数値計算ゼミ

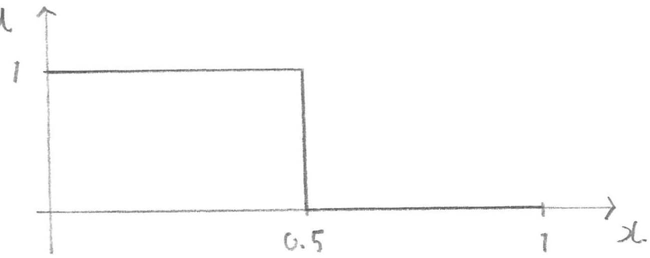
課題 その1

以下の線形の波動方程式を数値的に解け

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (2.6)$$

条件

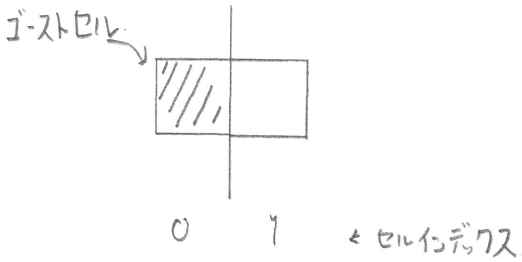
- $c=1$
- CFL数は 0.5 (何でもいいけど) ← CFL数は自分で調べること!
- セル数 100 (=IMaxとおく)、領域の長さは1 ($\Delta x = 0.01$)
- 初期条件



$x \leq 0.5 \rightarrow u=1$

$x > 0.5 \rightarrow u=1$

- 境界条件 → ノイマン (ディリクレでも可)



$$\begin{cases} u[0] = u[1] & \text{左境界} \\ u[IMax+1] = u[IMax] & \text{右境界} \end{cases}$$

- 数値流束は1次精度風上差分を使うこと

$$\tilde{f}^{n}_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[(f_{i+1}+f_i) - |c|(u_{i+1}-u_i)\right] \qquad (2.51)$$

・ざっくりやること

・格子の生成
↓
・初期条件を設定
↓
・数値流束を計算 ←
↓
・時間積分
↓
・境界処理 ループ
↓
・計算終了!

基本的に
移流方程式だろうが
Euler方程式だろうが
N S方程式だろうが この処理をする
プログラムを書くだけ

双曲型 or 放物型
の方程式

＊数値流束について

・流体の計算は数値流束をいかにして求めるかにかかっていると言っても過言ではない(はず)。
参考書にはいろいろ書いてありますが、とりあえず風上差分が出来れば良いと思います。

＊時間積分

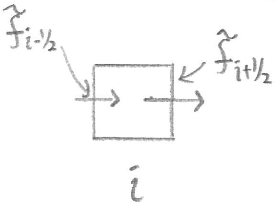
・まずは Euler陽解法で (陽解法なら Runge Kutta などが主流みたいです)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

u_i^n ← 時間インデックス (n)
← 空間インデックス (i) とすると

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{f}^n_{i-1/2} - \tilde{f}^n_{i+1/2}}{\Delta x} = 0$$

← セルインデックス i での保存則



$\tilde{f}$ ← 物理流束と区別するため に"～"をつけてます。

$$\therefore\ u_i^{n+1} = u_i^n - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\left(\tilde{f}^n_{i+1/2} - \tilde{f}^n_{i-1/2}\right) \qquad (2.45)$$

↑
この式を使えば、nステップ目の値を使って n+1ステップ目の値が求まる!