争取未来开挖掘机

姜圣的追随者

2024.7.12

摘要

沉迷游戏的我无意间看见关于姜圣的新闻。深感愧疚，幼儿班的我就已经熟练的掌握了的九九乘法表。而现在我却每天沉迷于提瓦特大陆，天天只知道打丘丘人。

从今天开始我也要努力学习数学，希望姜圣以后当上院士的时候能带我一起开发挖掘机。

(本书内容：仅有公式，定理及证明)

(作者文凭：中专学历，混的文凭，简单理解就是初中学历（-。-）!)

(公式及证明出处：公式及证明都是在别的书里参考过来的，极个别公式证明是我自己瞎写的。)

目录

1 三角函数

1.1 三角恒等式

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

1.2 双曲函数

定义

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

恒等式

$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x \tag{1.2.1}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{1.2.2}$$

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = cosh(2x) \tag{1.2.3}$$

$$\cosh x = 1 + 2\sinh^2 \frac{x}{2} \tag{1.2.4}$$

2 不等式

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \tag{2.0.1}$$

$$|x + y| < |x| + |y| \tag{2.0.2}$$

$$\sin x < x < \tan x \tag{2.0.3}$$

伯努利不等式

$$(1 + x)^n \leqslant 1 + nx \tag{2.0.4}$$

3 排列组合

3.1 定义

$$\mathbb{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{3.1.1}$$

$$\mathbb{C}_n^k = \frac{\mathbb{A}_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{3.1.2}$$

3.2 运算

4 区间与映射

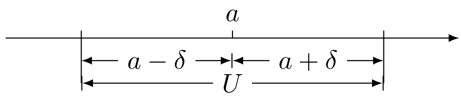
4.1 区间定义

$$\text{区间定义}\begin{cases}(a,b)=\{x|a<x<b\}\\ [a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}\\ (a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}\\ (a,+\infty)=\{x|a<x\}\end{cases}$$

4.2 领域定义

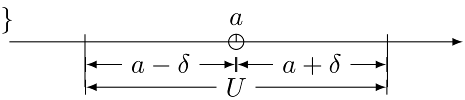
点 a 的领域

$$U(a,\delta)=\begin{cases}\{x|a-\delta<x<a+\delta\}\\ \{x|\ |x-a|<\delta\}\end{cases}$$



点 a 的去心领域

$$\mathring{U}(a,\delta)=\begin{cases}\{x|a-\delta<x<a+\delta\wedge x\neq 0\}\\ \{x|0<|x-a|<\delta\}\end{cases}$$



点 a 的左领域　　$(a-\delta,a)$

点 a 的右领域　　$(a,a+\delta)$

4.3 映射定义

定义:X 与 Y 是两个非空集合, 如果存在一个法则对任一 $x\in X$, 都有确定的 y 与之对应。则称 f 为从 X 到 Y 的一个映射。

$$\text{记作}\qquad f:X\to Y$$

$$f(x)=y\qquad\begin{cases}\text{定义域 }(D_f)=X & x\text{-原像}\\ \text{值域 }(R_f)=\{f(x)|x\in X\} & y\text{-像}\end{cases}$$

$$
\text{映射类型}\quad\begin{cases}
\text{满射:} & R_f = Y \\
\text{单射:} & x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \\
\text{一一映射:} & \text{即使满射又是单射} \Leftrightarrow \text{逆映射:} \begin{cases} f^(x) & = y \\ f^{-1}(y) & = x \end{cases} \\
\text{复合映射:} & g \circ f \Leftrightarrow g\left[f\left(x\right)\right] \begin{cases} f : X \to Y_1 \\ g : Y_2 \to Z \\ g \circ f : X \to Z \qquad (Y_1 \subset Y_2) \end{cases}
\end{cases}
$$

5 函数与图像

5.1 函数的定义

设数集 $D \in R$ 的映射

$$f : D \to R$$

称 f 为定义在 D 上的函数, 记为

$$y = f(x)\ \{x \in D\}$$

5.2 函数的性质

5.2.1 函数的有界性

$$f : D \to R\{D \subset R\}\begin{cases} \text{有界}\begin{cases} \text{有上界}\begin{cases}\exists k_1,\ \text{使} f(x) \leqslant k_1,\ \forall x \in D\end{cases} \\ \text{有下界}\begin{cases}\exists k_1,\ \text{使} f(x) \geqslant k_1,\ \forall x \in D\end{cases}\end{cases} \\ \text{无界}\begin{cases} \text{无上界}\begin{cases}\forall K_1,\ \exists x \in D\ \text{使},\ f(x) \geqslant k_1\end{cases} \\ \text{无下界}\begin{cases}\forall K_1,\ \exists x \in D\ \text{使},\ f(x) \leqslant k_1\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

5.2.2 函数的单调性

$$\text{单调增加 若}\{x_1, x_2 \in D\}\ x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2)\text{称}f(x)\text{在 D 上单调增加} \\ f(x_1) > f(x_2)\text{称}f(x)\text{在 D 上单调减少} \\ f(x_1) \leqslant f(x_2)\text{称}f(x)\text{在 D 上单调非降} \\ f(x_1) \geqslant f(x_2)\text{称}f(x)\text{在 D 上单调非增} \end{cases}$$

5.2.3 函数的奇偶性

定义域

$$\forall x \in D \qquad f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{偶函数} \\ -f(x) & \text{奇函数} \end{cases}$$

奇偶性运算

$$\text{奇函数} \times \text{奇函数} = \text{偶函数} \tag{5.2.1}$$

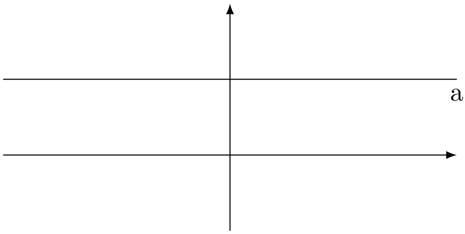
$$\text{奇函数} \times \text{偶函数} = \text{奇函数} \tag{5.2.2}$$

$$\text{偶函数} \times \text{偶函数} = \text{偶函数} \tag{5.2.3}$$

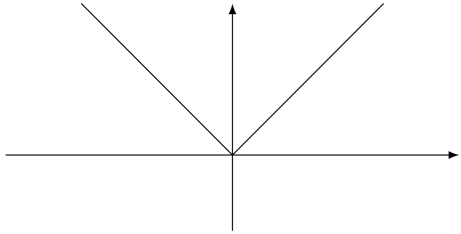
5.2.4 周期性

$Def: \quad f(x+L)=f(x)\{L>0\text{常数},\forall x\in D\}\Rightarrow f(x)$ 为 L 的周期函数

5.3 函数图像

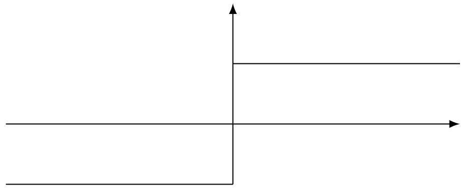


常函数 $f(x)=a\{a\in R\}$

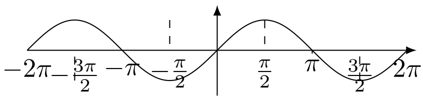


$f(x)=|x|$

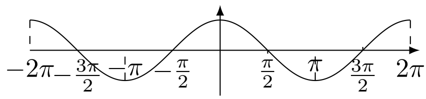
$$f(x)=sgn\ x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$



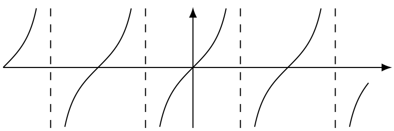
$|x|=x\cdot sgnx$



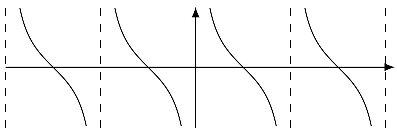
$\sin x$



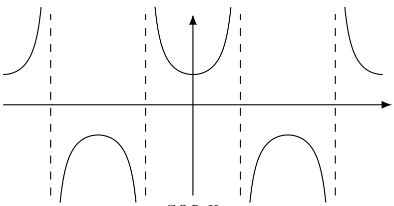
$\cos x$



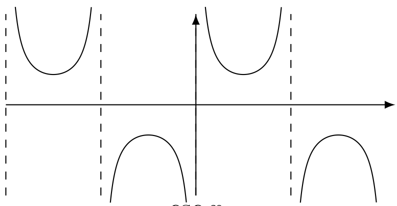
$\tan x$



$\cot x$



$\sec x$



$\csc x$

6 并集，交集

6.1 定义

$$(\vee \text{ 或},\wedge \text{ 与})$$
$$A\cup B=\{x\in A\vee x\in B\}$$
$$A\cap B=\{x\in A\wedge x\in B\}$$

6.2 运算

$$\text{运算满足}\begin{cases}\text{交换律}\begin{cases}A\cup B &= B\cup A\\ A\cap B &= B\cap A\end{cases}\\ \text{结合律}\begin{cases}(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)\\ (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)\end{cases}\\ \text{分配律}\begin{cases}(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)\\ (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)\end{cases}\\ \text{对偶律}\begin{cases}(A\cup B)^C=A^C\cap B^C\\ (A\cap B)^C=A^C\cup B^C\end{cases}\end{cases}$$

$$A\cup A=A=A\cap A$$
$$A=B\Leftrightarrow A\subset B\wedge A\supset B$$
$$A\cup\varnothing=A\qquad A\cap\varnothing=\varnothing$$

6.3 性质

性质 1.

$$A\subset(A\cup B)\qquad A\supset(A\cap B)\tag{6.3.1}$$

性质 2.

$$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subset B\tag{6.3.2}$$

性质 3.

$$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subset B\tag{6.3.3}$$

性质 4. $(n\in N\ )$

$$A\cup(B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_n)=(A\cup B_1)\cap(A\cup B_2)\cap\cdots\cap(A\cup B_n)\tag{6.3.4}$$

性质 5. $(n\in N\ )$

$$A\cap(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n)=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\cdots\cup(A\cap B_n)\tag{6.3.5}$$

6.4 gustus De Morgan 定理

$$\neg(A \lor B) \Leftrightarrow (\neg A) \land (\neg B)$$

$$\neg(A \land B) \Leftrightarrow (\neg A) \lor (\neg B)$$

6.5 德摩根律 定理

$$\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^C = \bigcap_\alpha (E_\alpha^C)$$

$$\left(\bigcap_\alpha E_\alpha\right)^C = \bigcup_\alpha (E_\alpha^C)$$

7 群，环，域

7.1 群

7.1.1 M1

7.1.2 M2

7.1.3 M3

7.1.4 M4

7.1.5 sdas

7.2 环

7.3 域

8 极限

8.1 数列极限

8.1.1 数列的定义

$Def:\ \ \{x_n\}: N^+ \to R$

$$x_n = f(n)$$

8.1.2 数列极限的定义

$Def:\ \{x_n\},\ n \in N^+, \exists a,\ \forall \varepsilon > 0, \exists N,\ n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

极限存在，为收敛，不存在为发散

8.1.3 极限的唯一性

$$\text{数列收敛，极限的唯一性} \tag{8.1.1}$$

8.1.4 有界数列

若$\exists M > 0, \{M \in \text{正数}\}$

使得$\forall n, \quad |x_n| \leqslant M$

则称数列 $\{x_n\}$ 为有界数列

8.1.5 收敛数列的有界性

$$\text{收敛数列必有界} \tag{8.1.2}$$

8.1.6 收敛数列的保号性

$$\text{如果} \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 存在，且 } a > 0, \text{ 则 } \exists N > 0\{N \in N^+\} \text{ 当 } n > N \text{ 时，} \Leftrightarrow x_n > 0 \tag{8.1.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b, a < b,\ \exists N, n > N, a_n < b_n \tag{8.1.4}$$

8.1.7 收敛数列和子数列

$\{x_n\}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$
证明 $K = N\ k > K$

$n_k > n_K \geqslant N$

$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$

8.2 函数极限

8.2.1 极限的定义

$$Def: \forall\varepsilon > 0 \begin{cases} \exists X > 0 \begin{cases} \text{当}x > X & \text{时都有} & |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \\ \text{当}x < -X & \text{时都有} & |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A \\ \text{当}\ |x| > X & \text{时都有} & |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \end{cases} \\ \exists\delta > 0 \begin{cases} \text{当}x_0 < x < x_0 + \delta, \text{时}\ |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A \\ \text{当}x_0 - \delta < x < x_0, \text{时}\ |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A \\ \text{当}0 < |x - x_0| < \delta, \text{时}\ |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \end{cases} \end{cases}$$

注意 1

定义中 $0 < |x - x_0|$ 表示 $x \neq x_0$ 讨论 $x \to x_0$, 只考虑 $x \neq x_0$

注意 2

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在与 $f(x_0)$ 是否有定义取什么值无关。

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\text{存在} \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \tag{8.2.1}$$

图

8.2.2 极限的性质

1 函数的极限的唯一性

如果 $\lim f(x)$ 存在必唯一。

2 局部有界性

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow \exists M > 0, \delta > 0\text{使}0 < |x - x_0| < \delta, |f(x)| \leqslant M$

3 保号性

$\lim\limits_{x\to x_0} = A,\ A>0, \Rightarrow \exists\delta>0,$ 当$, 0<|x-x_0|<\delta$时$f(x)>0$

4 函数极限与数列极限的关系

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为 $f(x)$ 定义域的任一收敛于 x_0 的数列，则满足 $x_n\neq x_0$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，$x_n\to x_0$

8.3 无穷小与无穷大

8.3.1 无穷小定义

$Def:$ 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$则称$f(x)$为$x\to x_0$时的无穷小

$$Def:\forall\varepsilon>0\begin{cases}\exists X>0\begin{cases}\text{当}x>X & \text{时}\ |f(x)-0|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\\ \text{当}x<-X & \text{时}\ |f(x)-0|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0\\ \text{当}\ |x|>X & \text{时}\ |f(x)-0|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0\end{cases}\\ \exists\delta>0\begin{cases}\text{当}x_0<x<x_0+\delta,\text{时}\ |f(x)-0|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=0\\ \text{当}x_0-\delta<x<x_0,\text{时}\ |f(x)-0|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=0\\ \text{当}0<|x-x_0|<\delta,\text{时}\ |f(x)-0|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0\end{cases}\end{cases}$$

8.3.2 函数极限与无穷小的关系

$$\text{在自变量的同一变化中。}\alpha\text{ 为无穷小。}\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha \tag{8.3.1}$$

8.3.3 无穷大与无穷小的关系

在自变量同一变化过程中

$$\text{如果 } f(x) \text{ 为无穷大，则 } \tfrac{1}{f(x)} \text{ 为无穷小。} \tag{8.3.2}$$

$$\text{如果 } f(x) \text{ 为无穷小，切 } f(x)\neq 0\text{，则 } \tfrac{1}{f(x)} \text{ 为无穷小。} \tag{8.3.3}$$

8.3.4 无穷大定义

$$
Def:\forall M>0\begin{cases}\exists X>0\begin{cases}\text{当}x>X\begin{cases}f(x)>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\\f(x)<-M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\\|f(x)|>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty\end{cases}\\\text{当}x<-X\begin{cases}f(x)>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\\f(x)<M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\\|f(x)|>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty\end{cases}\\\text{当}\ |x|>X\begin{cases}f(x)>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty\\f(x)<-M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty\\|f(x)|>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\end{cases}\end{cases}\\\exists\delta>0\begin{cases}\text{当}x_0-\delta<x<x_0\begin{cases}f(x)>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty\\f(x)<-M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty\\|f(x)|>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty\end{cases}\\\text{当}x_0<x<x_0+\delta\begin{cases}f(x)>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty\\f(x)<-M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty\\|f(x)|>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty\end{cases}\\\text{当}0<|x-x_0|<\delta\begin{cases}f(x)>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty\\f(x)<-M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty\\|f(x)|>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\end{cases}\end{cases}\end{cases}
$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty,\ \text{直线}x=x_0\text{是}y=f(x)\text{垂直渐进线}$$

8.4 运算

8.4.1 有限个无穷小的和仍为无穷小

$$\text{设}\ \gamma=\alpha+\beta$$

$$\alpha\ \text{和}\ \beta\ \text{同为}\ x\to x_0\ \text{时的无穷小}$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_1>0,\ \text{当}\ 0<|x-x_0|<\delta_1\ \text{时，有}\ |\alpha|<\tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_2>0,\ \text{当}\ 0<|x-x_0|<\delta_2\ \text{时，有}\ |\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\delta=min\{\delta_1,\delta_2\},\ \text{当}\ 0<|x-x_0|<\delta\ \text{时}$$
$$0<|x-x_0|<\delta_1, 0<|x-x_0|<\delta_2\ \text{同时满足}$$
$$\text{即}\ |\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}, |\beta|<\frac{\varepsilon}{2}\ \text{同时成立}$$
$$|\gamma|=|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

8.4.2 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小

$$\text{设}\ \alpha\ \text{为}\ x\to x_0\ \text{时的一个无穷小}$$
$$g(x)\ \text{为}\ x_0\ \text{的一个去心邻域}\ \mathring{U}(x_0,\delta_1)\ \text{有界}$$
$$f(x)=g(x)\alpha$$
$$\text{证}\ f(x)\ \text{为}\ x\to x_0\ \text{时的无穷小}$$
$$\text{因为}\ g(x)\text{在}\mathring{U}(x_0,\delta_1)\ \text{有界}$$
$$\exists M>0, \text{当}0<|x-x_0|<\delta_1\ \text{时}\ |g(x)|<M$$
$$\text{因为}\ \alpha\ \text{是}\ x\to x_0\ \text{的无穷小}$$
$$\exists\delta_2>0\text{当}0<|x-x_0|<\delta_2\ \text{时}\ |\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}<\varepsilon$$
$$\text{取}\ \delta=min\{delta_,\delta_2\}\ \text{当}\ 0<|x-x_0|<\delta\ \text{时}$$
$$|g(x)|\geqslant M, |\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}\ \text{同时成立}$$
$$|g(x)\alpha|=|g(x)|\ \ |\alpha|<M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

推论 1. 常数与无穷小的乘积为无穷小

推论 2. 有限个无穷小的乘积为无穷小

8.4.3 极限的四则运算

$\lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B$

$$\lim\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim f(x)\pm\lim g(x) \tag{8.4.1}$$
$$\lim\left(f(x)g(x)\right)=\lim f(x)\lim g(x) \tag{8.4.2}$$
$$\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \tag{8.4.3}$$

8.4.4 夹逼定理 (三明治定理)

$$\begin{aligned}&x_n\leqslant z_n\leqslant y_n \qquad \forall b>N_0\\ &\text{若}\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=a\text{则}\lim_{n\to\infty}z_n=a\end{aligned} \tag{8.4.4}$$

9 导数

9.1 幂数，指数，对数

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}x^a = ax^{a-1} \tag{9.1.1}$$
$$\frac{d}{\mathrm{d}x}b^x = b^x \ln b \tag{9.1.2}$$
$$\frac{d}{\mathrm{d}x}e^x = e^x \tag{9.1.3}$$
$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{x} \tag{9.1.4}$$
$$\tag{9.1.5}$$

9.2 三角函数

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x \tag{9.2.1}$$
$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{9.2.2}$$
$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\csc x = -\csc x \cot x \tag{9.2.3}$$
$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x \tag{9.2.4}$$
$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\sec x = \sec x \tan x \tag{9.2.5}$$
$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \tag{9.2.6}$$
$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\tan x = \sec^2 x \tag{9.2.7}$$
$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\arctan = \frac{1}{1+x^2} \tag{9.2.8}$$
$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\cot x = -\csc^2 x \tag{9.2.9}$$
$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\sinh x = \cosh x \tag{9.2.10}$$
$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\cosh x = \sinh x \tag{9.2.11}$$

9.3 倒数运算

$$A = B \tag{9.3.1-1}$$

$$C = D \tag{9.3.1-2}$$

10 积分

10.1 幂数，指数，对数

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{1}{a-1} x^{a-1} + C \tag{10.1.1}$$

$$\int b^x \mathrm{d}x = \frac{b^x}{\ln b} + C \tag{10.1.2}$$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C \tag{10.1.3}$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln x + C \tag{10.1.4}$$

10.2 三角函数

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C \tag{10.2.1}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C \tag{10.2.2}$$

$$\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C \tag{10.2.3}$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C \tag{10.2.4}$$

$$\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C \tag{10.2.5}$$

$$\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C \tag{10.2.6}$$

$$\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C \tag{10.2.7}$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x = \operatorname{arcsec} x + C \tag{10.2.8}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \tan x + C \tag{10.2.9}$$

$$\int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C \tag{10.2.10}$$

$$\int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + C \tag{10.2.11}$$

10.3 积分运算

11 零散的一些

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{11.0.1}$$

$$A_N = \sum_{k=0}^{n} q^k \qquad qA_N = \sum_{k=1}^{n+1} q^k$$

$$A_N - qA_N = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}$$

$$A_N = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\log_{10} x = \lg_x \tag{11.0.2}$$

$$\log_e x = \ln_x \tag{11.0.3}$$

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y \tag{11.0.4}$$

$$\log_{(b^n)} x = \frac{1}{n} \log_b x \tag{11.0.5}$$

$$\log_b x^n = n \log_b x \tag{11.0.6}$$

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} \tag{11.0.7}$$

$$b^n = x \qquad b^m = y$$

$$b^{n+m} = xy$$

$$\log_b xy = n + m = \log_b x + \log_b y$$

$$b^n = x$$

$$\log_b x = n$$

$$\frac{1}{n} \log_b x = 1 = \log_{(b^n)} x$$

$$b^1 = x^n \qquad b^{\frac{1}{n}} = x$$

$$n \log_b x = 1 = \log_b x^n$$

$$\log_b x = log_{c^{(\log_c b)}} c^{(\log_c x)} = \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

12 证明

12.1 1.2.1

$$\begin{aligned}\sinh x\cosh x &= \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sinh(2x)\\ \sinh(2x) &= 2\sinh x\cosh x\end{aligned}$$

12.2 1.2.2

$$\begin{aligned}\cosh^2 x-\sinh^2 x &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\\ &= e^x\times e^{-x}\\ &= 1\end{aligned}$$

12.3 1.2.3

$$\begin{aligned}\cosh^2 x+\sinh^2 x &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\\ &= \frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{4}\\ &= \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\\ &= \cosh(2x)\end{aligned}$$

12.4 1.2.4

$$\begin{aligned}\cosh(2x) &= \cosh^2 x+\sinh^2 x\\ &= \sinh^2 x+1+\sinh^2 x\\ &= 2\sinh^2 x+1\\ \cosh x &= 2\sinh^2\frac{x}{2}+1\end{aligned}$$

12.5 8.1.2

$$\varepsilon=1,\ \exists N>0,\ \text{当 n>N 时}\,|X_n-a|<1$$
$$\begin{aligned}|X_n|&=|(X_n-a)+a|\\&\leqslant|x_n-a|+|a|\\&\leqslant 1+|a|\end{aligned}$$
$$M=\max\{|X_n|,|X_2|,\dots,|X_n|,1+|a|\}$$
$$\forall n,\ |X_n|\leqslant M$$

12.6 8.1.3

1

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 且$a>0$
$\varepsilon=\frac{a}{2},\ \exists N>0, n>N$
$|x_n-a|<\varepsilon$
$|x_n-a|<\frac{a}{2}$
$-\frac{a}{2}<x_n-a<\frac{a}{2}$
$\frac{a}{2}<x_n<1$

2

用反证法，反设 $a<0$. 从某项起 $x_n<0$ 矛盾

12.7 8.1.4

$$x_n=b_n-a_n$$
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}a_n$$
$$\lim_{n\to\infty}x_n=b-a>0$$
$$\lim_{n\to\infty}x_n>0$$
$$b_n-a_n=x_n>0$$
$$b_n>a_n$$

12.8 8.1.1

$$
\begin{aligned}
&\text{反设} \lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} x_n = b, \text{且} a < b \\
&\varepsilon = \frac{b-a}{3} \begin{cases} \exists N_1,\ n > N_1,\ |x_n - a| < \frac{b-a}{3} \\ \exists N_2,\ n > N_2,\ |x_n - b| < \frac{b-a}{3} \end{cases} \\
&N = \max\{N_1, N_2\},\ n > N \Rightarrow \begin{cases} n > N_1 \\ n > N_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b - a &= |(x_n - a) - (x_n - b)| \\
&\leqslant |x_n - a| + |x_n - b| \\
&< \frac{b-a}{3} + \frac{b-a}{3} \\
&< \frac{2(b-a)}{3}
\end{aligned}
$$

12.9 8.2.1

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

$$
\begin{gathered}
\text{设} \lim_{x\to x_0} = A \\
0 < |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - A| < \varepsilon \\
0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \\
\begin{cases} \text{当} x_0 < x < x_0 + \delta \text{时} 0 < |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - A| < \varepsilon,\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A \\ \text{当} x_0 - \delta < x < x_0 \text{时} 0 < |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - A| < \varepsilon,\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A \end{cases} \\
\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A = \lim_{x\to x_0^-} f(x)
\end{gathered}
$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在 $\Leftarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

$$
\begin{gathered}
A = \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_o^+}, \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_1 > 0, x_0 < x < x_0 + \delta_1, |f(x) - A| < \varepsilon \\ \lim\limits_{x\to x_o^-}, \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_2 > 0, x_0 - \delta_2 < x < x_0, |f(x) - A| < \varepsilon \end{cases} \\
\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \\
0 < |x - x_0| < \delta \begin{cases} x > x_0, x_0 < x < x_0 + \delta \leqslant x_0 + \delta_1,\ |f(x) - A| < \varepsilon \\ x < x_0, x_0 - \delta_2 \leqslant x_0 + \delta < x < x_0,\ |f(x) - A| < \varepsilon \end{cases} \\
\lim_{x\to x_0} f(x) = A
\end{gathered}
$$

12.10 8.3.1

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = A \Rightarrow \begin{cases} \alpha\text{为}x \to x_0\text{时的无穷小} \\ f(x) = \alpha + A \end{cases}$$

设 $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A$, 记$f(x) - A = \alpha$

只需证 α 为无穷小。

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当$0 < |x - x_0| < \delta,$ 时 $|f(x) - A| < \varepsilon$

即 $|\alpha - 0| < \varepsilon$

α为$x \to x_0$时的无穷小

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = A \Leftarrow \begin{cases} \alpha\text{为}x \to x_0\text{时的无穷小} \\ f(x) = \alpha + A \end{cases}$$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,$ 当$0 < |x - x + 0| < \delta,\ |\alpha| < \varepsilon$

即 $|f(x) - A| < \varepsilon \ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

12.11 8.3.2

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

对 $f(x)$ 为 $x \to$ 时无穷大

对于 $M = \frac{1}{\varepsilon}$. 存在 $\delta > 0$

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

$|f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon}$

$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$

$\frac{1}{f(x)}$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小

12.12 8.4.2

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= [A + \alpha]\,[B + \beta] \\ &= AB + A\beta + B\alpha + \beta\alpha \\ &= AB + \gamma \qquad\qquad (\gamma\text{为无穷小}) \\ \lim\,[f(x)g(x)] &= AB + \gamma = \lim f(x) \lim g(x) \end{aligned}$$

12.13 8.4.4

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N_1$$

$$|y_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N_2$$

$$\text{令} N = \max\left\{N_1, N_2, N_0\right\}, \text{则当} n > N \text{时有}$$

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$$

$$|z_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \to \infty} z_n = a$$