

# デジタルフィルター

勝間田 明男

# 目 次

1	はじめに	1
2	連続領域におけるフーリエ級数展開及びフーリエ変換	1
3	標本化定理	3
4	有限な長さの離散化したデータのフーリエ変換	6
5	スペクトル推定	11
5.1	スペクトル推定の分散	11
5.2	時間ウィンドウ	11
6	その他のスペクトル推定法	13
6.1	MEM : Maximum Entropy Method	13
6.2	多次元のスペクトル	22
7	周波数領域におけるフィルタ	23
8	時間領域のフィルタ処理の基本	24
9	FIR デジタルフィルタの設計	29
10	地震計の周波数特性をもつ IIR 型フィルタ	33
11	極と伝達関数の安定性	36
12	高次のフィルタの処理	38
13	バターワースフィルタの基本周波数特性	39
14	ローパスフィルタ	40
15	ハイパスフィルタ	43
16	バンドパスフィルタ	43
17	バンドストップフィルタ	48
18	ウィナーフィルタとカルマンフィルタ	49
18.1	ウィナーフィルタ	49
18.2	カルマンフィルタ	51

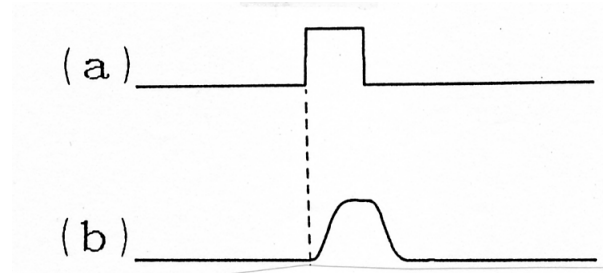


図 1: フィルタ処理の例 [5]

## 1 はじめに

現在では観測データは原則的にデジタル化されたものがほとんどとなっている。時系列のデジタルデータを扱う上で、ある特定の周波数範囲の成分の信号を取り出す必要が生ずることがある。ここでは、そのためのフィルタ処理の方法について述べる。

時系列データを扱う場合に、ある特定の周波数成分を取り出す、あるいは、特定の周波数の成分だけ取り除く必要が生ずる。現在においては、データのほとんどは、数値化されて記憶されたり、管理されている。それらのデータを扱う場合に、数値処理が必要となる。信号のある周波数成分を取り出す電気あるいは電子回路をフィルタ回路と呼ぶが、それを数値処理に行う場合、デジタルフィルタと呼ばれる。「フィルタ」は、更に一般的に、入力データに何らかの処理を行う処理全体を意味することがある。

フィルタ処理には、周波数領域で行う計算と時間領域で行う計算がある。周波数領域で行う計算はFFT(Fast Fourier Transform)などを行い、それに対して所望の伝達関数を掛け合わせて、逆FFTにより時間領域に戻すものである。解析的目的のためには、周波数領域の処理で十分であるが、場合によっては、実時間処理が必要となる。現在気象庁の地震観測網の中で大振幅を観測するための地震計として加速度計を用いている。一方マグニチュードを決定するためには、変位振幅を必要としている。そのような場合に、実時間 (Real Time) でフィルタ処理を行う必要がある。そのような場合には時間領域でフィルタ処理を行う必要がある。ここでは、まず、周波数領域でのフィルタについて簡単に述べ、その後時間領域でのフィルタ処理の理論と実際の処理法について説明してゆく。

## 2 連続領域におけるフーリエ級数展開及びフーリエ変換

任意の周期関数を三角関数の重ね合わせを考える。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(i2\pi nt/T) \quad (1)$$

ここで  $T$  は周期である。  $\exp(i2\pi nt/T)$  は直交関数系をつくる。

$$\frac{1}{T} \int_0^T \exp(i2\pi nt/T) \cdot \exp(-i2\pi mt/T) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_0^T \exp\{i2\pi(n-m)t/T\} dt \\
&= \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T 1 dt & (n = m) \\ \frac{1}{T} \left[ \frac{\exp\{i2\pi(n-m)t/T\}}{i2\pi(n-m)/T} \right]_0^T & (n \neq m) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \quad (2)
\end{aligned}$$

そこで、 $C_n$  は一意的に決められる。

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp(-i2\pi nt/T) dt \quad (3)$$

これはフーリエ級数展開と呼ばれる。

非周期性の関数の場合については、時間領域の関数: $x(t)$  を周波数領域の関数: $X(f)$  に変換するためにフーリエ変換が用いられる。

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (4)$$

あるいは、

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5)$$

$X(f)$  を時間領域になおすには、フーリエ逆変換が用いられる。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df \quad (6)$$

あるいは、周波数: $f$  のかわりに角周波数: $\omega$  を用いると、

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (7)$$

これは式が示すように  $-\infty$  から  $+\infty$  までの積分で、エネルギー有限の場合のみに適応可能である。

ある時間領域関数: $x(t)$  のフーリエ変換を  $X(\omega)$  とする。このときに  $\Delta t$  だけ遅れた関数  $x(t - \Delta t)$  のフーリエ変換についてみる。

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \Delta t) e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \Delta t) \exp(-i\omega(t - \Delta t)) \exp(-i\omega\Delta t) dt \\
&= \exp(-i\omega\Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \Delta t) \exp(-i\omega(t - \Delta t)) dt \\
&= \exp(-i\omega\Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \exp(-i\omega t') dt' \\
&= \exp(-i\omega\Delta t) X(\omega) \quad (8)
\end{aligned}$$

但し、 $t' = t - \Delta t$ 。 $\Delta t$  の時間遅れは、周波数領域において  $\exp(-i\omega\Delta t)$  をかけることに相当する。

### 3 標本化定理

離散化されたデータについて次のような標本化定理が成り立つ。

標本化定理

時間関数  $x(t)$  の周波数スペクトルが 0 から  $W$ [Hz] までしかないときには、 $x(t)$  の値を時間間隔  $\frac{1}{2W}$ [sec] だけで指定すれば、 $t$  の全域で  $x(t)$  は決定される。

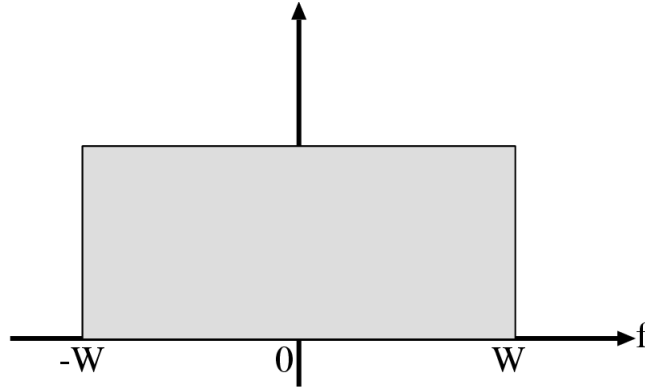


図 2: 周波数範囲

$x(t)$  の周波数スペクトルを  $X(\omega)$  とする。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

$W$ [Hz] よりも高い周波数成分はないので、積分範囲を制限できる。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{+2\pi W} X(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

一方、 $X(\omega)$  は  $-2\pi W \leq \omega \leq +2\pi W$  で定義されているだけなので、フーリエ級数展開ができる。

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(inL\omega)$$

$\omega$  が時間に関するフーリエ級数における時間:  $t$ 、 $L$  が  $2\pi/T$  に相当している。周期が  $4\pi W$  があるので、 $L = \frac{2\pi}{4\pi W} = \frac{1}{2W}$  である。また  $C_n$  は、

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{4\pi W} \int_{-2\pi W}^{+2\pi W} X(\omega) \exp(-i2\pi n\omega/4\pi W) d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi W} \int_{-2\pi W}^{+2\pi W} X(\omega) \exp(-in\omega/2W) d\omega \end{aligned}$$

これを  $x(t)$  と比較すると

$$C_{-n} = \frac{1}{2W} x\left(\frac{n}{2W}\right)$$

これは、周期  $\frac{1}{2W}$  でサンプルされたデータ:  $x(\frac{n}{2W})$  が与えられると、一意的にスペクトル:  $X(\omega)$  が決まり、さらにそれをフーリエ逆変換すると  $x(t)$  が得られることを意味する。サンプルされたデータ:  $x(\frac{n}{2W})$  により、連続関数:  $x(t)$  (サンプルされた時刻について) が完全に規定される。

$x(t)$  とサンプルされたデータ:  $x(\frac{n}{2W})$  の関係を直接結ぶ。

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{+2\pi W} X(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi W}^{+2\pi W} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(inL\omega) \right) \exp(i\omega t) d\omega \quad (X(\omega) \text{ をフーリエ級数展開}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2W} x\left(\frac{n}{2W}\right) \int_{-2\pi W}^{+2\pi W} \exp(-inL\omega) \exp(i\omega t) d\omega \\
&\quad (C_{-n} = \frac{1}{2W} x(\frac{n}{2W}) \text{ を代入}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2W} x\left(\frac{n}{2W}\right) \int_{-2\pi W}^{+2\pi W} \exp\{i(t - nL)\omega\} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2W} x\left(\frac{n}{2W}\right) \int_{-2\pi W}^{+2\pi W} \exp\{i(t - n/2W)\omega\} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2W} x\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\exp\{i(t - n/2W)\omega\}}{i(t - n/2W)} \Big|_{-2\pi W}^{+2\pi W} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2W} x\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\exp\{i(t - n/2W) \cdot 2\pi W\} - \exp\{-i(t - n/2W) \cdot 2\pi W\}}{i(t - n/2W)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\exp\{i\pi(2Wt - n)\} - \exp\{-i\pi(2Wt - n)\}}{i(2Wt - n)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin\{\pi(2Wt - n)\}}{\pi(2Wt - n)}
\end{aligned}$$

以上の議論は周波数に範囲が設定されると、時間について離散化できることであった。時間と周波数は相補的關係であるので、逆に時間範囲について制限がついた場合には、周波数を離散化できる。

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \frac{\sin(\omega T/2 - n\pi)}{\omega T/2 - n\pi} \quad (9)$$

時間離散化  $\longleftrightarrow$  周波数有限

時間有限  $\longleftrightarrow$  周波数離散化

$2W[\text{Hz}]$  でサンプルされた信号に、 $W[\text{Hz}]$  よりも高い周波数成分がはいっていた場合には、もとの  $x(t)$  の再現ができない。これを「エイリアス (alias) 現象」という。実際の観測データを離散化サンプルする時には、エイリアス現象を起こさないように、必ずサンプル前に高周波成分を落す (電気回路的な) フィルタをかける。これはアンチ-エイリアスフィルタと呼ばれる。

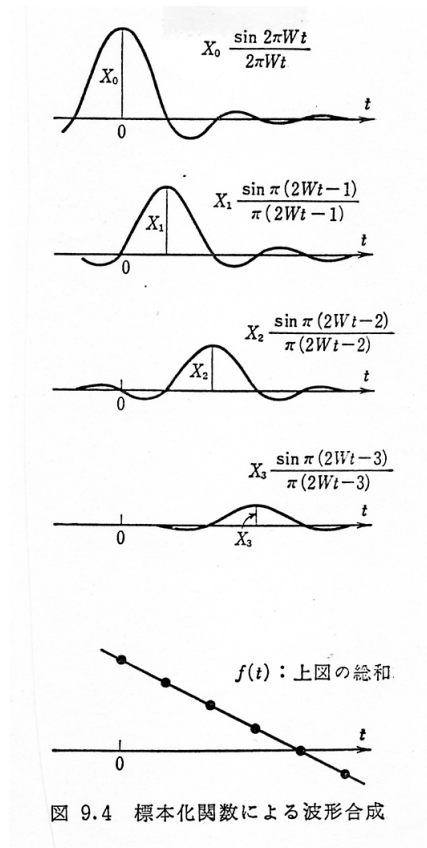


図 3: 標本化された関数の合成 [3]

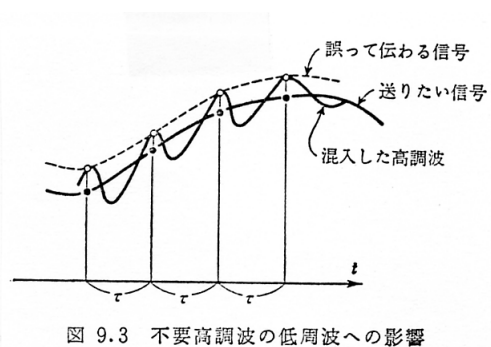


図 4: エイリアス現象 [3]

## 4 有限な長さの離散化したデータのフーリエ変換

周期  $T$  の周期波のフーリエ級数展開は次のように書ける。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(i2\pi nt/T) \quad (10)$$

$\frac{n}{T}$  が周波数  $f$  にあたるが、 $\Delta t$  間隔でサンプルされたデータの場合にはそれは  $\pm \frac{1}{2\Delta t}$  の範囲内にある必要がある。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\Delta t} &\leq \frac{n}{T} < \frac{1}{2\Delta t} \\ -\frac{T}{2\Delta t} &\leq n < \frac{T}{2\Delta t} \end{aligned}$$

$\frac{T}{\Delta t}$  は全サンプル数  $N$  にあたる。

$$-\frac{N}{2} \leq n < \frac{N}{2} \quad (11)$$

そこで、

$$x(t) = \sum_{n=-N/2}^{+N/2-1} C_n \exp(i2\pi nt/T) \quad (12)$$

$t = k\Delta t$  とおけば、指数の項は  $\exp\{i2\pi n(k\Delta t)/T\}$  として作用する。

$$\exp\{i2\pi n(k\Delta t)/T\} = \exp\{i2\pi nk/N\}$$

これは周期的なものである、 $n$  のかわりに  $n + \frac{N}{2}$  を入れて、全体の  $\sum$  をとっても同等である。そこで、 $n$  の範囲は次のようにおける。

$$0 \leq n < N$$

なお、ここで、右側の不等号に等号を含んでいないのは、 $n = N$  は周期性より  $n = 0$  と同等になるからである。そこで、フーリエ級数展開は次のようになる。

$$\begin{aligned} x(k\Delta t) &= \sum_{n=0}^{N-1} C_n \exp(i\frac{2\pi nk\Delta t}{T}) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} C_n \exp(i\frac{2\pi nk}{N}) \end{aligned} \quad (13)$$

フーリエ級数展開の係数  $C_m$  を求める上で、 $\frac{1}{T} \int x(t) \exp(-i\frac{2\pi mt}{T}) dt$  の代わりとして、 $\sum_k x(k\Delta t) \exp(-i\frac{2\pi mk\Delta t}{T}) \cdot \Delta t$  を考える。

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \exp(-i\frac{2\pi mk\Delta t}{T}) \cdot \Delta t \\ &= \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{n=0}^{N-1} C_n \exp(i\frac{2\pi nk\Delta t}{T}) \right) \exp(-i\frac{2\pi mk\Delta t}{T}) \\ &= \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} C_n \exp(i\frac{2\pi(n-m)k\Delta t}{T}) \end{aligned} \quad (14)$$



$n = m$  では  $\exp(i\frac{2\pi(n-m)k\Delta t}{T}) = 1$  となり、また、 $n \neq m$  では

$$\begin{aligned}\exp\left(i\frac{2\pi(n-m)k\Delta t}{T}\right) &= \exp\left(i\frac{2\pi(n-m)k}{N}\right) \\ &= -\exp\left(i\frac{2\pi(n-m)(k+N/2)}{N}\right)\end{aligned}$$

となり、 $k$  について 0 から  $N-1$  までの総和をとるとゼロとなる。すると、

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \exp(-i\frac{2\pi mk\Delta t}{T}) \cdot \Delta t \quad (15)$$

$$= \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} C_n \exp(i\frac{2\pi(n-m)k\Delta t}{T}) \quad (16)$$

$$\begin{aligned}&= \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} C_n \\ &= C_n N \Delta t \\ &= C_n T\end{aligned} \quad (17)$$

そこで、

$$\begin{aligned}C_n &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \exp(-i\frac{2\pi nk\Delta t}{T}) \cdot \Delta t \\ &= \frac{\Delta t}{T} \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \exp(-i\frac{2\pi nk\Delta t}{T}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \exp(-i\frac{2\pi nk\Delta t}{T}) \\ &= X\left(\frac{n}{T}\right) \\ &= X_n \\ X_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) W^{nk}\end{aligned} \quad (18)$$

ここで  $W = \exp(-i\frac{2\pi}{N})$  である。これが有限な長さの離散的関数におけるフーリエ変換に相当する。DFT(Discrete Fourier Transform) と呼ばれる。一方フーリエ逆変換は、

$$\begin{aligned}x_k &= x(k\Delta t) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} X\left(\frac{n}{T}\right) \exp(i\frac{2\pi nk}{N}) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} X\left(\frac{n}{T}\right) W^{-nk}\end{aligned} \quad (19)$$

離散データのフーリエ変換としては、この DFT をそのまま用いるのではなく、計算のやり方を工夫した高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform) が用いられる。最もよく用いら

れるものが基数 2 の FFT である。基数 2 の場合には、データ数:  $N$  を  $N = 2^p$  となるような数をとる。但し、 $p$  は整数である。(以後の FFT の説明は [7] に基づく。)

離散フーリエ変換を次のようなものとする。

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k W^{nk} \quad (20)$$

そのときにまず入力関数:  $x(t)$  を 2 つに奇数部分と偶数部分に分割する。

$$\begin{array}{llll} e_0 & \leftarrow & x_0 & \\ & & x_1 & \rightarrow g_0 \\ e_1 & \leftarrow & x_2 & \\ & & x_3 & \rightarrow g_1 \\ e_2 & \leftarrow & x_4 & \\ & & x_5 & \rightarrow g_2 \\ & & \vdots & \\ e_{N/2-1} & \leftarrow & x_{N-2} & \\ & & x_{N-1} & \rightarrow g_{N/2-1} \end{array}$$

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W^{nk} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &= x_0 W^{0n} + x_2 W^{2n} + x_4 W^{4n} + \dots + x_{2(N/2-1)} W^{2(N/2-1)n} \\ &\quad + x_1 W^{1n} + x_3 W^{3n} + x_5 W^{5n} + \dots + x_{2(N/2-1)+1} W^{2(N/2-1)n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} \{e_k W^{2nk} + g_k W^{n(2k+1)}\} \end{aligned} \quad (22)$$

これは  $e(n)$  と  $g(n)$  のフーリエ変換の線形結合の形式となっている。

一方  $e(n), g(n)$  の DFT:  $E_n, G_n$  は次のようになる。

$$E_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} e_k W'^{nk} \quad (23)$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k W'^{nk} \quad (24)$$

ここで  $W'$  は  $N/2$  のデータについての回転子であり  $W' = W^2$  である。

$$E_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} e_k W^{2nk} \quad (n = 0 \sim \frac{N}{2}) \quad (25)$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k W^{2nk} \quad (n = 0 \sim \frac{N}{2}) \quad (26)$$

これを  $X_n$  の式に代入すると、

$$X_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} \{e_k W^{2nk} + g_k W^{n(2k+1)}\} \quad (27)$$

$$= \begin{cases} E_n + G_n W^n & (0 \leq n \leq N/2 - 1) \\ E_{n-N/2} + G_{n-N/2} W^n & (N/2 \leq n < N - 1) \end{cases} \quad (28)$$

ここで、 $N/2 \leq n < N - 1$  においては、 $n = n' + \frac{N}{2}$  とおくと、 $e_k$  については、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N/2-1} e_k W^{2nk} &= \sum_{k=0}^{N/2-1} e_k W^{2(n' + \frac{N}{2})k} \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} e_k W^{2n'k} W^{Nk} \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} e_k W^{2n'k} \exp(-i \frac{2\pi}{N} Nk) \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} e_k W^{2n'k} \exp(-i 2\pi k) \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} e_k W^{2n'k} \cdot 1 \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} e_k W^{2(n-N/2)k} \\ &= E_{(n-N/2)} \end{aligned}$$

$g_k$  については

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k W^{n(2k+1)} &= \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k W^{(n' + N/2)(2k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k W^{n'(2k+1)} W^{\frac{N}{2}(2k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k W^{n'(2k+1)} \exp(-i \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2}(2k+1)) \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k W^{n'(2k+1)} \exp\{-i(2\pi k + \pi)\} \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k W^{n'(2k+1)} \cdot (-1) \\ &= - \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k W^{n'(2k+1)} \\ &= - \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k W^{2n'k} W^{n'} \\ &= - \sum_{k=0}^{N/2-1} g_k W^{2(n-N/2)k} W^{n-N/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -G_{n-N/2} W^n \exp(-i \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2}) \\
&= -G_{n-N/2} W^n \exp(-i\pi) \\
&= G_{n-N/2} W^n
\end{aligned}$$

これは  $N$  個のデータについての DFT が  $N/2$  個のデータについての DFT から求まることを示している (図 5)。

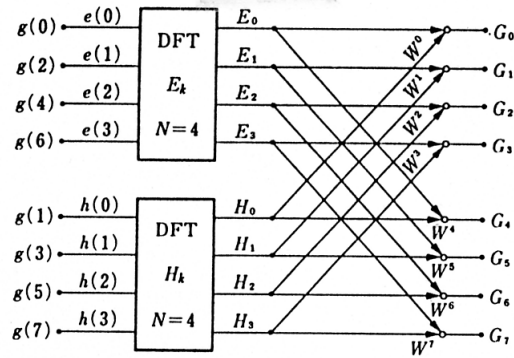


図4.2 2つのDFT ( $E_k$ ,  $H_k$ ) から  $G_k$ を求める方法 ( $N=8$ の場合)

図 5: 一つおきの DFT の結果を用いて DFT を計算する方法 [7]

この分解を繰り返せば、データと回転子を掛け合わせたものの足し合わせにより DFT がもまることになる (図 6)。DFT をそのまま計算すると  $N^2$  の計算が必要となる。それに対しこのような分解を繰り返す方法によると 1 回に  $N$  回、それを  $\log_2 N$  回繰り返すので全体として  $N \log_2 N$  回の計算ですむ。この方法を FFT と呼ばれ、非常によく用いられる。

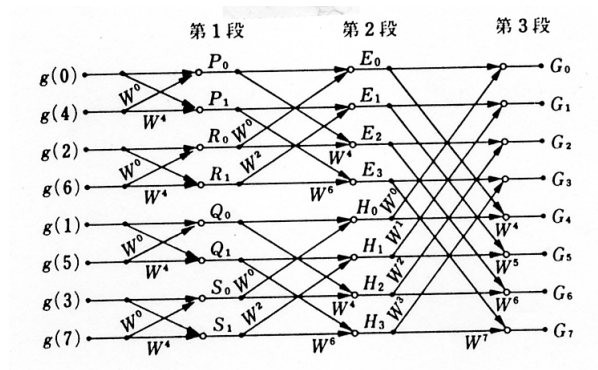


図 6: FFT[7]

逆変換する場合には因子:  $W$  のかわりに  $W^{-1}$  を用いるだけで、同様な計算ですむ。但し、 $\frac{1}{N}$  の大きさの補正が必要である。

## 5 スペクトル推定

### 5.1 スペクトル推定の分散

有限長離散データの DFT あるいは FFT によるスペクトルの推定は次のように書ける。

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \exp(-i2\pi f k \Delta t) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \cos(2\pi f k \Delta t) + i \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \sin(2\pi f k \Delta t) \\ &= X_R(f) + iX_I(f) \end{aligned}$$

ここで、 $X_R(f), X_I(f)$  はそれぞれ、 $X(f)$  の実部・虚部を表す。このように、DFT あるいは FFT によるスペクトルの推定は、線形結合となっている。もしも  $x(t)$  が正規分布をしているとすると、その線形結合の結果として得られる  $X_R(f), X_I(f)$  も正規分布をすることとなる。その時の分散は  $\chi^2$  分布をするが、分散は  $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1}$  という操作から明らかなように、データ数を増やしても分散は減らない。時間をましてデータ数を増やす操作は周波数の分解能  $\Delta f (= 1/T)$  を小さくすることに作用する。

スペクトル推定の分散を小さくする方法として次のようなものがある。

#### 1. アンサンブル平均による平滑化

全データ長  $T$  を長さ  $T_m$  の  $m$  個の区間に分割して、それぞれについてスペクトルを求めれば、それぞれのスペクトルは正規分布に従う。それぞれについてスペクトルを求めそれを平均すれば分散は  $1/\sqrt{m}$  に減少する。

#### 2. ウィンドーによる平滑化

得られたスペクトルに平滑化ウィンドーを作用させて平滑化を行えば、得られるスペクトルの分散は小さくなる。

### 5.2 時間ウィンドウ

フーリエ変換の積分が  $[-T/2, T/2]$  の有限区間で行なわれることは、無限に長いデータ  $x(t)$  に箱型のデータウィンドウをかけることに相当する。

$$w(t) = \begin{cases} 0 & (t < -T/2) \\ 1 & (-T/2 \leq t \leq T/2) \\ 0 & (t > T/2) \end{cases} \quad (29)$$

このデータウィンドウをかけることは、周波数領域においては畳み込み積分 (convolution) 的操作をしていることとなる。

$$y(t) = x(t)w(t)$$

$$\begin{aligned}
Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \exp(-i2\pi ft) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t) \exp(-i2\pi ft) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left( \int_{-\infty}^{\infty} W(g) \exp(i2\pi gt) dg \right) \exp(-i2\pi ft) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} W(g) \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i2\pi(f-g)t) dt \right) dg \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} W(g) X(f-g) dg
\end{aligned}$$

ここで、 $W(g)$  は  $w(t)$  のスペクトルである。

$$\begin{aligned}
W(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \exp(-i2\pi ft) dt \\
&= T \left( \frac{\sin \pi fT}{\pi fT} \right)
\end{aligned}$$

$W(f)$  は sinc pulse となっている。このような重みでスペクトルが「移動平均」されたものが出力となっている (図 7)。

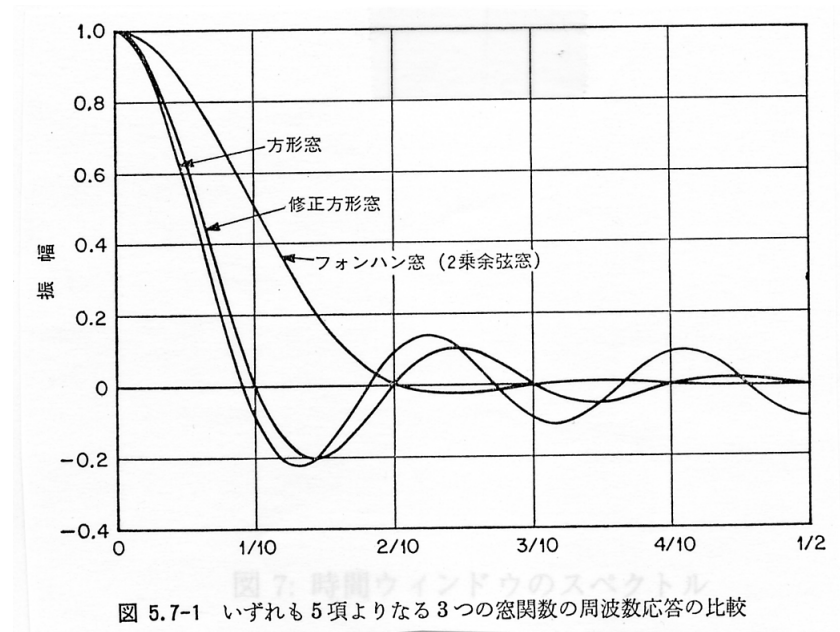


図 7: 時間ウィンドウのスペクトル [1]

## 6 その他のスペクトル推定法

### 6.1 MEM : Maximum Entropy Method

通常スペクトルの推定は有限のデータからそのスペクトルとしての特徴を把握しようとしている。限られて長さのデータからスペクトルを推定する方法としてこれまで述べたものとは異なる MEM (Maximum Entropy Method) という方法が 1967 年に John Parker Burg により提案されている。この方法は

1. 短いデータからもスペクトルの推定が可能
2. スペクトルの分解能が極めて高い

という特徴がある。

#### 情報量とエントロピー

エントロピーとは本来熱力学や統計物理学の分野で定義された概念で、無秩序あるいは不規則さの程度を表す。それを転じて情報理論において未知の度合を表す概念として導入された。

もしある事象が A, B の 2 つの状態をとり得るとして、前もって状態 A が必ず起きることがわかっていれば、未来についての不確定性はない。一方、A, B の起こる確立が  $p, 1-p$  であるとき、稀な減少が起きた方が情報が大きいと考える。そこで、確率  $p$  が起きた場合の情報量を次のように定義する。

$$I_A = \log_2 \frac{1}{p} \quad (30)$$

$p \simeq 1$  では情報量がほとんどなく、 $p \simeq 0$  では  $I_A \rightarrow \infty$  となる。

情報エントロピーは「1 回の試行により得られるであろう情報量の期待値」として定義される。

$$\begin{aligned} H &= E[I_j] \\ &= \sum_j p_j \log_2 \frac{1}{p_j} \\ &= - \sum_j p_j \log_2 p_j \end{aligned} \quad (31)$$

均等な目の出るさいころの場合には

$$\begin{aligned} H &= - \sum_{j=1}^6 \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} \\ &= \log_2 6 \end{aligned}$$

必ず 1 つの目しか出ないさいころでは、

$$\begin{aligned} H &= - \{1 \cdot \log_2 1 + \sum_{j=2}^6 \lim_{p \rightarrow 0} (p \log_2 p)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

確率に偏りが無いほど、つまりランダムな系ほどエントロピーは大きくなる。

事象が連続的な値をとる場合には、総和を積分に書き換える。

$$H = - \int p(x) \log p(x) dx \quad (32)$$

(ここでは対数の底が  $e$  としている)

熱力学エントロピーは増加する一方であるが、情報エントロピーはある事象が得られた場合には、その系の不規則さが減り減少しうる。

## 時系列の情報エントロピーと相関行列

MEM では、次のようにしてスペクトルを推定している。

1. 現在手元にある限られた長さのデータからエントロピーを計算する。そのエントロピーはデータ間の共分散が関係しており、そのデータ間の共分散は自己相関関数に対応している。
2. 得られている外側のデータの自己相関関数を、現在計算されているエントロピーが増加しないように推定してゆく。エントロピーの増加とはランダム性の増加であるので、エントロピーが増加しないように自己相関関数を推定するということは、手元にあるデータの持つ規則性をそこなわないように周辺のデータを推定することとなる。(一人言:「増加しないように」ということは minimum を求めることになるはずでは.....)
3. 推定された自己相関関数に基づき、スペクトルを推定する。

但し、以上の手順は必ずしも計算の手順ではない。

時系列  $x(0), x(\Delta t), x(2\Delta t), \dots, x(m\Delta t)$  があるときに、これらの時系列の持つエントロピーを考える。各時刻のデータ  $x(k\Delta t)$  は連続量であるとする。エントロピーを  $m+1$  次元に拡張する。 $x_0, x_1, \dots, x_m$  の同時確率分布を  $p(x_0, x_1, \dots, x_m)$  とする。するとエントロピーは

$$H = - \int p(x_0, x_1, \dots, x_m) \log p(x_0, x_1, \dots, x_m) dv \quad (33)$$

となる。もし  $p$  がガウス分布 (正規分布) に従うとすると、

$$p(x_0, x_1, \dots, x_m) = \frac{|\phi|^{1/2}}{(2\pi)^{(m+1)/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \phi_{ij} (x_i - \hat{x}_i) (x_j - \hat{x}_j) \right\} \quad (34)$$

ここで、 $\hat{x}_i$  は  $x_i$  の平均値、 $\phi_{ij}$  は共分散行列の逆行列の要素、 $|\phi|$  は共分散行列の逆行列の行列式である。

$$\begin{aligned} H &= - \int p(x_0, x_1, \dots, x_m) \log p(x_0, x_1, \dots, x_m) dv \\ &= - \int p(x_0, x_1, \dots, x_m) \left\{ \log \frac{|\phi|^{1/2}}{(2\pi)^{(m+1)/2}} - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \phi_{ij} (x_i - \hat{x}_i) (x_j - \hat{x}_j) \right\} dv \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= -\log \frac{|\phi|^{1/2}}{(2\pi)^{(m+1)/2}} \int p(x_0, x_1, \dots, x_m) dv \\
&\quad + \frac{1}{2} \int p(x_0, x_1, \dots, x_m) \sum_i \sum_j \phi_{ij}(x_i - \hat{x}_i)(x_j - \hat{x}_j) \{dv \\
&= -\log \frac{|\phi|^{1/2}}{(2\pi)^{(m+1)/2}} + \frac{m+1}{2} \quad \left( \int p(x_0, x_1, \dots, x_m) dv = 1 \right) \\
&= -\frac{1}{2} \log |\phi| + \text{constant} \\
&= \frac{1}{2} \log(\text{Det } \mathbf{C}_m) + \text{constant}
\end{aligned}$$

ここで、行列  $\mathbf{C}_m$  は  $x_k$  の相関からなる Toeplitz 行列である。

$$\mathbf{C}_m = \begin{pmatrix} C(0) & C(-1) & \dots & C(-m) \\ C(1) & C(0) & \dots & C(-m+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(m) & C(m-1) & \dots & C(0) \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$C_k = E[x(i)x(i-k)] \quad (36)$$

MEM においては  $\frac{1}{2} \log(\text{Det } \mathbf{C}_{m+i})$  が極値をとるように未知の  $C(m+1), C(m+2), \dots$  を決めてゆく。

なお、 $\int p(x_0, x_1, \dots, x_m) \sum_i \sum_j \phi_{ij}(x_i - \hat{x}_i)(x_j - \hat{x}_j) \{dv$  については、

$$\sum_i \sum_j \phi_{ij}(x_i - \hat{x}_i)(x_j - \hat{x}_j) = (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i)$$

とベクトル表示をして ( $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$  は共分散行列の逆行列)、更に

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{X}$$

と固有行列空間に座標変換したとすると、 $\Lambda_i = \phi$

$$\begin{aligned}
&\int p(x_0, x_1, \dots, x_m) \sum_i \sum_j \phi_{ij}(x_i - \hat{x}_i)(x_j - \hat{x}_j) \{dv \\
&= \int p(x'_0, x'_1, \dots, x'_m) \sum_i \sum_j \phi'_{ij}(x'_i - \hat{x}'_i)(x'_j - \hat{x}'_j) \{dv' \\
&= \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}
\end{aligned}$$

## 相関行列とスペクトル

スペクトルと相関は Wiener-Khintchine の公式により互いにフーリエ変換の関係にある。Toeplitz 行列とスペクトルの間には次の関係が導かれている。

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\text{Det } \mathbf{C}_m)^{1/(m+1)} = 2f_N \exp \left\{ \frac{1}{2f_N} \int_{-f_N}^{f_N} \log P(f) df \right\} \quad (37)$$

ここで、 $P(f)$  はパワースペクトルである。 $f_N = 1/(2\Delta t)$  はナイキスト周波数である。 $m \rightarrow \infty$  で  $H$  が発散することを避けるために、エントロピー密度  $h$  を定義する。

$$\begin{aligned} h &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{H}{m+1} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log(\text{Det} \mathbf{C}_m)^{1/(m+1)} \\ &= \frac{1}{4f_N} \int_{-f_N}^{f_N} \log P(f) df + \frac{1}{2} \log(2f_N) \end{aligned} \quad (38)$$

エントロピー密度が極値をとるように相関を推定することは次のようになる。

$$\frac{\partial h}{\partial C_k} = 0 \quad (k \geq m+1) \quad (39)$$

あるいは、

$$\frac{\partial H}{\partial C_k} = 0 \quad (40)$$

$C(0), C(1), \dots, C(m)$  が既知の場合に、新たに  $C(m+1)$  を求めるには、 $\text{Det } \mathbf{C}_{m+1}$  が極値をとるようにすればよい。それは次のような式となる

$$\text{Det} \begin{bmatrix} C(1) & C(0) & \dots & C(m-1) \\ C(2) & C(1) & \dots & C(m-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(m+1) & C(m) & \dots & C(1) \end{bmatrix} = 0 \quad (41)$$

自己相関とパワースペクトルの間には次のような関係がある。

$$P(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k) \exp(-i2\pi f k \Delta t) \quad (42)$$

式 (38) と式 (42) を式 (39) に代入することにより次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial C_k} &= \frac{1}{4f_N} \int_{-f_N}^{f_N} \frac{\partial}{\partial C_k} (\log P(f)) df \\ &= \frac{1}{4f_N} \int_{-f_N}^{f_N} \frac{1}{P(f)} \cdot \frac{\partial P(f)}{\partial C_k} df \\ &= \frac{1}{4f_N} \int_{-f_N}^{f_N} \frac{\partial}{\partial C_k} \left( \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k) \exp(-i2\pi f k \Delta t) \right) \cdot \frac{1}{P(f)} df \\ &= \frac{1}{4f_N} \int_{-f_N}^{f_N} \frac{\exp(-i2\pi f k \Delta t)}{P(f)} df \\ &= 0 \quad (k \geq m+1) \end{aligned} \quad (43)$$

これは、フーリエ変換の形になっており、 $1/P(f)$  が  $2m+1$  個の有限級数で展開されることを示している。

$$\frac{1}{P(f)} = \sum_{k=-m}^m b_k \exp(-i2\pi f k \Delta t) \quad (44)$$

上式の右辺は、さらに  $(m+1)$  個の係数  $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m)$ 、但し、 $\gamma_0 = 1$  を持ちいて次のように書き直すことができる。

$$\frac{1}{P(f)} = \sum_{k=-m}^m b_k \exp(-i2\pi f k \Delta t) \quad (45)$$

$$= (\Delta t P_m)^{-1} \left\{ \sum_{k=0}^m \gamma_k \exp(i2\pi f k \Delta t) \right\} \left\{ \sum_{k=0}^m \gamma_k^* \exp(-i2\pi f k \Delta t) \right\} \quad (46)$$

$\exp(i2\pi f k \Delta t) = z$  とおけば、

$$\left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k) z^{-k} \right] \left[ \sum_{k=0}^m \gamma_k z^k \right] = \frac{P_m}{\sum_{k=0}^m \gamma_k^* z^{-k}} \quad (47)$$

$z$  の次数が同じ係数を両辺で等しいとおくことにより、次の  $(m+1)$  個の方程式 (Yule-Walker 方程式) が得られる。

$$\begin{aligned} z^0 : & C(0) + \gamma_1 C(1) + \gamma_2 C(2) + \dots + \gamma_m C(m) &= P_m \\ z^1 : & C(1) + \gamma_1 C(0) + \gamma_2 C(1) + \dots + \gamma_m C(m-1) &= 0 \\ & \vdots & \vdots \\ z^m : & C(m) + \gamma_1 C(m-1) + \gamma_2 C(m-2) + \dots + \gamma_m C(0) &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

ここで、未知数は  $\gamma_k, P_m$  である。更に  $C(m)$  を未知数とする Burg 法がある。この式を求める上で  $C(k) = C(-k)$  の関係を用いている。こうして係数  $\gamma_k$  と  $P_m$  が求まると MEM スペクトルは次のようになる。

$$P(f) = \frac{\Delta t P_m}{\left| \sum_{k=0}^m \gamma_k \exp(i2\pi f k \Delta t) \right|^2} \quad (49)$$

## 自己回帰式 (AR:auto-regression) と MEM スペクトル

自己回帰式からもスペクトルの推定ができる。自己回帰式からスペクトルを求める方法は MEM と同等であることが示されている (赤池)。

自己回帰式とは次のようなものである。

$$x_i = a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \dots + a_m x_{i-m} + n_i \quad (50)$$

ここで、 $n_i$  はランダムノイズを表す。自己回帰式は常微分方程式:

$$k_m \frac{d^m x}{dt^m} + k_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + k_0 x = n(t) \quad (51)$$

を離散化したものに相当している。つまり自己回帰式はその系の物理的特性を反映したものとなっている。

この自己回帰式は、 $x_i$  の予測値  $\hat{x}_i$  を求める回帰予測式:

$$\hat{x}_i = a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \dots + a_m x_{i-m} \quad (52)$$

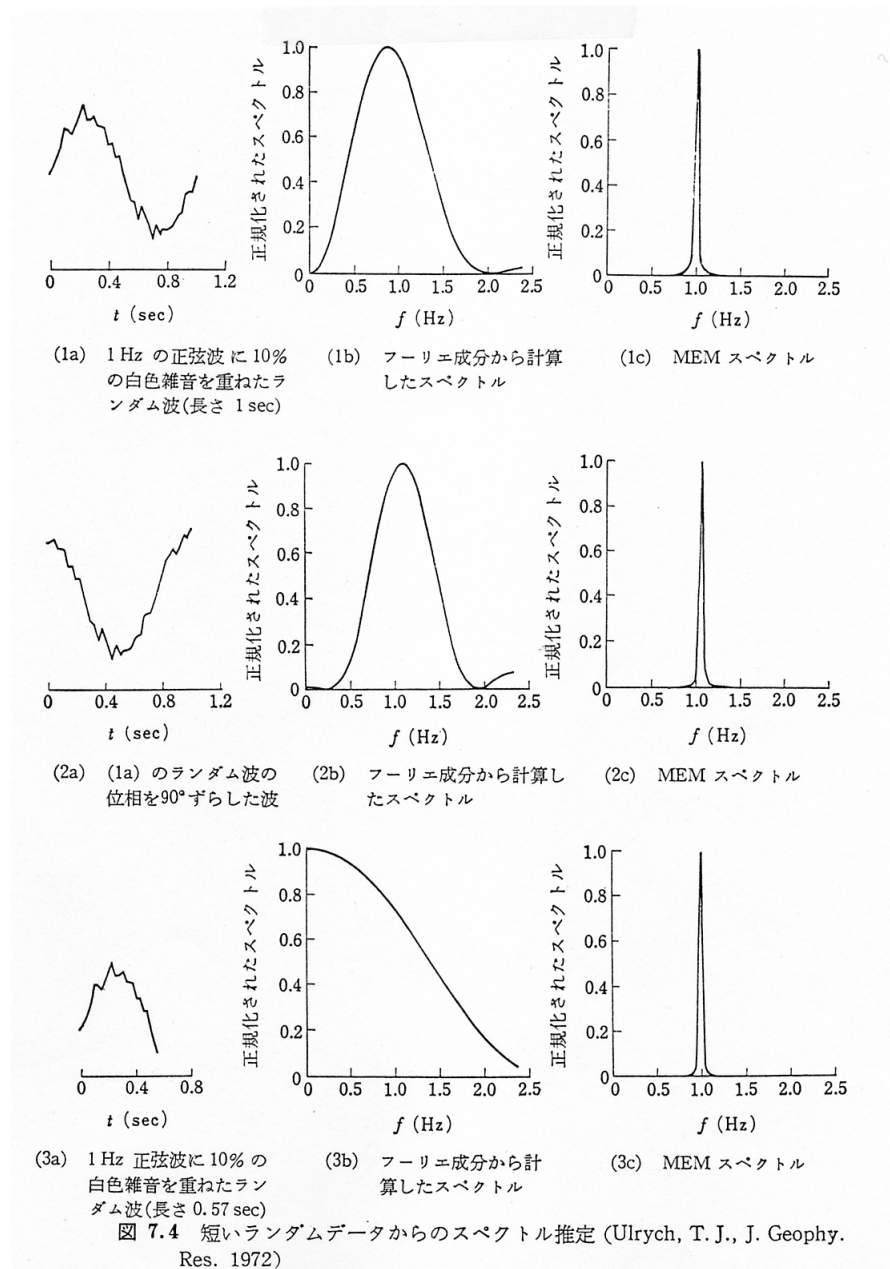


図 8: MEM スペクトル [9]

において、その残差  $x_i - \hat{x}_i (= x_i - a_1x_{i-1} - a_2x_{i-2} - \dots - a_mx_{i-m})$  が白色雑音 ( $n_i$ ) 化させるためのフィルターとなっている。

入力 ( $x_i$ )  $\rightarrow$  フィルター  $\rightarrow$  白色ノイズ

フィルターは入力の持っている周波数特性の逆数の周波数特性を持っていることになる。フィルターの係数は  $(1, -a_1, -a_2, \dots, -a_m)$  である。このフィルターの持つ周波数特性:  $H(z)$  は

$$\begin{aligned} H(\omega) &= 1 - a_1e^{-i\omega\Delta t} - a_2e^{-2(i\omega\Delta t)} - \dots - a_me^{-m(i\omega\Delta t)} \\ &= 1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2} - \dots - a_mz^{-m} \end{aligned}$$

となる。ただし、 $z = \exp(i2\pi f\Delta t)$  である。フィルターの周波数特性の逆数:  $\frac{1}{H(z)}$  が信号のスペクトルということになる。パワースペクトルを求めれば、

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{\sigma_n^2}{H(\omega)H^*(\omega)} \\ &= \frac{\sigma_n^2}{|1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2} - \dots - a_mz^{-m}|^2} \end{aligned} \quad (53)$$

ここで、 $\sigma_n^2$  は誤差の分散である。これは式 (49) と同様な形式をしている。

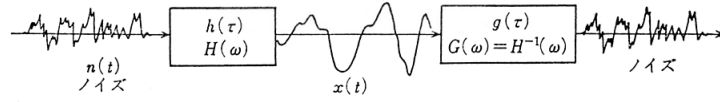


図 7.1 ノイズによる信号の発生とその deconvolution

## 図 9: 自己回帰式による白色雑音化

次に係数を求めることについて考える。順次  $x_{i-k} (k = 0 \sim m)$  をかけて期待値をとれば、 $E(x_{i-k}n_i) = 0 (k \neq 0)$ ,  $E(x_{i-k}n_i) = \sigma_n^2 (k = 0)$  より、

$$\begin{aligned} C(0) &= a_1C(-1) + a_2C(-2) + \dots + a_mC(-m) + \sigma_n^2 \\ C(1) &= a_1C(1-1) + a_2C(1-2) + \dots + a_mC(1-m) \\ &\vdots \\ C(m) &= a_1C(m-1) + a_2C(m-2) + \dots + a_mC(m-m) \end{aligned}$$

これは Yule-Walker 方程式 (式 (48)) と同等である。従って、「MEM によるスペクトル解析は、確率過程に自己回帰式をあてはめることに相等的い」。

なお、自己回帰式をつくる場合にその次数:  $m$  の大きさが問題となるが、それに対し、AIC (Akaike Information Criterion) を利用して決定することがよくなされている。

$$AIC = -2 \times (\text{モデルの最大対数尤度}) + 2 \times (\text{モデルの自由パラメータ数}) \quad (54)$$

これを考える上で自己回帰式の係数の最尤法 (さいゆうほう) による推定について考えてみる。自己回帰式の誤差:  $e_i$  は次のようなものである。

$$\begin{aligned} e_i &= x_i - \hat{x}_i \\ &= x_i - \sum_k a_k x_{i-k} \end{aligned}$$

これが正規分布に従うとして、その確率密度関数は次のようになるとする。

$$p(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp \left\{ -\frac{e^2}{2\sigma_n^2} \right\} \quad (55)$$

尤度とはデータの実現を与えたときの確率密度をパラメータの関数として考えたものである。

$$\text{尤度} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp \left\{ -\frac{(x_i - \sum_k a_k x_{i-k})^2}{2\sigma_n^2} \right\} \quad (56)$$

$n$  個のデータがある場合に、白色ノイズではそれぞれ独立なので尤度はそれらの積となる。

$$\text{尤度} = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp \left\{ -\frac{(x_i - \sum_k a_k x_{i-k})^2}{2\sigma_n^2} \right\} \quad (57)$$

対数尤度については

$$\begin{aligned} \text{対数尤度} &= \log \left[ \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp \left\{ -\frac{(x_i - \sum_k a_k x_{i-k})^2}{2\sigma_n^2} \right\} \right] \\ &= -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma_n^2) - \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_i (x_i - \sum_k a_k x_{i-k})^2 \end{aligned} \quad (58)$$

$l$  を対数尤度とすると、 $a_i$  の最尤推定量については、次の式を満足するものとなる。

$$\frac{\partial l}{\partial a_j} = 0 \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial a_j} &= \frac{\partial}{\partial a_j} \left\{ -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma_n^2) - \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_i (x_i - \sum_k a_k x_{i-k})^2 \right\} \\ &= -\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_i 2(-x_{i-j})(x_i - \sum_k a_k x_{i-k}) \\ &= -\frac{1}{\sigma_n^2} \left( -\sum_i x_{i-j}x_i + \sum_i \sum_k a_k x_{i-j}x_{i-k} \right) \\ 0 &= \sum_i x_{i-j}x_i - \sum_k \sum_i a_k x_{i-j}x_{i-k} \end{aligned}$$

そこで  $a_j$  を求める式は、

$$\begin{pmatrix} \sum_i x_{i-1}x_{i-1} & \sum_i x_{i-1}x_{i-2} & \cdots & \sum_i x_{i-1}x_{i-m} \\ \sum_i x_{i-2}x_{i-1} & \sum_i x_{i-2}x_{i-2} & \cdots & \sum_i x_{i-2}x_{i-m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i x_{i-m}x_{i-1} & \sum_i x_{i-m}x_{i-2} & \cdots & \sum_i x_{i-m}x_{i-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i x_{i-1}x_i \\ \sum_i x_{i-2}x_i \\ \vdots \\ \sum_i x_{i-m}x_i \end{pmatrix} \quad (60)$$

$\sigma_n^2$  の最尤推定量については、

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial(\sigma_n^2)} &= -\frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{2\pi\sigma_n^2} + \frac{1}{2(\sigma_n^2)^2} \sum_i (x_i - \sum_k a_k x_{i-k})^2 \\ &= \frac{1}{2\sigma_n^2} \left\{ -n + \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_i (x_i - \sum_k a_k x_{i-k})^2 \right\} \\ &= 0\end{aligned}$$

これより

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_i^n (x_i - \sum_k a_k x_{i-k})^2 \quad (61)$$

これを対数尤度の式に代入すると、最大対数尤度は、

$$\begin{aligned}\text{最大対数尤度} &= -\frac{n}{2} \log(2\pi\hat{\sigma}_n^2) - \frac{1}{2\hat{\sigma}_n^2} \sum_i (x_i - \sum_k a_k x_{i-k})^2 \\ &= -\frac{n}{2} \log(2\pi\hat{\sigma}_n^2) - \frac{1}{2\hat{\sigma}_n^2} n\hat{\sigma}_n^2 \\ &= -\frac{n}{2} \log(2\pi\hat{\sigma}_n^2) - \frac{n}{2}\end{aligned}$$

以上を用いると  $AIC$  は、

$$\begin{aligned}AIC &= -2 \left\{ -\frac{n}{2} \log(2\pi\hat{\sigma}_n^2) - \frac{n}{2} \right\} + 2(m+1) \\ &= n \left\{ \log(2\pi\hat{\sigma}_n^2) + 1 \right\} + 2(m+1)\end{aligned} \quad (62)$$

この  $AIC$  が最小となるように  $m$  を決定すればよい。

## 6.2 多次元のスペクトル

### 時空相関関数

海の波あるいはアレー地震計などで観測される常時微動などの不規則変動量は平面的に広がっており、各々の成分波はそれぞれの波速でさまざまな方向に進行している。相関をとる場合には空間的及び時間的な多次元相関を考える必要がある。

点  $\mathbf{x}$  の時刻  $t$  での変数の値  $\zeta(\mathbf{x}, t)$  と、点  $\mathbf{x} + \mathbf{r}$  の時刻  $t + \tau$  での変数の値  $\zeta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t + \tau)$  の相関として時空相関関数を定義する。

$$H(\mathbf{x}, t; \mathbf{r}, \tau) = \zeta(\mathbf{x}, t) \zeta(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t + \tau) \quad (63)$$

定常確率過程では  $H(\mathbf{x}, t; \mathbf{r}, \tau)$  は単に  $H(\mathbf{r}, \tau)$  となる。

### 多次元スペクトル

時空相関関数のフーリエ変換として空間的な変換による波数スペクトル

$$\Phi(\mathbf{k}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbf{r}} H(\mathbf{r}, \tau) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2 \text{ 次元の場合}) \quad (64)$$

と時間的な変換による周波数スペクトル

$$S_{ij}(\omega; \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\mathbf{r}, \tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (65)$$

が定義される。

さらに、時間・空間に関する同時のフーリエ変換により、一般的に波数角周波数空間  $(k_1, k_2, \omega)$  の多次元スペクトル

$$\Phi(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{r}} \int_{\tau} H(\mathbf{x}, t; \mathbf{r}, \tau) \exp\{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega\tau)\} d\mathbf{r} d\tau \quad (66)$$

この逆変換は、

$$\Phi(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{r}, t) = \int_{\mathbf{k}} \int_{\omega} \Phi(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{x}, t) \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega\tau)\} d\mathbf{k} d\omega \quad (67)$$



## 7 周波数領域におけるフィルタ

周波数領域におけるフィルタ処理は次のように書ける。

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (68)$$

ここで、 $\omega$  は、角周波数、 $X(\omega)$  は入力のアークリエ変換、 $Y(\omega)$  は出力のアークリエ変換である。 $H(\omega)$  がフィルタの周波数特性である。時間領域の出力: $y(t)$  を得るためには、 $Y(\omega)$  にアークリエ逆変換を施せばよい。

$$y(t) = F^{-1}(Y(\omega)) \quad (69)$$

ここで、 $F^{-1}$  はアークリエ逆変換を表す。離散化データを扱う場合には、アークリエ変換及び逆変換に FFT が用いられる。

[参考]

現在、震度を測る際に計測震度計を用いているが、これは体感震度が、加速度に対して、 $f^{1/2}$  の周波数特性を持つという経験則に基づいてその算出方式が決定された。この場合に  $f^{1/2}$  という特性は物理的に実現可能な伝達関数としては求めることができない。そこで、 $H(\omega)$  として、 $f^{1/2}$  となるような特性を与えて計算し、 $Y(\omega)$  を求め、更にそれをアークリエ逆変換して、そこでの最大振幅を評価している。しかし、そのようにして得た時間領域の関数はもはや因果律を満たしたものとはなっていない。なお、因果律を満たすとは、入力の前にそれに対応した出力が出ないことである。

## 8 時間領域のフィルタ処理の基本

時間領域の処理とは、実際の時系列データに係数をかけ合わせて足し合わせることで出力を得る方式である。次のようになる。

$$y_k = a_0 x_k + a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2} + \dots + b_1 y_{k-1} + b_2 y_{k-2} + \dots \quad (70)$$

ここで、 $x_k$  は入力データ、 $y_k$  は出力データ、 $a_k, b_k$  は定数である。 $x, y$  の添え字の  $k, k-1$  等はそれぞれ  $k$  番目のデータ、 $k-1$  番目のデータを表す。なお、データは一定の間隔で採取 (sample) されたもののみを扱い、不定期間隔のデータは対象としない。

時間領域における最も基本的なデジタルフィルタとして積分式がある。単純に過去のデータを蓄積してゆく場合は、次のようになる。

$$y_k = y_{k-1} + x_k \Delta t \quad (71)$$

ここで、 $i$  は時系列を表し、 $x$  は入力、 $y$  は出力、 $\Delta t$  はサンプリングの時間間隔である。サンプリングされたデータの間を線形補間したものが台形式、2次補間したものがシンプソン式である [1]。

$$\text{台形式: } y_k = y_{k-1} + \frac{\Delta t}{2} (x_k + x_{k-1}) \quad (72)$$

$$\text{シンプソン式: } y_k = y_{k-2} + \frac{\Delta t}{3} (x_k + 4x_{k-1} + x_{k-2}) \quad (73)$$

これらの式の周波数特性を考える。フーリエ変換あるいは、フーリエ級数展開において、時間遅れ:  $\Delta t$  は  $\exp(-i\omega \Delta t)$  に相当している。そこで台形式をそのままフーリエ変換した場合に次のようになる。

$$Y(\omega) = Y(\omega) \exp(-i\omega \Delta t) + \frac{\Delta t}{2} (X(\omega) + X(\omega) \exp(-i\omega \Delta t)) \quad (74)$$

式を整理すると次のようになる。

$$Y(\omega) = \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{1 + \exp(-i\omega \Delta t)}{1 - \exp(-i\omega \Delta t)} X(\omega) \quad (75)$$

シンプソン式については、次のようになる。

$$Y(\omega) = \frac{\Delta t}{3} \cdot \frac{1 + 4\exp(-i\omega \Delta t) + \exp(-i2\omega \Delta t)}{1 - \exp(-i2\omega \Delta t)} X(\omega) \quad (76)$$

これらを図示すると図 10 に示す。横軸は規格化した周波数:  $f \Delta t$  である。本来積分は周波数に反比例する振幅特性であるが、ここではその特性を明かにするため、 $\omega$  をかけた値をグラフに示している。このように台形式はナイキスト周波数において、出力が 0 となるような周波数特性を持つ。それに対し、シンプソン式は、ある周波数範囲においては、台形式より

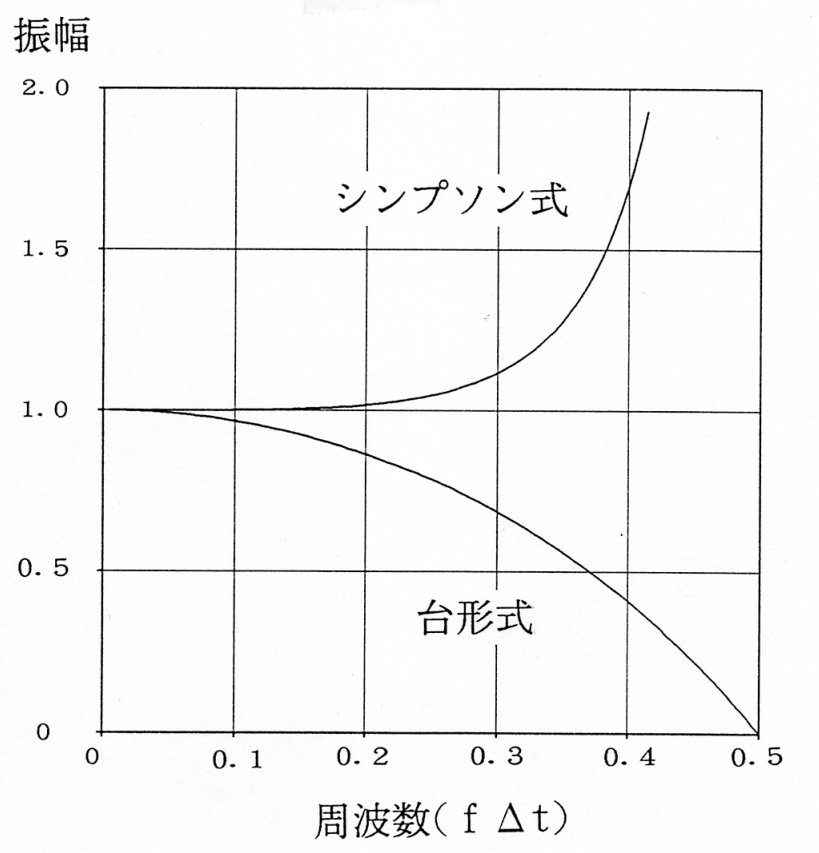


図 10: 積分式の周波数特性

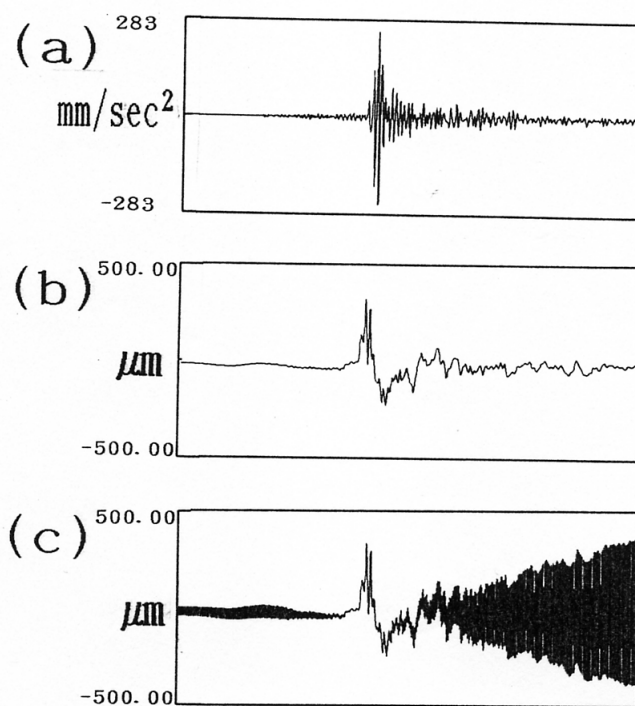


図 11: シンプソン式による積分

も 1 に近い値をとっているが、ナイキスト周波数において無限大となる。このため、シンプソン式により時間が長いデータを積分する場合には発散することがある。

図 11 に加速度型の地震計にシンプソンを 2 回適用して、変位振幅を求めた例を示す。積分式を次のように仮定する。

$$y_k = b_1 y_{k-1} + b_2 y_{k-2} + \dots + a_0 x_k + a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2} + \dots$$

もし定数:  $c$  を正しく積分するとすると、 $y_{k-j} = y_k - jc\Delta t$  である。

$$y_k = b_1(y_k - c\Delta t) + b_2(y_k - 2c\Delta t) + \dots + a_0 c + a_1 c + a_2 c + \dots \quad (77)$$

$$y_k(1 - b_1 - b_2 - \dots) = -(b_1 + 2b_2 + \dots)c\Delta t + (a_0 + a_1 + a_2 + \dots)c$$

$$y_k \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} b_j\right) = \left\{ -\Delta t \sum_{j=1}^{\infty} j b_j + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \right\} c \quad (78)$$

これが如何なる  $y_k$  や  $c$  でも成立するためには、条件が次のようになる。

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1 \quad (79)$$

$$\Delta t \sum_{k=1}^{\infty} k b_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad (80)$$

なお、積分式のように出力を得るために、過去の出力データを用いる方式を巡回型フィルタ、あるいは、無限インパルス応答フィルタ (IIR フィルタ : infinite impulse response filter) と呼ばれる。IIR フィルタは、ある有限の入力があると、理論上無限の時間有限の大きさの出力が得られるので、このように呼ばれる。

これに対し、次のように出力:  $y_k$  の計算に出力を戻すことなく、入力信号:  $x_k$  のみで計算するようなフィルタの場合には、ある入力があった場合にそれは有限の時間の間影響があるだけである。

$$y_k = \dots + \alpha_{-2} x_{k-2} + \alpha_{-1} x_{k-1} + \alpha_0 x_k + \alpha_1 x_{k+1} + \dots \quad (81)$$

このような入力のみを用いるフィルタを有限インパルス応答フィルタ (FIR フィルタ : finite impulse response filter) と呼ばれる。

この 2 種のフィルタの設計方法は、異なった方法がとられることが多い。IIR 型フィルタは電気回路等の物理的な振動系の特性と同等な周波数特性を有するデジタルフィルタとして設計される場合が多い。FIR フィルタは電気回路等の伝達関数のもつ条件 (因果律を満たすこと) に制限されずに、周波数領域において任意の特性を仮定してそれをフーリエ逆変換して結果として得る方法などがとられる。

離散化したデータを扱う場合にサンプリング間隔分の時間ずれを表す係数:  $\exp(-i\omega\Delta t)$  と項がよく出てくる。これを  $z^{-1}$  とおく。

$$z^{-1} = \exp(-i\omega\Delta t)$$

入力と出力の関係をこの  $z$  で表すことを  $Z$  変換と呼ぶ。台形式の  $Z$  変換は次のようになる。

$$Y(z) = \frac{\Delta t}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} X(z) \quad (82)$$

なお、ここで  $X(z), Y(z)$  はフーリエ変換の  $\omega$  を  $z$  で置き換えただけのものである。

## 9 FIR デジタルフィルタの設計

FIR デジタルフィルタは次のようなものである。

$$y_k = \sum_{j=0}^M a_j x_{k-j} \quad (83)$$

このように FIR フィルタにおいては、入力のみを用いて過去の出力を折り返すことがないので、過去の出力の影響を受けず、如何なる場合にでも出力が安定しているという特徴がある。しかし、IIR フィルタに比べると同じ程度の周波数遮断特性を得るためには多くの次数を必要とする。伝達関数  $H(z)$  は

$$H(z) = \sum_{j=0}^M a_j z^{-j} \quad (84)$$

$$= \sum_{j=0}^M a_j \exp(-i2\pi j f \Delta t) \quad (85)$$

である。

FIR 型特性にした場合に位相遅れを周波数に比例させることができるという特徴がある。位相:  $\theta = \text{Arg}(H(z))$  であるが、FIR フィルタの係数を適当に選ぶことにより  $\theta \propto \omega$  とできる。このような特性は直線位相特性と呼ばれる。時間遅れ (群遅延時間) は  $\frac{d\theta}{d\omega}$  と表すことができるので、 $\theta \propto \omega$  とは時間遅れが周波数について一定という特性となる。伝達関数を

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{4}$$

とすると

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{1 + 2 \exp(-i2\pi f \Delta t) + \exp(-i4\pi f \Delta t)}{4} \\ &= \exp(-i2\pi f \Delta t) \frac{2 + \exp(i2\pi f \Delta t) + \exp(-i2\pi f \Delta t)}{4} \\ &= e^{-i2\pi f \Delta t} (2 + 2 \cos(2\pi f \Delta t)) / 4 \end{aligned}$$

となる。  $\text{Arg}(H(z)) = -2\pi f \Delta t$  であるので、

$$\begin{aligned} \text{時間遅れ} &= \frac{d}{d\omega} \text{Arg}(H(z)) \\ &= -\Delta t \end{aligned}$$

IIR フィルタにより遅れ時間が周波数によらず一定の特性をつくることはできない。

FIR フィルタの長所と短所を箇条書きしておく、

長所

1. 完全な直線位相特性をもつフィルタが構成できる。

2. 非巡回型であるため、常に出力の安定性が保証されている。
3. 数値計算上 IIR 型に比べて丸め誤差は小さい。

#### 短所

1. 急峻な遮断特性を得るためには次数を相当高くする必要がある。

FIR フィルターはたたみ込み積分 (convolution) の形式の処理をすることになる。たたみ込み積分は次のように表される。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

ここで、 $a(t)$  はインパルス応答である。電気回路などの場合には  $a(t)$  は物理的に実現可能であるが、FIR フィルターでは電気回路などで実現できないような特性も作り出せる。

FIR 型フィルタが次のような場合、

$$y_k = \sum_{j=0}^M a_j x_{k-j} \quad (86)$$

直線位相特性となる条件は次に示す通りである。

- 対象波形

$$a_j = a_{M-j}$$

- 反対象波形

$$a_j = -a_{M-j}$$

但し、ここで  $0 < j < M$ 。この時の周波数特性 (図 12) は

1. 対象型

$$A(\omega) = \{a_{M/2} + 2 \sum_{j=0}^{M/2-1} a_j \cos((M/2 - j) \cdot \omega \Delta t)\} \exp(-i\omega \Delta t M/2) \quad (87)$$

$$(M : \text{偶数}) \quad (88)$$

$$A(\omega) = \{2 \sum_{j=0}^{M/2-1} a_j \cos((M/2 - j) \cdot \omega \Delta t)\} \exp(-i\omega \Delta t M/2) \quad (M : \text{奇数}) \quad (89)$$

#### 特徴

(a) M:偶数 → 低域、帯域、高域フィルタとも設計可能

(b) M:奇数 →  $2\pi f \Delta t = \pi$  のとき  $H(f)=0$  となり、高域フィルタは設計不可能



## 2. 反対象型

$$A(\omega) = \{a_{M/2} + 2 \sum_{j=0}^{M/2-1} a_j \sin((M/2 - j) \cdot \omega \Delta t)\} \exp(-i(\omega \Delta t M - \pi)/2) \quad (90)$$

( $M$  : 偶数)

$$A(\omega) = \{2 \sum_{j=0}^{M/2-1} a_j \sin((M/2 - j) \cdot \omega \Delta t)\} \exp(-i(\omega \Delta t M - \pi)/2) \quad (91)$$

( $M$  : 奇数)

### 特徴

- (a)  $M$ :偶数  $\rightarrow 2\pi f \Delta t = \pi, 0$  のとき  $H(f)=0$  となり、帯域フィルタのみ設計可能  
(b)  $M$ :奇数  $\rightarrow 2\pi f \Delta t = 0$  のとき  $H(f)=0$  となり、低域フィルタは設計不可能

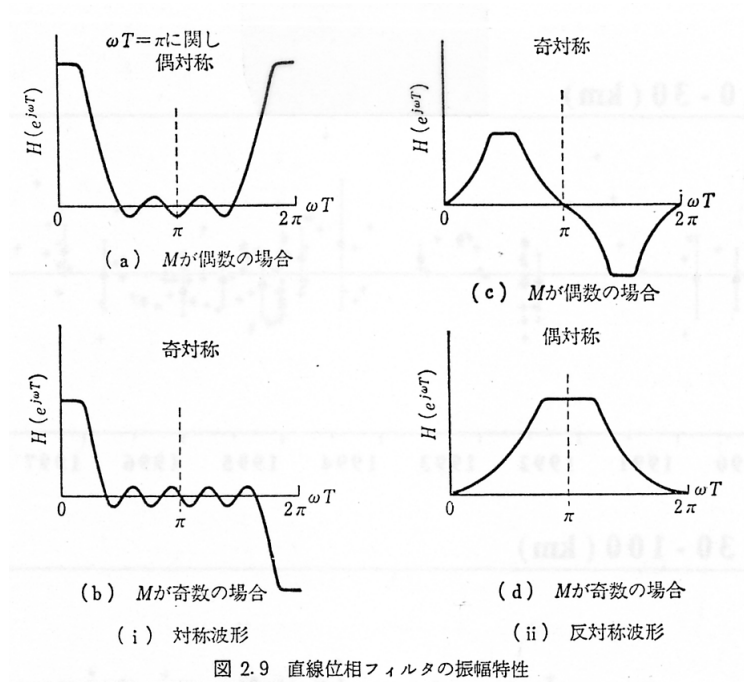


図 12: 直線位相 FIR フィルタの周波数特性

$M$  次の FIR フィルタのインパルス応答:  $h_j, j = 0 \sim M$  はフィルタの係数:  $a_j, j = 0 \sim M$  に等しいので、時間応答に注目した設計法は簡単となる。

希望する周波数特性をもつ FIR フィルタの伝達関数の代表的なものとして、フーリエ級数展開による方法がある。偶数次の対象型の FIR フィルタの周波数特性は、次の通りである。

$$A(\omega) = \{a_{M/2} + 2 \sum_{j=0}^{M/2-1} a_j \cos((M/2 - j) \cdot \omega \Delta t)\} \exp(-i\omega \Delta t M/2) \quad (92)$$

これはフーリエ級数展開の形をしている。所望の周波数特性の波形がほぼそのままフィルタの係数となっている。希望の周波数特性を  $A_d(f)$  とし、近似を評価する尺度を

$$E = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} ||A_d(\omega) - A(\omega)||^2 d\omega \quad (93)$$

の2乗誤差に選び、この評価尺度を最小にすることを考える。

## 10 地震計の周波数特性をもつIIR型フィルタ

振幅について平坦な周波数特性を持つ入力信号をある地震計の特性に変換するフィルタについて考える。周波数領域において平坦な特性を持つ加速度計で観測された地動を従来からある地震計の特性に擬して変換しようとする場合などにこのような必要が生ずる。

地震計の周波数特性は次の式で表現される [8]

$$\begin{aligned} U(\omega) &= \frac{A}{1 - (T/T_0)^2 - i2h(T/T_0)} \\ &= \frac{A}{1 - (\omega_0/\omega)^2 - i2h(\omega_0/\omega)} \end{aligned} \quad (94)$$

ここで、 $A$  は倍率、 $T$  は入力信号の周期で  $\omega = 2\pi/T$ 、 $T_0$  は振り子の固有周期、 $h$  は減衰定数である。地震計は高域通過フィルタの特性を有している。 $T_0$  よりも長周期の信号の記録振幅は周期の2乗に反比例して小さくなる。

これをIIR型のフィルタとして実現するためには、この式を表現する必要がある。しかし、 $z^{-1} = \exp(-i\omega\Delta t)$  をそのまま用いたのでは、上のような周波数特性の式をIIRフィルタの式に変換することは不可能である。そこで、 $z^{-1} = \exp(-i\omega\Delta t)$  の代わりに次のような式が用いられる。

$$i\omega = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (95)$$

ここで、 $c$  は周波数補正のための係数である。台形式の $z$ 変換の式: (式82)と比較してみると、上の式は積分操作 ( $\frac{1}{i\omega}$ ) の代わりに台形式を用いたものであることがわかる。つまり  $z^{-1} = \exp(-i\omega\Delta t)$  という三角関数の入った正確な表現を  $z^{-1} = \frac{i\frac{\omega}{c}-1}{i\frac{\omega}{c}+1}$  という有理式で近似したとみなせる。なお、 $c$  は周波数変換のための係数である。

また  $z^{-1} = \exp(-i\omega\Delta t)$  と  $z^{-1} = \frac{i\frac{\omega}{c}-1}{i\frac{\omega}{c}+1}$  は $s$ 平面 (Laplace変換の  $s = \sigma + i\omega$ ) において同様の領域への写像をつくる。なお、フーリエ変換でなく、ラプラス変換の形式を持ち出す必要があるかは、安定性に関連してくる。フィルター処理の場合に安定性が問題となる。フーリエ変換では定常な振幅のみを考え、時間により増加したり、減少したりする成分は考慮していない。安定性について考える場合に、時間的に変化する項に注意を払う必要があり、ラプラス変換の形式となる。 $z^{-1} = \exp(-s\Delta t)$  の式を複素数空間における写像と考える。エネルギー保存が成り立ちかつ物理的に存在し得る条件:  $Re(s) < 0$  がどのような $z$ の領域に写像されるかを考える。 $Re(s) < 0$  の $s$ 平面における領域は、 $z$ 平面において  $|z| < 1$  となる (図13)。

$$\begin{aligned} \exp(-s\Delta t) &= \exp\{-(\sigma + i\omega)\Delta t\} \\ &= \exp(-\sigma\Delta t) \cdot \exp(-i\omega\Delta t) \end{aligned}$$

$|\exp(-i\omega\Delta t)| \leq 1$  なので、もし  $\sigma < 0$  ならば、 $|\exp(-s\Delta t)| > 1$  となる。 $s = c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  と置き、 $z = \alpha + i\beta$  と考える。

$$s = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

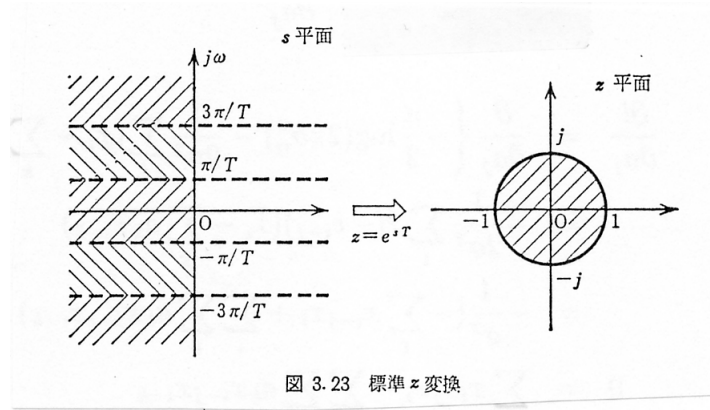


図 3.23 標準  $z$  変換

図 13:  $z$  変換 [2]

$$\begin{aligned}
 &= c \frac{z-1}{z+1} \\
 &= c \frac{\alpha + i\beta - 1}{\alpha + 1 + i\beta} \\
 &= c \frac{(\alpha+1)(\alpha-1) - (i\beta)^2 - i\{(\alpha-1) - (\alpha-1)\}\beta}{(\alpha+1)^2 + \beta^2} \\
 &= c \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1 + i2\beta}{(\alpha+1)^2 + \beta^2}
 \end{aligned}$$

$Re(s) < 0$  となる条件は  $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ 、つまり  $|z| < 1$  となる。 $z^{-1} = \exp(-s\Delta t)$  と  $s = c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  は、 $Re(s) < 0$  という条件の成立する領域については同じ条件を持つ。但し当然のことながら、関数として同じ値になっているわけではない。

$i\omega = c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  を地震計の周波数特性の式に代入すると地震計の特性を再現するデジタルフィルタができる。なお、定数  $c$  はある特定の周波数の時に意図する周波数特性が得られるように決定すればよい。もし、周期  $T$  のときに近似した周波数特性が本来の周波数特性に正確に一致させようとすれば、 $\omega$  に  $\frac{2\pi}{T}$ 、 $z^{-1}$  に  $\exp(-i\frac{2\pi}{T}\Delta t)$  を代入して  $c$  を決定すればよい。

$$i\omega = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (96)$$

ここで左辺が正確な角周波数、右辺が近似した角周波数である。

$$\begin{aligned}
 i\frac{2\pi}{T} &= c \frac{1 - \exp(-i\frac{2\pi}{T}\Delta t)}{1 + \exp(-i\frac{2\pi}{T}\Delta t)} \\
 &= c \frac{\exp(i\frac{\pi}{T}\Delta t) - \exp(-i\frac{\pi}{T}\Delta t)}{\exp(i\frac{\pi}{T}\Delta t) + \exp(-i\frac{\pi}{T}\Delta t)} \\
 &= ic \frac{\sin(\frac{\pi}{T}\Delta t)}{\cos(\frac{\pi}{T}\Delta t)} \\
 &= ic \tan \frac{\pi\Delta t}{T}
 \end{aligned}$$

$$c = \frac{2\pi}{T} \cot \frac{\pi \Delta t}{T} \quad (97)$$

地震計の場合にはこの周期: $T$  を地震計の周期: $T_0$  に合わせればよい。

以上の式を地震計の周波数特性の式に代入すると、所望のデジタルフィルタが得られる。

$$U(z) = G \frac{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}}{1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2}} \quad (98)$$

ここで

$$\begin{aligned} G &= \frac{A_0}{1 + 2h\omega' + \omega'^2} \\ \alpha_1 &= -2 \\ \alpha_2 &= 1 \\ \beta_1 &= \frac{-2 + 2\omega'^2}{1 + 2h\omega' + \omega'^2} \\ \beta_2 &= \frac{1 - 2h\omega' + \omega'^2}{1 + 2h\omega' + \omega'^2} \\ \omega' &= \frac{\omega_0}{c} \\ &= \frac{2\pi}{cT_0} \end{aligned}$$

例えば、 $A_0 = 1.0$ ,  $h = 0.5$ ,  $T_0 = 5.0$ ,  $\Delta t = 0.02$  の時には、 $G = 0.987435$ ,  $\alpha_1 = -2$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_1 = -1.97456$ ,  $\beta_2 = 0.97518$  となる。

## 11 極と伝達関数の安定性

フーリエ変換は次のように書ける。

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (99)$$

$X(f)$  を時間領域になおすには、フーリエ逆変換が用いられる。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (100)$$

これらにおいて周波数 $\omega$ は実数のみが考えられている。しかし、伝達関数の「安定性」を考慮するためには複素数の周波数を考える必要がある。つまり  $i\omega$  のかわりに  $\sigma + i\omega$  を用いて、 $\sigma$  の持つ効果について考える。

なお、電気回路やバネの振動などの物理的に実現可能な系については、もともと「安定性」は成り立っている。つまり入力した以上のエネルギーが出力に出てくることはない。しかし、フィルタのように人工的に伝達関数を作る場合には注意を払わないと入力した以上のエネルギーが出力に現れ、発散するという特性になってしまう場合があり得る。そこで  $\exp(\sigma t)$  という時間につれて増加する可能性を考慮してゆく必要がある。

フーリエ変換の周波数を複素数に拡張したものはラプラス変換である。フーリエ変換の  $\omega$  の代わりに  $\frac{s}{i}$  を代入するとラプラス変換 $X(s)$  は次のようになる。

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (101)$$

ここで積分範囲を  $[0, \infty]$  とするのは、 $\exp(\beta t)$  ( $\beta > 0$ ) のような  $t = -\infty$  において無限大となるような関数も取り扱うことを考えているためである。また、ラプラス逆変換は、

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(s)e^{i\frac{s}{i}t} \frac{ds}{i} \\ &= \frac{1}{i2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(s)e^{st} ds \end{aligned} \quad (102)$$

$\exp(\beta t)$  ( $\beta > 0$ ) のような関数を取り扱っても計算できるように  $s = \sigma + i\omega$  と考えている。振動系の場合、 $X(s)$  は  $s$  に関しての有理関数となっている場合が多い。 $X(s) = \sum_i \frac{A_i}{s-s_i}$  と変形できたとする。するとラプラス逆変換は、

$$x(t) = \sum_i \frac{A_i}{i2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{st}}{s-s_i} ds \quad (103)$$

となる。ラプラス逆変換の積分経路は  $[\sigma-i\infty, \sigma+i\infty]$  であるが、被積分関数 $f(s)$  が  $|s| = R$  の時に、 $|f(s)| < \frac{M}{R^k}$  ( $k > 1$ ) となるような  $M$  が存在するときに、 $R \rightarrow \infty$  とすると、 $|s| = R$  に沿った積分はゼロとなる (14)。上の式においては  $e^{st}$  が作用し  $\text{Re}(s) \leq 0$  となる範囲では、 $|e^{st}| = e^{\sigma t}$  となり有限である。 $R \rightarrow \infty$  のときに  $\frac{e^{st}}{s-s_i} \rightarrow 0$  となる。そこで、積分経路に  $|s| = R$

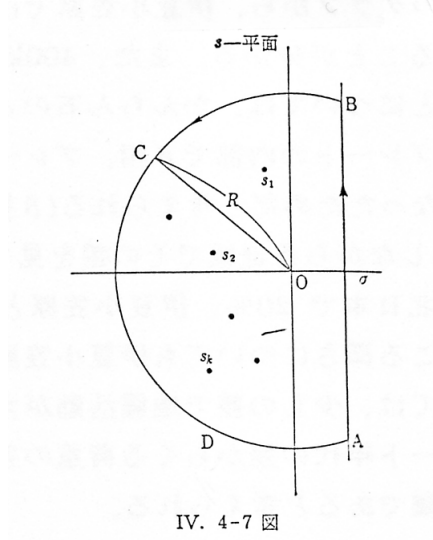


図 14:  $|s| = R$  の積分経路

というパスを加え、その後  $R \rightarrow \infty$  とすると考える。すると積分経路は閉じる。

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_i \frac{A_i}{i2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{st}}{s-s_i} ds \\ &= \sum_i \frac{A_i}{i2\pi} \oint \frac{e^{st}}{s-s_i} ds \end{aligned} \quad (104)$$

これはコーシーの積分表示の形式となっている。コーシーの積分表示は次のようなものである。

$$f(a) = \frac{1}{i2\pi} \oint \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (105)$$

但し  $f(z)$  は積分経路の内側では正則である。このコーシーの積分表示を用いるとラプラス逆変換は次のようになる。

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_i \frac{A_i}{i2\pi} \oint \frac{e^{st}}{s-s_i} ds \\ &= \sum_i A_i e^{s_i t} \end{aligned} \quad (106)$$

ラプラス逆変換はこのように伝達関数  $X(s)$  の極を求め、その極の値を  $e^{st}$  の  $s$  に代入し、それらを足し合わせるにより計算される。

フィルターを設計する場合に、 $X(s)$  を適当に仮定するものであるが、 $X(s)$  の極の選び方によっては  $\exp(\beta t)$  ( $\beta > 0$ ) というような発散する項が取り込まれる可能性がある。このような発散を防ぐために、 $X(s)$  の設定のためには、注意を払う必要がある。

## 12 高次のフィルタの処理

ある任意の周波数特性が与えられた場合に、前節のように周波数特性の式を直接 Z 変換する方法は適応可能であるが、あまり次数が高くなると計算次の誤差が大きくなってしまう。その時には 2 次のフィルタを直列に作用させると計算誤差の蓄積は小さい。

$$H(z) = G_0 \prod_{j=1}^M H_j(z) \quad (107)$$

$$H_j(z) = \frac{1 + a_{1j}z^{-1} + a_{2j}z^{-2}}{1 + b_{1j}z^{-1} + b_{2j}z^{-2}} \quad (108)$$

$H_j(z)$  の離散化データへの適用は次のようになる。

$$y_i = x_i + a_1x_{i-1} + a_2x_{i-2} - b_1y_{i-1} - b_2y_{i-2} \quad (109)$$

次のような二つのサブルーチンを作ると適用範囲が広い。

1. 一つの 2 次フィルタの処理。次の引数を持つ。
  - (a) 入力データ:  $x_i$
  - (b) 入力データ数:  $N$
  - (c) 係数:  $a_1, a_2, b_1, b_2$  の順番に入っている配列
  - (d) フィルタの処理方向: 1 or -1
  - (e) 出力データ:  $y_i$
2. 上のサブルーチンを呼びだし、複数のフィルタを直列に作用させる。次の引数を持つ。
  - (a) 入力データ:  $x_i$
  - (b) 入力データ数:  $N$
  - (c) 係数:  $a_{11}, a_{21}, b_{12}, b_{21}, \dots, a_{1M}, a_{2M}, b_{1M}, b_{2M}$  の順番に入っている配列
  - (d) 基本フィルタの数
  - (e) フィルタの処理方向: 1 or -1
  - (f) 出力データ:  $y_i$

さらにフィルタの係数:  $G_0, H$  を入力して周波数特性を出力するルーチンは、周波数特性の確認に必要である。



### 13 バタワースフィルタの基本周波数特性

バタワースフィルタはよく知られたアナログフィルタである。バタワースフィルタの周波数応答は次のようなものである。

$$|B_n(\sigma)|^2 = \frac{1}{1 + \sigma^{2n}} \quad (110)$$

ここで  $n$  は正の正数、 $\sigma$  は無次元の周波数 (例えば  $\omega/\omega_0$ ) である (ラプラス変換の  $s = \sigma + i\omega$  の  $\sigma$  とはことなる)。上式において  $\sigma = 0$  において、 $B_n(\sigma) = 1$ 、 $\sigma \rightarrow \pm\infty$  において  $B_n(\sigma) \rightarrow 0$  となる。つまり低域通過フィルタの特性となっている。

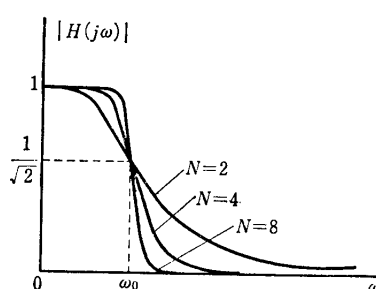


図 3.5 バタワース特性

図 15: バタワース特性 [2]

この高次式のまま  $i\sigma = c \frac{1-z-1}{1+z-1}$  として、 $z$  変換することも可能ではあるが、そうすると発散項が除かれなかったり、 $z$  に関して高次式となってしまうことがあり、通常はそのような方法はとられない。また、 $z$  について高次式となってしまうと、データ処理時に桁落ちのために数値演算誤差を生じてしまう。そこで、まず、 $1 + \sigma^{2n} = \prod_i (\sigma - \sigma_i)$  のように因数分解して極の性質を調べることから始める。

因数分解するために、 $1 + \sigma^{2n} = 0$  の根を求める。 $\sigma = \exp(i\theta)$  と置く。

$$\begin{aligned} \sigma^{2n} &= -1 \\ \{\exp(i\theta)\}^{2n} &= \exp\{i(-\pi + j(2\pi))\} \quad (j = 1, 2, \dots) \\ \exp(i2n\theta) &= \exp(-i\pi + j(2\pi)) \\ 2n\theta &= -\pi + j(2\pi) \\ \theta &= \frac{2j-1}{2n}\pi \quad (j = 1, 2, \dots, 2n) \end{aligned}$$

故に

$$\sigma = \exp\left(i\frac{2j-1}{2n}\pi\right) = r_j + it_j \quad (111)$$

この根を用いれば、 $B_n(\sigma)$  を因数分解できる。

$$|B_n(\sigma)|^2 = \prod_{j=1}^{2n} \frac{1}{\sigma - \sigma_j} \quad (112)$$

$\sigma_j$  が極である。次にこれらの極の中から発散項 (解として  $e^{\beta t}$  となったときに、 $Re(\beta) > 0$  となる項) を除く。 $s = i\sigma$  なので、 $s$  平面で考えるために  $i$  をかけたもので考える。

$$B_n^2(\sigma) = \prod_{j=1}^{2n} \frac{1}{i(\sigma - \sigma_j)} \quad (113)$$

図 16 に示すように  $j = 1 \sim 2n$  の内、 $s = i\sigma$  として左半平面に極があるものは  $j = 1 \sim n$  の極である。

$$B_n(\sigma) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{i(\sigma - \sigma_j)} \quad (114)$$

これが、物理的にも実現可能な発散しないフィルターの周波数特性となる。

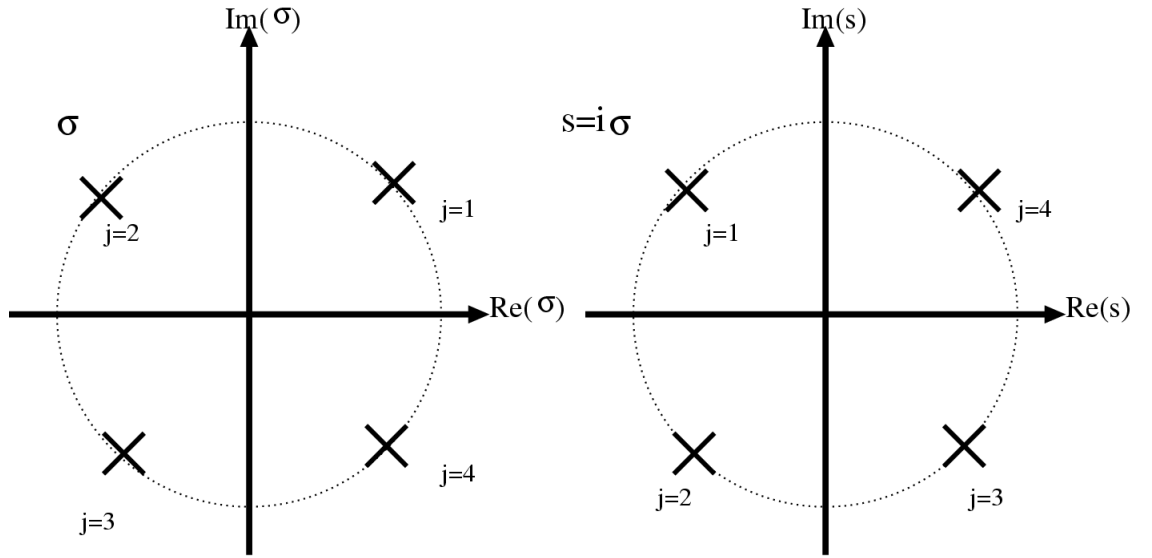


図 16:  $\sigma$  の根と  $s$  としての極

## 14 ローパスフィルター

バターースフィルタの基本特性は  $\sigma$  がそのまま周波数と考えれば低域通過 (ローパス) 特性となっているので、ローパスフィルタを実現する場合には前項で示したバターースフィルタの基本特性をそのまま  $z$  変換すればよい。

$$\sigma = \frac{c}{i} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (115)$$

ここで  $c$  は正でなければならない。もし、 $c$  が負であるとする、前節でせっかく発散しないように選んだ極を入れかわって  $\omega$  としての極の実部が正となってしまう。 $\sigma = \frac{c}{i} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} =$

$\frac{c}{i} \frac{1-e^{-i\omega\Delta t}}{1+e^{-i\omega\Delta t}}$  は  $\omega$  の代わりとして用いているものである。  $Re(i\sigma) < 0$  の時に、  $Re(i\omega) < 0$  が成立しなくては、  $Re(i\sigma_j) < 0$  と極を選んだ意味がない。  $i\omega = \alpha + i\beta$  とおく。

$$\begin{aligned}
i\sigma &= c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \\
&= c \frac{1 - e^{-i\omega\Delta t}}{1 + e^{-i\omega\Delta t}} \\
&= c \frac{1 - e^{-(\alpha+i\beta)\Delta t}}{1 + e^{-(\alpha+i\beta)\Delta t}} \\
&= c \frac{(1 - \exp(-\alpha\Delta t) \cos(\beta\Delta t)) + i \exp(-\alpha\Delta t) \sin(\beta\Delta t)}{(1 + \exp(-\alpha\Delta t) \cos(\beta\Delta t)) - i \exp(-\alpha\Delta t) \sin(\beta\Delta t)} \\
&= \frac{c}{\{1 + \exp(-\alpha\Delta t) \cos(\beta\Delta t)\}^2 + \{\exp(-\alpha\Delta t) \sin(\beta\Delta t)\}^2} \cdot \\
&\quad \{1 - \exp(-\alpha\Delta t) \cos(\beta\Delta t) + i \exp(-\alpha\Delta t) \sin(\beta\Delta t)\} \cdot \\
&\quad \{1 + \exp(-\alpha\Delta t) \cos(\beta\Delta t) + i \exp(-\alpha\Delta t) \sin(\beta\Delta t)\} \\
&= \frac{c}{\{1 + \exp(-\alpha\Delta t) \cos(\beta\Delta t)\}^2 + \{\exp(-\alpha\Delta t) \sin(\beta\Delta t)\}^2} \cdot \\
&\quad \left[ \{1 - (\exp(-\alpha\Delta t) \cos(\beta\Delta t))^2 - (\exp(-\alpha\Delta t) \sin(\beta\Delta t))^2\} \right. \\
&\quad \left. + i\{2 \exp(-\alpha\Delta t) \sin(\beta\Delta t)\} \right] \\
&= c \frac{\{1 - \exp(-2\alpha\Delta t)\} + i2 \exp(-\alpha\Delta t) \sin(\beta\Delta t)}{\{1 + \exp(-\alpha\Delta t) \cos(\beta\Delta t)\}^2 + \{\exp(-\alpha\Delta t) \sin(\beta\Delta t)\}^2}
\end{aligned}$$

この実部の符号は  $c\{1 - \exp(-2\alpha\Delta t)\}$  により決まる。  $Re(i\sigma) < 0$  であるときに、  $Re(i\omega) < 0$  であるためには  $c > 0$  である必要がある。

$c$  の大きさの決定には任意性があるが、例えば通過域の端の周波数:  $\omega_p$  (多くの場合、振幅が  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  倍となる周波数) において、その振幅特性が実現されるようにとることができる。つまり  $\omega = \omega_p$  において実周波数:  $\omega$  と近似の周波数:  $c \frac{1 - \exp(-i\omega\Delta t)}{1 + \exp(-i\omega\Delta t)}$  が一致するようにとる方法である。

$$c = \sigma_p / \tan(\omega_p \Delta t / 2) \quad (116)$$

但し  $\sigma_p$  は  $\frac{1}{1+\sigma_p^{2n}} = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2$  となるような値である。

Z 変換を用いて伝達関数の式を変換する。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i(\sigma - \sigma_j)} &= \frac{1}{i \frac{c}{i} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - i\sigma_j} \\
&= \frac{1 + z^{-1}}{c(1 - z^{-1}) - i\sigma_j(1 + z^{-1})} \\
&= \frac{1 + z^{-1}}{(c - i\sigma_j) - (c + i\sigma_j)z^{-1}}
\end{aligned}$$

一方  $\sigma_{n-j+1} = -\sigma_j^*$  であるので、  $n - j + 1$  番目の極については

$$\frac{1}{i(\sigma - \sigma_{n-j+1})} = \frac{1}{i(\sigma + \sigma_j^*)}$$

$$= \frac{1 + z^{-1}}{(c + i\sigma_j^*) - (c - i\sigma_j^*)z^{-1}}$$

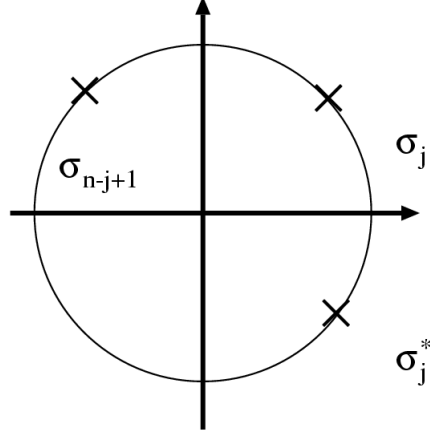


図 17:  $\sigma_j$  と  $\sigma_{n-j+1}$

二つの極をまとめて計算すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i(\sigma - \sigma_j)} \cdot \frac{1}{i(\sigma - \sigma_{n-j+1})} \\ &= \frac{(1 + z^{-1})^2}{\{(c - i\sigma_j) - (c + i\sigma_j)z^{-1}\}\{(c + i\sigma_j^*) - (c - i\sigma_j^*)z^{-1}\}} \\ &= \frac{(1 + z^{-1})^2}{(c - i\sigma_j)(c + i\sigma_j^*) - \{(c + i\sigma_j)(c + i\sigma_j^*) + (c - i\sigma_j)(c - i\sigma_j^*)\}z^{-1} + (c + i\sigma_j)(c - i\sigma_j^*)z^{-2}} \\ &= \frac{\{c^2 + i(-\sigma_j + \sigma_j^*)c + \sigma_j\sigma_j^*\} + \{2c^2 - 2\sigma_j\sigma_j^*\}z^{-1} + \{c^2 + i(\sigma_j - \sigma_j^*)c + \sigma_j\sigma_j^*\}z^{-2}}{(1 + z^{-1})^2} \\ &= \frac{\{c^2 + i(-i2t_j)c + r_j^2 + t_j^2\} + \{2c^2 - 2\sigma_j\sigma_j^*\}z^{-1} + \{c^2 + i(i2t_j)c + r_j^2 + t_j^2\}z^{-2}}{(1 + z^{-1})^2} \\ &= \frac{\{c^2 + 2t_jc + t_j^2 + r_j^2\} + \{2c^2 - 2\sigma_j\sigma_j^*\}z^{-1} + \{c^2 - 2t_jc + t_j^2 + r_j^2\}z^{-2}}{(1 + z^{-1})^2} \\ &= \frac{(c + t_j)^2 + r_j^2 - 2(c^2 - \sigma_j\sigma_j^*)z^{-1} + \{(c - t_j)^2 + r_j^2\}z^{-2}}{(1 + z^{-1})^2} \end{aligned}$$

ここで、 $r_j, t_j$  は  $\sigma_j$  の実数部、虚数部であり、 $\sigma_j = r_j + it_j$  である。

$n$  が偶数の場合にはすべての極は互いに共役なペアをつくるが、 $n$  が奇数の場合には、ペアをつくらぬ極が現れる。 $n = 2m + 1$  とすると、 $j = m + 1$  の極はペアがなく、純虚数となる。

$$\frac{1}{i(\sigma - \sigma_{m+1})} = \frac{1 + z^{-1}}{(c + t_{m+1}) - (c - t_{m+1})z^{-1}}$$

以上をまとめると、 $z$  変換されたフィルタの伝達関数は、次のようになる。

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(c + t_{m+1}) - (c - t_{m+1})z^{-1}} \prod_{j=1}^m \frac{(1 + z^{-1})^2}{(c + t_j)^2 + r_j^2 - 2(c^2 - \sigma_j \sigma_j^*)z^{-1} + \{(c - t_j)^2 + r_j^2\}z^{-2}} \quad (117)$$

分子分母が  $z$  の 2 次式となっている。ここで定数項が 1 にはなっていないが、それは共通の係数として外に出した方が実際の計算の際に整理しやすい。

## 15 ハイパスフィルター

ハイパス (高域通過) フィルターを実現するためには、低域通過フィルタの高域と低域を逆転させた特性とすればよい。逆転させる方法として周波数  $\omega$  の逆数をあらたに周波数と考え、 $\omega$  に代入すればよい。ローパスフィルターと逆転させた  $z$  変換は次のようになる。

$$\sigma = \frac{c}{i} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (c > 0) \quad (118)$$

$c$  の変換方式はローパスフィルターの場合と同様の方法がとれる。

伝達関数はローパスフィルターの式の  $z$  を  $(-z)$  で置き換えたものとなるので、次のようになる。

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(c + t_{m+1}) + (c - t_{m+1})z^{-1}} \quad (119)$$

$$\prod_{j=1}^m \frac{(1 - z^{-1})^2}{(c + t_j)^2 + r_j^2 + 2(c^2 - \sigma_j \sigma_j^*)z^{-1} + \{(c - t_j)^2 + r_j^2\}z^{-2}} \quad (120)$$

## 16 バンドパスフィルター

ある特定の周波数のみを通過させるフィルタをバンドパスフィルターと呼ぶ。ローパスとハイパスフィルタの場合には周波数の変換が双一次変換でできたが、バンドパスフィルターの場合にはバタワースフィルターの基本式の角周波数:  $\sigma$  と実角周波数:  $\lambda$  (正確には  $\omega$  から  $z$  変換される角周波数) の間で次のような変換を行なう。

$$\sigma = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda} \quad (121)$$

$\sigma = \sigma_p$  とおいたときの  $\lambda$  の 2 つの根を  $\lambda_L, \lambda_H$  と置く。すると  $|\sigma| \leq \sigma_p$  の領域は  $\lambda_L \leq \lambda \leq \lambda_H$  の領域に変換される。 $|\sigma| \leq \sigma_p$  の領域が通過域であるので、 $\lambda_L \leq \lambda \leq \lambda_H$  が実角周波数における通過域となる (18)。(  $\sigma_p$  は通過域の減衰許容量を仮定すれば、決まるので、それに対応する  $\lambda_0$  を求める。 )

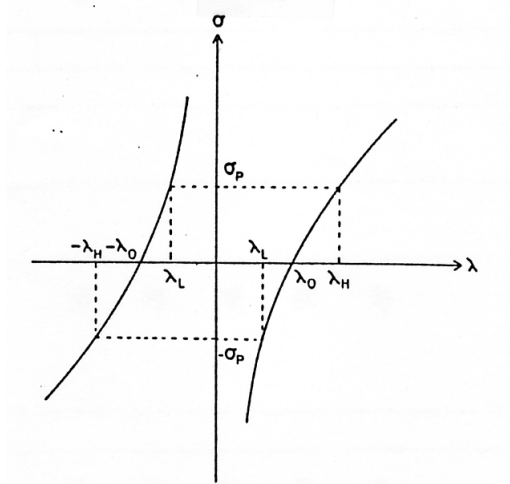


図 2.6 変換 (2.21) における  $\lambda$  と  $\sigma$  の関係  
 $\sigma$  軸上における通過帯域  $|\sigma| \leq \sigma_p$  が  
 $\lambda$  軸上で  $\lambda_L \leq |\lambda| \leq \lambda_H$  になっている  
 ことがわかる。

図 18: バンドパスフィルタのための周波数変換

$\sigma_p$  と  $\lambda_L, \lambda_H$  の関係についてみる。

$$\sigma_p = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda} \quad \text{及び} \quad -\sigma_p = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda} \quad (122)$$

$\sigma_p = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda}$  については、

$$\begin{aligned} \sigma_p \lambda &= \lambda^2 - \lambda_0^2 \\ \lambda^2 - \sigma_p \lambda - \lambda_0^2 &= 0 \\ \lambda &= \frac{\sigma_p \pm \sqrt{\sigma_p^2 + 4\lambda_0^2}}{2} \end{aligned}$$

これは、 $\lambda_H, -\lambda_L$  に相当する。

$$\lambda_H = \frac{\sigma_p + \sqrt{\sigma_p^2 + 4\lambda_0^2}}{2} \quad (123)$$

$$-\lambda_L = \frac{\sigma_p - \sqrt{\sigma_p^2 + 4\lambda_0^2}}{2} \quad (124)$$

$-\sigma_p = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda}$  については、

$$\begin{aligned} -\sigma_p \lambda &= \lambda^2 - \lambda_0^2 \\ \lambda^2 + \sigma_p \lambda - \lambda_0^2 &= 0 \\ \lambda &= \frac{-\sigma_p \pm \sqrt{\sigma_p^2 + 4\lambda_0^2}}{2} \end{aligned}$$

これは、 $\lambda_L, -\lambda_H$  に相当する。

次のようなものを計算する。

$$\begin{aligned}
\lambda_H - \lambda_L &= \frac{\sigma_p + \sqrt{\sigma_p^2 + 4\lambda_0^2}}{2} - \frac{-\sigma_p + \sqrt{\sigma_p^2 + 4\lambda_0^2}}{2} \\
&= \sigma_p \\
\lambda_H \lambda_L &= \frac{\sigma_p + \sqrt{\sigma_p^2 + 4\lambda_0^2}}{2} \cdot \frac{-\sigma_p + \sqrt{\sigma_p^2 + 4\lambda_0^2}}{2} \\
&= \frac{-\sigma_p^2 + (\sigma_p^2 + 4\lambda_0^2)}{4} \\
&= \lambda_0^2
\end{aligned}$$

以上より、 $\lambda_L, \lambda_H$  と  $\sigma_p, \lambda_0$  の関係が得られる。

$\lambda$  と  $z$  の関係は通常の変換による。

$$\lambda_H = c \tan(\omega_H \Delta t / 2) \quad (125)$$

$$\lambda_L = c \tan(\omega_L \Delta t / 2) \quad (126)$$

$c$  を計算するには、通過域の最大の減衰量を与え、そこから  $\sigma_p$  を求め、それに  $\lambda_H, \lambda_L$  との関係式を用いればよい。

$$\begin{aligned}
\sigma_p &= \lambda_H - \lambda_L \\
&= c \cdot \{\tan(\omega_H \Delta t / 2) - \tan(\omega_L \Delta t / 2)\} \\
c &= \frac{\sigma_p}{\tan(\omega_H \Delta t / 2) - \tan(\omega_L \Delta t / 2)} \quad (127)
\end{aligned}$$

伝達関数の一つに因子についてみてゆく。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i(\sigma - \sigma_j)} &= \frac{1}{i\left(\frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda} - \sigma_j\right)} \\
&= \frac{\lambda}{i(\lambda^2 - \sigma_j \lambda - \lambda_0^2)} \\
&= \frac{\lambda}{i(\lambda - \lambda_{j1})(\lambda - \lambda_{j2})}
\end{aligned}$$

ここで、 $\lambda_{j1}, \lambda_{j2}$  は 2 次式:

$$\lambda^2 - \sigma_j \lambda - \lambda_0^2 = 0 \quad (128)$$

の根である。

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{i(\lambda - \lambda_{j1})(\lambda - \lambda_{j2})} &= \frac{\frac{c}{i} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{i\left(\frac{c}{i} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - \lambda_{j1}\right)\left(\frac{c}{i} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - \lambda_{j2}\right)} \\
&= \frac{c(1-z^{-2})}{\{(c - i\lambda_{j1}) - (c + i\lambda_{j1})z^{-1}\}\{(c - i\lambda_{j2}) - (c + i\lambda_{j2})z^{-1}\}}
\end{aligned}$$

これと対となる因子 $i(\sigma - \sigma_{n-j+1})$ については、 $\sigma_{n-j+1} = -\sigma_j^*$  であるので、

$$\lambda^2 + \sigma_j^* \lambda - \lambda_0^2 = 0 \quad (129)$$

の根を考える必要があるが、その根は  $-\lambda_{j1}^*$ ,  $-\lambda_{j2}^*$  となる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i(\sigma - \sigma_{n-j+1})} \\ &= \frac{\lambda}{i(\lambda + \lambda_{j1}^*)(\lambda + \lambda_{j2}^*)} \\ &= \frac{c(1 - z^{-2})}{\{(c + i\lambda_{j1}^*) - (c - i\lambda_{j1}^*)z^{-1}\}\{(c + i\lambda_{j2}^*) - (c - i\lambda_{j2}^*)z^{-1}\}} \end{aligned}$$

2つの共役な根 ( $\sigma_j$  と  $\sigma_{n-j+1}$  を組み合わせると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i(\sigma - \sigma_j)} \cdot \frac{1}{i(\sigma - \sigma_{n-j+1})} \\ &= \frac{c(1 - z^{-2})}{\{(c - i\lambda_{j1}) - (c + i\lambda_{j1})z^{-1}\}\{(c - i\lambda_{j2}) - (c + i\lambda_{j2})z^{-1}\}} \cdot \\ & \quad \frac{c(1 - z^{-2})}{\{(c + i\lambda_{j1}^*) - (c - i\lambda_{j1}^*)z^{-1}\}\{(c + i\lambda_{j2}^*) - (c - i\lambda_{j2}^*)z^{-1}\}} \\ &= \frac{c(1 - z^{-2})}{\{(c - i\lambda_{j1}) - (c + i\lambda_{j1})z^{-1}\}\{(c + i\lambda_{j1}^*) - (c - i\lambda_{j1}^*)z^{-1}\}} \cdot \\ & \quad \frac{c(1 - z^{-2})}{\{(c - i\lambda_{j2}) - (c + i\lambda_{j2})z^{-1}\}\{(c + i\lambda_{j2}^*) - (c - i\lambda_{j2}^*)z^{-1}\}} \\ &= \frac{c(1 - z^{-2})}{\{(c + \nu_{j1})^2 + \mu_{j1}^2\} - 2(c^2 - |\lambda_{j1}|^2)z^{-1} + \{(c - \nu_{j1})^2 + \mu_{j1}^2\}z^{-2}} \cdot \\ & \quad \frac{c(1 - z^{-2})}{\{(c + \nu_{j2})^2 + \mu_{j2}^2\} - 2(c^2 - |\lambda_{j2}|^2)z^{-1} + \{(c - \nu_{j2})^2 + \mu_{j2}^2\}z^{-2}} \end{aligned}$$

ここで  $\lambda_{jk} = \mu_{jk} + i\nu_{jk}$  としている。

$n$  が奇数の場合の純虚数の根については、 $\sigma_{m+1} = it_{m+1}$  と置き、

$$\begin{aligned} \frac{1}{i(\sigma - \sigma_{m+1})} &= \frac{1}{i\sigma + t_{m+1}} \\ &= \frac{1}{i\frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda} + t_{m+1}} \\ &= \frac{1}{i\frac{(\frac{c}{i}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^2 - \lambda_0^2}{\frac{c}{i}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} + t_{m+1}} \\ &= \frac{c(1 - z^{-2})}{c^2(1 - z^{-1})^2 + c(1 - z^{-2})t_{m+1} + \lambda_0^2(1 + z^{-1})^2} \\ &= \frac{c(1 - z^{-2})}{(c^2 + ct_{m+1} + \lambda_0^2) - 2(c^2 - \lambda_0^2)z^{-1} + (c^2 - ct_{m+1} + \lambda_0^2)z^{-2}} \end{aligned}$$



全体をまとめると次のようになる。

$$H(z) = \frac{c(1 - z^{-2})}{(c^2 + ct_{m+1} + \lambda_0^2) - 2(c^2 - \lambda_0^2)z^{-1} + (c^2 - ct_{m+1} + \lambda_0^2)z^{-2}} \quad (130)$$

$$\cdot \prod_{j=1}^m \frac{c(1 - z^{-2})}{\{(c + \nu_{j1})^2 + \mu_{j1}^2\} - 2(c^2 - |\lambda_j|^2)z^{-1} + \{(c - \nu_{j1})^2 + \mu_{j1}^2\}z^{-2}} \cdot \quad (131)$$

$$\frac{c(1 - z^{-2})}{\{(c + \nu_{j2})^2 + \mu_{j2}^2\} - 2(c^2 - |\lambda_j|^2)z^{-1} + \{(c - \nu_{j2})^2 + \mu_{j2}^2\}z^{-2}} \quad (132)$$

## 17 バンドストップフィルター

## 18 ウィナーフィルタとカルマンフィルタ

(以下は有本 [10] による。)

ウィナーフィルタやカルマンフィルタは自動制御理論として用いられている。ノイズのある系において予測誤差が最小となるように、予測を行なうために用いられる。ある線形な物理系における、系の性質そのものが既知として、過去の観測値より現在の系の持つ信号を推定する。ノイズと信号の分離を行なうとも言える。

### 18.1 ウィナーフィルタ

現時点の信号の値  $x(t)$  の予測値  $\hat{x}(t)$  を求めることを目的としたものである。 $x(t)$  を信号成分、 $w(t)$  を雑音成分、両者が重ね合わさった出力

$$y(t) = x(t) + w(t) \quad (133)$$

が測定できるものとする。 $x(t)$  と  $w(t)$  はともにエルゴード的 (全体集合の分散とあるサンプルについての  $[-\infty, +\infty]$  の時間範囲の分散が一致する) 定常確率過程であり、自己相関関数  $R_{xx}(t)$  と相互相関関数  $R_{xy}$  が既知であるとする。この問題を線形推定法:

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^t F(t-\tau)y(\tau)d\tau \quad (134)$$

の中で誤差:

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t) \quad (135)$$

の二乗の平均値を最小にするような (r.m.s. 規範、またはウィナー規範と呼ぶ) 関数  $F(t-\tau)$  を見つける問題とする。 $F(t-\tau)$  はインパルス応答と考えられる。この問題は最適なフィルタのインパルス応答を r.m.s. 規範のもとで求めることに相当する。

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \int_{-\infty}^t F(t-\tau)y(\tau)d\tau \\ &= \int_0^{\infty} F(\tau)y(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

誤差  $e(t)$  の二乗の平均値は、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^2(t)dt = R_{ee}(0) \quad (136)$$

と表されるので、エルゴード性より、

$$\begin{aligned} R_{ee}(0) &= E[e(t)]^2 \\ &= E[(x(t) - \hat{x}(t))^2] \\ &= E\left[\left\{x(t) - \int_0^{\infty} F(\tau)y(t-\tau)d\tau\right\}^2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E[x(t)]^2 - 2 \int_0^\infty F(\tau) E[x(t)y(t-\tau)] d\tau \\
&\quad + \int_0^\infty F(\tau_1) d\tau_1 \int_0^\infty F(\tau_2) E[y(t-\tau_1)y(t-\tau_2)] d\tau_2 \\
&= R_{xx}(0) - 2 \int_0^\infty F(\tau) R_{yx}(\tau) d\tau \\
&\quad + \int_0^\infty F(\tau_1) d\tau_1 \int_0^\infty F(\tau_2) R_{yy}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2
\end{aligned}$$

$R_{xx}, R_{yx}, R_{yy}$  は既知と仮定しているので、平均二乗誤差  $R_{ee}(0)$  は未知数  $F(t)$  の汎関数とみなされる。 $R_{ee}(0)$  を最小とするような関数  $F(t)$  を探す問題となる。これを

$$R_{ee}(0) = J[F(t)] \quad (137)$$

とおき、 $J[F(t)]$  を最小にすることを考える。

いま、 $F^*(t)$  が  $J[F]$  を最小にするものと仮定すると、任意の  $F(t)$  について

$$\left. \frac{\partial J[F^*(t) + \varepsilon F(t)]}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (138)$$

となる。

$$\begin{aligned}
J[F^*(t) + \varepsilon F(t)] &= R_{xx}(0) - 2 \int_0^\infty (F^*(\tau) + \varepsilon F(\tau)) R_{yx}(\tau) d\tau \\
&\quad + \int_0^\infty (F^*(\tau_1) + \varepsilon F(\tau_1)) d\tau_1 \int_0^\infty (F^*(\tau_2) + \varepsilon F(\tau_2)) R_{yy}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2 \\
&= J[F^*] - 2\varepsilon \int_0^\infty F(\tau) R_{yx}(\tau) d\tau \\
&\quad + \varepsilon \int_0^\infty F^*(\tau_1) d\tau_1 \int_0^\infty F(\tau_2) R_{yy}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2 \\
&\quad + \varepsilon \int_0^\infty (F(\tau_1)) d\tau_1 \int_0^\infty F^*(\tau_2) R_{yy}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2 \\
&\quad + \varepsilon^2 \int_0^\infty (F(\tau_1)) d\tau_1 \int_0^\infty (F(\tau_2)) R_{yy}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2 \\
&= J[F^*] - 2\varepsilon \int_0^\infty F(\tau) \left\{ R_{yx} - \int_0^\infty R_{yy}(\tau - \sigma) d\sigma \right\} d\tau \\
&\quad + \varepsilon^2 \int_0^\infty F(\tau_1) d\tau_1 \int_0^\infty F(\tau_2) R_{yy}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2
\end{aligned}$$

$\varepsilon$  の 1 次の項は 2 次以上の項に比べて十分に大きいので、 $\varepsilon$  の 1 次の項の係数が 0 以外では任意の  $F(t)$  について  $F^*(t)$  が  $J[F]$  を最小にすることに矛盾してくる。そこで

$$R_{yx}(t) - \int_0^\infty R_{yy}(t - \tau) F^*(\tau) d\tau = 0 \quad (139)$$

という条件が導かれる。これを Wiener-Hopf の積分方程式と呼ばれる。

次にこの方程式を満足する解を探す。信号  $x(t)$  と雑音  $w(t)$  は無相関であり、雑音は白色であると仮定できるとする。白色雑音の自己相関関数はデルタ関数とみなされるので、

$$E[w(t)] = 0 \quad (140)$$

$$E[w(t)w(\tau)] = \delta(t - \tau) \quad (141)$$

また、信号について

$$E[x(t)] = 0 \quad (142)$$

$$E[x(t)x(\tau)] = R_{xx}(t - \tau) = R(t - \tau) \quad (143)$$

を仮定する。すると

$$\begin{aligned} R_{yy}(t - \tau) &= R_{xx}(t - \tau) + R_{ww}(t - \tau) \\ &= R_{xx}(t - \tau) + \delta(t - \tau) \end{aligned} \quad (144)$$

$$R_{xy}(t) = R_{xx}(t) = R(t) \quad (145)$$

式 (139) は

$$\int_0^\infty \{\delta(t - \tau) + R(t - \tau)\} F^*(\tau) d\tau = R(t) \quad (146)$$

あるいは

$$F^*(t) + \int_0^\infty R(t - \tau) F^*(\tau) d\tau = R(t) \quad (0 < t < \infty) \quad (147)$$

と表される。 $R(t - \tau)$  は核関数 (kernel function) と呼ばれることがある。この核関数のフーリエ変換が有理関数になるときに解のラプラス変換は簡単な形で表される。

## 18.2 カルマンフィルター

カルマンフィルターはウィナーのフィルターの概念を元にしたものであり、自動制御などに利用されている。

カルマンはスペクトル密度関数を考える代わりに、信号や雑音の時系列そのものをとらえる方法とした。

一般の信号過程が次のように表されるものとする。

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \quad (148)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) \quad (149)$$

ここで、 $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{z}(t)$  は適当な次元のベクトル値関数であり、 $\mathbf{u}(t)$  は白色雑音、 $\mathbf{x}(t)$  あるいは、 $\mathbf{z}(t)$  は推定すべき信号である。また、測定値は加法的雑音  $\mathbf{w}(t)$  のある測定機構

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{z}(t) + \mathbf{w}(t) \\ &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t) \end{aligned} \quad (150)$$

を通してのみ得られる。ある過去の時点  $t_0$  から現時点  $t$  までの測定データを線形演算処理して得られる  $\mathbf{x}(t)$  (あるいは  $\mathbf{z}(t)$ ) の推定値:  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  (あるいは  $\hat{\mathbf{z}}(t)$ ) の中で、誤差  $\mathbf{e}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$  の二乗平均を最小とする問題を考える。解法は確率統計理論から離れて、線形システム理論の枠組の中で解析する。

最終的な解のおおよその形は

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}(t)[\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)] \quad (151)$$

ここで、 $\mathbf{L}(t)$  はフィードバックの利得行列 (gain matrix) と呼ばれる。

信号を支配するダイナミクスがあらかじめわかっている場合でもその共分散行列あるいはスペクトル密度が既知であれば、求められる。

## 加法雑音のある系の1変数の最小二乗推定

準備として加法雑音のある系の最小二乗推定について考える。

いま、確率変数  $x$  の平均値と分散がわかっているものとする。

$$E[x] = \bar{x} \quad (152)$$

$$E[(x - \bar{x})^2] = \sigma_x^2 \quad (153)$$

一般的には物理量  $x$  の値そのものが取り出せることは稀であり、検出系やノイズの影響を受ける。それを次のような形で表す。

$$y = cx + w \quad (154)$$

ここで  $c$  は変換係数であり、既知の確定した定数とする。 $w$  は雑音を表す。雑音の平均値と分散はわかっているものとする。

$$E[w] = \bar{w} \quad (155)$$

$$E[(w - \bar{w})^2] = \sigma_w^2 \quad (156)$$

測定値  $y$  も確率変数となる。その平均値を求める。

$$\begin{aligned} \bar{y} &= E[y] \\ &= E[cx + w] \\ &= cE[x] + E[w] \\ &= c\bar{x} + \bar{w} \end{aligned}$$

分散については、

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E[(y - \bar{y})^2] \\ &= E[\{c(x - \bar{x}) + (w - \bar{w})\}^2] \\ &= c^2 E[(x - \bar{x})^2] + E[(w - \bar{w})^2] + 2cE[(x - \bar{x})(w - \bar{w})] \end{aligned}$$

ここで  $x$  と  $w$  は独立なので、

$$\begin{aligned} E[(x - \bar{x})(w - \bar{w})] &= E[x - \bar{x}] \cdot E[w - \bar{w}] \\ &= 0 \cdot 0 \end{aligned} \quad (157)$$

そこで、

$$\sigma_y^2 = c^2 \sigma_x^2 + \sigma_w^2$$

$x$  と  $w$  の確率密度わかっていて、それぞれ  $p_1(x)$ ,  $p_2(w)$  とする。2つの事象は独立なので、2つの同時確率密度:  $f(x, w) = p_1(x) \cdot p_2(w)$  となる。 $y = cx + w$  の累積確率密度関数は、

$$F(y) = \int \int_{cx+w \leq y} p_1(x)p_2(w)dx dw \quad (158)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} p_2(w)dw \int_{x \leq (y-w)/c} p_1(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_1((y-w)/c)p_2(w)dw \end{aligned} \quad (159)$$

ここで  $F_1(x)$  は  $p_1(x)$  の累積確率密度関数である。これは同時に

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)F_2(y-cx)dx \quad (160)$$

でもある。 $y$  の確率密度:  $p_3(y)$  は

$$\begin{aligned} p(y) &= \frac{d}{dy}F(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) \frac{d}{dy}F_2(y-cx)dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)p_2(y-cx)dx \end{aligned}$$

このように畳み込み積分となる。

$x$  と  $w$  がガウス分布をとるとすると、

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp \left\{ -\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2} \right\} \quad (161)$$

$$p_2(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp \left\{ -\frac{(w-\bar{w})^2}{2\sigma_w^2} \right\} \quad (162)$$

となる。それらの線形結合である  $y$  もガウス分布となる。

$$p_3(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(c^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2)}} \exp \left\{ -\frac{(y-(c\bar{x} + \bar{w}))^2}{2(c^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2)} \right\} \quad (163)$$

$x$  そのものは観測から知ることができない。そこで、 $y$  から次の式による推定をすることを考える。

$$\hat{x} = \alpha y + \beta \quad (164)$$

その基準として誤差:  $e = \hat{x} - x$  を最小にする方法が考えられるが、 $x$  は知ることができない。但し、 $x$  と  $w$  の平均と分散がわかっているれば、誤差  $e$  の平均と分散はわかる。

平均値は

$$\begin{aligned}
E[e] &= E[\hat{x} - x] \\
&= E[\alpha y + \beta - x] \\
&= E[\alpha(cx + w) + \beta - x] \\
&= (\alpha c - 1)E[x] + \alpha E[w] + \beta \\
&= (\alpha c - 1)\bar{x} + \alpha\bar{w} + \beta
\end{aligned}$$

分散は

$$\begin{aligned}
E[(e - E[e])^2] &= E[\{(\alpha c - 1)(x - \bar{x}) + \alpha(w - \bar{w})\}^2] \\
&= (\alpha c - 1)^2 E[(x - \bar{x})^2] + 2\alpha(\alpha c - 1)E[(x - \bar{x})(w - \bar{w})] \\
&\quad + \alpha^2 E[(w - \bar{w})^2] \\
&= (\alpha c - 1)^2 \sigma_x^2 + \alpha^2 \sigma_w^2
\end{aligned}$$

分散は  $\beta$  に無関係なので、 $\beta$  は平均値だけから決定できる。誤差の平均が 0 となる推定値を不偏推定量、誤差の分散を最小にするものを最小分散推定量と呼ぶ。誤差の平均を 0 とし、しかも平均二乗誤差を最小にする推定量を最小二乗推定量とも呼ぶ。

$\beta$  は誤差の平均値が 0 となるように選ぶ。

$$\beta = -(\alpha c - 1)\bar{x} - \alpha\bar{w} \quad (165)$$

$\alpha$  は誤差の二乗平均を最小になるように選ぶ。

$$\begin{aligned}
E[e^2] &= (c^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2)\alpha^2 - 2c\sigma_x^2\alpha + \sigma_x^2 \\
&= (c^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2)\left(\alpha - \frac{c\sigma_x^2}{c^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2}\right)^2 + \sigma_x^2 - \frac{c^2\sigma_x^4}{c^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2} \\
&= (c^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2)\left[\alpha - \frac{c\sigma_w^{-2}}{\sigma_x^{-2} + c^2\sigma_w^{-2}}\right]^2 + \frac{1}{\sigma_x^{-2} + c^2\sigma_w^{-2}}
\end{aligned}$$

$\sigma^2 = 1/(\sigma_x^{-2} + c^2\sigma_w^{-2})$  とおくと、 $E[e^2]$  を最小化する  $\alpha$  は、

$$\alpha = \frac{c\sigma^2}{\sigma_w^2} \quad (166)$$

となる。誤差の二乗平均を最小する線形推定は

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= \alpha y + \beta \\
&= \frac{c\sigma^2}{\sigma_w^2} y + \bar{x} - \frac{c\sigma^2}{\sigma_w^2} (c\bar{x} + \bar{w}) \\
&= \bar{x} + \frac{c\sigma^2}{\sigma_w^2} \{y - (c\bar{x} + \bar{w})\}
\end{aligned}$$

加法雑音のある系の多変数の最小二乗推定



信号、雑音、測定量がそれぞれ、次のように表されたとする。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad (167)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (168)$$

ここで、 $\mathbf{C}$  は  $m \times n$  の定数行列である。また、平均値と分散行列は、

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}] &= \bar{\mathbf{x}} \\ E[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})'] &= \mathbf{X} \\ E[\mathbf{w}] &= \bar{\mathbf{w}} \\ E[(\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})(\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})'] &= \mathbf{W} \end{aligned}$$

ここで分散行列  $\mathbf{X}$  は  $n \times n$  の行列、 $\mathbf{W}$  は  $m \times m$  の行列である。このときに  $\mathbf{y}$  の平均値、分散行列は、

$$\begin{aligned} E[\mathbf{y}] &= E[\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{w}] \\ &= \mathbf{C}E[\mathbf{x}] + E[\mathbf{w}] \\ &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{w}} \\ E[(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})'] &= E[\{\mathbf{C}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + (\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})\}\{\mathbf{C}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + (\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})\}'] \\ &= \mathbf{C}E[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})']\mathbf{C}' + E[(\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})(\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})'] \\ &= \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}' + \mathbf{W} \end{aligned}$$

測定値  $\mathbf{y}$  から線形演算の範囲で推定値  $\hat{\mathbf{x}}$  を得る。

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{y} + \mathbf{d} \quad (169)$$

ここで、 $\mathbf{F}$  は  $n \times m$  の定数行列で、 $\mathbf{d}$  は  $n$  次元の定数ベクトルである。

誤差ベクトルは

$$\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \quad (170)$$

誤差の平均と分散を考える。

$$\begin{aligned} E[\mathbf{e}] &= E[\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}] \\ &= \mathbf{F}E[\mathbf{y}] + \mathbf{d} - E[\mathbf{x}] \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{w}}) + \mathbf{d} - \bar{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

そこで、不偏推定量は、

$$\mathbf{d} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{F}(\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{w}}) \quad (171)$$

このときの分散行列は

$$\begin{aligned}
E[ee'] &= E[(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})'] \\
&= E[(\mathbf{F}\mathbf{y} + \mathbf{d})(\mathbf{F}\mathbf{y} + \mathbf{d})'] \\
&= E[\{(\mathbf{F}\mathbf{C} - \mathbf{I})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{F}(\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})\}\{(\mathbf{F}\mathbf{C} - \mathbf{I})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{F}(\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})\}'] \\
&= (\mathbf{F}\mathbf{C} - \mathbf{I})\mathbf{X}(\mathbf{F}\mathbf{C} - \mathbf{I})' + \mathbf{F}\mathbf{W}\mathbf{F}'
\end{aligned} \tag{172}$$

さらに、

$$\begin{aligned}
E[ee'] &= \mathbf{F}(\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}' + \mathbf{W})\mathbf{F}' - \mathbf{F}\mathbf{C}\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{C}'\mathbf{F}' + \mathbf{X} \\
&= \{\mathbf{F} - \mathbf{X}\mathbf{C}'(\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}' + \mathbf{W})^{-1}\}(\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}' + \mathbf{W})\{\mathbf{F} - \mathbf{X}\mathbf{C}'(\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}' + \mathbf{W})^{-1}\}' \\
&\quad + \mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{C}'(\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}' + \mathbf{W})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}
\end{aligned} \tag{173}$$

第一項のみが  $\mathbf{F}$  に関係している。その第一項は

$$\mathbf{F} = \mathbf{X}\mathbf{C}'(\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}' + \mathbf{W})^{-1} \tag{174}$$

のときを除いて一般的にゼロでない非負定数行列である。分散行列は一般に非負定値行列であり、 $\mathbf{F}$  が上式を満足する場合に誤差の分散は最小となる。そこで不偏は最小二乗推定量は

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{X}\mathbf{C}'(\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}' + \mathbf{W})^{-1}\{\mathbf{y} - (\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{w}})\} \tag{175}$$

となる。

次に、信号及びノイズがガウス分布に従うとした場合の推定値の確率密度関数を考える。信号及び雑音の密度関数が次のようなものとする。

$$p_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\mathbf{X}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})'\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right\} \tag{176}$$

$$p_2(\mathbf{w}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m|\mathbf{W}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})'\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})\right\} \tag{177}$$

信号が与えられた時の測定値  $\mathbf{y}$  の条件つき化来る津密度は

$$p_2(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m|\mathbf{W}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{w}})'\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{w}})\right\} \tag{178}$$

となり、 $\mathbf{y}$  の確率密度は

$$p_2(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m|\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}'|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})'\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}'(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})\right\} \tag{179}$$

ベイズの定理:

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{p_1(\mathbf{x})p_2(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{p_3(\mathbf{y})} \tag{180}$$

に従い、測定値を得たときの信号の事後確率密度を計算すると、

$$\begin{aligned}
p_2(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= \frac{p_1(\mathbf{x})p_2(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{p_3(\mathbf{y})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\mathbf{X}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right\} \\
&\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m|\mathbf{W}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{w}})' \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{w}})\right\} \\
&\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m|\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}'|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})' \mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}'(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n+m-m}(|\mathbf{X}| + |\mathbf{W}| - |\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{C}'|)}} \\
&\quad \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{w}})' \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{w}}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})' \mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}'(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})\right\}
\end{aligned}$$

指数部の計算を行なう上で、次の逆行列の定理を用いる。

$$\begin{aligned}
(\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}')^{-1} &= \mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{X}^{-1} + \mathbf{C}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{W}^{-1} \\
&= \mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}'\mathbf{W}^{-1}
\end{aligned}$$

指数部は

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + (\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{w}})' \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x} - \bar{\mathbf{w}}) \\
&\quad - (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})' (\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}')(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \\
&= (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + ((\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - \mathbf{C}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}))' \mathbf{W}^{-1}((\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - \mathbf{C}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})) \\
&\quad - (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})' (\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}')(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \\
&= (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})' \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{C}\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \\
&\quad - (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})' \mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) - (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})' (\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}')(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \\
&= ((\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}))' \mathbf{P}^{-1}((\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})) \\
&\quad + (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})' (\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}')(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})' (\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}')(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \\
&= (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})' \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})' (\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}')(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \\
&\quad - (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})' (\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}')(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \\
&= (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})' \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})
\end{aligned}$$

そこで、結果として

$$\begin{aligned}
p_2(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= \frac{p_1(\mathbf{x})p_2(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{p_3(\mathbf{y})} \\
&= \frac{p_1(\mathbf{x})p_2(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{p_3(\mathbf{y})}
\end{aligned}$$

となる。

## カルマンフィルター

時点が  $k = 0, 1, 2, \dots$  とすすみ、時点  $k$  において  $n$  次元ベクトル値をとる信号を  $x_k$  と表す。ここで、信号  $x_k$  は次の線形の差分式により支配されるとする。これは微分の代わりに差分を用いた表現となっている。

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \quad (181)$$

ここで  $u_k$  は  $r$  次元のノイズを表した確率変数ベクトルであり、平均及び分散は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} E[u_k] &= \bar{u}_k \\ E[(u_k - \bar{u}_k)(u_l - \bar{u}_l)'] &= \delta_{kl} U_k \end{aligned}$$

ただし、 $U_k$  は  $r \times r$  の正定値行列であり、

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (182)$$

$u_k$  は白色ランダム系列とみなされる。なお、 $A_k$  は  $n \times n$  の確定した行列、 $B_k$  は  $n \times r$  の確定した行列である。

時刻  $k = 0$  における信号  $x_0$  の統計量は次のように与えられるとする。

$$\begin{aligned} E[x_0] &= \bar{x}_0 \\ E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)'] &= X_0 \end{aligned}$$

また、 $x_0$  はすべての  $u_k$  と独立であると仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= E[x_1] \\ &= E[A_0 x_0 + B_0 u_0] \\ &= A_0 \bar{x}_0 + B_0 \bar{u}_0 \end{aligned}$$

と求まり、 $\bar{x}_1$  が求まれば、 $\bar{x}_2 = E[x_2]$  も求まり、漸化式に基づいて  $\bar{x}_k$  は計算できる。

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= E[x_{k+1}] \\ &= E[A_k x_k + B_k u_k] \\ &= A_k \bar{x}_k + B_k \bar{u}_k \end{aligned}$$

次に  $x_1$  の共分散行列を計算する。 $x_0$  と  $u_0$  が独立であるから

$$\begin{aligned} X_1 &= E[(x_1 - \bar{x}_1)(x_1 - \bar{x}_1)'] \\ &= E[\{A_0(x_0 - \bar{x}_0) + B_0(u_0 - \bar{u}_0)\}\{A_0(x_0 - \bar{x}_0) + B_0(u_0 - \bar{u}_0)\}'] \\ &= A_0 E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)'] A_0' + B_0 E[(u_0 - \bar{u}_0)(u_0 - \bar{u}_0)'] B_0' \\ &\quad + A_0 E[(x_0 - \bar{x}_0)(u_0 - \bar{u}_0)'] B_0' + B_0 E[(u_0 - \bar{u}_0)(x_0 - \bar{x}_0)'] A_0' \\ &= A_0 X_0 A_0' + B_0 U_0 B_0' \end{aligned}$$

$u_k$  はその白色性から  $x_0, x_1, \dots, x_k$  と独立なので、一般には上と同様に

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= E[(x_{k+1} - \bar{x}_{k+1})(x_{k+1} - \bar{x}_{k+1})'] \\ &= A_k X_k A_k' + B_k U_k B_k' \end{aligned}$$

このようにして、信号  $x_k$  の共分散行列は初期行列  $X_0$  を与えると、上の漸化式に基づいて求められる。

信号  $x_k$  は直接測れずに、 $y_k (k = 0, 1, \dots)$  が測定できるものとする。

$$y_k = C_k x_k + w_k \quad (183)$$

ここで、 $C_k$  は  $m \times n$  の確定行列であり、 $y_k$  と  $w_k$  は  $m$  次元確率変数ベクトルであり、 $w_k$  は白色ランダム系列であって、次のような性質を持つ。

$$E[w_k] = \bar{w}_k \quad (184)$$

$$E[(w_k - \bar{w}_k)(w_k - \bar{w}_k)'] = \delta_{kl} W_k \quad (185)$$

雑音  $w_k$  は信号過程の雑音  $u_l$  と信号  $x_0$  とに独立であるとする。 $y_k$  については、

$$\begin{aligned} \bar{y}_k &= E[\bar{y}_k] \\ &= C_k E[\bar{x}_k] + \bar{w}_k \\ E[(y_k - \bar{y}_k)(y_k - \bar{y}_k)'] &= C_k X_k C_k' + W_k \end{aligned}$$

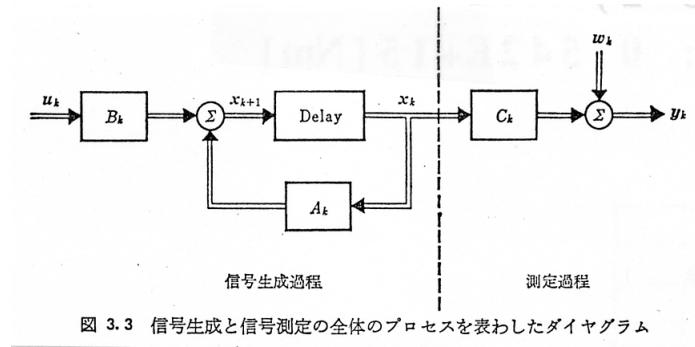


図 19: 信号生成と信号測定のプロセス

出力  $y_k$  の  $k = 0, 1, 2, \dots, k$  までの測定値を得た時に、信号  $x_k$  の最小二乗平均の意味で最もよい推定量  $\hat{x}_k$  を構成する。 $k = 0, 1, 2, \dots, k$  までの測定値全体を

$$y_{[0,k]} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \quad (186)$$

と表す。 $k$  までの測定値  $y_{[0,k]}$  を得て、現時点より過去の信号  $x_l (0 \leq l < k)$  の最適な推定量を求めることをスミージングと言い、測定値  $y_{[0,k]}$  を得て、現時点の信号の最適な推定量  $x_k$  を求めることをフィルタリングという。また、測定値  $y_{[0,k]}$  を得て、信号  $x_l (l > k)$  の最適な推定量  $\hat{x}_l$  を求めることを予測と呼ぶ。

測定値  $y_0$  を得たときに、この  $y_0$  の線形演算として  $x_0$  で、信号  $x_0$  の最適な推定量  $\hat{x}_0$  を構成する問題については前に見たように次のような解となる。

$$\begin{aligned}\hat{x}_0 &= \bar{x}_0 + P_0 C_0' W_0^{-1} \{y_0 - (C_0 \bar{x}_0 + \bar{w}_0)\} \\ P_0 &= (X_0^{-1} + C_0' W_0^{-1} C_0)^{-1}\end{aligned}$$

次に信号  $x_1$  を推定することを考える。信号  $x_0$  がガウス分布に従い、雑音  $u_k$  も  $w_k$  もともにガウス分布に従うとする。さらにすべての  $k$  について、 $A_k$  は正則であるとする。

$y_0$  が与えられた時の  $x_0$  の条件つき確率密度は

$$p(x_0|y_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |P_0|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_0 - \hat{x})' P_0^{-1} (x_0 - \hat{x})\right\} \quad (187)$$

次に、 $y_0$  が与えられたときの  $x_1$  の確率密度  $p_1(x_1|y_0)$  を求めたいがそれはつぎのように表される。

$$p_1(x_1|y_0) = \int_R p_1(x_1|y_0, u_0) p_2(u_0) du_0 \quad (188)$$

ここで、

$$p_1(x_0|y_0, u_0) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1 - B_0 u_0 - A_0 \hat{x})' (A_0' P_0 A_0)^{-1} (x_1 - B_0 u_0 - A_0 \hat{x})\right\}}{\sqrt{(2\pi)^n |A_0' P_0 A_0|}} \quad (189)$$

$$p_2(u_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^r |U_0|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(u_0 - \bar{u}_0)' U_0^{-1} (u_0 - \bar{u}_0)\right\} \quad (190)$$

である。これは、

$$p_1(x_1|y_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |M_1|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1 - A_0 \hat{x}_0 - B_0 \bar{u}_0)' M_1^{-1} (x_1 - A_0 \hat{x}_0 - B_0 \bar{u}_0)\right\} \quad (191)$$

となる。すなわち測定値  $y_0$  を得たときの  $x_1$  の最尤推定量は

$$\hat{x}_1(y_0) = A_0 \hat{x}_0 + B_0 \bar{u}_0 \quad (192)$$

となり、そのときの誤差ベクトルの分散行列は

$$M_1 = A_0 P_0 A_0' + B_0 U_0 B_0' \quad (193)$$

次に  $y_1$  を測定した時の  $x_1$  の最尤推定量を考える。今度は  $p_1(x_1|y_0)$  を事前確率密度としてベイズの公式：

$$p(x_1|y_0, y_1) = \frac{p_1(x_1|y_0) p_2(y_1|x_1)}{\int_{R^n} p_1(x_1|y_0) p_2(y_1|x_1) dx_1} \quad (194)$$

を計算する。これは、

$$p(\mathbf{x}_1|\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1) = \frac{1}{(2\pi)^n |\mathbf{P}_1|} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_1 - \mathbf{C}\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{w}}_1)' \mathbf{W}_1^{-1} (\mathbf{y}_1 - \mathbf{C}\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{w}}_1)\right\} \quad (195)$$

これは次のような形となる。

$$p(\mathbf{x}_1|\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1) = \frac{1}{(2\pi)^n |\mathbf{P}_1|} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_1)' \mathbf{P}_1^{-1} (\mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_1)\right\} \quad (196)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_1 &= \hat{\mathbf{x}}_1(\mathbf{y}_0) + \mathbf{P}_1 \mathbf{C}'_1 \mathbf{W}_1^{-1} \{\mathbf{y}_1 - (\mathbf{C}_1 \hat{\mathbf{x}}_1(\mathbf{y}_0) + \bar{\mathbf{w}}_1)\} \\ \mathbf{P}_1 &= (\mathbf{M}_1^{-1} + \mathbf{C}'_1 \mathbf{W}_1^{-1} \mathbf{C}_1)^{-1} \end{aligned}$$

同様に、 $x_2$  の最尤推定量は  $x_2(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1) = \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{B}_1 \bar{\mathbf{u}}_1$  となる。同様な考察を繰り返すと

$$\mathbf{x}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{P}_k \mathbf{C}'_k \mathbf{W}_k^{-1} \{\mathbf{y}_k - (\mathbf{C}_k \tilde{\mathbf{x}}_k + \bar{\mathbf{w}}_k)\} \quad (197)$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \bar{\mathbf{u}}_{k-1} \\ \mathbf{P}_k &= (\mathbf{M}_k^{-1} + \mathbf{C}'_k \mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{C}_k)^{-1} \\ \mathbf{M}_k &= \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}'_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{U}_{k-1} \mathbf{B}'_{k-1} \end{aligned}$$

もともとウィナーフィルターやカルマンフィルターは自動制御の分野で発展したものであるが、カルマンフィルターのような時間領域で扱う方法は実時間法あるいは、現代制御理論と呼ばれ、フィードバック系として周波数領域で扱う方法は古典制御理論と呼ばれる。

## 参考文献

- [1] Hamming 著, 宮川・今井訳 (1980), デジタルフィルタ, 科学技術出版社.
- [2] 三谷 政昭 (1987), デジタルフィルタデザイン, 昭晃堂, pp.223.
- [3] 藤田 広一 (1969), 情報理論, 昭晃堂.
- [4] 斎藤 正徳 (1978), 漸化式デジタルフィルターの自動設計, 物理探鉱, 31 巻, 4 号, 240-263.
- [5] 勝間田 明男 (1993), ベッセルデジタルフィルタの自動設計について, 験震時報, 56, 17-34.
- [6] 渡部 力・名取 亮・小国 力 (1989), Fortran77 による数値計算ソフトウェア, 丸善, 325.
- [7] 安居院 猛・中嶋 正之 (1981), FFT の使い方, 産報出版, pp.219.
- [8] 宇都 徳治 (1984), 地震学, 共立出版.
- [9] 日野 幹雄 (1977), スペクトル解析, 朝倉書店.
- [10] 有本 卓 (1977), カルマンフィルター, 産業図書.