測度論ゼミ

notation

- $\mathbb{R}$ ： 実数
- $\mathbb{R}^N$ ： N次元ユークリッド空間
- $I = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_N, b_N]$ ： $\mathbb{R}^n$の区間
- $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_N, b_N)$ ： $\mathbb{R}^n$の開区間
- $E = \underbrace{I_1}_{\text{区間1}} + \cdots + \underbrace{I_N}_{\text{区間N}}$ ： $\mathbb{R}^N$の区間塊（互いに素なものの和）
- F_N : $\mathbb{R}^N$の区間塊全体

導入

- 有限加法族

  ↓

- 外測度

  ↓

- 可測性

  ↓

- 可測集合族 $\Leftrightarrow$ σ-加法族

測度が**完備**という条件が欲しい

Def(有限加法族)

X : set

空間Xの部分集合族$F \subset P(\lambda)$が

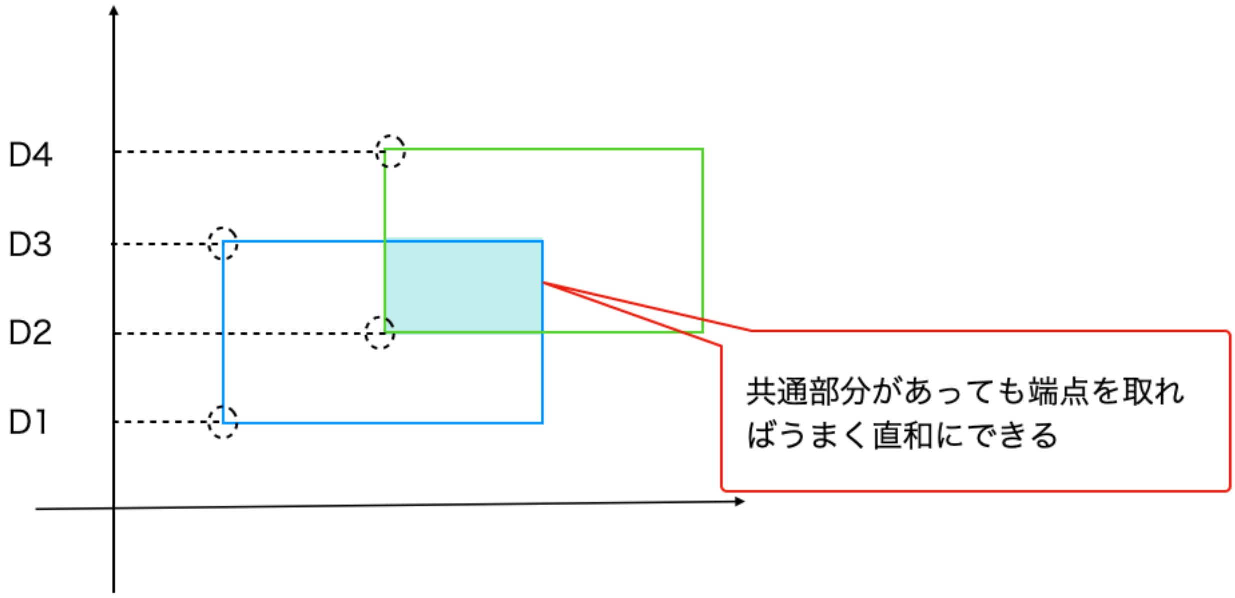
(1) $\phi \in F$

(2) $\mathbb{A} \in F$ ならば $A^c\ (= X - A) \in F$

(3) $A, B \in F$ ならば $\underbrace{A \cup B \in F}_{\cup_n A_n \in F \text{ で帰納法より}}$

---

e.g.) イメージ



定理(4.1)

$Z = X \times Y$として$\mathbb{E} \subset P(X), \mathbb{F} \subset P(Y)$を有限加法族とする。

この時、$K = E \times F \quad (E \in \mathbb{E}, F \in \mathbb{F})$ なる形の集合の有限個の直和として表されるものの全体$\mathbb{A}$は有限加法族

(4.1) 証明

まず、$\phi \times \phi = (x, y) | x \in \phi, y \in \phi$でどちらも満たす元はないので

任意のZに対して, $Z \in \phi \times \phi$ 従って、

「$Z \in \phi \Leftrightarrow Z \in \phi \times \phi$」が真のため$\phi = \phi \times \phi$ （外延性定理のため）

$K = E \times F \ \ (E \in \mathbb{E}, F \in \mathbb{F})$ ならば

$K^c \in \mathbb{A} \quad (K^c = Z - K \in \mathbb{A})$で、また

$$\begin{cases} E^c = X - E \\ F^c = Y - F \end{cases}$$

であることから

$$\begin{aligned} Z &= \underbrace{(E + E^c)}_{X} \times \underbrace{(F + F^c)}_{Y} \\ &= (E \times F) + (E^c \times F) + (E \times F^c) + (E^c \times F^c) \end{aligned}$$

だから、$K^c = Z - K$より

$$\begin{aligned} K^c &= (E \times F)^c \\ &= (E^c \times F) + (E \times F^c) + (E^c \times F^c) \in \mathbb{A} \end{aligned}$$

また$A = A_1 + A_2$で$(A_1, A_2 \in \mathbb{A})$ならば$A \in \mathbb{A}$

参考

- 「ルベーグ積分入門」: 伊藤清三