

# 争取未来开挖掘机

姜圣的追随者

2024.7.12

## 摘要

沉迷游戏的我无意间看见关于姜圣的新闻。深感愧疚，幼儿班的我就已经熟练的掌握了九九乘法表。而现在我却每天沉迷于提瓦特大陆，天天只知道打丘丘人。

从今天开始我也要努力学习数学，希望姜圣以后当上院士的时候能带我一起开发挖掘机。

(本书内容：仅有公式，定理及证明)

(作者文凭：中专学历，混的文凭，简单理解就是初中学历 (-。 - ) !)

(公式及证明出处：公式及证明都是在别的书里参考过来的，极个别公式证明是我自己瞎写的。)

本书的 pdf, 及 latex 源码地址：<https://github.com/daidongchuixue/jiangping.git>

2024.8.31：本书几乎是跟着 B 站高数视频记录的。记录完，会作为第一版。(预计时间几个月)

然后参考数学分析书籍重新整理，为第二版。

# 目录

<b>1</b>	<b>三角函数</b>	<b>6</b>
1.1	三角恒等式 . . . . .	6
1.1.1	倍角公式 . . . . .	6
1.2	双曲函数 . . . . .	6
<b>2</b>	<b>不等式</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>排列组合</b>	<b>8</b>
3.1	定义 . . . . .	8
3.2	运算 . . . . .	8
<b>4</b>	<b>区间与映射</b>	<b>9</b>
4.1	区间定义 . . . . .	9
4.2	领域定义 . . . . .	9
4.3	映射定义 . . . . .	9
<b>5</b>	<b>函数与图像</b>	<b>11</b>
5.1	函数的定义 . . . . .	11
5.2	函数的性质 . . . . .	11
5.2.1	函数的有界性 . . . . .	11
5.2.2	函数的单调性 . . . . .	11
5.2.3	函数的奇偶性 . . . . .	11
5.2.4	周期性 . . . . .	12
5.3	函数图像 . . . . .	12
<b>6</b>	<b>并集, 交集</b>	<b>13</b>
6.1	定义 . . . . .	13
6.2	运算 . . . . .	13
6.3	性质 . . . . .	13
6.4	gustus De Morgan 定理 . . . . .	14
6.5	德摩根律 定理 . . . . .	14
<b>7</b>	<b>群, 环, 域</b>	<b>15</b>
7.1	群 . . . . .	15
7.1.1	M1 . . . . .	15

7.1.2	M2 . . . . .	15
7.1.3	M3 . . . . .	15
7.1.4	M4 . . . . .	15
7.1.5	sdas . . . . .	15
7.2	环 . . . . .	15
7.3	域 . . . . .	15
<b>8</b>	<b>极限</b>	<b>16</b>
8.1	数列极限 . . . . .	16
8.1.1	数列的定义 . . . . .	16
8.1.2	数列极限的定义 . . . . .	16
8.1.3	极限的唯一性 . . . . .	16
8.1.4	有界数列 . . . . .	16
8.1.5	收敛数列与有界性 . . . . .	16
8.1.6	收敛数列的保号性 . . . . .	16
8.1.7	收敛数列和子数列 . . . . .	17
8.2	函数极限 . . . . .	17
8.2.1	极限的定义 . . . . .	17
8.2.2	极限的性质 . . . . .	17
8.3	无穷小与无穷大 . . . . .	18
8.3.1	无穷小定义 . . . . .	18
8.3.2	函数极限与无穷小的关系 . . . . .	18
8.3.3	无穷大与无穷小的关系 . . . . .	18
8.3.4	无穷大定义 . . . . .	19
8.4	运算 . . . . .	19
8.4.1	有限个无穷小的和仍为无穷小 . . . . .	19
8.4.2	有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小 . . . . .	20
8.4.3	极限的四则运算 . . . . .	20
8.4.4	夹逼定理 (三明治定理) . . . . .	21
8.4.5	重要极限 . . . . .	21
8.4.6	无穷小比较 . . . . .	22
<b>9</b>	<b>导数</b>	<b>23</b>
9.1	幂数, 指数, 对数 . . . . .	23
9.2	三角函数 . . . . .	23

---

9.3	导数运算	24
10	积分	25
10.1	幂数, 指数, 对数	25
10.2	三角函数	25
10.3	积分运算	25
11	零散的一些	26
12	证明	28
12.1	1.2.1	28
12.2	1.2.2	28
12.3	1.2.3	28
12.4	1.2.4	28
12.5	8.1.2	29
12.6	8.1.4	29
12.7	8.1.5	29
12.8	8.1.1	30
12.9	8.2.1	30
12.10	8.3.1	31
12.11	8.3.2	31
12.12	8.4.2	31
12.13	8.4.8	32
12.14	8.4.9	32
12.15	8.4.10	33
12.16	8.4.11	33
12.17	8.4.12	33
12.18	8.4.13	33
12.19	8.4.14	34
12.20	8.4.15	34
12.21	8.4.16	34
12.22	8.4.17	34
12.23	8.4.19	35

## 1 三角函数

### 1.1 三角恒等式

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

#### 1.1.1 倍角公式

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

### 1.2 双曲函数

定义

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

恒等式

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x \tag{1.2.1}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{1.2.2}$$

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh(2x) \tag{1.2.3}$$

$$\cosh x = 1 + 2 \sinh^2 \frac{x}{2} \tag{1.2.4}$$

## 2 不等式

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \quad (2.0.1)$$

$$|x + y| < |x| + |y| \quad (2.0.2)$$

$$\sin x < x < \tan x \quad (2.0.3)$$

伯努利不等式

$$(1 + x)^n \leq 1 + nx \quad (2.0.4)$$

## 3 排列组合

### 3.1 定义

$$\mathbb{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (3.1.1)$$

$$\mathbb{C}_n^k = \frac{\mathbb{A}_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \quad (3.1.2)$$

### 3.2 运算



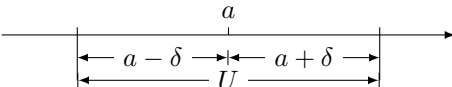
## 4 区间与映射

### 4.1 区间定义

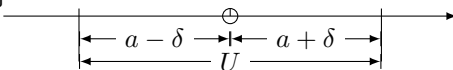
$$\text{区间定义} \begin{cases} (a, b) = \{x | a < x < b\} \\ [a, b] = \{x | a \leq x \leq b\} \\ (a, b] = \{x | a < x \leq b\} \\ (a, +\infty) = \{x | a < x\} \end{cases}$$

### 4.2 领域定义

点  $a$  的领域

$$U(a, \delta) = \begin{cases} \{x | a - \delta < x < a + \delta\} \\ \{x | |x - a| < \delta\} \end{cases}$$


点  $a$  的去心领域

$$\dot{U}(a, \delta) = \begin{cases} \{x | a - \delta < x < a + \delta \wedge x \neq a\} \\ \{x | 0 < |x - a| < \delta\} \end{cases}$$


点  $a$  的左领域  $(a - \delta, a)$

点  $a$  的右领域  $(a, a + \delta)$

### 4.3 映射定义

定义:  $X$  与  $Y$  是两个非空集合, 如果存在一个法则对任一  $x \in X$ , 都有确定的  $y$  与之对应。则称  $f$  为从  $X$  到  $Y$  的一个映射。

记作  $f : X \rightarrow Y$

$$f(x) = y \quad \begin{cases} \text{定义域 } (D_f) = X & x\text{-原像} \\ \text{值域 } (R_f) = \{f(x) | x \in X\} & y\text{-像} \end{cases}$$

$$\text{映射类型} \left\{ \begin{array}{ll} \text{满射:} & R_f = Y \\ \text{单射:} & x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \\ \text{一一映射:} & \text{即使满射又是单射} \Leftrightarrow \text{逆映射:} \begin{cases} f(x) = y \\ f^{-1}(y) = x \end{cases} \\ \text{复合映射:} & g \circ f \Leftrightarrow g[f(x)] \begin{cases} f: X \rightarrow Y_1 \\ g: Y_2 \rightarrow Z \\ g \circ f: X \rightarrow Z \quad (Y_1 \subset Y_2) \end{cases} \end{array} \right.$$

## 5 函数与图像

### 5.1 函数的定义

设数集  $D \in R$  的映射

$$f : D \rightarrow R$$

称  $f$  为定义在  $D$  上的函数, 记为

$$y = f(x) \{x \in D\}$$

### 5.2 函数的性质

#### 5.2.1 函数的有界性

$$f : D \rightarrow R \{D \subset R\} \begin{cases} \text{有界} \begin{cases} \text{有上界} \begin{cases} \exists k_1, \text{ 使 } f(x) \leq k_1, \forall x \in D \\ \text{有下界} \begin{cases} \exists k_1, \text{ 使 } f(x) \geq k_1, \forall x \in D \end{cases} \end{cases} \\ \text{无界} \begin{cases} \text{无上界} \begin{cases} \forall K_1, \exists x \in D \text{ 使, } f(x) \geq k_1 \\ \text{无下界} \begin{cases} \forall K_1, \exists x \in D \text{ 使, } f(x) \leq k_1 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

#### 5.2.2 函数的单调性

$$\text{单调增加 若 } \{x_1, x_2 \in D\} \ x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \text{ 称 } f(x) \text{ 在 } D \text{ 上单调增加} \\ f(x_1) > f(x_2) \text{ 称 } f(x) \text{ 在 } D \text{ 上单调减少} \\ f(x_1) \leq f(x_2) \text{ 称 } f(x) \text{ 在 } D \text{ 上单调非降} \\ f(x_1) \geq f(x_2) \text{ 称 } f(x) \text{ 在 } D \text{ 上单调非增} \end{cases}$$

#### 5.2.3 函数的奇偶性

定义域

$$\forall x \in D \quad f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{偶函数} \\ -f(x) & \text{奇函数} \end{cases}$$

奇偶性运算

$$\text{奇函数} \times \text{奇函数} = \text{偶函数} \quad (5.2.1)$$

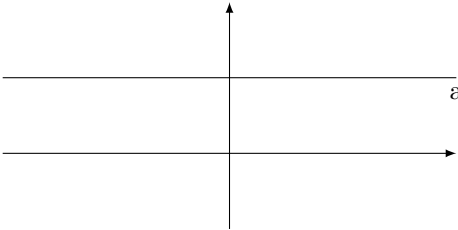
$$\text{奇函数} \times \text{偶函数} = \text{奇函数} \quad (5.2.2)$$

$$\text{偶函数} \times \text{偶函数} = \text{偶函数} \quad (5.2.3)$$

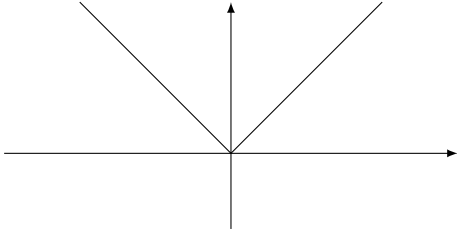
5.2.4 周期性

Def:  $f(x + L) = f(x)\{L > 0\text{常数}, \forall x \in D\} \Rightarrow f(x)$  为  $L$  的周期函数

5.3 函数图像

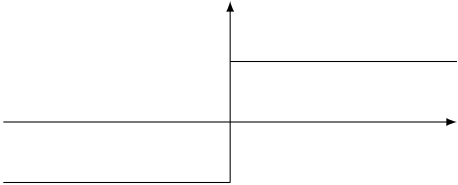


常函数  $f(x) = a\{a \in R\}$

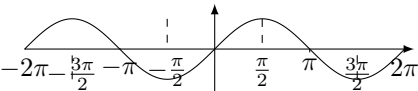


$f(x) = |x|$

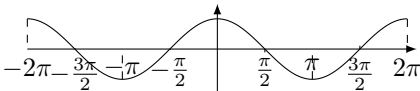
$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



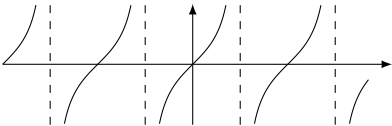
$$|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$$



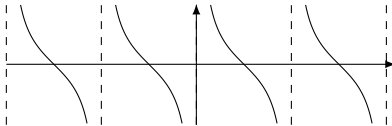
$\sin x$



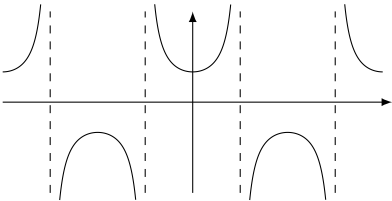
$\cos x$



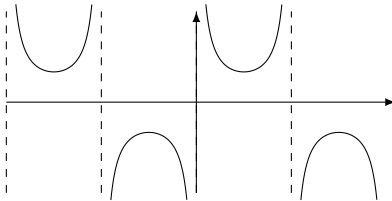
$\tan x$



$\cot x$



$\sec x$



$\csc x$

## 6 并集, 交集

### 6.1 定义

( $\vee$  或,  $\wedge$  与)

$$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$$

### 6.2 运算

$$\text{运算满足} \left\{ \begin{array}{l} \text{交换律} \left\{ \begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array} \right. \\ \text{结合律} \left\{ \begin{array}{l} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{array} \right. \\ \text{分配律} \left\{ \begin{array}{l} (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{array} \right. \\ \text{对偶律} \left\{ \begin{array}{l} (A \cup B)^C = A^C \cap B^C \\ (A \cap B)^C = A^C \cup B^C \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$A \cup A = A = A \cap A$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge A \supset B$$

$$A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

### 6.3 性质

性质 1.

$$A \subset (A \cup B) \quad A \supset (A \cap B) \quad (6.3.1)$$

性质 2.

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \quad (6.3.2)$$

性质 3.

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B \quad (6.3.3)$$

性质 4. ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \cdots \cap (A \cup B_n) \quad (6.3.4)$$

性质 5. ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n) \quad (6.3.5)$$

**6.4 *gustus De Morgan* 定理**

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$

**6.5 德摩根律 定理**

$$\left( \bigcup_{\alpha} E_{\alpha} \right)^C = \bigcap_{\alpha} (E_{\alpha}^C)$$

$$\left( \bigcap_{\alpha} E_{\alpha} \right)^C = \bigcup_{\alpha} (E_{\alpha}^C)$$

## 7 群，环，域

### 7.1 群

#### 7.1.1 M1

#### 7.1.2 M2

#### 7.1.3 M3

#### 7.1.4 M4

#### 7.1.5 sdas

### 7.2 环

### 7.3 域

## 8 极限

### 8.1 数列极限

#### 8.1.1 数列的定义

$Def: \{x_n\}: N^+ \rightarrow R$

$$x_n = f(n)$$

#### 8.1.2 数列极限的定义

$Def: \{x_n\}, n \in N^+, \exists a, \forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

极限存在，为收敛，不存在为发散

#### 8.1.3 极限的唯一性

$$\text{数列收敛，极限的唯一性} \quad (8.1.1)$$

#### 8.1.4 有界数列

若  $\exists M > 0, \{M \in \text{正数}\}$

使得  $\forall n, |x_n| \leq M$

则称数列  $\{x_n\}$  为有界数列

#### 8.1.5 收敛数列与有界性

$$\text{收敛数列必有界} \quad (8.1.2)$$

$$\text{单调有界数列必收敛} \quad (8.1.3)$$

#### 8.1.6 收敛数列的保号性

$$\text{如果 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ 存在, 且 } a > 0, \text{ 则 } \exists N > 0 \{N \in N^+\} \text{ 当 } n > N \text{ 时, } \Leftrightarrow x_n > 0 \quad (8.1.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, a < b, \exists N, n > N, a_n < b_n \quad (8.1.5)$$



## 8.1.7 收敛数列和子数列

$$\{x_n\}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$$

证明  $K = N \quad k > K$

$$n_k > n_K \geq N$$

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$$

## 8.2 函数极限

## 8.2.1 极限的定义

$$Def: \forall \varepsilon > 0 \left\{ \begin{array}{l} \exists X > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{当 } x > X \text{ 时都有 } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \\ \text{当 } x < -X \text{ 时都有 } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \\ \text{当 } |x| > X \text{ 时都有 } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \end{array} \right. \\ \exists \delta > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{当 } x_0 < x < x_0 + \delta, \text{ 时 } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \\ \text{当 } x_0 - \delta < x < x_0, \text{ 时 } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \\ \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ 时 } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \end{array} \right. \end{array} \right.$$

注意 1

定义中  $0 < |x - x_0|$  表示  $x \neq x_0$  讨论  $x \rightarrow x_0$ , 只考虑  $x \neq x_0$

注意 2

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  是否存在与  $f(x_0)$  是否有定义取什么值无关。

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 存在} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad (8.2.1)$$

图

## 8.2.2 极限的性质

1 函数的极限的唯一性

如果  $\lim f(x)$  存在必唯一。

2 局部有界性

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Rightarrow \exists M > 0, \delta > 0 \text{ 使 } 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x)| \leq M$$

3 保号性

$\lim_{x \rightarrow x_0} = A, A > 0, \Rightarrow \exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时  $f(x) > 0$

4 保序性

$f(x) \geq g(x), \lim f(x) = a, \lim g(x) = b$ , 则  $a \geq b$

4 函数极限与数列极限的关系

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在,  $\{x_n\}$  为  $f(x)$  定义域的任一收敛于  $x_0$  的数列, 则满足  $x_n \neq x_0$

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), x_n \rightarrow x_0$

## 8.3 无穷小与无穷大

### 8.3.1 无穷小定义

Def: 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  则称  $f(x)$  为  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小

$$Def: \forall \varepsilon > 0 \left\{ \begin{array}{l} \exists X > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{当 } x > X \text{ 时 } |f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \\ \text{当 } x < -X \text{ 时 } |f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \\ \text{当 } |x| > X \text{ 时 } |f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \end{array} \right. \\ \exists \delta > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{当 } x_0 < x < x_0 + \delta, \text{ 时 } |f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 0 \\ \text{当 } x_0 - \delta < x < x_0, \text{ 时 } |f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 0 \\ \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ 时 } |f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

### 8.3.2 函数极限与无穷小的关系

在自变量的同一变化中。 $\alpha$  为无穷小。 $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$  (8.3.1)

### 8.3.3 无穷大与无穷小的关系

在自变量同一变化过程中

如果  $f(x)$  为无穷大, 则  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷小。 (8.3.2)

如果  $f(x)$  为无穷小, 切  $f(x) \neq 0$ , 则  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷小。 (8.3.3)

## 8.3.4 无穷大定义

$$\begin{aligned}
 \text{Def : } \forall M > 0 \quad & \left\{ \begin{array}{l} \exists X > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{当 } x > X \left\{ \begin{array}{l} f(x) > M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ f(x) < -M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ |f(x)| > M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty \end{array} \right. \\ \text{当 } x < -X \left\{ \begin{array}{l} f(x) > M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \\ f(x) < -M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ |f(x)| > M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \end{array} \right. \\ \text{当 } |x| > X \left\{ \begin{array}{l} f(x) > M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \\ f(x) < -M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \\ |f(x)| > M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \exists \delta > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{当 } x_0 - \delta < x < x_0 \left\{ \begin{array}{l} f(x) > M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \\ f(x) < -M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \\ |f(x)| > M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \end{array} \right. \\ \text{当 } x_0 < x < x_0 + \delta \left\{ \begin{array}{l} f(x) > M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \\ f(x) < -M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \\ |f(x)| > M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty \end{array} \right. \\ \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \left\{ \begin{array}{l} f(x) > M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \\ f(x) < -M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \\ |f(x)| > M \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}
 \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 直线  $x = x_0$  是  $y = f(x)$  垂直渐近线

## 8.4 运算

## 8.4.1 有限个无穷小的和仍为无穷小

设  $\gamma = \alpha + \beta$

$\alpha$  和  $\beta$  同为  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时, 有  $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  时, 有  $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时

$0 < |x - x_0| < \delta_1, 0 < |x - x_0| < \delta_2$  同时满足

即  $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, |\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$  同时成立

$|\gamma| = |\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

#### 8.4.2 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小

设  $\alpha$  为  $x \rightarrow x_0$  时的一个无穷小

$g(x)$  为  $x_0$  的一个去心邻域  $\dot{U}(x_0, \delta_1)$  有界

$f(x) = g(x)\alpha$

证  $f(x)$  为  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小

因为  $g(x)$  在  $\dot{U}(x_0, \delta_1)$  有界

$\exists M > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时  $|g(x)| < M$

因为  $\alpha$  是  $x \rightarrow x_0$  的无穷小

$\exists \delta_2 > 0$  当  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  时  $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M} < \varepsilon$

取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时

$|g(x)| \geq M, |\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$  同时成立

$|g(x)\alpha| = |g(x)| |\alpha| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

推论 1. 常数与无穷小的乘积为无穷小

推论 2. 有限个无穷小的乘积为无穷小

#### 8.4.3 极限的四则运算

$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$

$$\lim (f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) \quad (8.4.1)$$

$$\lim (f(x)g(x)) = \lim f(x) \lim g(x) \quad (8.4.2)$$

$$\lim \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (8.4.3)$$

$$\lim [Cf(x)] = C \lim f(x) \quad (8.4.4)$$

$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n \quad (8.4.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n} = \begin{cases} \frac{a}{b} & m = n \\ \infty & m > n \\ 0 & m < n \end{cases} \quad (8.4.6)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &= u_0, \quad \lim_{u \rightarrow u_0} f(x) = A \\ \exists \delta_0 > 0, \quad x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta_0), \quad g(x) &\neq u_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] &= \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

#### 8.4.4 夹逼定理 (三明治定理)

$$\begin{aligned} x_n \leq z_n \leq y_n \quad \forall n > N_0 \\ \text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n &= a \end{aligned} \quad (8.4.8)$$

#### 8.4.5 重要极限

趋向 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (8.4.9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \quad (8.4.10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad (8.4.11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1 \quad (8.4.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad (8.4.13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \quad (8.4.14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (8.4.15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (8.4.16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{nx} = 1 \quad (8.4.17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (8.4.18)$$

趋向  $\infty$ 

$$\{x_n\} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (8.4.19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (8.4.20)$$

### 8.4.6 无穷小比较

$\frac{0}{0}$  型未定式

Def:  $\alpha, \beta$  是同一极限过程的无穷小。

- (1) 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$  则称  $\beta$  是  $\alpha$  的高阶无穷小, 记作  $\beta = o(\alpha)$
- (2) 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$  则称  $\beta$  是  $\alpha$  的底阶无穷小。
- (3) 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C$  则称  $\beta$  是  $\alpha$  的同阶无穷小。
- (4) 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C, k > 0$  则称  $\beta$  是  $\alpha$  的  $k$  阶无穷小。
- (5) 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$  则称  $\beta$  是  $\alpha$  的等价阶无穷小。

## 9 导数

### 9.1 幂数, 指数, 对数

$$\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1} \quad (9.1.1)$$

$$\frac{d}{dx} b^x = b^x \ln b \quad (9.1.2)$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad (9.1.3)$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad (9.1.4)$$

$$(9.1.5)$$

### 9.2 三角函数

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad (9.2.1)$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (9.2.2)$$

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x \quad (9.2.3)$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad (9.2.4)$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x \quad (9.2.5)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}} \quad (9.2.6)$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x \quad (9.2.7)$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \quad (9.2.8)$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x \quad (9.2.9)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad (9.2.10)$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \quad (9.2.11)$$

### 9.3 导数运算

$$A = B \quad (9.3.1-1)$$

$$C = D \quad (9.3.1-2)$$



## 10 积分

## 10.1 幂数, 指数, 对数

$$\int x^a dx = \frac{1}{a-1} x^{a-1} + C \quad (10.1.1)$$

$$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + C \quad (10.1.2)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (10.1.3)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad (10.1.4)$$

## 10.2 三角函数

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (10.2.1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \quad (10.2.2)$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C \quad (10.2.3)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (10.2.4)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C \quad (10.2.5)$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C \quad (10.2.6)$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C \quad (10.2.7)$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec} x + C \quad (10.2.8)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan x + C \quad (10.2.9)$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C \quad (10.2.10)$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C \quad (10.2.11)$$

## 10.3 积分运算

## 11 零散的一些

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (11.0.1)$$

---


$$\begin{aligned} A_N &= \sum_{k=0}^n q^k & qA_N &= \sum_{k=1}^{n+1} q^k \\ A_N - qA_N &= \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1} \\ A_N &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$


---

$$\log_{10} x = \lg_x \quad (11.0.2)$$

$$\log_e x = \ln_x \quad (11.0.3)$$

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y \quad (11.0.4)$$

$$\log_{(b^n)} x = \frac{1}{n} \log_b x \quad (11.0.5)$$

$$\log_b x^n = n \log_b x \quad (11.0.6)$$

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} \quad (11.0.7)$$


---

$$b^n = x \quad b^m = y$$

$$b^{n+m} = xy$$

$$\log_b xy = n + m = \log_b x + \log_b y$$


---

$$b^n = x$$

$$\log_b x = n$$

$$\frac{1}{n} \log_b x = 1 = \log_{(b^n)} x$$

---


$$b^1 = x^n \quad b^{\frac{1}{n}} = x$$

$$n \log_b x = 1 = \log_b x^n$$


---

$$\log_b x = \log_{c^{(\log_c b)}} c^{(\log_c x)} = \frac{\log_c x}{\log_c b}$$


---

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m$$


---

$$a^2 - b^2 = (a-b)(1+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{m=0}^{n-1} (a^{n-m} b^m) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

## 12 证明

## 12.1 1.2.1

$$\begin{aligned}
 \sinh x \cosh x &= \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \\
 &= \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sinh(2x) \\
 \sinh(2x) &= 2 \sinh x \cosh x
 \end{aligned}$$

## 12.2 1.2.2

$$\begin{aligned}
 \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \\
 &= e^x \times e^{-x} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

## 12.3 1.2.3

$$\begin{aligned}
 \cosh^2 x + \sinh^2 x &= \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 + \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} \\
 &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \\
 &= \cosh(2x)
 \end{aligned}$$

## 12.4 1.2.4

$$\begin{aligned}
 \cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\
 &= \sinh^2 x + 1 + \sinh^2 x \\
 &= 2 \sinh^2 x + 1 \\
 \cosh x &= 2 \sinh^2 \frac{x}{2} + 1
 \end{aligned}$$

## 12.5 8.1.2

$$\varepsilon = 1, \exists N > 0, \text{ 当 } n > N \text{ 时 } |X_n - a| < 1$$

$$|X_n| = |(X_n - a) + a|$$

$$\leq |x_n - a| + |a|$$

$$\leq 1 + |a|$$

$$M = \max\{|X_n|, |X_2|, \dots, |X_n|, 1 + |a|\}$$

$$\forall n, |X_n| \leq M$$

## 12.6 8.1.4

1

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 且  $a > 0$

$$\varepsilon = \frac{a}{2}, \exists N > 0, n > N$$

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

$$|x_n - a| < \frac{a}{2}$$

$$-\frac{a}{2} < x_n - a < \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} < x_n < 1$$

2

用反证法, 反设  $a < 0$ . 从某项起  $x_n < 0$  矛盾

## 12.7 8.1.5

$$x_n = b_n - a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b - a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$$

$$b_n - a_n = x_n > 0$$

$$b_n > a_n$$

## 12.8 8.1.1

反设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ , 且  $a < b$

$$\varepsilon = \frac{b-a}{3} \begin{cases} \exists N_1, n > N_1, |x_n - a| < \frac{b-a}{3} \\ \exists N_2, n > N_2, |x_n - b| < \frac{b-a}{3} \end{cases}$$

$$N = \max\{N_1, N_2\}, n > N \Rightarrow \begin{cases} n > N_1 \\ n > N_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b-a &= |(x_n - a) - (x_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| + |x_n - b| \\ &< \frac{b-a}{3} + \frac{b-a}{3} \\ &< \frac{2(b-a)}{3} \end{aligned}$$

## 12.9 8.2.1

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{存在} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

$$\text{设 } \lim_{x \rightarrow x_0} = A$$

$$0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in \dot{U}(x_0, \delta)$$

$$\begin{cases} \text{当 } x_0 < x < x_0 + \delta \text{ 时 } 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \\ \text{当 } x_0 - \delta < x < x_0 \text{ 时 } 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{存在} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

$$A = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, x_0 < x < x_0 + \delta_1, |f(x) - A| < \varepsilon \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0, x_0 - \delta_2 < x < x_0, |f(x) - A| < \varepsilon \end{cases}$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$$\begin{aligned} 0 < |x - x_0| < \delta \begin{cases} x > x_0, x_0 < x < x_0 + \delta \leq x_0 + \delta_1, |f(x) - A| < \varepsilon \\ x < x_0, x_0 - \delta_2 \leq x_0 + \delta < x < x_0, |f(x) - A| < \varepsilon \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \end{aligned}$$

## 12.10 8.3.1

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Rightarrow \begin{cases} \alpha \text{ 为 } x \rightarrow x_0 \text{ 时的无穷小} \\ f(x) = \alpha + A \end{cases}$$

设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 记  $f(x) - A = \alpha$

只需证  $\alpha$  为无穷小。

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$ , 时  $|f(x) - A| < \varepsilon$

即  $|\alpha - 0| < \varepsilon$

$\alpha$  为  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftarrow \begin{cases} \alpha \text{ 为 } x \rightarrow x_0 \text{ 时的无穷小} \\ f(x) = \alpha + A \end{cases}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$ ,  $|\alpha| < \varepsilon$

即  $|f(x) - A| < \varepsilon$   $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

## 12.11 8.3.2

设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

对  $f(x)$  为  $x \rightarrow$  时无穷大

对于  $M = \frac{1}{\varepsilon}$ . 存在  $\delta > 0$

当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时

$$|f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon$$

$\frac{1}{f(x)}$  为  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小

## 12.12 8.4.2

$$f(x)g(x) = [A + \alpha][B + \beta]$$

$$= AB + A\beta + B\alpha + \beta\alpha$$

$$= AB + \gamma \quad (\gamma \text{ 为无穷小})$$

$$\lim [f(x)g(x)] = AB + \gamma = \lim f(x) \lim g(x)$$

## 12.13 8.4.8

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_1$$

$$|y_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_2$$

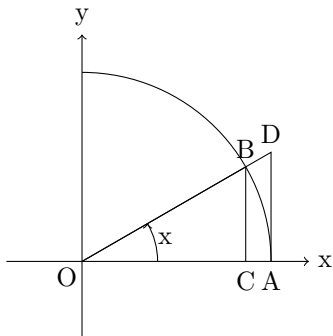
令  $N = \max \{N_1, N_2, N_0\}$ , 则当  $n > N$  时有

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$$

$$|z_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

## 12.14 8.4.9



$$OB = OA = 1$$

$$\triangle AOB \leq \text{扇形面积} \leq \triangle AOD$$

$$\frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \tan x$$

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

$$1 \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \geq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



## 12.15 8.4.10

$$\begin{aligned}
|1 - \cos x| &= 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \\
&\leq 2 \left( \frac{x}{2} \right)^2 \\
0 &\leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2} \\
\lim_{x \rightarrow 0} 0 &\leq \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} \\
0 &\leq \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \leq 0 \\
\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) &= 0 \\
\lim_{x \rightarrow 0} \cos x &= 1
\end{aligned}$$

## 12.16 8.4.11

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \\
&= 1
\end{aligned}$$

## 12.17 8.4.12

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

## 12.18 8.4.13

$$\begin{aligned}
x &= \sin t, \quad t = \arcsin x \\
x &\rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0 \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1
\end{aligned}$$

## 12.19 8.4.14

$$x = \tan t, \quad t = \arctan x$$

$$x \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = 1$$

## 12.20 8.4.15

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

## 12.21 8.4.16

$$e^x - 1 = t, \quad x = \ln(t+1)$$

$$x \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = 1$$

## 12.22 8.4.17

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{n \ln(1+x)} - 1}{n \ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \right) = 1$$

## 12.23 8.4.19

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m 1^{n-m} \left(\frac{1}{n}\right)^m = \sum_{m=0}^n C_n^m \left(\frac{1}{n}\right)^m \\
&= C_n^0 \left(\frac{1}{n}\right)^0 + C_n^1 \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \sum_{m=2}^n C_n^m \left(\frac{1}{n}\right)^m \\
&= 1 + 1 + \sum_{m=2}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{1}{n}\right)^m \\
&= 1 + 1 + \sum_{m=2}^n \frac{\overbrace{(n)(n-1)\cdots(n-m+1)}^m}{m!} \left(\frac{1}{n}\right)^m \\
&= 1 + 1 + \sum_{m=2}^n \frac{1}{m!} \left(\frac{n}{n}\right) \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdots \left(\frac{n-m+1}{n}\right) \\
&= 1 + 1 + \sum_{m=2}^n \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \\
x_{n+1} &= 1 + 1 + \sum_{m=2}^{n+1} \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n+1}\right) \\
x_n &< x_{n+1} \quad \text{单调增加} \\
x_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \frac{1}{2}} \\
&< 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\
&< 3 \quad \text{有界}
\end{aligned}$$