

争取未来开挖掘机

姜圣的追随者

2024.7.12

摘要

沉迷游戏的我无意间看见关于姜圣的新闻。深感愧疚，幼儿班的我就已经熟练的掌握了九九乘法表。而现在我却每天沉迷于提瓦特大陆，天天只知道打丘丘人。

从今天开始我也要努力学习数学，希望姜圣以后当上院士的时候能带我一起开发挖掘机。

(本书内容：仅有公式，定理及证明)

(作者文凭：中专学历，混的文凭，简单理解就是初中学历 (-。 -) !)

(公式及证明出处：公式及证明都是在别的书里参考过来的，极个别公式证明是我自己瞎写的。)

目录

1	三角函数	6
1.1	三角恒等式	6
1.2	双曲函数	6
2	不等式	7
3	排列组合	8
3.1	定义	8
3.2	运算	8
4	区间与映射	9
4.1	区间定义	9
4.2	领域定义	9
4.3	映射定义	9
5	函数与图像	11
5.1	函数的定义	11
5.2	函数的类型	11
5.3	函数的性质	12
5.3.1	函数的有界性	12
5.3.2	函数的单调性	12
5.3.3	函数的奇偶性	12
5.3.4	周期性	12
6	并集，交集	14
6.1	定义	14
6.2	运算	14
6.3	性质	14
6.4	gustus De Morgan 定理	15
6.5	德摩根律 定理	15
7	群，环，域	16
7.1	群	16
7.1.1	M1	16
7.1.2	M2	16

7.1.3	M3	16
7.1.4	M4	16
7.1.5	sdas	16
7.2	环	16
7.3	域	16
8	极限	17
8.1	数列极限	17
8.1.1	数列的定义	17
8.1.2	数列极限的定义	17
8.1.3	极限的唯一性	17
8.1.4	有界数列	17
8.1.5	收敛数列的有界性	17
8.1.6	收敛数列的保号性	17
8.1.7	收敛数列和子数列	18
8.2	函数极限	18
8.2.1	极限的定义	18
8.2.2	极限的性质	18
8.3	无穷小与无穷大	19
8.3.1	定义	19
8.4	运算	19
8.4.1	夹逼定理 (三明治定理)	19
9	导数	20
9.1	幂数, 指数, 对数	20
9.2	三角函数	20
9.3	倒数运算	21
10	积分	22
10.1	幂数, 指数, 对数	22
10.2	三角函数	22
10.3	积分运算	22
11	零散的一些	23

12 证明	25
12.1 1.2.1	25
12.2 1.2.2	25
12.3 1.2.3	25
12.4 1.2.4	25
12.5 8.1.2	26
12.6 8.1.3	26
12.7 8.1.4	26
12.8 8.1.1	27
12.9 8.2.1	27
12.108.3.1	28
12.118.4.4	28

1 三角函数

1.1 三角恒等式

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

1.2 双曲函数

定义

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

恒等式

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x \tag{1.2.1}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{1.2.2}$$

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh(2x) \tag{1.2.3}$$

$$\cosh x = 1 + 2 \sinh^2 \frac{x}{2} \tag{1.2.4}$$

2 不等式

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \quad (2.0.1)$$

$$|x + y| < |x| + |y| \quad (2.0.2)$$

$$\sin x < x < \tan x \quad (2.0.3)$$

伯努利不等式

$$(1 + x)^n \leq 1 + nx \quad (2.0.4)$$

3 排列组合

3.1 定义

$$\mathbb{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (3.1.1)$$

$$\mathbb{C}_n^k = \frac{\mathbb{A}_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3.1.2)$$

3.2 运算

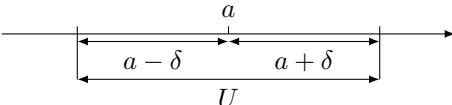
4 区间与映射

4.1 区间定义

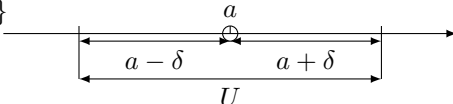
$$\text{区间定义} \begin{cases} (a, b) = \{x | a < x < b\} \\ [a, b] = \{x | a \leq x \leq b\} \\ (a, b] = \{x | a < x \leq b\} \\ (a, +\infty) = \{x | a < x\} \end{cases}$$

4.2 领域定义

点 a 的领域

$$U(a, \delta) = \begin{cases} \{x | a - \delta < x < a + \delta\} \\ \{x | |x - a| < \delta\} \end{cases}$$


点 a 的去心领域

$$\dot{U}(a, \delta) = \begin{cases} \{x | a - \delta < x < a + \delta \wedge x \neq a\} \\ \{x | 0 < |x - a| < \delta\} \end{cases}$$


点 a 的左领域 $(a - \delta, a)$

点 a 的右领域 $(a, a + \delta)$

4.3 映射定义

定义: X 与 Y 是两个非空集合, 如果存在一个法则对任一 $x \in X$, 都有确定的 y 与之对应。则称 f 为从 X 到 Y 的一个映射。

记作 $f: X \rightarrow Y$

$$f(x) = y \quad \begin{cases} \text{定义域 } (D_f) = X & x\text{-原像} \\ \text{值域 } (R_f) = \{f(x) | x \in X\} & y\text{-像} \end{cases}$$

$$\text{映射类型} \left\{ \begin{array}{ll} \text{满射:} & R_f = Y \\ \text{单射:} & x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \\ \text{一一映射:} & \text{即使满射又是单射} \Leftrightarrow \text{逆映射:} \begin{cases} f(x) = y \\ f^{-1}(y) = x \end{cases} \\ \text{复合映射:} & g \circ f \Leftrightarrow g[f(x)] \begin{cases} f: X \rightarrow Y_1 \\ g: Y_2 \rightarrow Z \\ g \circ f: X \rightarrow Z \quad (Y_1 \subset Y_2) \end{cases} \end{array} \right.$$

5 函数与图像

5.1 函数的定义

设数集 $D \in R$ 的映射

$$f : D \rightarrow R$$

称 f 为定义在 D 上的函数, 记为

$$y = f(x) \{x \in D\}$$

5.2 函数的类型

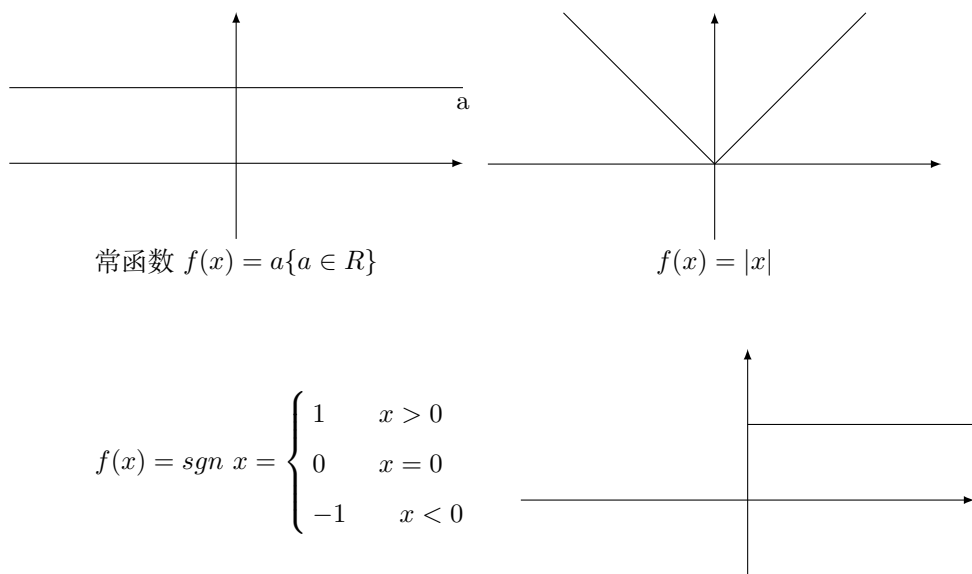


图 1: $|x| = x \operatorname{sgn} x$

图 2: $\sin x$

图 3: $\arcsin x$ 图 4: $\cos x$

5.3 函数的性质

5.3.1 函数的有界性

$$f: D \rightarrow R \{D \subset R\} \begin{cases} \text{有界} \begin{cases} \text{有上界} \begin{cases} \exists k_1, \text{ 使 } f(x) \leq k_1, \forall x \in D \\ \text{有下界} \begin{cases} \exists k_1, \text{ 使 } f(x) \geq k_1, \forall x \in D \end{cases} \end{cases} \\ \text{无界} \begin{cases} \text{无上界} \begin{cases} \forall K_1, \exists x \in D \text{ 使, } f(x) \geq k_1 \\ \text{无下界} \begin{cases} \forall K_1, \exists x \in D \text{ 使, } f(x) \leq k_1 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

5.3.2 函数的单调性

$$\text{单调增加 若 } \{x_1, x_2 \in D\} \ x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \text{ 称 } f(x) \text{ 在 } D \text{ 上单调增加} \\ f(x_1) > f(x_2) \text{ 称 } f(x) \text{ 在 } D \text{ 上单调减少} \\ f(x_1) \leq f(x_2) \text{ 称 } f(x) \text{ 在 } D \text{ 上单调非降} \\ f(x_1) \geq f(x_2) \text{ 称 } f(x) \text{ 在 } D \text{ 上单调非增} \end{cases}$$

5.3.3 函数的奇偶性

定义域

$$\forall x \in D \quad f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{偶函数} \\ -f(x) & \text{奇函数} \end{cases}$$

奇偶性运算

$$\text{奇函数} \times \text{奇函数} = \text{偶函数} \quad (5.3.1)$$

$$\text{奇函数} \times \text{偶函数} = \text{奇函数} \quad (5.3.2)$$

$$\text{偶函数} \times \text{偶函数} = \text{偶函数} \quad (5.3.3)$$

5.3.4 周期性

Def: $f(x+L) = f(x) \{L > 0 \text{ 常数}, \forall x \in D\} \Rightarrow f(x) \text{ 为 } L \text{ 的周期函数}$

图 5: $\arccos x$

图 6: $\tan x$

图 7: $\arctan x$

6 并集, 交集

6.1 定义

(\vee 或, \wedge 与)

$$A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}$$

6.2 运算

$$\text{运算满足} \left\{ \begin{array}{l} \text{交换律} \left\{ \begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array} \right. \\ \text{结合律} \left\{ \begin{array}{l} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{array} \right. \\ \text{分配律} \left\{ \begin{array}{l} (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{array} \right. \\ \text{对偶律} \left\{ \begin{array}{l} (A \cup B)^C = A^C \cap B^C \\ (A \cap B)^C = A^C \cup B^C \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$A \cup A = A = A \cap A$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge A \supset B$$

$$A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

6.3 性质

性质 1.

$$A \subset (A \cup B) \quad A \supset (A \cap B) \quad (6.3.1)$$

性质 2.

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \quad (6.3.2)$$

性质 3.

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B \quad (6.3.3)$$

性质 4. ($n \in \mathbb{N}$)

$$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \cdots \cap (A \cup B_n) \quad (6.3.4)$$

性质 5. ($n \in \mathbb{N}$)

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n) \quad (6.3.5)$$

6.4 *gustus De Morgan* 定理

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$

6.5 德摩根律 定理

$$\left(\bigcup_{\alpha} E_{\alpha} \right)^C = \bigcap_{\alpha} (E_{\alpha}^C)$$

$$\left(\bigcap_{\alpha} E_{\alpha} \right)^C = \bigcup_{\alpha} (E_{\alpha}^C)$$

7 群，环，域

7.1 群

7.1.1 M1

7.1.2 M2

7.1.3 M3

7.1.4 M4

7.1.5 sdas

7.2 环

7.3 域

8 极限

8.1 数列极限

8.1.1 数列的定义

$Def: \{x_n\}: N^+ \rightarrow R$

$$x_n = f(n)$$

8.1.2 数列极限的定义

$Def: \{x_n\}, n \in N^+, \exists a, \forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

极限存在，为收敛，不存在为发散

8.1.3 极限的唯一性

数列收敛，极限的唯一性 (8.1.1)

8.1.4 有界数列

若 $\exists M > 0, \{M \in \text{正数}\}$

使得 $\forall n, |x_n| \leq M$

则称数列 $\{x_n\}$ 为有界数列

8.1.5 收敛数列的有界性

收敛数列必有界 (8.1.2)

8.1.6 收敛数列的保号性

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 存在，且 $a > 0$ ，则 $\exists N > 0 \{N \in N^+\}$ 当 $n > N$ 时， $\Leftrightarrow x_n > 0$ (8.1.3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, a < b, \exists N, n > N, a_n < b_n \quad (8.1.4)$$

8.1.7 收敛数列和子数列

$$\{x_n\}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$$

证明 $K = N \quad k > K$

$$n_k > n_K \geq N$$

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$$

8.2 函数极限

8.2.1 极限的定义

$$Def: \forall \varepsilon > 0 \left\{ \begin{array}{l} \exists X > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{当 } x > X \text{ 时都有 } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \\ \text{当 } x < -X \text{ 时都有 } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \\ \text{当 } |x| > X \text{ 时都有 } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \end{array} \right. \\ \exists \delta > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{当 } x_0 < x < x_0 + \delta, \text{ 时 } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \\ \text{当 } x_0 - \delta < x < x_0, \text{ 时 } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \\ \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ 时 } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \end{array} \right. \end{array} \right.$$

注意 1

定义中 $0 < |x - x_0|$ 表示 $x \neq x_0$ 讨论 $x \rightarrow x_0$, 只考虑 $x \neq x_0$

注意 2

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否存在与 $f(x_0)$ 是否有定义取什么值无关。

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 存在} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad (8.2.1)$$

图

8.2.2 极限的性质

1 函数的极限的唯一性

如果 $\lim f(x)$ 存在必唯一。

2 局部有界性

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Rightarrow \exists M > 0, \delta > 0 \text{ 使 } 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x)| \leq M$$

3 保号性

$\lim_{x \rightarrow x_0} = A, A > 0, \Rightarrow \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时 } f(x) > 0$

4 函数极限与数列极限的关系

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 为 $f(x)$ 定义域的任一收敛于 x_0 的数列, 则满足 $x_n \neq x_0$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), x_n \rightarrow x_0$

8.3 无穷小与无穷大

8.3.1 定义

一 无穷小

Def: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ 则称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小

$$\text{Def 无穷小: } \forall \varepsilon > 0 \left\{ \begin{array}{l} \exists X > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{当 } x > X \text{ 时都有 } |f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \\ \text{当 } x < -X \text{ 时都有 } |f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \\ \text{当 } |x| > X \text{ 时都有 } |f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \end{array} \right. \\ \exists \delta > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{当 } x_0 < x < x_0 + \delta, \text{ 时 } |f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 0 \\ \text{当 } x_0 - \delta < x < x_0, \text{ 时 } |f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 0 \\ \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ 时 } |f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

二 函数极限与无穷小的关系

在自变量的同一变化中。其中 α 为无穷小。 $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$ (8.3.1)

8.4 运算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (8.4.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) \quad (8.4.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad (8.4.3)$$

8.4.1 夹逼定理 (三明治定理)

$$x_n \leq z_n \leq y_n \quad \forall b > N_0 \quad (8.4.4)$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

9 导数

9.1 幂数, 指数, 对数

$$\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1} \quad (9.1.1)$$

$$\frac{d}{dx} b^x = b^x \ln b \quad (9.1.2)$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad (9.1.3)$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad (9.1.4)$$

$$(9.1.5)$$

9.2 三角函数

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad (9.2.1)$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (9.2.2)$$

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x \quad (9.2.3)$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad (9.2.4)$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x \quad (9.2.5)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}} \quad (9.2.6)$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x \quad (9.2.7)$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \quad (9.2.8)$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x \quad (9.2.9)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad (9.2.10)$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \quad (9.2.11)$$

9.3 倒数运算

$$A = B \quad (9.3.1-1)$$

$$C = D \quad (9.3.1-2)$$

10 积分

10.1 幂数, 指数, 对数

$$\int x^a dx = \frac{1}{a-1} x^{a-1} + C \quad (10.1.1)$$

$$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + C \quad (10.1.2)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (10.1.3)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad (10.1.4)$$

10.2 三角函数

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (10.2.1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \quad (10.2.2)$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C \quad (10.2.3)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (10.2.4)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C \quad (10.2.5)$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C \quad (10.2.6)$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C \quad (10.2.7)$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec} x + C \quad (10.2.8)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan x + C \quad (10.2.9)$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C \quad (10.2.10)$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C \quad (10.2.11)$$

10.3 积分运算

11 零散的一些

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (11.0.1)$$

$$\begin{aligned} A_N &= \sum_{k=0}^n q^k & qA_N &= \sum_{k=1}^{n+1} q^k \\ A_N - qA_N &= \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1} \\ A_N &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

$$\log_{10} x = \lg_x \quad (11.0.2)$$

$$\log_e x = \ln_x \quad (11.0.3)$$

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y \quad (11.0.4)$$

$$\log_{(b^n)} x = \frac{1}{n} \log_b x \quad (11.0.5)$$

$$\log_b x^n = n \log_b x \quad (11.0.6)$$

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} \quad (11.0.7)$$

$$b^n = x \quad b^m = y$$

$$b^{n+m} = xy$$

$$\log_b xy = n + m = \log_b x + \log_b y$$

$$b^n = x$$

$$\log_b x = n$$

$$\frac{1}{n} \log_b x = 1 = \log_{(b^n)} x$$

$$b^1 = x^n \quad b^{\frac{1}{n}} = x$$

$$n \log_b x = 1 = \log_b x^n$$

$$\log_b x = \log_{c^{(\log_c b)}} c^{(\log_c x)} = \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

12 证明

12.1 1.2.1

$$\begin{aligned}\sinh x \cosh x &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sinh(2x)\end{aligned}$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$$

12.2 1.2.2

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \\ &= e^x \times e^{-x} \\ &= 1\end{aligned}$$

12.3 1.2.3

$$\begin{aligned}\cosh^2 x + \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \\ &= \cosh(2x)\end{aligned}$$

12.4 1.2.4

$$\begin{aligned}\cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ &= \sinh^2 x + 1 + \sinh^2 x \\ &= 2 \sinh^2 x + 1 \\ \cosh x &= 2 \sinh^2 \frac{x}{2} + 1\end{aligned}$$

12.5 8.1.2

$$\varepsilon = 1, \exists N > 0, \text{ 当 } n > N \text{ 时 } |X_n - a| < 1$$

$$|X_n| = |(X_n - a) + a|$$

$$\leq |x_n - a| + |a|$$

$$\leq 1 + |a|$$

$$M = \max\{|X_n|, |X_2|, \dots, |X_n|, 1 + |a|\}$$

$$\forall n, |X_n| \leq M$$

12.6 8.1.3

1

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $a > 0$

$$\varepsilon = \frac{a}{2}, \exists N > 0, n > N$$

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

$$|x_n - a| < \frac{a}{2}$$

$$-\frac{a}{2} < x_n - a < \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} < x_n < 1$$

2

用反证法, 反设 $a < 0$. 从某项起 $x_n < 0$ 矛盾

12.7 8.1.4

$$x_n = b_n - a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b - a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$$

$$b_n - a_n = x_n > 0$$

$$b_n > a_n$$

12.8 8.1.1

反设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, 且 $a < b$

$$\varepsilon = \frac{b-a}{3} \begin{cases} \exists N_1, n > N_1, |x_n - a| < \frac{b-a}{3} \\ \exists N_2, n > N_2, |x_n - b| < \frac{b-a}{3} \end{cases}$$

$$N = \max\{N_1, N_2\}, n > N \Rightarrow \begin{cases} n > N_1 \\ n > N_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b - a &= |(x_n - a) - (x_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| + |x_n - b| \\ &< \frac{b-a}{3} + \frac{b-a}{3} \\ &< \frac{2(b-a)}{3} \end{aligned}$$

12.9 8.2.1

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{存在} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

$$\text{设 } \lim_{x \rightarrow x_0} = A$$

$$0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in \dot{U}(x_0, \delta)$$

$$\begin{cases} \text{当 } x_0 < x < x_0 + \delta \text{ 时 } 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \\ \text{当 } x_0 - \delta < x < x_0 \text{ 时 } 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{存在} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

$$A = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, x_0 < x < x_0 + \delta_1, |f(x) - A| < \varepsilon \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0, x_0 - \delta_2 < x < x_0, |f(x) - A| < \varepsilon \end{cases}$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$$\begin{aligned} 0 < |x - x_0| < \delta \begin{cases} x > x_0, x_0 < x < x_0 + \delta \leq x_0 + \delta_1, |f(x) - A| < \varepsilon \\ x < x_0, x_0 - \delta_2 \leq x_0 + \delta < x < x_0, |f(x) - A| < \varepsilon \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \end{aligned}$$

12.10 8.3.1

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 记 $f(x) - A = \alpha$

只需证 α 为无穷小。

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 时 $|f(x) - A| < \varepsilon$

即 $|\alpha - 0| < \varepsilon$

α 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小

12.11 8.4.4

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_1$$

$$|y_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_2$$

令 $N = \max \{N_1, N_2, N_0\}$, 则当 $n > N$ 时有

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$$

$$|z_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$