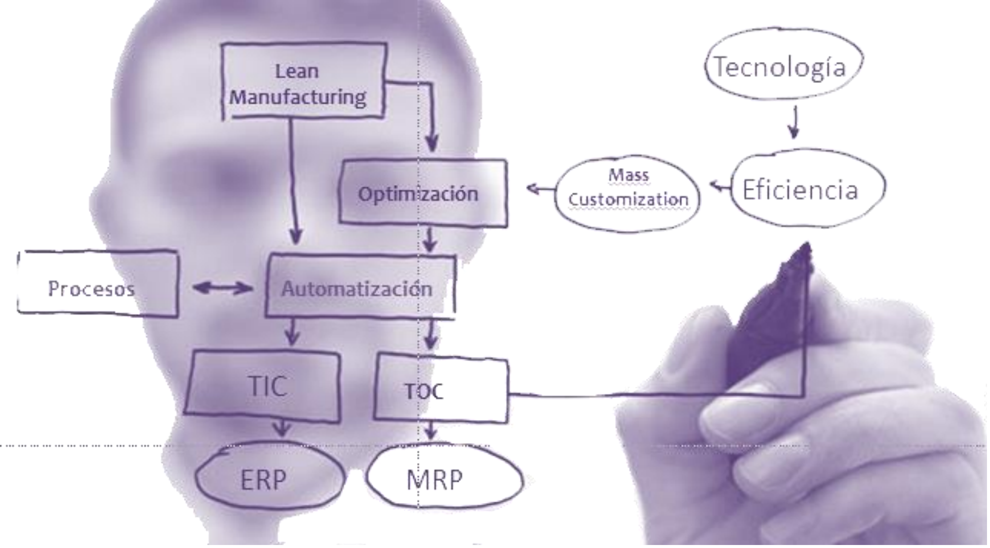


DEIOAC-UPV

3. Métodos de Programación Lineal (III)

CONTENIDOS

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

- La teoría de la dualidad nos va a permitir, entre otras cosas, relacionar cada problema de programación lineal (**problema primal**) con otro denominado **problema dual** y obtener relaciones sobre el tipo de soluciones de ambos problemas

- Utilizaremos el problema de producción de componentes informáticos del tema 3:
  - VARIABLES: Nº de lotes de placas de tipo 1 y 2 a producir semanalmente

$$X_1 \geq 0 \text{ y } X_2 \geq 0$$

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

- FUNCIÓN OBJETIVO: Determinar la combinación de las variables que maximizan el beneficio de la empresa

$$\textbf{Max } 3X_1 + 5X_2 \text{ (miles de €)}$$

- ... de modo que se verifiquen las RESTRICCIONES relativas a los recursos de la empresa (horas de los departamentos de producción, calidad y montaje)

$X_1 \leq 4$ (Departamento 1)

$2X_2 \leq 12$ (Departamento 2)

$3X_1 + 2X_2 \leq 18$ (Departamento 3)

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

- La solución óptima implica producir **2 lotes de placas tipo 1** y **6 lotes de placas tipo 2** con un beneficio de **36** miles de euros

Cambiamos el enfoque sobre el problema planteado, nuestro propósito va a ser

- **Determinar los precios con los que esta empresa debería valorar sus recursos (horas de trabajo de los tres departamentos) de tal manera que puedan determinar el mínimo valor total al cual estaría dispuesta a alquilar o vender los recursos**

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

- Con este objetivo el modelo de programación lineal asociado es:

  - **VARIABLES:**

    Y1: Renta percibida por hora del departamento 1

    Y2: Renta percibida por hora del departamento 2

    Y3: Renta percibida por hora del departamento 3

    La renta total obtenida será 4 Y1 + 12 Y2 + 18 Y3

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

- **FUNCIÓN OBJETIVO:** Encontrar el **mínimo** valor de

  4 Y1 + 12 Y2 + 18 Y3 de modo que la empresa pueda analizar algunas propuestas de alquiler o compra de todos los recursos

$$\text{MIN } 4\,Y1 + 12\,Y2 + 18\,Y3$$

- Se consideran las **RESTRICCIONES** siguientes
  - Los precios pagados por el alquiler o venta serán no negativos: **Y1, Y2, Y3 $\geq$ 0**

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

- Los precios Y1, Y2 e Y3 deben ser competitivos con las alternativas disponibles. El beneficio que la empresa debe obtener por los recursos necesarios para elaborar un lote de placas tipo 1, al menos debe ser igual a los que obtendría al utilizar dichos recursos en la elaboración del lote de placas tipo 1:

  $$1\,Y1 + 3\,Y3 \geq 3$$

- ... y para cada lote de placas tipo 2: $2\,Y2 + 2\,Y3 \geq 5$

- Con esto se garantiza la obtención de precios con los que al menos se iguala el beneficio obtenido al producir él mismo los equipos (cuando los recursos son utilizados en la empresa)

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

- El problema planteado queda:

MIN 4 Y1 + 12 Y2 + 18 Y3

s.a:

[bº_placas tipo1] **1 Y1 + 3 Y3 ≥ 3**

[bº_placas tipo2] **2 Y2 + 2 Y3 ≥ 5**

Y1, Y2, Y3 ≥ 0

- A este nuevo problema se le denomina **problema dual** del problema planteado originalmente (problema primal)

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

```
Global optimal solution found.
 Objective value:                              36.00000
                              Variable           Value        Reduced Cost
                                    Y1        0.000000            2.000000
                                    Y2        1.500000            0.000000
                                    Y3        1.000000            0.000000

                                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                     1        36.00000           -1.000000
                        B_PLACAS_TIPO1        0.000000           -2.000000
                        B_PLACAS_TIPO2        0.000000           -6.000000
```

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

- La solución óptima del problema dual implica que por cada unidad del recurso 2 la empresa percibe una renta de 1.5 (miles €), por unidad del recurso 3 una renta de 1 (miles €) mientras que la renta percibida por el recurso 1 es cero. El valor de la función objetivo es 36 (miles €)
- El problema dual tiene 3 variables, una por cada restricción del programa primal. Asimismo, tiene 2 restricciones, una por cada variable del problema primal; la función objetivo del programa primal es maximizar y la del dual es minimizar

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

Modelo Original

MODELO PRIMAL → **MODELO DUAL**

Objetivo:
Distribución óptima de los recursos

Objetivo:
Coste de Oportunidad (precio) de los recursos

m = 500 restricciones
n = 100 variables

m = 100 restricciones
n = 500 variables

$\mathbf{B^{-1}_{500x500}}$

$\mathbf{B^{-1}_{100x100}}$

Modelo Primal (max)

Z óptimo

Modelo Dual (min)

$\mathbf{SB_0}$ → ← $\mathbf{SB_0}$

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

- Asociado a un problema de programación lineal (**problema primal**) aparece otro problema de programación lineal denominado **problema dual**. Entre los dos problemas existen las siguientes relaciones:

1. **Cada restricción del problema primal da lugar a una variable en el problema dual y cada variable en el primal da lugar a una restricción del problema dual**

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

2. La **matriz de coeficientes del problema dual** es la **traspuesta de la matriz de coeficientes del problema original**
3. El **vector de coeficientes de la función objetivo** del problema dual es el **vector de recursos** del problema primal
4. El **vector de recursos** del problema dual es el vector de coeficientes de la **función objetivo** del problema primal
5. Si el problema primal es de **maximización** el dual es de **minimización** y recíprocamente si el problema primal es de minimización su dual es de maximización
6. El dual del problema dual es el problema primal

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

- Obtención del problema dual:

PRIMAL	**DUAL**
Max $Z = c^t x$ Sujeto a: $Ax \leq b$ $x \geq 0$	Min $Y = b^t y$ Sujeto a: $A^t y \geq c$ $y \geq 0$
Min $Z = c^t x$ Sujeto a: $Ax \geq b$ $x \geq 0$	Max $Y = b^t y$ Sujeto a: $A^t y \leq c$ $y \geq 0$

$\mathbf{c}^t$ = Vector de coeficientes de la función objetivo

b = Vector de términos independientes de las restricciones

A = Matriz de coeficientes técnicos de las restricciones

x = Vector de variables primales

y = Vector de variables duales

^{t} = Traspuesta de la matriz o vector

IMPORTANTE: Las VARIABLES DUALES son los COSTES DE OPORTUNIDAD de las RESTRICCIONES PRIMALES

✍ Obtener dual del modelo de componentes

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

- Generalización de las relaciones de dualidad:

Primal (Dual)		Dual (Primal)
Max	⟷	Min
Restricción '≤'	⟷	Variable '≥ 0'
Restricción '≥'	⟷	Variable '≤ 0'
Restricción '='	⟷	Variable no restringida
Variable '≥ 0'	⟷	Restricción '≥'
Variable '≤ 0'	⟷	Restricción '≤'
Variable no restringida		Restricción '='
Matriz A	⟷	Matriz A^t

✍ Ejercicios adicionales conversión Primal-Dual

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

Ejercicio Propuesto:

Plantea el programa dual de los siguientes programas lineales:

a) Min $7x1 + 8x2$

s.a: $x1 + x2 \geq 3$

$2x1 + x2 \geq 2$

$-x1 + x2 \leq 4$

$x1, x2 \geq 0$

b) Min $3x1 + 7x2 + x3$

s.a: $x1 + 2x2 + x3 \leq 7$

$2x1 + 3x2 - x3 \geq 8$

$3x1 + x2 + 2x3 = 5$

$x1 \leq 0$, $x2$ no restringida, $x3 \geq 0$

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

Ejercicio Propuesto:

- Obtener la Solución Óptima del modelo dual del problema de producción de componentes informáticos:

$$\text{Min } Y = 4y1 + 12y2 + 18y3$$

$$\text{s.a: } y1 + 3y3 \geq 3$$

$$2y2 + 2y3 \geq 5$$

$$y1, y2, y3 \geq 0$$

Aplicar el método de las 2 Fases

✍ comparar soluciones óptimas

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

SOLUCIÓN OPTIMA PROBLEMA PRIMAL:

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	½	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
$c^t_B\ B^{-1}$	0	3/2	1	Z = 36

c_{x4}-z_{x4} = 0 – 3/2 = -3/2; c_{x5}-z_{x5} = 0-1 = -1

SOLUCIÓN OPTIMA PROBLEMA DUAL:

v.básicas	B^{-1}		x_B
y3	1/3	0	1
y2	-1/3	½	3/2
$c^t_B\ B^{-1}$	2	6	**Z = 36**

c_{Y1}-z_{Y1} = 4 – 2 = 2; c_{Y4}-z_{Y4} = 0 – (-2) = 2; c_{Y5}-z_{Y5} = 0-(-6) = 6

✍ comparar soluciones LINGO (equivalencia)

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

Equivalencia PRIMAL-DUAL

Solución Óptima PRIMAL		Solución Óptima DUAL
Z	→ = ←	Y
Valor variables decisión	→	C.O. restricciones duales
Reduced Cost variables decisión	→	Holgura restricciones duales
Holgura restricciones	→	Reduced Cost variables duales
C.O. restricciones	→	Valor variables duales

3.16 El problema dual y las relaciones de dualidad

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA DUALIDAD:

Si tanto el programa primal como el dual tienen soluciones factibles, entonces ambos tienen soluciones óptimas finitas y los valores de Z óptimos son iguales.

TEOREMA DE LA HOLGURA COMPLEMENTARIA:

Si una restricción de cualquiera de los dos problemas es de holgura en cualquier solución óptima de ese problema, entonces en el otro la variables asociada a dicha restricción es cero en toda solución óptima.

Si una variable de cualquier problema es diferente de cero, entonces en el otro problema la restricción asociada se cumple estrictamente

- Este teorema nos indica que un recurso que no se agota (restricción de holgura) tiene una variable dual asociada igual a cero y un recurso con variable dual asociada diferente de cero es escaso

3.17 Análisis de sensibilidad

- En los modelos de programación lineal los **coeficientes** de la función objetivo (c_j) y el segundo miembro de las restricciones (b_i) se dan como datos de entrada o como **parámetros fijos** del modelo

- En los problemas reales los valores de estos coeficientes no están, en general, perfectamente fijados, debido a que la mayoría de ellos dependen de parámetros no controlables, por ejemplo, futuras demandas, coste de materias primas, coste de energía, etc. Y **no se pueden predecir con exactitud** antes de que el problema sea resuelto

3.17 Análisis de sensibilidad

- También puede suceder que aunque conozcamos los parámetros exactamente estemos interesados en estudiar cómo varía la solución óptima si **cambiamos algún parámetro intencionadamente** (como simulación o por circunstancias del momento)

Ambas situaciones se resuelven de forma análoga

- El objetivo fundamental del análisis post-óptimo es identificar los parámetros sensibles (i.e. los parámetros tales que si sus valores cambian, cambia la solución óptima). Del mismo modo para ciertos parámetros que no están clasificados como sensibles también resulta de utilidad determinar el intervalo de valores del parámetro para el que la solución óptima no cambia (mantiene la optimalidad o la factibilidad)

3.17 Análisis de sensibilidad

- Cada variación en los valores de los datos del problema generará un nuevo problema de programación lineal. El **análisis de sensibilidad** nos proporcionarán herramientas para el cálculo de las soluciones óptimas de los problemas obtenidos por la modificación de los parámetros originales del problema así como para el cálculo de los intervalos en los que la solución óptima o el coste de oportunidad se mantiene
- En el procedimiento de cálculo de la nueva solución (si ha cambiado algún parámetro del modelo) o bien del intervalo de análisis de sensibilidad, se partirá de la solución óptima del problema original antes de ser modificado, y a partir de ella se calcularán las soluciones asociadas a las modificaciones

3.17 Análisis de sensibilidad

- En general, **una modificación de los parámetros del modelo** provocará que al considerar como **solución inicial** la **base óptima del problema original**, ésta **deje de ser óptima** o **factible**:

A. La modificación **c'** del vector de costes original **c** únicamente supone una modificación en $c'-c'^t_B B^{-1}a$. Por tanto, la solución inicial del problema modificado, la construida con **la base óptima** del problema original, **mantiene la factibilidad** PERO **puede perder la optimalidad**.

> *El cálculo del intervalo de análisis de sensibilidad implica determinar el intervalo de variación del coeficiente en cuestión de modo que se mantienen las **condiciones de optimalidad***

3.17 Análisis de sensibilidad

B. La modificación **b'** del vector de recursos **b** únicamente supone una modificación en **$x_B = B^{-1}b'$.** Por tanto, **la solución inicial** del problema modificado, la construida con la base óptima del problema original, **mantiene la optimalidad** PERO **puede perder la factibilidad**.

> *El cálculo del intervalo de análisis de sensibilidad implica determinar el intervalo de variación del segundo miembro en cuestión de modo que se mantienen las **condiciones de factibilidad***

3.17 Análisis de sensibilidad

- Para ilustrar el cálculo del intervalo de análisis de sensibilidad de los parámetros de un modelo de programación lineal utilizaremos el problema de *producción de componentes informáticos*:

$$\text{Max } 3x1 + 5x2$$

s.a:

$$\begin{array}{lllll} x1 & + x3 & & & = 4 \\ \quad 2\,x2 & & + x4 & & = 12 \\ 3\,x1 + 2\,x2 & & & + x5 & = 18 \end{array}$$

$$x1, x2, x3, x4, x5 \geq 0$$

3.17 Análisis de sensibilidad

- Cuya solución óptima es la que se muestra en la siguiente tabla:

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	1/2	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
$c^t_B\ B^{-1}$	0	3/2	1	**Z = 36**

VNB = X4, X5

✍

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

- El objetivo del análisis de sensibilidad de los coeficientes en la función objetivo es determinar el intervalo de variación de dichos coeficientes en el que no hay cambio de solución óptima. Vamos a considerar dos situaciones:

1. Sólo se modifican coeficientes en la función objetivo de **variables no básicas** en la solución óptima
2. Sólo se modifican coeficientes en la función objetivo de **variables básicas** en la solución óptima

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

1. **Análisis de sensibilidad de un coeficiente de la función objetivo asociado a una variable no básica:**

- La modificación del $\mathbf{c_j}$ de una variable no básica que pasa a ser $\mathbf{c'_j = c_j + \Delta c_j}$ implica que al recalcular los $c_j - z_j = c_j - (c_B^t B^{-1} a_j)$ de las **VNB**, la parte $\mathbf{c_B^t B^{-1} a_j}$ **NO cambia** ya que xj es variable no básica y por tanto no aparece en c_B
- **La modificación del $\mathbf{c_j}$ de una variable no básica sólo afecta al cálculo de su propio $\mathbf{c_j - z_j}$**

En la solución óptima de nuestro problema ejemplo, las VNB son x4 y x5

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

Intervalo de Análisis de sensibilidad de c_{x4}:

La solución óptima actual seguirá siendo la misma ante cambios en c_{x4} mientras: $c_{x4}-z_{x4}= c_{x4}- (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x4} \leq 0$ **(MAX)**

En la solución óptima, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$c^t_B\, B^{-1} = (0, 5, 3) \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (0, 3/2, 1) \leftarrow \textbf{Cte.}$$

$$z_{x4} = (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x4} = (0, 3/2, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3/2$$

$$c_{x4}-z_{x4} \leq 0 \rightarrow c_{x4}-3/2 \leq 0 \rightarrow \boxed{c_{x4} \leq 3/2}$$

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

Mientras $c_{x4} \leq 3/2$:

- La solución óptima **NO CAMBIA**
- Como x4 es no básica, el valor de la función objetivo **NO CAMBIA**
- En el límite, es decir cuando $c_{x4}=3/2$, hay **SOLUCIONES ÓPTIMAS ALTERNATIVAS** y por tanto infinitas soluciones

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

Ejercicio Propuesto:

- **Calcular el intervalo de variación de c_{x5} en el que la solución óptima no cambia. ¿Cuál es el valor de la función objetivo mientras c_{x5} varía en ese intervalo?**

✍

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

2. **Análisis de sensibilidad de un coeficiente de la función objetivo asociado a una variable básica:**

- La modificación del $\mathbf{c_i}$ de una variable básica que pasa a ser $\mathbf{c'_i = c_i + \Delta c_i}$ implica que al recalcular los $c_j - z_j = c_j - (c_B{}^t B^{-1} a_j)$ de las **VNB**, la parte $\mathbf{c_B{}^t B^{-1} a_j}$ **CAMBIA** ya que xi es variable básica y aparece en c_B

- **La modificación del c_i de una variable básica afecta al cálculo de los c_j-z_j de las variables no básicas**

En la solución óptima de nuestro problema ejemplo, las VNB son x4 y x5

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

Intervalo de Análisis de sensibilidad de c_{x1}:

La solución óptima actual seguirá siendo la misma ante cambios en c_{x1} mientras $\mathbf{c_{x4}-z_{x4} \leq 0}$ **y** $\mathbf{c_{x5}-z_{x5} \leq 0}$

En la solución óptima, $\mathbf{B^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$c^t_B\, B^{-1} = (0, 5, c_{x1}) \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (0, 5/2-1/3\, c_{x1}, 1/3\, c_{x1})$$

$$z_{x4} = (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x4} = (0, 5/2-1/3\, c_{x1}, 1/3\, c_{x1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5/2 - 1/3\, c_{x1}$$

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

$$z_{x5} = (c^t_B\ B^{-1})\ a_{x5} = (0,\ 5/2-1/3\ c_{x1},\ 1/3\ c_{x1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/3\ c_{x1}$$

$$c_{x4}-z_{x4} \leq 0 \rightarrow 0-5/2+1/3\ c_{x1} \leq 0 \rightarrow \boxed{c_{x1} \leq 15/2=7.5}$$

$$c_{x5}-z_{x5} \leq 0 \rightarrow 0-1/3\ c_{x1} \leq 0 \rightarrow \boxed{c_{x1} \geq 0}$$

Mientras **$0 \leq c_{x1} \leq 7.5$:**

- La solución óptima **NO CAMBIA**
- El valor de la función objetivo **CAMBIA: $Z=30+2c_{x1}$**
- En los límites, es decir cuando $c_{x1}=0$ o $c_{x1}=7.5$, hay **SOLUCIONES ÓPTIMAS ALTERNATIVAS** y por tanto infinitas soluciones

3.17.1 Análisis de sensibilidad de coeficientes en la función objetivo

Ejercicio Propuesto:

- **Calcular el intervalo de variación de c_{x2} en el que no cambia la solución óptima**

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

- La modificación del segundo miembro de una restricción (vector recursos):
  - **Afecta** (en general) a la región factible
  - **Puede afectar** a la factibilidad de la solución actual
  - **No afecta** a la optimalidad de la solución
  - **Afecta** (en general) al valor de la función objetivo

- El objetivo es calcular el intervalo en el que puede variar el segundo miembro de una restricción y **mantenerse constante el coste de oportunidad**

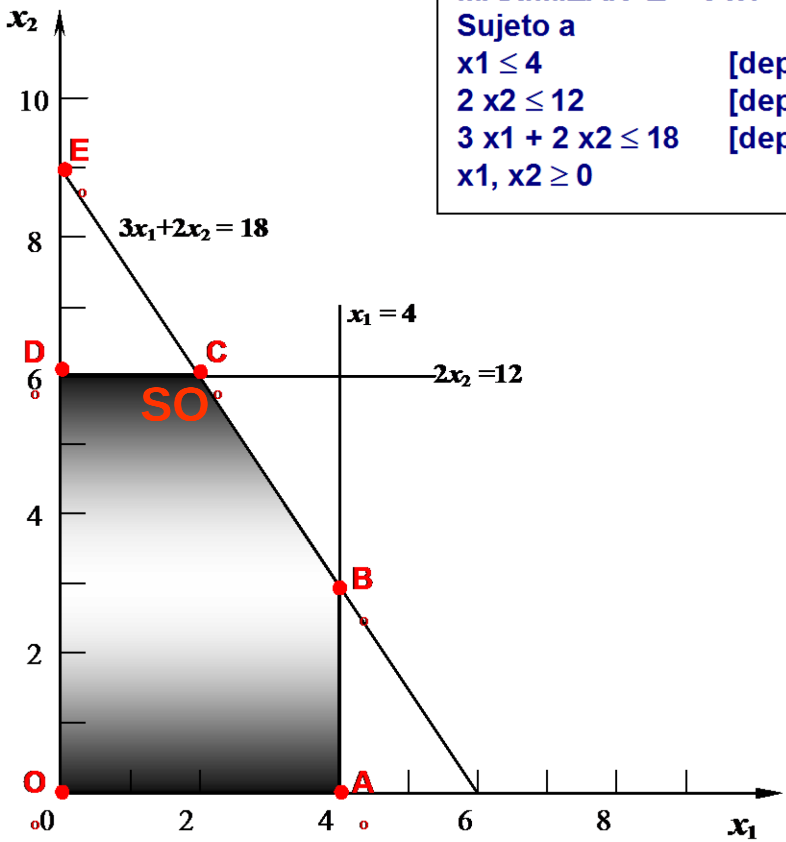
✍ Modelo y fórmulas de S. Revisado

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

- Al modificar **b** a **$b' = b + \Delta b$** **se mantendrá el coste de oportunidad** y el **plan de producción** **mientras se mantenga la factibilidad de la solución ($x_B \geq 0$)**, es decir mientras se cumpla que la solución óptima con el nuevo vector b’ es factible:

$$\mathbf{x'_B{}^*} = B^{-1}b' = B^{-1}(b+\Delta b) = \underbrace{B^{-1}b}_{x_B{}^*} + B^{-1}\Delta b = \mathbf{x_B{}^* + B^{-1}\Delta b \geq 0}$$

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones



MAXIMIZAR Z = 3 x1 + 5 x2
Sujeto a

x1 ≤ 4	[depto. 1]
2 x2 ≤ 12	[depto. 2]
3 x1 + 2 x2 ≤ 18	[depto. 3]
x1, x2 ≥ 0	

1. Intervalo de Análisis de sensibilidad del segundo miembro de la restricción del departamento 2, b2:

[depto.2] 2 x2 + x4 = **12**

- La solución óptima del problema original es:

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	1/2	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
$c^t_B\ B^{-1}$	0	3/2	1	**Z = 36**

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

PASO 1: Calcular C.O.

- En esta solución, el coste de oportunidad de la restricción 2 es:

$c_{x4}-z_{x4} = c_{x4} - (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x4}$

$$c^t_B\, B^{-1} = (0, 5, 3)\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (0, 3/2, 1)$$

$$z_{x4} = (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x4} = (0, 3/2, 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3/2$$

$c_{x4}-z_{x4} = c_{x4} - (c^t_B\, B^{-1})\, a_{x4} = 0 - 3/2 = - 3/2$

- Como la restricción es de tipo '$\leq$' el coste de oportunidad es

$\boxed{+\,3/2}$

PASO 2: Calcular Intervalo

- Al modificar el segundo miembro de la restricción 2 el coste de oportunidad se mantendrá constante mientras se mantenga la factibilidad, es decir:

$$\begin{pmatrix} x3'^* \\ x2'^* \\ x1'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x3^* \\ x2^* \\ x1^* \end{pmatrix} + B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{\Delta b2} \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x3'^* \\ x2'^* \\ x1'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x3^* \\ x2^* \\ x1^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b2 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$x3'^* = x3^* + 1/3\ \Delta b_2 \geq 0 \rightarrow 2 + 1/3\ \Delta b_2 \geq 0 \rightarrow 1/3\ \Delta b_2 \geq -2 \rightarrow \boxed{\Delta b_2 \geq -6}$$

$$x2'^* = x2^* + 1/2\ \Delta b_2 \geq 0 \rightarrow 6 + 1/2\ \Delta b_2 \geq 0 \rightarrow \Delta b_2 \geq -12$$

$$x1'^* = x1^* - 1/3\ \Delta b_2 \geq 0 \rightarrow 2 - 1/3\ \Delta b_2 \geq 0 \rightarrow \boxed{\Delta b_2 \leq 6}$$

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

- La **solución** sigue siendo **factible** siempre que las tres **variables básicas** sigan siendo **no negativas**, por tanto la solución sigue siendo factible mientras:

$\boxed{\mathbf{b_2 = b_2^0 + \Delta b_2}}$

$\boxed{-6 \leq \mathbf{\Delta b_2} \leq 6}$, es decir, si $b_2^0 = 12 \rightarrow 6 \leq \mathbf{b_2} \leq 18$

- Mientras $\boxed{\mathbf{6 \leq b_2 \leq 18}}$
  - El coste de oportunidad es constante e igual a **+3/2**
  - El plan de producción (base) es constante
  - La solución óptima y el valor de la función objetivo cambian
  - En los límites la solución es degenerada

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

2. Intervalo de Análisis de sensibilidad del segundo miembro de la restricción del departamento 1, b1:

[depto.1] x1 + x3 = **4**

- La solución óptima del problema original es:

v.básicas	B^{-1}			x_B
x3	1	1/3	-1/3	2
x2	0	1/2	0	6
x1	0	-1/3	1/3	2
$c^t_B B^{-1}$	0	3/2	1	**Z = 36**

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

PASO 1: Calcular C.O.

- En esta solución, el coste de oportunidad de la **restricción 1** es:

$$c_{x3}-z_{x3} = c_{x3} - (c^t_B\ B^{-1})\ a_{x3} = 0 - (0,\ 3/2,\ 1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

- Como se trata de una **restricción no limitativa en la solución óptima** $\rightarrow$ $\boxed{\textbf{C.O. = 0}}$

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

PASO 2: Calcular Intervalo

- Al modificar el segundo miembro de la restricción 1 el coste de oportunidad se mantendrá constante mientras se mantenga la factibilidad, es decir:

$$\begin{pmatrix} x3'^* \\ x2'^* \\ x1'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x3^* \\ x2^* \\ x1^* \end{pmatrix} + B^{-1} \begin{pmatrix} \boxed{\Delta b1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x3'^* \\ x2'^* \\ x1'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x3^* \\ x2^* \\ x1^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta b1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$x3'^* = x3^* + \Delta b_1 \geq 0 \rightarrow 2 + \Delta b_1 \geq 0 \rightarrow \Delta b_1 \geq -2 \rightarrow \boxed{\Delta b_1 \geq -2}$$

$$x2'^* = x2^* + 0\,\Delta b_1 \geq 0 \rightarrow 6 \geq 0$$

$$x1'^* = x1^* + 0\,\Delta b_1 \geq 0 \rightarrow 2 \geq 0$$

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

$\boxed{\mathbf{b_1 = b_1^0 + \Delta b_1}}$

$\boxed{-2 \leq \Delta \mathbf{b_1} < +\infty}$, es decir, si $b_1^0=4 \rightarrow \boxed{2 \leq \mathbf{b_1} < +\infty}$

- Sabiendo que $b^o_1 = 4$, mientras $\boxed{\mathbf{2 \leq b_1 < + \infty}}$:
  - El **coste de oportunidad** es constante e igual a **0**
  - El **plan de producción** (**base**) es constante
  - La **solución óptima** y el **valor de la función objetivo** NO cambian porque la restricción es no limitativa.
  - **En los límites** la solución es degenerada

3.17.2 Análisis de sensibilidad del segundo miembro de las restricciones

Ejercicio Propuesto:
- **Calcular el intervalo de variación de b_3 en el que el coste de oportunidad es constante**

3.18 Introducción de una nueva variable

- Las variables decisión del modelo generalmente representan las distintas actividades a realizar.

- En algunas situaciones estas actividades se seleccionan entre un grupo grande de actividades posibles en el que las restantes no se eligieron por parecer menos atractivas.

- Sin embargo puede plantearse si merece la pena incluir alguna de las actividades no consideradas antes, es decir, ¿cambiará la solución óptima si se agrega cualquiera de estas nuevas actividades?

3.18 Introducción de una nueva variable

- Añadir otra actividad equivale a:

1. Introducir en el modelo una nueva variable $\mathbf{x_{n+1}}$, con los coeficientes apropiados en las restricciones funcionales, $\mathbf{a_{n+1}}$, y en la función objetivo, $\mathbf{c_{n+1}}$.
2. Se calcularán los valores:

$$c_{n+1}-z_{n+1}= c_{n+1} - c^t_B B^{-1} a_{n+1}$$

$$y_{n+1} = B^{-1} a_{n+1}$$

- La optimalidad de la solución dependerá del cj-zj de la nueva variable x_{n+1}, si es ≥ 0 y el problema es de mínimo o si es ≤ 0 y el problema es de máximo, la solución que teníamos para el problema original sigue siendo óptima para el problema modificado. En caso contrario la solución ya no es óptima, dicha variable debe entrar en la base → **Aplicar algoritmo Simplex**

3.18 Introducción de una nueva variable

- La empresa de componentes informáticos está considerando la posibilidad de fabricar un nuevo tipo de placa base. Cada lote de las nuevas placas requiere 2 horas del departamento de producción, 3 horas del departamento de calidad y 1 hora del departamento de montaje. El beneficio semanal por cada lote de placas tipo 3 fabricadas es de 4000 €,

¿LE INTERESARÁ A LA EMPRESA LA FABRICACIÓN DEL NUEVO TIPO DE PLACA? ¿EN QUÉ CANTIDAD?

3.18 Introducción de una nueva variable

- Sea $\mathbf{x}_{placa3}$: Número de lotes de la placa base 3 fabricados por semana
- El nuevo modelo es:

$$\text{Max } 3x1 + 5x2 + \mathbf{4}\, \mathbf{x}_{placa3}$$

s.a:

$$
\begin{aligned}
x1 \qquad\qquad\qquad &+ \mathbf{2}\, \mathbf{x}_{placa3} \leq 4 \\
2\, x2 \qquad &+ \mathbf{3}\, \mathbf{x}_{placa3} \leq 12 \\
3\, x1 + 2\, x2 \qquad &+ \mathbf{x}_{placa3} \leq 18 \\
x1, x2, \mathbf{x}_{placa3} &\geq 0
\end{aligned}
$$

3.18 Introducción de una nueva variable

- Teniendo en cuenta que en la solución óptima del problema original:

$$x^*_B = \begin{pmatrix} x3^* \\ x2^* \\ x1^* \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}; \quad (c^t_B\, B^{-1}) = (0 \;\; 3/2 \;\; 1)$$

- Para la nueva actividad, calculamos su $c_{xplaca3}-z_{xplaca3}$ así como su columna $y_{xplaca3}$:

$$c_{xplaca3} - z_{xplaca3} = 4 - (0,\, 3/2,\, 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 - 11/2 = \mathbf{-3/2}$$

- La solución inicial todavía es óptima, por tanto

NO INTERESA la fabricación del nuevo tipo de placa

¿Cómo se interpreta el valor de $c_{xplaca3} - z_{xplaca3}$?