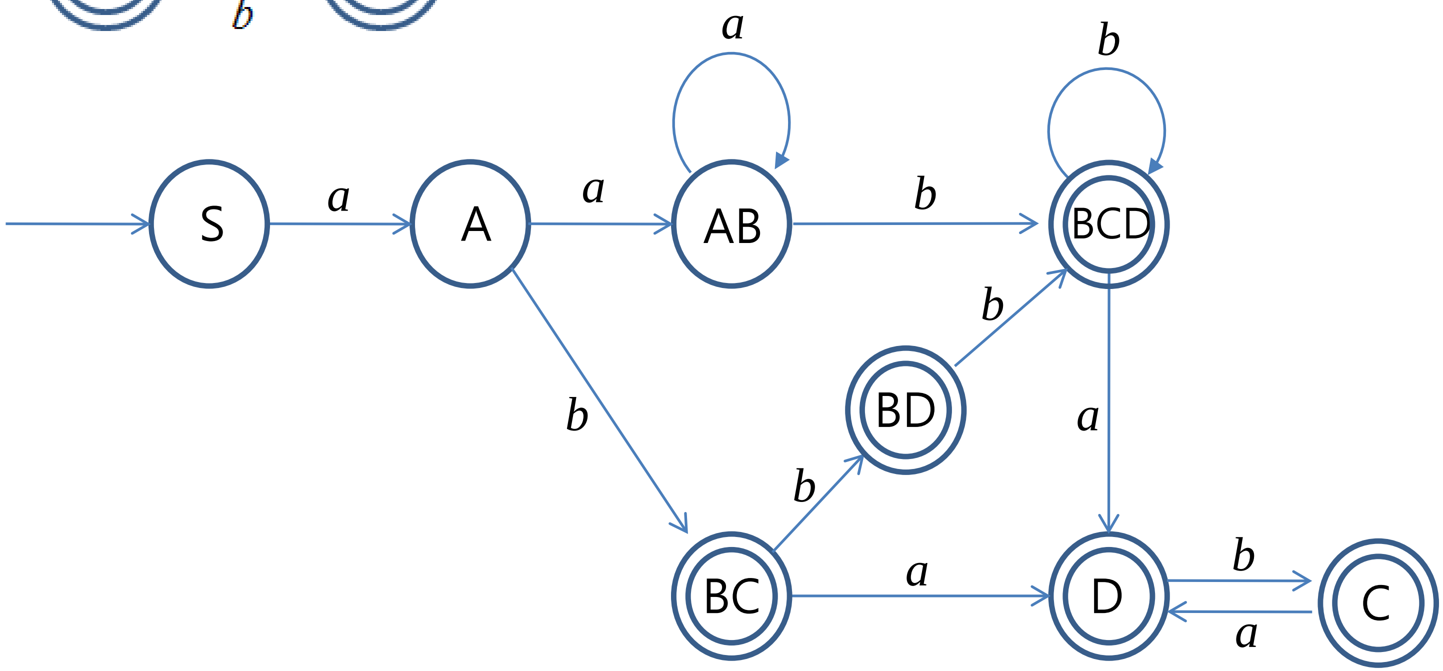
Final states ={ C, D }

	a	b
$[S]$	$[A]$	
$[A]$	$[A,B]$	$[B,C]$
$[A,B]$	$[A,B]$	$[B,C,D]$
$[B,C]$	$[D]$	$[B,D]$
$[B,C,D]$	$[D]$	$[B,C,D]$
$[D]$		$[C]$
$[B,D]$		$[B,C,D]$
$[C]$	$[D]$	

Final states = { [B,C], [B,C,D], [D], [B,D], [C] }



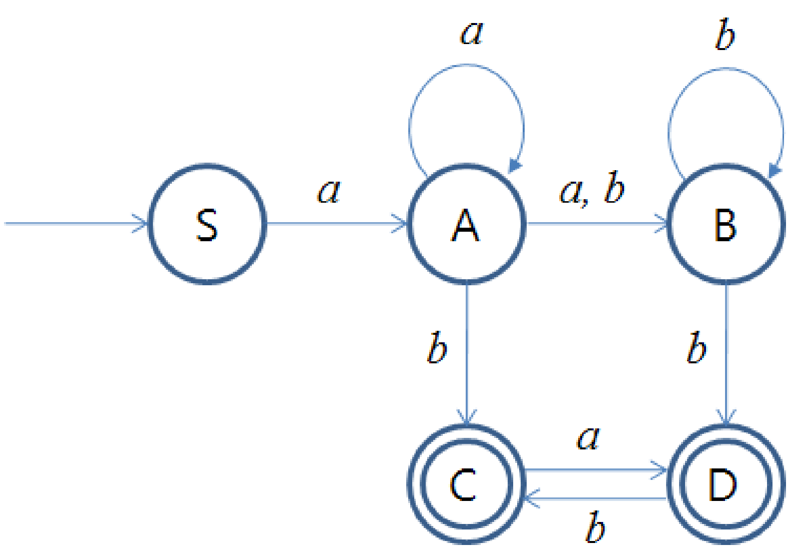
a
b
S
a
A
a, b
B
b
b
C
a
D
b



a
b
S
a
A
a
AB
b
BCD
b
BD
b
a
b
b
BC
a
D
b
C
a

유한 오토마타 → 정규문법 변환

- NFA(DFA 변환 예제)



$S \rightarrow aA$

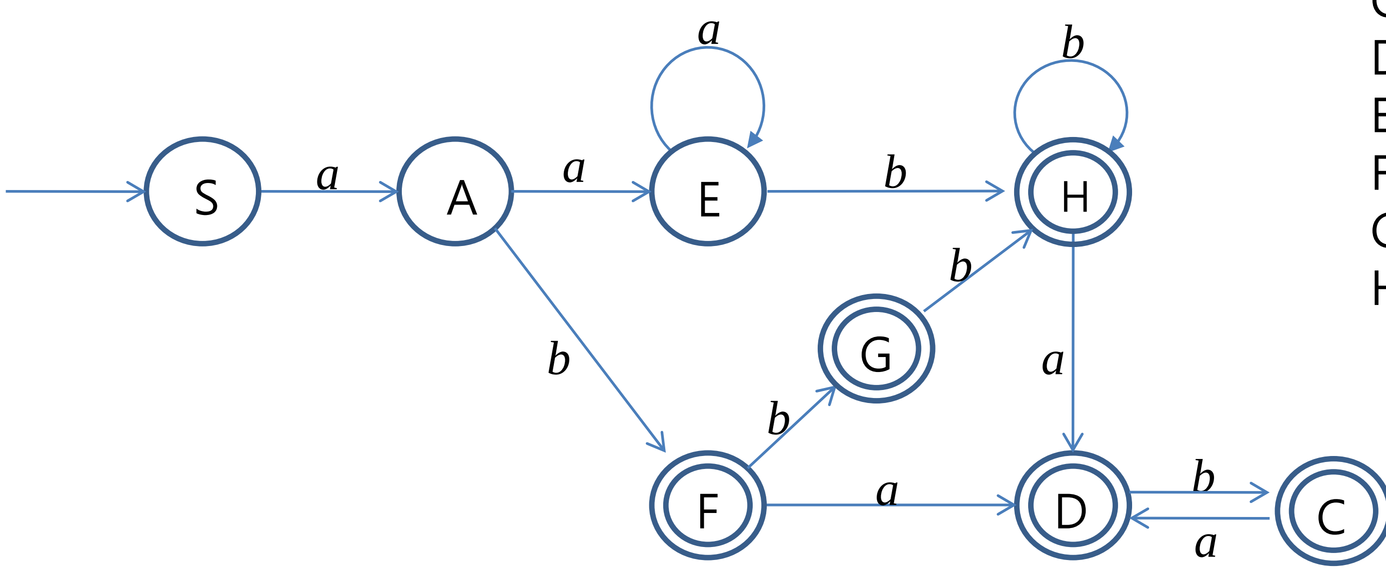
$A \rightarrow aA \mid aB \mid bB \mid bC$

$B \rightarrow bB \mid bD$

$C \rightarrow aD \mid \varepsilon$

$D \rightarrow bC \mid \varepsilon$

- DFA 변환 후



$S \rightarrow aA$
$A \rightarrow aE \mid bF$
$C \rightarrow aD \mid \varepsilon$
$D \rightarrow bC \mid \varepsilon$
$E \rightarrow aE \mid bH$
$F \rightarrow bG \mid aD \mid \varepsilon$
$G \rightarrow bH \mid \varepsilon$
$H \rightarrow aD \mid bH \mid \varepsilon$

- NFA를 DFA로 변환할 때 주의할 점
  - NFA의 final state를 1개라도 포함하고 있는 DFA의 모든 state는 final state가 된다.
- 유한 오토마타를 정규문법으로 기술할 때
  - 모든 final state들에 대해 ε-생성규칙을 추가한다.
- 정규문법을 유한 오토마타로 구성하는 방법은 무엇인가?

- 3.2절의 NFA를 DFA로 변환하시오.

  1) $S \rightarrow a \mid b \mid aX \mid bX$

     $X \rightarrow a \mid b$

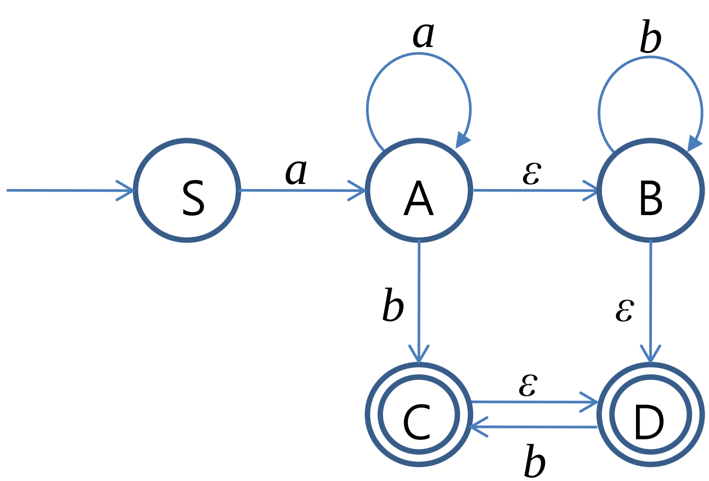
  2) $S \rightarrow 0S \mid 1S \mid 0 \mid 1$

- DFA로 변환하기 전후의 정규문법들에 대해 정규표현식을 구하고, NFA와 DFA가 동일한 언어를 기술하는지 비교

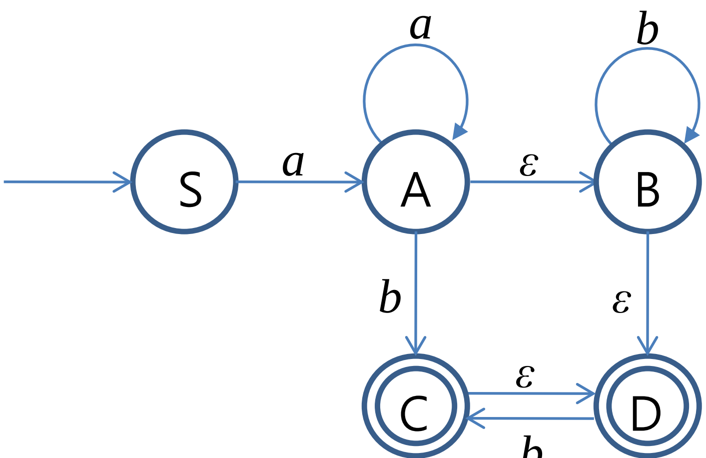
- 일반적으로 NFA를 DFA로 변환하면 state 개수가 증가한다. NFA의 state 개수가 n일 때 DFA의 최대 state 개수는 몇 개인가?

ε-NFA를 DFA로 변환

- 변환 방법: NFA를 DFA로 변환하는 방법과 동일
  - next state를 재정의할 때 ε-transition을 고려하여 도달 가능한 모든 state 집합이 next state가 됨
  - next state 집합을 구할 때 ε-CLOSURE 함수 사용
  - ε-CLOSURE 함수는 ε-transition으로 도달 가능한 state 집합



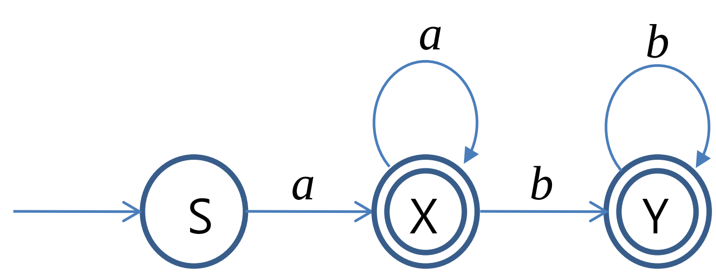
ε-CLOSURE(A) = { A, B, D }
ε-CLOSURE(B) = { B, D }
ε-CLOSURE(C) = { C, D }



ε-CLOSURE(A) = { A, B, D }
ε-CLOSURE(B) = { B, D }
ε-CLOSURE(C) = { C, D }

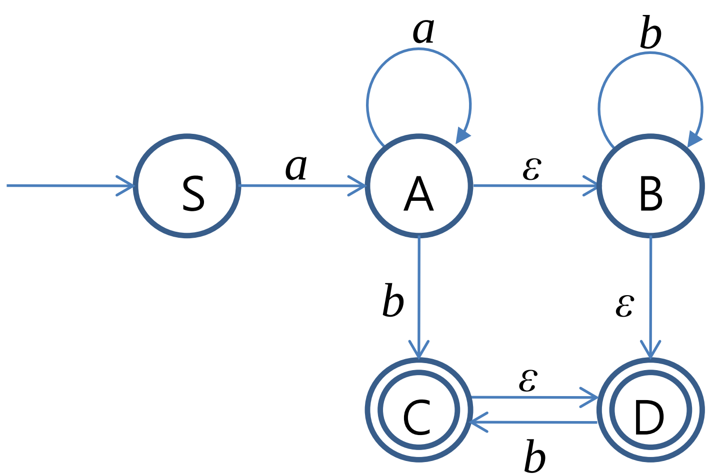
	a	b
[S]	[A,B,D]	
[A,B,D]	[A,B,D]	[B,C,D]
[B,C,D]		[B,C,D]

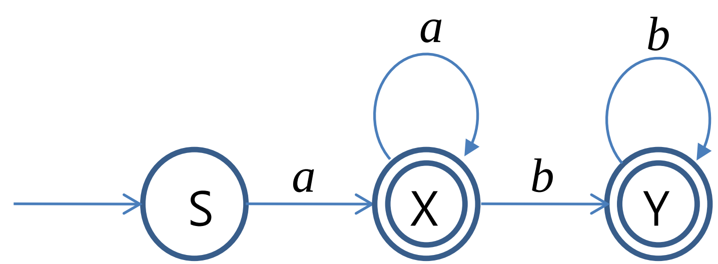
Final states = { [A,B,D], [B,C,D] }



오토마타→정규문법→정규표현식

- 아래 동일한 2개의 오토마타에 대한 정규문법, 정규표현식을 구하시오





정규표현식의 대수학적인 성질

$\alpha + \beta = \beta + \alpha$

$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

$(\beta+\gamma)\alpha = \beta\alpha + \beta\gamma$

$\alpha + \alpha = \alpha$

$\alpha + \phi = \alpha$

$\alpha\phi = \phi = \phi\alpha$

$\alpha\varepsilon = \alpha = \varepsilon\alpha$

$\alpha^* = \varepsilon + \alpha\alpha^* = \varepsilon + \alpha^+$

$\alpha^* = (\varepsilon + \alpha)^*$

$(\alpha^*)^* = \alpha^*$

$\alpha^* + \alpha = \alpha^*$

$\alpha^* + \alpha^+ = \alpha^*$

$(\alpha+\beta)^* = (\alpha^*\beta^*)^*$

$(\alpha+\beta)^* = \{\varepsilon, \alpha, \beta, \alpha\alpha, \alpha\beta, \beta\alpha, \beta\beta, \alpha\alpha\alpha, \ldots, \beta\beta\beta, \ldots\} = \alpha^*\beta^*\alpha^*\beta^*\ldots\alpha^*\beta^*$

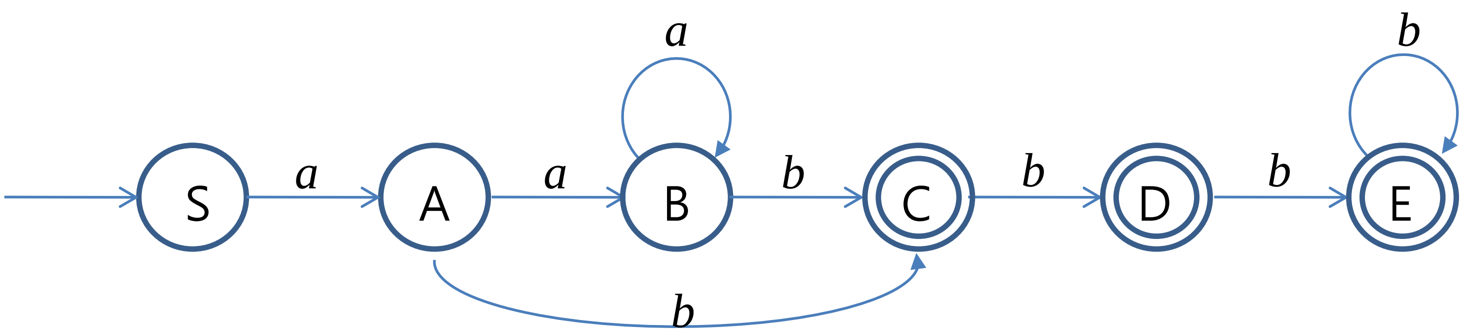
가장 효율적인 DFA로 변환

- 가장 효율적인 DFA는 state 개수가 가장 적은 것

- DFA의 상태수 최소화 방법
  - 동일한 기능을 하는 state들이 있다면 이를 1개 state로 merge(임의의 2개 state가 동일한 기능인지 판단이 어려움)

  - 모든 state들을 final state 집합과 non-final state 집합으로 merge한 후에 원래 DFA와 동일한 기능인지 확인

  - 원래 DFA와 동일하지 않으면 문제가 되는 state들을 분할

- 

	a	b
S	A	
A	B	C
B	B	C
C		D
D		E
E		E

Final states = { C, D, E }

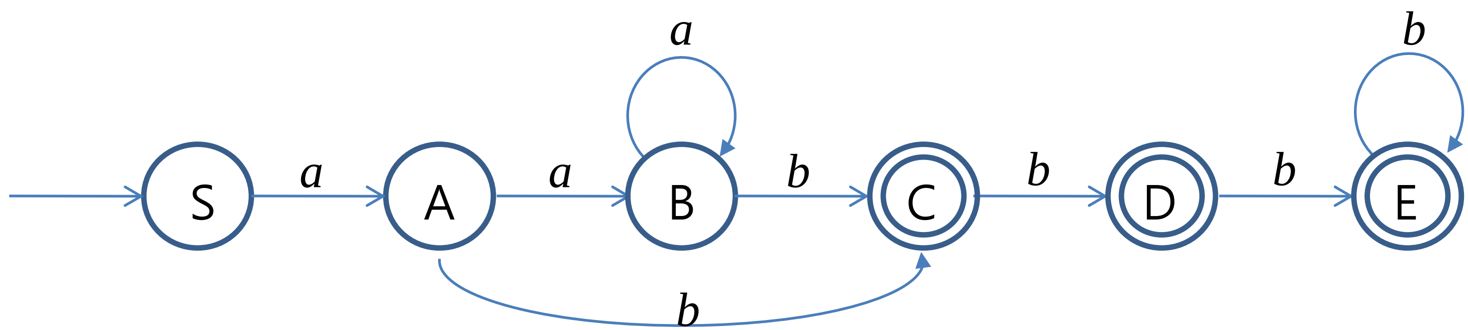
단계 1. final, nonfinal state 2개로 분할

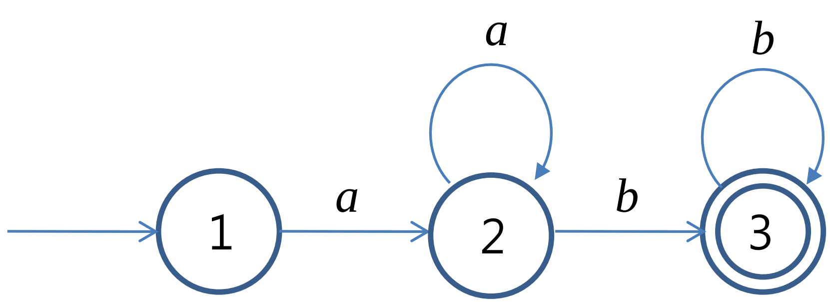
	1: {S, A, B}	2: {C, D, E}
a	1 1 1	ϕ ϕ ϕ
b	ϕ 2 2	2 2 2

단계 2. DFA 요건 불만족 state 분할

	1: {S}	2: {A, B}	3: {C, D, E}
a	2	2 2	ϕ ϕ ϕ
b	ϕ	3 3	3 3 3

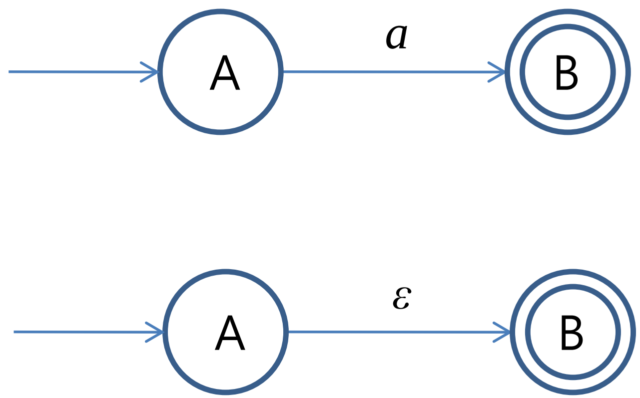
상태수 최소화 전후 비교



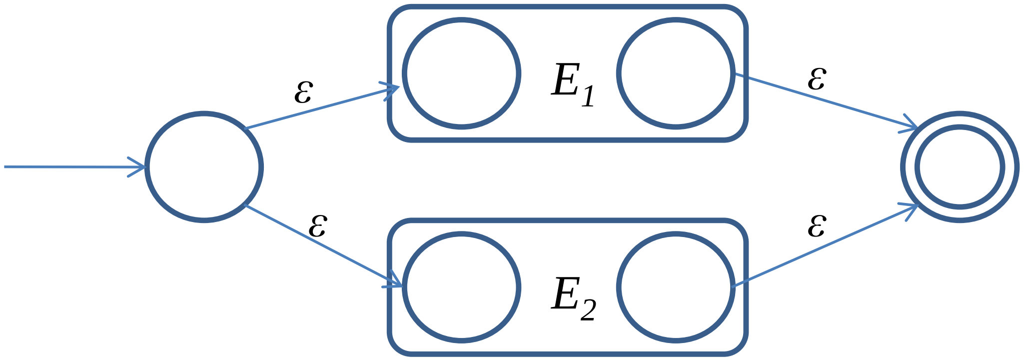


유한 오토마타의 구성 방법

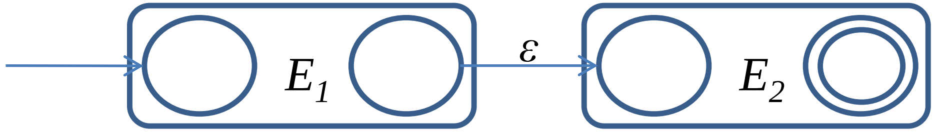
- a-transition, ε-transition을 인식하는 유한 오토마타



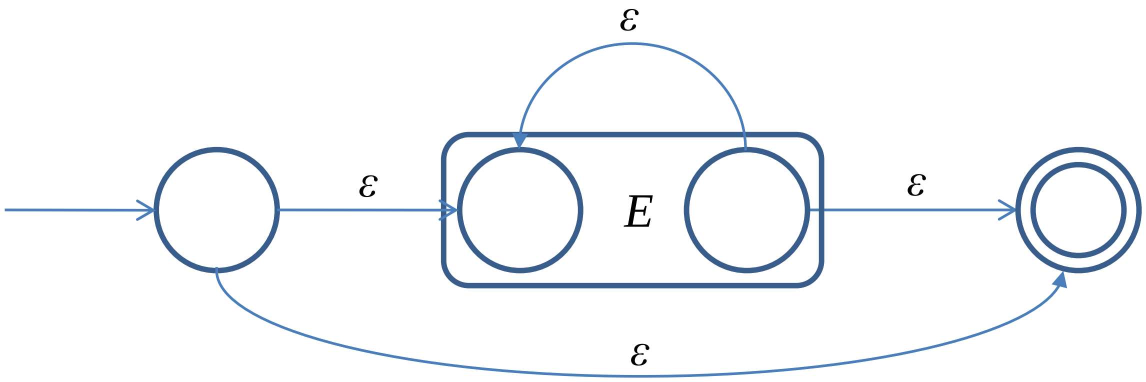
- 정규표현식 $E_1 + E_2$를 인식하는 유한 오토마타



- 정규표현식 $E_1 \cdot E_2$를 인식하는 유한 오토마타

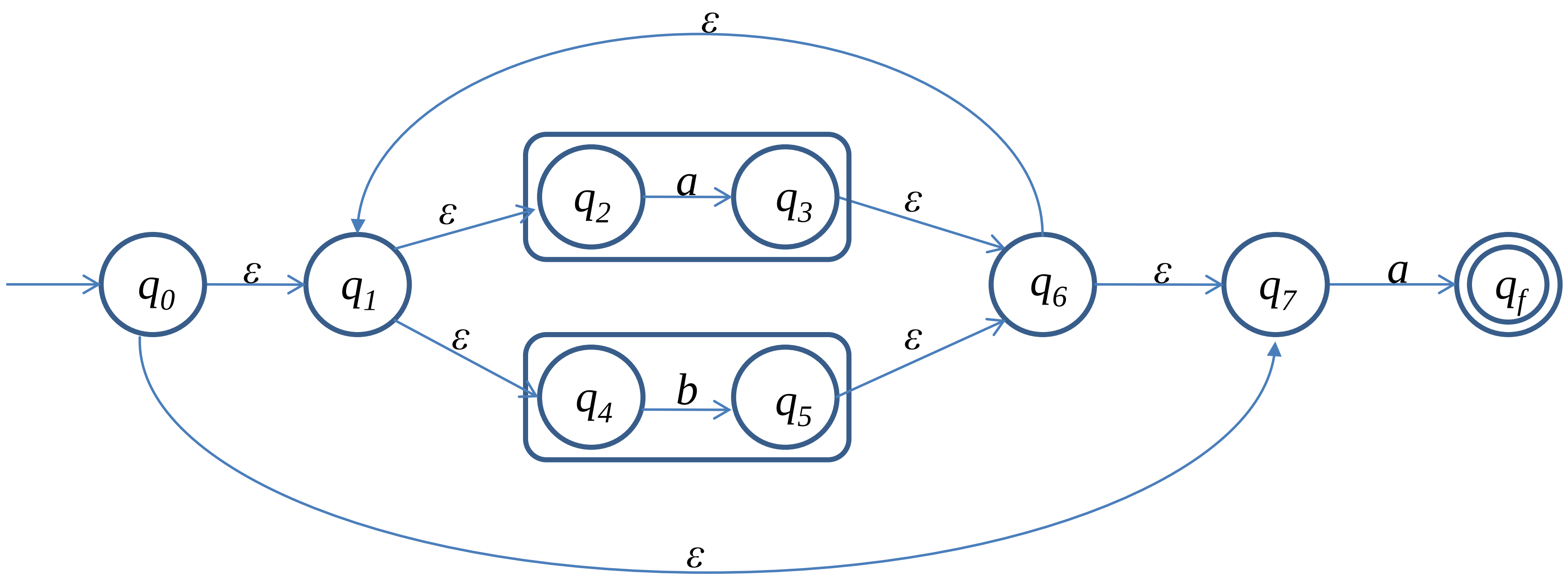


- 정규표현식 E*를 인식하는 유한 오토마타



유한 오토마타 구성 예제

- $(a+b)^*a$



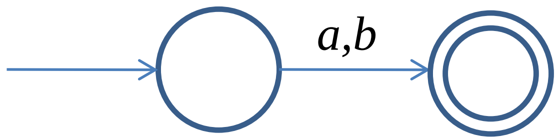
- 정규표현식에 대한 유한 오토마타 구성

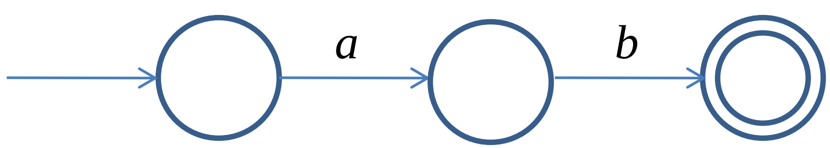
$(aa^{*}bb^{*})^{*}(aa+bb)$

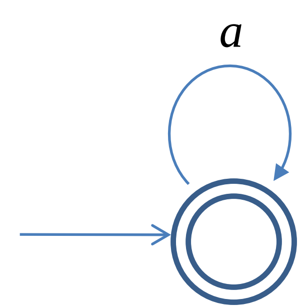
$ab(aa+bb)^{*}a$

간소화된 유한 오토마타

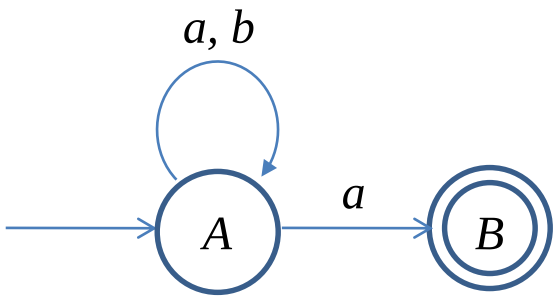
- a+b, ab, a*에 대한 유한 오토마타







- $(a+b)^*a$에 대한 간소화된 유한 오토마타



- 정규문법

  $A \rightarrow aA \mid bA \mid aB$

  $B \rightarrow \varepsilon$

- 상태전이표: NFA

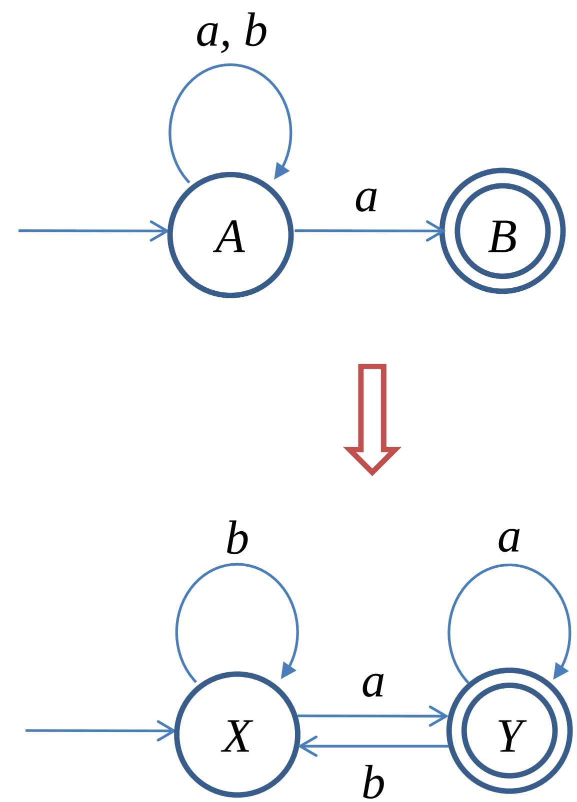
	a	b
A	A, B	A
B		

Final states = { B }

- NFA를 DFA로 변환

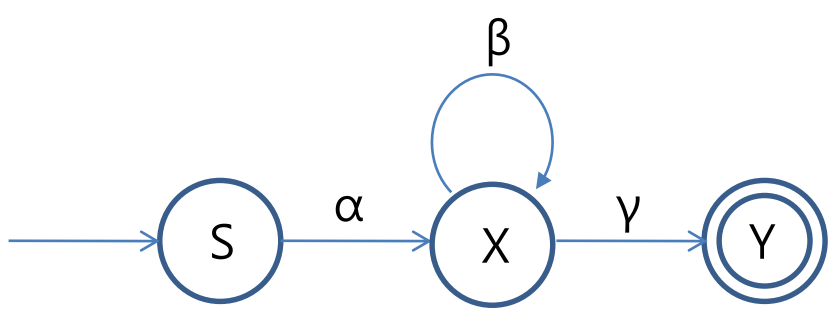
	a	b
[A]	[A,B]	[A]
[A,B]	[A,B]	[A]

Final states = { [A,B] }



정규언어의 속성: Pumping Lemma

- 어떤 언어가 정규언어가 아님을 증명하는데 활용
- 유한 오토마타(상태수가 유한 개)로 상태수보다 긴 스트링을 인식하려면 반복되는 부분이 있어야 한다.
- 길이가 상태수보다 긴 스트링 $\omega=\alpha\beta\gamma$의 반복되는 부분을 β라 하면 $\alpha\beta^{*}\gamma$도 이 오토마타로 인식할 수 있다.



- $a^n b^n$ 은 정규언어가 아님을 증명하시오.