第29卷 第1期 西安交通大学学报 Vol.29 №1
1995年1月 JOURNAL OF XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY Jan. 1995

(17) 107-110

三次 Bezier 曲线旋转面进行光线跟踪处理的求交算法

亢祝真 陆丽娜
(电子与信息工程学院)

TP391.41
TP301.6

摘　要

A 对景物进行光线跟踪处理以生成高度真实感图形时,对三次 Bezier 曲线旋转面的求交是一个十分复杂的问题.文中推导了一种简单实用的算法解决上述问题.

关键词:三次 Bezier 曲线旋转面　光线跟踪　线性分布
中国图书资料分类法分类号:TP301.6

交点,算法,

0 引　言

在计算机图形学的研究领域中,为生成三维高度真实感图形的效果,必须对场景中的物体进行光线跟踪处理.

在通常的光线跟踪算法中,光线从视点射向三维平面的每个像素,每个物体都需要经过测试.在物体与光线的交点处计算颜色亮度,并作为对应的像素亮度值而返回.光线跟踪算法的主要缺陷在于测算光线与物体相交所用的计算时过于宠大,估计花去了处理中的95%的时间.为降低时间损耗,应设法减少求运算所用的时间.

场景景物的构成是复杂的.当把光线作为一条直线与物体求交时,通常的平面立体和诸如圆柱、圆维、圆台等直纹二次曲面都可以作为体素,它们与直线相交的计算公式是比较简单的.如果我们不以景物的特殊形状来研究的话,通常地讲,景物是由各种曲面逼近组合而成,这时的直线与物体的求交计算需要联立曲面方程和直线方程,解含有三个未知数的三个线性方程,用数值法联列求解,而且还要考虑多个交点和病态条件的情况,因而比较复杂.

在由三次 Bezier 曲线旋转面构成的物体与光线(作为直线)的求交点运算中,经典的方法是解一元六次方程,十分繁复.下面我们推导一种较为简单直接的方法,将运算归结为求解一元三次方程,提高了求交运算的效率.

收到日期:1994-09-10. 亢祝真:女,1970年10月生,计算机科学与工程系,硕士研究生.

1 算法推导

设构成景物曲面的一条三次 Bezier 曲线的构成如下：

设给出的曲线通过点列 P_0、P_1、…、P_n，其特征多边形顶点为 Q_0、Q_1、…、Q_{3n}. 点列 P 其 n 个点，点列 Q 其 $3n+1$ 个顶点，能构成 n 段三次 Bezier 曲线. 设整体参数为 t，在曲线的各段端点 P_0、P_1、…、Pn 上的参数值分别为 t_0、t_1、t_{n1}则第 i 段 Bezier 曲线表示为：

$$P_i(t) = \sum_{j=c}^{3} B_{j,3}(u) Q_{3(i-1)+j}$$

其中参数 u 的取值范围是：

$$0 \leqslant u = \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \leqslant 1$$

其中 $B_{j,3}(u)$是基底函数，也是各顶点位置向量之间的调 和函数.

现在空间坐标系{X、Y、Z}的 YZ 平面的第 I 象限，取特征多边形顶点为 Q_0、Q_1、Q_2、Q_3 四个点，给出一条三次 Bezier 曲线(Q_0、Q_1、Q_2、Q_3). 四个点的坐标分别表示为(y_0,z_0)，(y_1,z_1)，(y_2,z_2)和(y_3,z_3). 现设曲线 L 为三次 Bezier 曲线(Q_0、Q_1、Q_2、Q_3)将 y_0，y_1，y_2，y_3 坐标开平方后所得曲线，将 L 绕 Z 轴旋转，生成一广义旋转面，表示如下：

$$\begin{cases} kx^2 + y^2 = \sum_{j=0}^{3} B_j(u) Q_{jy} = \sum_{j=0}^{3} B_j(u) y_j \\ z = \sum_{j=c}^{3} Bj(u) Q_{jz} = \sum_{j=0}^{3} B_j(u) z_j \end{cases} \tag{1}$$

其中，$0 \leqslant u \leqslant 1$，$0 \leqslant k \leqslant 1$.

取矩阵 M 有：

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

取矩阵变换为：

$$\begin{aligned} P_3(t) &= [B_{0,3}(u) B_{1,3}(u) B_{2,3}(u) B_{3,3}(u)][Q_0 Q_1 Q_2 Q_3]^T \\ &= (u^3 u^2 u 1] M [Q_0 Q_1 Q_2 Q_3]^T \\ &= [u^3 u^2 u 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \\ &= (-Q_0 + 3Q_1 - 3Q_2 + Q_3)u^3 + (3Q_0 - 6Q_1 + 3Q_2)u^2 + \\ &\quad (-3Q_0 + 3Q_1)u + Q_0 \end{aligned}$$

那么，在公式(1)的第一个方程中有：

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{3} B_j(u) Q_j &= (-Q_0 + 3Q_1 - 3Q_2 + Q_3)u^3 + (3Q_0 - 6Q_1 + 3Q_2)u^2 \\ &\quad + (-3Q_0 + 3Q_1)u + Q_0 = k_3 u^3 + k_2 u^2 + k_1 u + k_0 \end{aligned}$$

其中 $k_j=(k_{jy},k_{jz}),j=0,1,2,3$
设代表光线的直线方程取为参数形式:

$$\begin{cases} x = x_0 + at' \\ y = y_0 + bt' \\ z = z_0 + ct' \end{cases} \tag{2}$$

为求交,将直线方程需代入旋转曲面方程.因此,将式(2)代入式(1):

$$\begin{cases} k(x_0 + at')^2 + (y_0 + bt')^2 = k_{3y}u^3 + k_{2y}u^2 + k_{1y}u + k_{0y} \\ z_0 + ct' = k_{3z}u^3 + k_{2z}u^2 + k_{1z}u + k_{0z} \end{cases} \tag{3}$$

现在,为了简化计算,将矩阵 M 变化为 M':

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在 $z=\sum\limits_{j=c}^{3}B_j(u)Q_{jz}=\sum\limits_{j=c}^{3}B_j(u)z_j=z_0+ct'$ 中以 M' 代入变换,有:

$$\begin{aligned}\sum_{j=c}^{3}B_j(u)Q_{jz} &= (-3Q_0 + 3Q_1)u + Q_0 \\ &= k_{1z}u + k_{0z}\end{aligned} \tag{4}$$

由此可见,通过取简化矩阵 M',将 z 坐标上的 u^3 和 u^2 的系数化为 0,使 z 表示为线性式,即:我们取特征多边形顶点 Q_0、Q_1、Q_2、Q_3 四个点在 Z 方向上满足线性分布.

因此,当取 Q 系列点在 Z 方向为线性分布时可以简化计算为一元三次方程求解.方程如下:

$$A_3u^3 + A_2u^2 + A_1u + A_0 = 0 \tag{5}$$

其中:

$$\begin{cases} A_3 = k_{3y} \\ A_2 = k_{2y} - \dfrac{(ka^2 + b^2)k_{1z}^2}{c^2} \\ A_1 = k_{1y} - \dfrac{2}{c}\left[\dfrac{(ka^2 + b^2)k_{1z}(k_{0z} - z_0)}{c} + (kax_0 + by_0)k_{1z}\right] \\ A_0 = k_{0y} - \left[kx_0^2 + y_0^2 + \dfrac{(ka^2 + b^2)(k_{0z} - z_0)^2}{c^2} + \dfrac{(kax_0 + by_0)(k_{0z} - z_0)}{c}\right] \end{cases}$$

设式(5)有解 u^*,需检验是否满足 $0\leqslant u^*\leqslant 1$.如果满足 $0\leqslant u^*\leqslant 1$,则:
$u'^*=\dfrac{k_{1z}u^*+k_{0z}-z_0}{c}$,即可求出交点,$(c\neq 0)$
如 $c=0$,有:

$$\begin{cases} u^* = \dfrac{z_0 - k_{0z}}{k_{1z}} \\ Y_0 = k_{3y}u^{*3} + k_{2y}u^{*2} + k_{1y}u^* + k_{0y} \\ (ka^2 + b^2)u'^2 + 2(kax_0 + by_0)u' + kx_0^2 + y_0^2 - y_0 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

由式(6)求出 u^*.

那么,交点的法向量为:

$$\vec{n}=\left[2kx^{*},2y^{*},-\frac{3k_{3y}u^{*2}+2k_{2y}u^{*}+k_{1y}}{k_{1z}}\right]$$

3 小 结

本文推导一种简单的求解光线与三次 Bezier 曲线旋转面交点的算法. 对经典矩阵加以重新定义,从而引入了多边形的特征顶点的线性分布,简化了对方程的求解过程,对大部分自由曲线旋转面都可以求交. 对于大于 4 次的 Bezier 曲线旋转面,则可考虑用细分 Bezier 曲线的控制多边形来求得直线与曲线交点的近似值,细分后的处理仍可采用本文推导的算法.

参 考 文 献

1 胡瑞安. 计算机辅助几何设计. 武汉:华中工学院出版社,1987,139～145

2 孙家广,陈玉健,辜凯宁. 计算机辅助几何造型技术. 北京:清华大学出版社,1990,14～30

3 David F, Roger J. Alan Adams. 计算机图学的数学基础. 北京:人民教育出版社,1981,110～115

4 朱一宁,金廷赞. 高度真实感三维图形的计算机生成. 浙江大学学报,1988,3(22):15～20

THE ALGORITHM OF FINDING INTERSECTION POINT FOR RAY TRACING TO TERNARY BEZIER CURVE ROTATING SURFACE

Kang Zhuzhen Lu Lina

(School of Electronics and Information Engineering)

Abstract

In order to generate high realistic images, ray tracing to the objects in the scene must be performed. In the method of ray tracing, how to determine the first intersection point between the ray and ternary Bezier curve rotating surface is a complex problem. In this thesis, a new simple and practical algorithm is proposed to solve the problem.

Keywords: *ternary* Bezier *curve rotationg surface* *ray tracing* *lincarly distribution*