

争取未来开挖掘机

姜圣的追随者

2024.7.12

摘要

沉迷游戏的我无意间看见关于姜圣的新闻。深感愧疚，幼儿班的我就已经熟练的掌握了九九乘法表。而现在我却每天沉迷于提瓦特大陆，天天只知道打丘丘人。

从今天开始我也要努力学习数学，希望姜圣以后当上院士的时候能带我一起开发挖掘机。

(本书内容：仅有公式，定理及证明)

(作者文凭：中专学历，混的文凭，简单理解就是初中学历 (-。 -) !)

(公式及证明出处：公式及证明都是在别的书里参考过来的，极个别公式证明是我自己瞎写的。)

目录

1	三角函数	6
1.1	三角恒等式	6
1.2	双曲函数	6
2	不等式	7
3	排列组合	8
3.1	定义	8
3.2	运算	8
4	区间与映射	9
4.1	区间定义	9
4.2	领域定义	9
4.3	映射定义	9
5	函数与图像	11
5.1	函数的定义	11
5.2	函数的类型	11
5.3	函数的性质	11
5.3.1	函数的有界性	11
5.3.2	函数的单调性	12
5.3.3	函数的奇偶性	12
5.3.4	周期性	12
6	并集，交集	13
6.1	定义	13
6.2	运算	13
6.3	性质	13
6.4	gustus De Morgan 定理	14
6.5	德摩根律 定理	14
7	群，环，域	15
7.1	群	15
7.1.1	M1	15
7.1.2	M2	15

7.1.3	M3	15
7.1.4	M4	15
7.1.5	sdas	15
7.2	环	15
7.3	域	15
8	极限	16
8.1	数列极限	16
8.1.1	数列的定义	16
8.1.2	数列极限的定义	16
8.1.3	有界数列	16
8.1.4	收敛数列的有界性	16
8.1.5	收敛数列的保号性	16
8.2	函数极限	16
8.2.1	性质	16
8.3	运算	17
8.3.1	夹逼定理 (三明治定理)	17
9	导数	18
9.1	幂数, 指数, 对数	18
9.2	三角函数	18
9.3	倒数运算	19
10	积分	20
10.1	幂数, 指数, 对数	20
10.2	三角函数	20
10.3	积分运算	20
11	零散的一些	21
12	证明	23
12.1	1.2.1	23
12.2	1.2.2	23
12.3	1.2.3	23
12.4	1.2.4	23
12.5	8.1.1	24

12.6	8.1.2	24
12.7	8.2.1	24
12.8	8.3.4	24

1 三角函数

1.1 三角恒等式

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

1.2 双曲函数

定义

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

恒等式

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x \tag{1.2.1}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{1.2.2}$$

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh(2x) \tag{1.2.3}$$

$$\cosh x = 1 + 2 \sinh^2 \frac{x}{2} \tag{1.2.4}$$

2 不等式

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \quad (2.0.1)$$

$$|x + y| < |x| + |y| \quad (2.0.2)$$

$$\sin x < x < \tan x \quad (2.0.3)$$

伯努利不等式

$$(1 + x)^n \leq 1 + nx \quad (2.0.4)$$

3 排列组合

3.1 定义

$$\mathbb{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (3.1.1)$$

$$\mathbb{C}_n^k = \frac{\mathbb{A}_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3.1.2)$$

3.2 运算

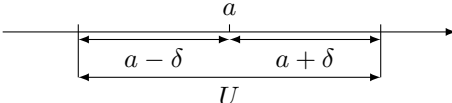
4 区间与映射

4.1 区间定义

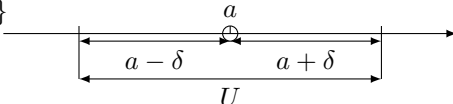
$$\text{区间定义} \begin{cases} (a, b) = \{x | a < x < b\} \\ [a, b] = \{x | a \leq x \leq b\} \\ (a, b] = \{x | a < x \leq b\} \\ (a, +\infty) = \{x | a < x\} \end{cases}$$

4.2 领域定义

点 a 的领域

$$U(a, \delta) = \begin{cases} \{x | a - \delta < x < a + \delta\} \\ \{x | |x - a| < \delta\} \end{cases}$$


点 a 的去心领域

$$\dot{U}(a, \delta) = \begin{cases} \{x | a - \delta < x < a + \delta \wedge x \neq a\} \\ \{x | 0 < |x - a| < \delta\} \end{cases}$$


点 a 的左领域 $(a - \delta, a)$

点 a 的右领域 $(a, a + \delta)$

4.3 映射定义

定义: X 与 Y 是两个非空集合, 如果存在一个法则对任一 $x \in X$, 都有确定的 y 与之对应。则称 f 为从 X 到 Y 的一个映射。

记作 $f: X \rightarrow Y$

$$f(x) = y \quad \begin{cases} \text{定义域 } (D_f) = X & x\text{-原像} \\ \text{值域 } (R_f) = \{f(x) | x \in X\} & y\text{-像} \end{cases}$$

$$\text{映射类型} \left\{ \begin{array}{ll} \text{满射:} & R_f = Y \\ \text{单射:} & x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \\ \text{一一映射:} & \text{即使满射又是单射} \Leftrightarrow \text{逆映射:} \begin{cases} f(x) = y \\ f^{-1}(y) = x \end{cases} \\ \text{复合映射:} & g \circ f \Leftrightarrow g[f(x)] \begin{cases} f: X \rightarrow Y_1 \\ g: Y_2 \rightarrow Z \\ g \circ f: X \rightarrow Z \quad (Y_1 \subset Y_2) \end{cases} \end{array} \right.$$

5 函数与图像

5.1 函数的定义

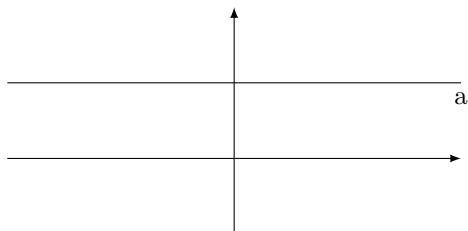
设数集 $D \in R$ 的映射

$$f : D \rightarrow R$$

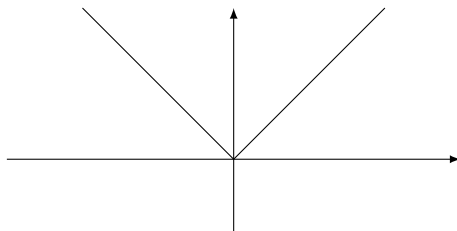
称 f 为定义在 D 上的函数, 记为

$$y = f(x) \{x \in D\}$$

5.2 函数的类型

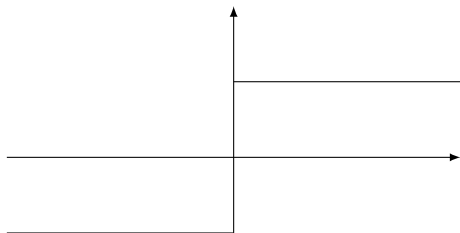


$$\text{常函数 } f(x) = a \{a \in R\}$$



$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



$$|x| = x \operatorname{sgn} x$$

5.3 函数的性质

5.3.1 函数的有界性

$$f : D \rightarrow R \{D \subset R\} \begin{cases} \text{有界} \begin{cases} \text{有上界} \begin{cases} \exists k_1, \text{ 使 } f(x) \leq k_1, \forall x \in D \\ \text{有下界} \begin{cases} \exists k_1, \text{ 使 } f(x) \geq k_1, \forall x \in D \end{cases} \end{cases} \\ \text{无界} \begin{cases} \text{无上界} \begin{cases} \forall K_1, \exists x \in D \text{ 使, } f(x) \geq k_1 \\ \text{无下界} \begin{cases} \forall K_1, \exists x \in D \text{ 使, } f(x) \leq k_1 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

5.3.2 函数的单调性

单调增加 若 $\{x_1, x_2 \in D\} \ x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \text{称} f(x) \text{在 } D \text{ 上单调增加} \\ f(x_1) > f(x_2) \text{称} f(x) \text{在 } D \text{ 上单调减少} \\ f(x_1) \leq f(x_2) \text{称} f(x) \text{在 } D \text{ 上单调非降} \\ f(x_1) \geq f(x_2) \text{称} f(x) \text{在 } D \text{ 上单调非增} \end{cases}$

5.3.3 函数的奇偶性

定义域

$$\forall x \in D \quad f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{偶函数} \\ -f(x) & \text{奇函数} \end{cases}$$

奇偶性运算

$$\text{奇函数} \times \text{奇函数} = \text{偶函数} \quad (5.3.1)$$

$$\text{奇函数} \times \text{偶函数} = \text{奇函数} \quad (5.3.2)$$

$$\text{偶函数} \times \text{偶函数} = \text{偶函数} \quad (5.3.3)$$

5.3.4 周期性

Def: $f(x+L) = f(x) \{L > 0 \text{ 常数}, \forall x \in D\} \Rightarrow f(x) \text{ 为 } L \text{ 的周期函数}$

6 并集, 交集

6.1 定义

(\vee 或, \wedge 与)

$$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$$

6.2 运算

$$\text{运算满足} \left\{ \begin{array}{l} \text{交换律} \left\{ \begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array} \right. \\ \text{结合律} \left\{ \begin{array}{l} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{array} \right. \\ \text{分配律} \left\{ \begin{array}{l} (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{array} \right. \\ \text{对偶律} \left\{ \begin{array}{l} (A \cup B)^C = A^C \cap B^C \\ (A \cap B)^C = A^C \cup B^C \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$A \cup A = A = A \cap A$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge A \supset B$$

$$A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

6.3 性质

性质 1.

$$A \subset (A \cup B) \quad A \supset (A \cap B) \quad (6.3.1)$$

性质 2.

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \quad (6.3.2)$$

性质 3.

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B \quad (6.3.3)$$

性质 4. ($n \in \mathbb{N}$)

$$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \cdots \cap (A \cup B_n) \quad (6.3.4)$$

性质 5. ($n \in \mathbb{N}$)

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n) \quad (6.3.5)$$

6.4 *gustus De Morgan* 定理

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$

6.5 德摩根律 定理

$$\left(\bigcup_{\alpha} E_{\alpha} \right)^C = \bigcap_{\alpha} (E_{\alpha}^C)$$

$$\left(\bigcap_{\alpha} E_{\alpha} \right)^C = \bigcup_{\alpha} (E_{\alpha}^C)$$

7 群，环，域

7.1 群

7.1.1 M1

7.1.2 M2

7.1.3 M3

7.1.4 M4

7.1.5 sdas

7.2 环

7.3 域

8 极限

8.1 数列极限

8.1.1 数列的定义

$Def: \{x_n\}: N^+ \rightarrow R$

$$x_n = f(n)$$

8.1.2 数列极限的定义

$Def: \{x_n\}, n \in N^+, \exists a, \forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

极限存在，为收敛，不存在为发散

8.1.3 有界数列

若 $\exists M > 0, \{M \in \text{正数}\}$

使得 $\forall n, |x_n| \leq M$

则称数列 $\{x_n\}$ 为有界数列

8.1.4 收敛数列的有界性

收敛数列必有界 (8.1.1)

8.1.5 收敛数列的保号性

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 存在，且 $a > 0$ ，则 $\exists N > 0 \{N \in N^+\}$ 当 $n > N$ 时，都有 $x_n > 0$ (8.1.2)

8.2 函数极限

8.2.1 性质

极限的唯一性 (8.2.1)

8.3 运算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (8.3.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) \quad (8.3.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad (8.3.3)$$

8.3.1 夹逼定理 (三明治定理)

$$\begin{aligned} x_n \leq z_n \leq y_n \quad \forall b > N_0 \\ \text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

9 导数

9.1 幂数, 指数, 对数

$$\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1} \quad (9.1.1)$$

$$\frac{d}{dx} b^x = b^x \ln b \quad (9.1.2)$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad (9.1.3)$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad (9.1.4)$$

$$(9.1.5)$$

9.2 三角函数

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad (9.2.1)$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (9.2.2)$$

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x \quad (9.2.3)$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad (9.2.4)$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x \quad (9.2.5)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}} \quad (9.2.6)$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x \quad (9.2.7)$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \quad (9.2.8)$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x \quad (9.2.9)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad (9.2.10)$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \quad (9.2.11)$$

9.3 倒数运算

$$A = B \quad (9.3.1-1)$$

$$C = D \quad (9.3.1-2)$$

10 积分

10.1 幂数, 指数, 对数

$$\int x^a dx = \frac{1}{a-1} x^{a-1} + C \quad (10.1.1)$$

$$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + C \quad (10.1.2)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (10.1.3)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad (10.1.4)$$

10.2 三角函数

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (10.2.1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \quad (10.2.2)$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C \quad (10.2.3)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (10.2.4)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C \quad (10.2.5)$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C \quad (10.2.6)$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C \quad (10.2.7)$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec} x + C \quad (10.2.8)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan x + C \quad (10.2.9)$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C \quad (10.2.10)$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C \quad (10.2.11)$$

10.3 积分运算

11 零散的一些

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (11.0.1)$$

$$\begin{aligned} A_N &= \sum_{k=0}^n q^k & qA_N &= \sum_{k=1}^{n+1} q^k \\ A_N - qA_N &= \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1} \\ A_N &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

$$\log_{10} x = \lg_x \quad (11.0.2)$$

$$\log_e x = \ln_x \quad (11.0.3)$$

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y \quad (11.0.4)$$

$$\log_{(b^n)} x = \frac{1}{n} \log_b x \quad (11.0.5)$$

$$\log_b x^n = n \log_b x \quad (11.0.6)$$

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} \quad (11.0.7)$$

$$b^n = x \quad b^m = y$$

$$b^{n+m} = xy$$

$$\log_b xy = n + m = \log_b x + \log_b y$$

$$b^n = x$$

$$\log_b x = n$$

$$\frac{1}{n} \log_b x = 1 = \log_{(b^n)} x$$

$$b^1 = x^n \quad b^{\frac{1}{n}} = x$$

$$n \log_b x = 1 = \log_b x^n$$

$$\log_b x = \log_{c^{(\log_c b)}} c^{(\log_c x)} = \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

12 证明

12.1 1.2.1

$$\begin{aligned}\sinh x \cosh x &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sinh(2x)\end{aligned}$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$$

12.2 1.2.2

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \\ &= e^x \times e^{-x} \\ &= 1\end{aligned}$$

12.3 1.2.3

$$\begin{aligned}\cosh^2 x + \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \\ &= \cosh(2x)\end{aligned}$$

12.4 1.2.4

$$\begin{aligned}\cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ &= \sinh^2 x + 1 + \sinh^2 x \\ &= 2 \sinh^2 x + 1 \\ \cosh x &= 2 \sinh^2 \frac{x}{2} + 1\end{aligned}$$

12.5 8.1.1

$$\begin{aligned}
\varepsilon = 1, \exists N > 0, \text{ 当 } n > N \text{ 时 } |X_n - a| < 1 \\
|X_n| &= |(X_n - a) + a| \\
&\leq |x_n - a| + |a| \\
&\leq 1 + |a| \\
M &= \max\{|X_n|, |X_2|, \dots, |X_n|, 1 + |a|\} \\
\forall n, |X_n| &\leq M
\end{aligned}$$

12.6 8.1.2

12.7 8.2.1

反设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, 且 $a < b$

$$\varepsilon = \frac{b-a}{3} \begin{cases} \exists N_1, n > N_1, |x_n - a| < \frac{b-a}{3} \\ \exists N_2, n > N_2, |x_n - b| < \frac{b-a}{3} \end{cases}$$

$$N = \max\{N_1, N_2\}, n > N \Rightarrow \begin{cases} n > N_1 \\ n > N_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
b - a &= |(x_n - a) - (x_n - b)| \\
&\leq |x_n - a| + |x_n - b| \\
&< \frac{b-a}{3} + \frac{b-a}{3} \\
&< \frac{2(b-a)}{3}
\end{aligned}$$

12.8 8.3.4

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0 \\
&|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_1 \\
&|y_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_2 \\
&\text{令 } N = \max\{N_1, N_2, N_0\}, \text{ 则当 } n > N \text{ 时有} \\
&a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon \\
&|z_n - a| < \varepsilon \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a
\end{aligned}$$