争取未来开挖掘机

姜圣的追随者

2024.7.12

摘要

沉迷游戏的我无意间看见关于姜圣的新闻。深感愧疚，幼儿班的我就已经熟练的掌握了的九九乘法表。而现在我却每天沉迷于提瓦特大陆，天天只知道打丘丘人。

从今天开始我也要努力学习数学，希望姜圣以后当上院士的时候能带我一起开发挖掘机。

(本书内容：仅有公式，定理及证明)

(作者文凭：中专学历，混的文凭，简单理解就是初中学历（-。-）!)

(公式及证明出处：公式及证明都是在别的书里参考过来的，极个别公式证明是我自己瞎写的。)

本书的 pdf, 及 latex 源码地址：https://github.com/daidongchuixue/jiangping.git

2024.7.31：本书几乎是跟着 B 站高数视频记录的。记录完，会作为第一版。(预计时间几个月) 然后参考数学分析书籍重新整理，为第二版。

2024.8.5：联系方式，姜萍吧，姜圣的追随者，

目录

1 三角函数

1.1 三角恒等式

$$
\begin{aligned}
\sin(A+B) &= \sin A\cos B + \cos A\sin B\\
\sin(A-B) &= \sin A\cos B - \cos A\sin B\\
\cos(A+B) &= \cos A\cos B - \sin A\sin B\\
\cos(A-B) &= \cos A\cos B + \sin A\sin B
\end{aligned}
$$

1.1.1 倍角公式

$$
\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2\sin x\cos x\\
\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x &= 1 - 2\sin^2 x\\
\tan(2x) &= frac2\tan x1 - \tan^2 x
\end{aligned}
$$

1.2 双曲函数

定义

$$
\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}
$$

$$
\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}
$$

恒等式

$$\sinh(2x) = 2\sinh x\cosh x \tag{1.2.1}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{1.2.2}$$

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = cosh(2x) \tag{1.2.3}$$

$$\cosh x = 1 + 2\sinh^2\frac{x}{2} \tag{1.2.4}$$

2 不等式

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1+x_2+\cdots+x_n} \tag{2.0.1}$$

$$|x+y| \leqslant |x|+|y| \tag{2.0.2}$$

$$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x \tag{2.0.3}$$

伯努利不等式

$$(1+x)^n \leqslant 1+nx \tag{2.0.4}$$

3 排列组合

3.1 定义

$$\mathbb{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{3.1.1}$$

$$\mathbb{C}_n^k = \frac{\mathbb{A}_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \tag{3.1.2}$$

3.2 运算

4 区间与映射

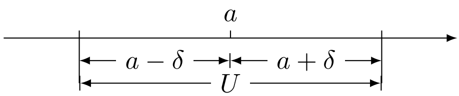
4.1 区间定义

$$
\text{区间定义}\begin{cases}(a,b)=\{x|a<x<b\}\\ [a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}\\ (a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}\\ (a,+\infty)=\{x|a<x\}\end{cases}
$$

4.2 领域定义

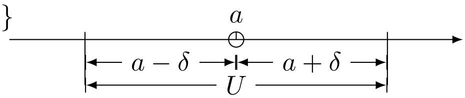
点 a 的领域

$$
U(a,\delta)=\begin{cases}\{x|a-\delta<x<a+\delta\}\\ \{x|\ |x-a|<\delta\}\end{cases}
$$



点 a 的去心领域

$$
\mathring{U}(a,\delta)=\begin{cases}\{x|a-\delta<x<a+\delta\wedge x\neq 0\}\\ \{x|0<|x-a|<\delta\}\end{cases}
$$



点 a 的左领域 $\quad (a-\delta,a)$
点 a 的右领域 $\quad (a,a+\delta)$

4.3 映射定义

定义:X 与 Y 是两个非空集合, 如果存在一个法则对任一 $x\in X$, 都有确定的 y 与之对应。则称 f 为从 X 到 Y 的一个映射。

$$
\text{记作}\qquad f:X\to Y
$$

$$
f(x)=y\qquad\begin{cases}\text{定义域 }(D_f)=X & x\text{-原像}\\ \text{值域 }(R_f)=\{f(x)|x\in X\} & y\text{-像}\end{cases}
$$

$$
\text{映射类型}\begin{cases}
\text{满射:} & R_f = Y \\
\text{单射:} & x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \\
\text{一一映射:} & \text{即使满射又是单射} \Leftrightarrow \text{逆映射:} \begin{cases} f^(x) & = y \\ f^{-1}(y) & = x \end{cases} \\
\text{复合映射:} & g \circ f \Leftrightarrow g\left[f\left(x\right)\right] \begin{cases} f : X \to Y_1 \\ g : Y_2 \to Z \\ g \circ f : X \to Z \qquad (Y_1 \subset Y_2) \end{cases}
\end{cases}
$$

5 函数与图像

5.1 函数的定义

设数集 $D \in R$ 的映射

$$f : D \to R$$

称 f 为定义在 D 上的函数, 记为

$$y = f(x)\ \{x \in D\}$$

5.2 函数的性质

5.2.1 函数的有界性

$$f : D \to R\{D \subset R\}\begin{cases}\text{有界}\begin{cases}\text{有上界}\left\{\exists k_1,\ \text{使}f(x) \leqslant k_1,\ \forall x \in D\right.\\ \text{有下界}\left\{\exists k_1,\ \text{使}f(x) \geqslant k_1,\ \forall x \in D\right.\end{cases}\\ \text{无界}\begin{cases}\text{无上界}\left\{\forall K_1,\ \exists x \in D\ \text{使},\ f(x) \geqslant k_1\right.\\ \text{无下界}\left\{\forall K_1,\ \exists x \in D\ \text{使},\ f(x) \leqslant k_1\right.\end{cases}\end{cases}$$

5.2.2 函数的单调性

$$\text{单调增加 若}\{x_1, x_2 \in D\}\ x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2)\text{称}f(x)\text{在 D 上单调增加}\\ f(x_1) > f(x_2)\text{称}f(x)\text{在 D 上单调减少}\\ f(x_1) \leqslant f(x_2)\text{称}f(x)\text{在 D 上单调非降}\\ f(x_1) \geqslant f(x_2)\text{称}f(x)\text{在 D 上单调非增}\end{cases}$$

5.2.3 函数的奇偶性

定义域

$$\forall x \in D \qquad f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{偶函数}\\ -f(x) & \text{奇函数}\end{cases}$$

奇偶性运算

$$\text{奇函数} \times \text{奇函数} = \text{偶函数} \tag{5.2.1}$$

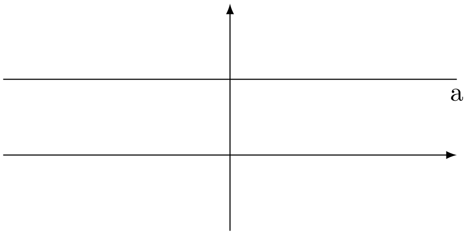
$$\text{奇函数} \times \text{偶函数} = \text{奇函数} \tag{5.2.2}$$

$$\text{偶函数} \times \text{偶函数} = \text{偶函数} \tag{5.2.3}$$

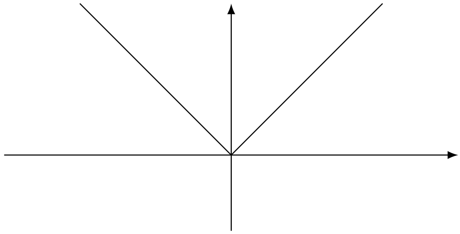
5.2.4 周期性

$Def: \quad f(x+L)=f(x)\{L>0\text{常数}, \forall x\in D\} \Rightarrow f(x)$ 为 L 的周期函数

5.3 函数图像

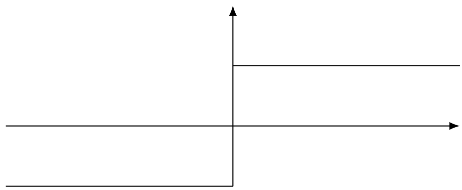


常函数 $f(x)=a\{a\in R\}$

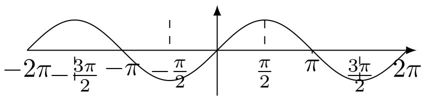


$f(x)=|x|$

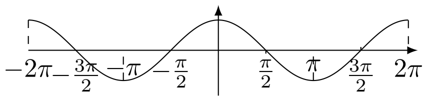
$$f(x)=sgn\ x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$



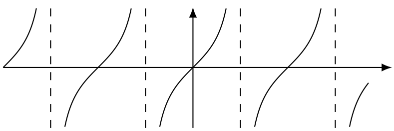
$|x|=x\cdot sgnx$



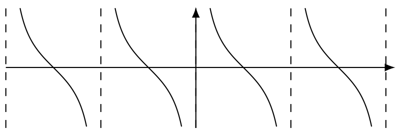
$\sin x$



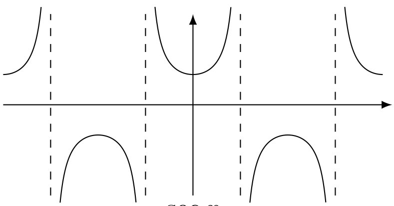
$\cos x$



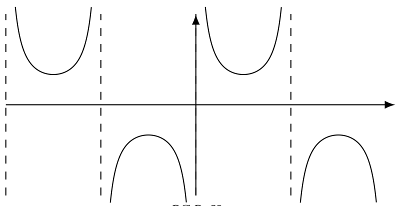
$\tan x$



$\cot x$



$\sec x$



$\csc x$

6 并集，交集

6.1 定义

$$
\begin{gathered}
(\vee \text{ 或}, \wedge \text{ 与}) \\
A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\} \\
A \cap B = \{x \in A \wedge x \in B\}
\end{gathered}
$$

6.2 运算

$$
\text{运算满足}
\begin{cases}
\text{交换律}\begin{cases} A \cup B & = B \cup A \\ A \cap B & = B \cap A \end{cases} \\
\text{结合律}\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{cases} \\
\text{分配律}\begin{cases} (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{cases} \\
\text{对偶律}\begin{cases} (A \cup B)^C = A^C \cap B^C \\ (A \cap B)^C = A^C \cup B^C \end{cases}
\end{cases}
$$

$$
\begin{gathered}
A \cup A = A = A \cap A \\
A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge A \supset B \\
A \cup \varnothing = A \qquad A \cap \varnothing = \varnothing
\end{gathered}
$$

6.3 性质

性质 1.

$$A \subset (A \cup B) \qquad A \supset (A \cap B) \tag{6.3.1}$$

性质 2.

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \tag{6.3.2}$$

性质 3.

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B \tag{6.3.3}$$

性质 4. $(n \in N\ )$

$$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \cdots \cap (A \cup B_n) \tag{6.3.4}$$

性质 5. $(n \in N\ )$

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n) \tag{6.3.5}$$

6.4 gustus De Morgan 定理

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$

6.5 德摩根律 定理

$$\left(\bigcup_{\alpha} E_{\alpha}\right)^{C} = \bigcap_{\alpha}(E_{\alpha}^{C})$$

$$\left(\bigcap_{\alpha} E_{\alpha}\right)^{C} = \bigcup_{\alpha}(E_{\alpha}^{C})$$

7 群，环，域

7.1 群

7.1.1 M1

7.1.2 M2

7.1.3 M3

7.1.4 M4

7.1.5 sdas

7.2 环

7.3 域

8 极限

8.1 数列极限

8.1.1 数列的定义

$Def: \ \{x_n\}: N^+ \to R$

$$x_n = f(n)$$

8.1.2 数列极限的定义

$Def: \{x_n\}, \ n \in N^+, \exists a, \ \forall \varepsilon > 0, \exists N, \ n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

极限存在，为收敛，不存在为发散

8.1.3 极限的唯一性

$$\text{数列收敛，极限的唯一性} \tag{8.1.1}$$

8.1.4 有界数列

若$\exists M > 0, \{M \in \text{正数}\}$

使得$\forall n, \quad |x_n| \leqslant M$

则称数列 $\{x_n\}$ 为有界数列

8.1.5 收敛数列与有界性

$$\text{收敛数列必有界} \tag{8.1.2}$$

$$\text{单调有界数列必收敛} \tag{8.1.3}$$

8.1.6 收敛数列的保号性

$$\text{如果 } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 存在，且 } a > 0, \text{ 则 } \exists N > 0\{N \in N^+\} \text{ 当 } n > N \text{ 时，} \Leftrightarrow x_n > 0 \tag{8.1.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b, a < b, \ \exists N, n > N, a_n < b_n \tag{8.1.5}$$

8.1.7 收敛数列和子数列

$\{x_n\}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \ \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$

证明 $K = N \ k > K$

$n_k > n_K \geqslant N$

$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$

8.2 函数极限

8.2.1 极限的定义

$$Def : \forall\varepsilon > 0 \begin{cases} \exists X > 0 \begin{cases} \text{当} x > X & \text{时都有} \quad |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \\ \text{当} x < -X & \text{时都有} \quad |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A \\ \text{当}\ |x| > X & \text{时都有} \quad |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \end{cases} \\ \exists\delta > 0 \begin{cases} \text{当} x_0 < x < x_0 + \delta, \text{时} \quad |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A \\ \text{当} x_0 - \delta < x < x_0, \text{时} \quad |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A \\ \text{当} 0 < |x - x_0| < \delta, \text{时} \quad |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \end{cases} \end{cases}$$

注意 1

定义中 $0 < |x - x_0|$ 表示 $x \neq x_0$ 讨论 $x \to x_0$, 只考虑 $x \neq x_0$

注意 2

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在与 $f(x_0)$ 是否有定义取什么值无关。

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\text{存在} \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \tag{8.2.1}$$

图

8.2.2 极限的性质

1 函数的极限的唯一性

如果 $\lim f(x)$ 存在必唯一。

2 局部有界性

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow \exists M > 0, \delta > 0 \text{使} 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x)| \leqslant M$

3 保号性

$\lim\limits_{x\to x_0} = A,\ A>0, \Rightarrow \exists\delta>0,$ 当$,0<|x-x_0|<\delta$时$f(x)>0$

4 保序性

$f(x)\geqslant g(x),\ \lim f(x)=a,\ \lim g(x)=b,$ 则$a\geqslant b$

4 函数极限与数列极限的关系

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为 $f(x)$ 定义域的任一收敛于 x_0 的数列，则满足 $x_n\neq x_0$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0=\lim\limits_{x\to x_0} f(x),\ x_n\to x_0$

8.3 无穷小与无穷大

8.3.1 无穷小定义

$Def:$ 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$则称$f(x)$为$x\to x_0$时的无穷小

$$Def:\forall\varepsilon>0\begin{cases}\exists X>0\begin{cases}\text{当}x>X & \text{时}\ |f(x)-0|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\\ \text{当}x<-X & \text{时}\ |f(x)-0|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\\ \text{当}\ |x|>X & \text{时}\ |f(x)-0|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0\end{cases}\\ \exists\delta>0\begin{cases}\text{当}x_0<x<x_0+\delta,\text{时}\ |f(x)-0|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=0\\ \text{当}x_0-\delta<x<x_0,\text{时}\ |f(x)-0|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=0\\ \text{当}0<|x-x_0|<\delta,\text{时}\ |f(x)-0|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0\end{cases}\end{cases}$$

8.3.2 函数极限与无穷小的关系

$$\text{在自变量的同一变化中。}\alpha\text{ 为无穷小。}\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha \tag{8.3.1}$$

8.3.3 无穷大与无穷小的关系

在自变量同一变化过程中

$$\text{如果 } f(x) \text{ 为无穷大，则 } \frac{1}{f(x)} \text{ 为无穷小。} \tag{8.3.2}$$

$$\text{如果 } f(x) \text{ 为无穷小，切 } f(x)\neq 0\text{，则 } \frac{1}{f(x)} \text{ 为无穷小。} \tag{8.3.3}$$

8.3.4 无穷大定义

$$Def:\forall M>0\begin{cases}\exists X>0\begin{cases}\text{当}x>X\begin{cases}f(x)>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\\f(x)<-M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\\|f(x)|>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty\end{cases}\\\text{当}x<-X\begin{cases}f(x)>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\\f(x)<M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\\|f(x)|>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty\end{cases}\\\text{当}\ |x|>X\begin{cases}f(x)>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty\\f(x)<-M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty\\|f(x)|>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\end{cases}\end{cases}\\\exists\delta>0\begin{cases}\text{当}x_0-\delta<x<x_0\begin{cases}f(x)>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty\\f(x)<-M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty\\|f(x)|>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty\end{cases}\\\text{当}x_0<x<x_0+\delta\begin{cases}f(x)>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty\\f(x)<-M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty\\|f(x)|>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty\end{cases}\\\text{当}0<|x-x_0|<\delta\begin{cases}f(x)>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty\\f(x)<-M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty\\|f(x)|>M\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\text{，直线}x=x_0\text{是}y=f(x)\text{垂直渐进线}$$

8.4 运算

8.4.1 有限个无穷小的和仍为无穷小

$$\text{设 }\gamma=\alpha+\beta$$

$$\alpha\ \text{和}\ \beta\ \text{同为}\ x\to x_0\ \text{时的无穷小}$$

$$\forall\varepsilon>0\text{，}\exists\delta_1>0\text{，当 }0<|x-x_0|<\delta_1\text{ 时，有 }|\alpha|<\tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_2>0,\ \text{当 } 0<|x-x_0|<\delta_2 \text{ 时，有 } |\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\delta=min\{\delta_1,\delta_2\},\ \text{当 } 0<|x-x_0|<\delta \text{ 时}$$
$$0<|x-x_0|<\delta_1, 0<|x-x_0|<\delta_2 \text{ 同时满足}$$
$$\text{即 } |\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}, |\beta|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ 同时成立}$$
$$|\gamma|=|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

8.4.2 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小

$$\text{设 } \alpha \text{ 为 } x\to x_0 \text{ 时的一个无穷小}$$
$$g(x) \text{ 为 } x_0 \text{ 的一个去心邻域 } \mathring{U}(x_0,\delta_1) \text{ 有界}$$
$$f(x)=g(x)\alpha$$
$$\text{证 } f(x) \text{ 为 } x\to x_0 \text{ 时的无穷小}$$
$$\text{因为 } g(x)\text{在}\mathring{U}(x_0,\delta_1) \text{ 有界}$$
$$\exists M>0, \text{当}0<|x-x_0|<\delta_1 \text{ 时 } |g(x)|<M$$
$$\text{因为 } \alpha \text{ 是 } x\to x_0 \text{ 的无穷小}$$
$$\exists\delta_2>0\text{当}0<|x-x_0|<\delta_2 \text{ 时 } |\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}<\varepsilon$$
$$\text{取 } \delta=min\{delta_,\delta_2\} \text{ 当 } 0<|x-x_0|<\delta \text{ 时}$$
$$|g(x)|\geqslant M, |\alpha|<\frac{\varepsilon}{M} \text{ 同时成立}$$
$$|g(x)\alpha|=|g(x)|\ \ |\alpha|<M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

推论 1. 常数与无穷小的乘积为无穷小

推论 2. 有限个无穷小的乘积为无穷小

8.4.3 极限的四则运算

$\lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B$

$$\lim\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim f(x)\pm\lim g(x) \tag{8.4.1}$$
$$\lim\left(f(x)g(x)\right)=\lim f(x)\lim g(x) \tag{8.4.2}$$
$$\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \tag{8.4.3}$$
$$\lim\left[Cf(x)\right]=C\lim f(x) \tag{8.4.4}$$
$$\lim\left[f(x)\right]^n=\left[\lim f(x)\right]^n \tag{8.4.5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}=\begin{cases}\frac{a}{b} & m=n\\ \infty & m>n\\ 0 & m<n\end{cases} \tag{8.4.6}$$

$$\begin{gathered}\lim_{x\to x_0}g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0}f(x)=A\\ \exists\delta_0>0,\ x\in\mathring{U}\left(x_0,\delta_0\right),\ g(x)\neq u_0\\ \lim_{x\to x_0}f\left[g(x)\right]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A\end{gathered} \tag{8.4.7}$$

8.4.4 夹逼定理 (三明治定理)

$$\begin{aligned}&x_n\leqslant z_n\leqslant y_n \qquad \forall n>N_0\\ &\text{若}\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=a\text{则}\lim_{n\to\infty}z_n=a\end{aligned} \tag{8.4.8}$$

8.4.5 重要极限

趋向 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{8.4.9}$$

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1 \tag{8.4.10}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \tag{8.4.11}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=1 \tag{8.4.12}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \tag{8.4.13}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1 \tag{8.4.14}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}=1 \tag{8.4.15}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \tag{8.4.16}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x\right)^n-1}{nx}=1 \tag{8.4.17}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e \tag{8.4.18}$$

趋向 ∞

$$\{x_n\} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \tag{8.4.19}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{8.4.20}$$

8.4.6 无穷小比较

$\frac{0}{0}$ 型未定式

$Def:\ \alpha, \beta$ 是同一极限过程的无穷小。

(1) 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$ 则称 β 是 α 的高阶无穷小，记作 $\beta=\circ(\alpha)$

(2) 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$ 则称 β 是 α 的底阶无穷小。

(3) 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=C$ 则称 β 是 α 的同阶无穷小。

(4) 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=C, k>0$ 则称 β 是 α 的 k 阶无穷小。

(5) 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$ 则称 β 是 α 的等价阶无穷小。

8.4.7 等价无穷小代换，因子代换

β与α是等价无穷小 $\Leftrightarrow \beta=\alpha+\circ(\alpha)$

设$\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$, 且$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在, 则$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$

$\lim\alpha f(x)=\lim\alpha' f(x)$

$\lim\frac{f(x)}{\alpha}=\lim\frac{f(x)}{\alpha'}$

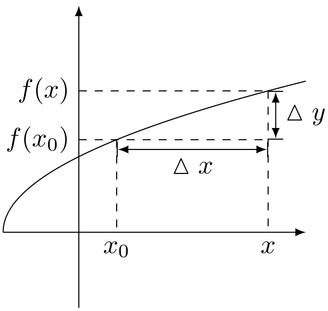
9 连续与间断点

9.1 定义

9.1.1 点连续

$$Def1: 设f(x)在x_0的某邻域内有定义，如果 \lim_{x\to x_0} = f(x_0)$$

$$则称f(x)在x_0处连续$$



$$\begin{cases} \triangle\ x = x - x_0 \\ \triangle\ y = \begin{cases} f(x) - f(x_0) \\ f(x_0 + \triangle\ x) - f(x_0) \end{cases} \end{cases}$$

$$Def2: 如果 \lim_{\triangle x\to 0} \triangle\ y = \lim_{\triangle x\to 0} [f(x_0 + \triangle\ x) - f(x_0)] = 0$$

$$则称f(x)在x_0处连续$$

9.1.2 区间连续

$$\forall x_0 \in [a,b] \begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad x_0 \in (a,b) \Leftrightarrow f(x_0) = \begin{cases} \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-) \\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+) \end{cases} \\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+) \quad x_0 = a \text{ (右连续)} \\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-) \quad x_0 = b \text{ (左连续)} \end{cases}$$

称在 $[a,b]$ 内连续

有界:$\exists M > 0, x \in [a,b]$ 时，$|f(x)| \geqslant M$

最大值:$\exists x_0 \in [a,b]$ 时，$\forall x \in [a,b], f(x) \leqslant f(x_0)$ 称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值

最小值:$\exists x_0 \in [a,b]$ 时，$\forall x \in [a,b], f(x) \geqslant f(x_0)$ 称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值

1, 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 有界, 一定取得最大值与最小值。

零点定理

2, 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$
则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$

介质定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A, f(b)=B$
$\forall C\in(A,B)$, 至少有一点 $\xi, f(\xi)=C$

9.1.3 间断点

1,$f(x)$ 无定义
2,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$
第一类间断点：$f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 与 $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$
第二类间断点：不是第一类的。

9.2 连续函数的运算

函数 $f(x), g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续。

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)+g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)-g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\qquad (g(x_0)\neq 0)$$

反函数的连续性
若 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加，且连续。
则 $y=f^-1(x)$ 在 $I_y=\{y|y=f(x), x\in I_x\}$ 上也为单调增加，连续

$$
\text{复合函数,}\begin{cases}
\text{内外都连续}\begin{cases}
\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = u_0 \\
\lim\limits_{u\to u_0} f(x) = f(u_0) \\
\lim\limits_{x\to x_0} f\left[g(x)\right] = f\left[g(x_0)\right] = f(\lim\limits_{x\to x_o} g(x))
\end{cases} \\
\text{外连续}\begin{cases}
x\to x_0 \begin{cases}
\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0 \\
\lim\limits_{u\to u_0} f(x) = f(u_0) \\
\lim\limits_{x\to x_0} f\left[g(x)\right] = f(u_0) = f(\lim\limits_{x\to x_o} g(x))
\end{cases} \\
x\to \infty \begin{cases}
\lim\limits_{x\to \infty} g(x) = u_0 \\
\lim\limits_{u\to u_0} f(x) = f(u_0) \\
\lim\limits_{x\to \infty} f\left[g(x)\right] = f(u_0) = f(\lim\limits_{x\to \infty} g(x))
\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

10 导数

10.1 幂数，指数，对数

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}x^a = ax^{a-1} \tag{10.1.1}$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}b^x = b^x \ln b \tag{10.1.2}$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}e^x = e^x \tag{10.1.3}$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{x} \tag{10.1.4}$$

$$\tag{10.1.5}$$

10.2 三角函数

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x \tag{10.2.1}$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{10.2.2}$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\csc x = -\csc x \cot x \tag{10.2.3}$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x \tag{10.2.4}$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\sec x = \sec x \tan x \tag{10.2.5}$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \tag{10.2.6}$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\tan x = \sec^2 x \tag{10.2.7}$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\arctan = \frac{1}{1+x^2} \tag{10.2.8}$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\cot x = -\csc^2 x \tag{10.2.9}$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\sinh x = \cosh x \tag{10.2.10}$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\cosh x = \sinh x \tag{10.2.11}$$

10.3 导数运算

$$A = B \tag{10.3.1-1}$$

$$C = D \tag{10.3.1-2}$$

11 积分

11.1 幂数，指数，对数

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{1}{a-1}x^{a-1} + C \tag{11.1.1}$$

$$\int b^x \mathrm{d}x = \frac{b^x}{\ln b} + C \tag{11.1.2}$$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C \tag{11.1.3}$$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln x + C \tag{11.1.4}$$

11.2 三角函数

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C \tag{11.2.1}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C \tag{11.2.2}$$

$$\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C \tag{11.2.3}$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C \tag{11.2.4}$$

$$\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C \tag{11.2.5}$$

$$\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C \tag{11.2.6}$$

$$\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C \tag{11.2.7}$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x = \operatorname{arcsec} x + C \tag{11.2.8}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \tan x + C \tag{11.2.9}$$

$$\int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C \tag{11.2.10}$$

$$\int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + C \tag{11.2.11}$$

11.3 积分运算

12 零散的一些

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{12.0.1}$$

$$A_N = \sum_{k=0}^{n} q^k \qquad qA_N = \sum_{k=1}^{n+1} q^k$$

$$A_N - qA_N = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}$$

$$A_N = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\log_{10} x = \lg_x \tag{12.0.2}$$

$$\log_e x = \ln_x \tag{12.0.3}$$

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y \tag{12.0.4}$$

$$\log_{(b^n)} x = \frac{1}{n} \log_b x \tag{12.0.5}$$

$$\log_b x^n = n \log_b x \tag{12.0.6}$$

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} \tag{12.0.7}$$

$$b^n = x \qquad b^m = y$$

$$b^{n+m} = xy$$

$$\log_b xy = n + m = \log_b x + \log_b y$$

$$b^n = x$$

$$\log_b x = n$$

$$\frac{1}{n} \log_b x = 1 = \log_{(b^n)} x$$

$$b^1 = x^n \qquad b^{\frac{1}{n}} = x$$

$$n \log_b x = 1 = \log_b x^n$$

$$\log_b x = log_{c^{(\log_c b)}} c^{(\log_c x)} = \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(1+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{m=0}^{n-1}\left(a^{n-m}b^m\right) = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

13 证明

13.1 1.2.1

$$\begin{aligned}
\sinh x \cosh x &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sinh(2x) \\
\sinh(2x) &= 2\sinh x \cosh x
\end{aligned}$$

13.2 1.2.2

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\
&= e^x \times e^{-x} \\
&= 1
\end{aligned}$$

13.3 1.2.3

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x + \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \\
&= \cosh(2x)
\end{aligned}$$

13.4 1.2.4

$$\begin{aligned}
\cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\
&= \sinh^2 x + 1 + \sinh^2 x \\
&= 2\sinh^2 x + 1 \\
\cosh x &= 2\sinh^2 \frac{x}{2} + 1
\end{aligned}$$

13.5 8.1.2

$$\varepsilon = 1,\ \exists N > 0,\ \text{当 n>N 时} \left|X_n - a\right| < 1$$
$$\begin{aligned}\left|X_n\right| &= \left|(X_n - a) + a\right| \\ &\leqslant \left|x_n - a\right| + \left|a\right| \\ &\leqslant 1 + \left|a\right|\end{aligned}$$
$$M = \max\{\left|X_n\right|, \left|X_2\right|, \ldots, \left|X_n\right|, 1 + \left|a\right|\}$$
$$\forall n,\ \left|X_n\right| \leqslant M$$

13.6 8.1.4

1

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 且$a > 0$
$\varepsilon = \frac{a}{2},\ \exists N > 0, n > N$
$\left|x_n - a\right| < \varepsilon$
$\left|x_n - a\right| < \frac{a}{2}$
$-\frac{a}{2} < x_n - a < \frac{a}{2}$
$\frac{a}{2} < x_n < 1$

2

用反证法，反设 $a < 0$. 从某项起 $x_n < 0$ 矛盾

13.7 8.1.5

$$x_n = b_n - a_n$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = b - a > 0$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n > 0$$
$$b_n - a_n = x_n > 0$$
$$b_n > a_n$$

13.8 8.1.1

$$\text{反设} \lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} x_n = b, \text{且} a < b$$

$$\varepsilon = \frac{b-a}{3} \begin{cases} \exists N_1,\ n > N_1,\ |x_n - a| < \frac{b-a}{3} \\ \exists N_2,\ n > N_2,\ |x_n - b| < \frac{b-a}{3} \end{cases}$$

$$N = \max\{N_1, N_2\},\ n > N \Rightarrow \begin{cases} n > N_1 \\ n > N_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b - a &= |(x_n - a) - (x_n - b)| \\ &\leqslant |x_n - a| + |x_n - b| \\ &< \frac{b-a}{3} + \frac{b-a}{3} \\ &< \frac{2(b-a)}{3} \end{aligned}$$

13.9 8.2.1

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

$$\text{设} \lim_{x\to x_0} = A$$

$$0 < |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$$

$$\begin{cases} \text{当} x_0 < x < x_0 + \delta \text{时} 0 < |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - A| < \varepsilon,\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A \\ \text{当} x_0 - \delta < x < x_0 \text{时} 0 < |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - A| < \varepsilon,\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在 $\Leftarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

$$A = \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_o^+}, \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_1 > 0, x_0 < x < x_0 + \delta_1, |f(x) - A| < \varepsilon \\ \lim\limits_{x\to x_o^-}, \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_2 > 0, x_0 - \delta_2 < x < x_0, |f(x) - A| < \varepsilon \end{cases}$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \begin{cases} x > x_0, x_0 < x < x_0 + \delta \leqslant x_0 + \delta_1,\ |f(x) - A| < \varepsilon \\ x < x_0, x_0 - \delta_2 \leqslant x_0 + \delta < x < x_0,\ |f(x) - A| < \varepsilon \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

13.10 8.3.1

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = A \Rightarrow \begin{cases} \alpha\text{为}x \to x_0\text{时的无穷小} \\ f(x) = \alpha + A \end{cases}$$

设 $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A$, 记$f(x) - A = \alpha$

只需证 α 为无穷小。

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当$0 < |x - x_0| < \delta,$ 时 $|f(x) - A| < \varepsilon$

即 $|\alpha - 0| < \varepsilon$

α为$x \to x_0$时的无穷小

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = A \Leftarrow \begin{cases} \alpha\text{为}x \to x_0\text{时的无穷小} \\ f(x) = \alpha + A \end{cases}$$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,$ 当$0 < |x - x + 0| < \delta,\ |\alpha| < \varepsilon$

即 $|f(x) - A| < \varepsilon\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

13.11 8.3.2

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

对 $f(x)$ 为 $x \to$ 时无穷大

对于 $M = \frac{1}{\varepsilon}$. 存在 $\delta > 0$

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

$|f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon}$

$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$

$\frac{1}{f(x)}$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小

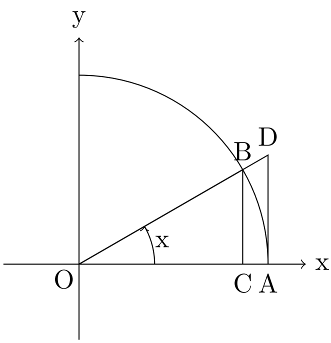
13.12 8.4.2

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= [A + \alpha]\,[B + \beta] \\ &= AB + A\beta + B\alpha + \beta\alpha \\ &= AB + \gamma \qquad\qquad (\gamma\text{为无穷小}) \\ \lim\,[f(x)g(x)] &= AB + \gamma = \lim f(x) \lim g(x) \end{aligned}$$

13.13 8.4.8

$$\forall\varepsilon > 0$$
$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N_1$$
$$|y_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N_2$$
$$令N = \max\{N_1, N_2, N_0\}\text{ , 则当}n > N\text{时有}$$
$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$$
$$|z_n - a| < \varepsilon$$
$$\lim_{n\to\infty} z_n = a$$

13.14 8.4.9



$$OB = OA = 1$$
$$\triangle\ AOB \leqslant \text{扇形面积} \leqslant \triangle\ AOD$$
$$\frac{1}{2}\sin x \leqslant \frac{1}{2}x \leqslant \frac{1}{2}\tan x$$
$$\sin x \leqslant x \leqslant \tan$$
$$1 \geqslant \frac{\sin x}{x} \geqslant \cos x$$
$$\lim_{x\to0} 1 \geqslant \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} \geqslant \lim_{x\to0}\cos x$$
$$1 \geqslant \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} \geqslant 1$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

13.15 8.4.10

$$\begin{aligned}
|1-\cos x| = 1-\cos x &= 2\sin^2\frac{x}{2} \\
&\leqslant 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\
0 \leqslant 1-\cos x &\leqslant \frac{x^2}{2} \\
\lim_{x\to 0} 0 \leqslant \lim_{x\to 0}(1-\cos x) &\leqslant \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} \\
0 \leqslant \lim_{x\to 0}(1-\cos x) &\leqslant 0 \\
\lim_{x\to 0}(1-\cos x) &= 0 \\
\lim_{x\to 0}\cos x &= 1
\end{aligned}$$

13.16 8.4.11

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} \\
&= 1
\end{aligned}$$

13.17 8.4.12

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

13.18 8.4.13

$$\begin{aligned}
x = \sin t,\ t &= \arcsin x \\
x \to 0,\ t &\to 0 \\
\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{t}{\sin t} &= 1
\end{aligned}$$

13.19 8.4.14

$$x = \tan t,\ t = \arctan x$$

$$x \to 0,\ t \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\tan t} = 1$$

13.20 8.4.15

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

13.21 8.4.16

$$e^x - 1 = t,\ x = \ln(t+1)$$

$$x \to 0,\ t \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = 1$$

13.22 8.4.17

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{nx} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{n\ln(1+x)} - 1}{n\ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \right) = 1$$

13.23 8.4.19

$$
\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m 1^{n-m}\left(\frac{1}{n}\right)^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \left(\frac{1}{n}\right)^m \\
&= C_n^0\left(\frac{1}{n}\right)^0 + C_n^1\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \sum_{m=2}^{n} C_n^m\left(\frac{1}{n}\right)^m \\
&= 1+1+\sum_{m=2}^{n}\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\left(\frac{1}{n}\right)^m \\
&= 1+1+\sum_{m=2}^{n}\frac{\overbrace{(n)\,(n-1)\cdots(n-m+1)}^{m}}{m!}\left(\frac{1}{n}\right)^m \\
&= 1+1+\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-m+1}{n}\right) \\
&= 1+1+\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right) \\
x_{n+1} &= 1+1+\sum_{m=2}^{n+1}\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n+1}\right) \\
x_n &< x_{n+1} \qquad \text{单调增加} \\
x_n &< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \\
&< 1+1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\frac{1}{2}} \\
&< 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
&< 3 \qquad \text{有界}
\end{aligned}
$$