

動作時間スケールによる階層アーキテクチャの構成に向けた 準静的アプローチのくりこみ群的シナリオ

会田 雅樹[†] 渡部 康平^{††} 高山 裕紀[†] 高野 知佐^{†††}

[†] 首都大学東京大学院 システムデザイン研究科

〒191-0065 東京都日野市旭が丘 6-6

^{††} 大阪大学大学院 情報科学研究科

〒565-0871 吹田市山田丘 1-5

^{†††} 広島市立大学大学院 情報科学研究科

〒731-3194 広島市安佐南区大塚東 3-4-1

あらまし 情報通信ネットワークは、高速化、大規模化、ならびに社会との相互作用の緊密化が進み、一種の大規模複雑システムであるといえる。例えば、ネットワークの輻輳状態とユーザの集団心理との間に正のフィードバックが加わることで、ネットワークが予期しない状態に陥る危険性がある。著者らは、大規模複雑システムとしてのネットワークを適切に設計・制御するために、各種制御の動作時間スケールによる階層化アーキテクチャを検討してきた。特に、ネットワークの状態変化の速度がユーザの知覚できる時間分解能よりも極めて速いことを利用し、両者の階層間の相互作用を取り入れながらネットワーク性能を評価する為の「準静的アプローチ」を提案してきた。本稿では、くりこみ群の考え方を利用して準静的アプローチを再検討し、その物理的意味を考察するとともに、同様の考え方を階層構造の他の対象へ応用するための方法を整備する。

キーワード 再試行, 準静的アプローチ, くりこみ群, 断熱近似

A Scenario of Quasi-Static Approach Based on Renormalization Group for Composing Hierarchical Architecture by Time Scales of Network Operations

Masaki AIDA[†], Kohei WATABE^{††}, Hiroki TAKAYAMA[†], and Chisa TAKANO^{†††}

[†] Graduate School of System Design, Tokyo Metropolitan University

6-6 Asahigaoka, Hino-shi, Tokyo 191-0065, Japan

^{††} Graduate School of Information Sciences, Osaka University

1-5 Yamadaoka, Suita-shi, Osaka 565-0871, Japan

^{†††} Graduate School of Information Sciences, Hiroshima City University

3-4-1 Ozuka-Higashi, Asa-Minami-ku, Hiroshima, 731-3194, Japan

Abstract In the contemporary information networks, advances in higher speed, larger scale, and stronger interaction with society are being proceeded, and the networks are, indeed, large-scale complex systems. For example, positive feedback between the congested networks and users' mass psyche might cause unexpected trouble of the networks. We have proposed a hierarchical architecture of network controls with respect to time scales of their actions. In particular, we have proposed Quasi-Static Approach which decomposes the time-scale by using the fact that the behavior of systems is very faster than users' perceivable time scale. In this article, we introduce notions of renormalization group and adiabatic approximation, and reconsider the physical meaning of quasi-static approach. We expect our reconsideration is useful for other hierarchical models in networks.

Key words retry, quasi-static approach, renormalization group, adiabatic approximation

1. はじめに

情報通信ネットワークは、高速化、大規模化、ならびにアプリケーションの多様化や社会との相互作用の緊密化が進み、日々の動的な進化を続ける大規模複雑システムであるといえる。例えば社会との結びつきの面から一例を挙げると、商用 IP 電話サービスの普及期に相次いで発生した大規模障害の事例は、ネットワーク状態とユーザの集団心理との間に生じた正のフィードバックがシステム状態の予期できない変化を招き、事態を悪化させた可能性が高い。このような大規模複雑システムとしてのネットワークを適切に設計・制御するためには、社会との相互作用を考慮した枠組みを整備する必要がある。

身の回りにある大規模複雑システムの典型例は、この世界そのものである。この世界を形成する構成要素の数や、そこから生み出される多様性は、究極の大規模複雑システムであろう。しかしながらこの世界には秩序があり、原子などのミクロなスケールでの無数の自由度による雑多な現象が、我々の生活に関わるマクロなスケールに直接的な影響を及ぼすことが無いように見える。これはこの世界が階層構造を持つことと関連していると考えられる。このような自然界の特性を工学的なシステム設計に応用することで、大規模複雑システムとしてのネットワークを適切に設計・制御する技術を確立するために、著者らは各種制御の動作時間スケールによる階層化アーキテクチャを検討してきた [1]。特に、ネットワークの状態変化の速度がユーザの知覚できる時間分解能よりも極めて速いことを利用し、両者の階層間の相互作用を取り入れながらネットワーク性能を評価する為の「準静的アプローチ」を提案してきた。

本稿では、くりこみ群の考え方を利用して準静的アプローチを再検討し、その物理的意味を考察するとともに、同様の考え方を階層構造の他の対象へ応用する方法を整備する。

2. くりこみ変換

くりこみ理論とは、何らかの対象を観察する際に、観察のスケール（時間的または空間的な分解能など）を粗くするような「ものの見方の変換」を考え、その変換に対してものの見え方がどのように変化するかの「応答」をシステムティックに記述しようとする理論の枠組みである。ここで用いられるものの見方の変換をくりこみ変換という。

ミクロスケールで観測したときに多数の（または無限の）自由度で記述されるようなシステムが、くりこみ変換によってマクロスケールでは少数の（または有限の）自由度で記述できるような自由度の縮約が可能な場合に、観測対象のシステムはくりこみ可能であるという。この世界が階層的な秩序を持っていることは、この世界がくりこみ可能であることを示唆している。

くりこみ理論は物理学の諸分野において多くの鮮やかな成功例がある反面、適用する問題毎にカスタマイズしたくりこみ理論が必要であり、現状では必ずしも誰にでも使える汎用的な分析手法とはいえないようである [2]。従ってネットワーク設計用にくりこみ理論をカスタマイズし、ネットワークの階層アーキテクチャ設計に利用可能のように整備する必要がある。準静的

アプローチは、階層構造の典型例としてユーザとシステムの間に関係に着目したもので、これをくりこみ理論的に整理することで、ネットワークにカスタマイズしたくりこみ理論を構築する為のきっかけとしたい。

くりこみ変換とは、何らかの粗視化をする変換とスケール変換の組み合わせによって構成される。くりこみ変換の基本的な考え方を二つの例で説明する。

一つ目の例として、無限に広がる碁盤の目に確率 p で黒石、確率 $1-p$ で白石を配置したとき、遠くから見るとどう見えるか、という問題を考える。このとき 2×2 の 4 個の格子点を一つに粗視化するくりこみ変換として以下の変換を考える。まず、 2×2 の格子点を一つにまとめるルールとして以下のように決めたとする [3]。

- 2×2 の格子点のうち黒が 3 以上なら黒として代表される。
- 2×2 の格子点のうち黒が 2 以下なら白として代表される。

その後、空間的なスケールを $1/4$ に変換する (図 1 参照)。 2×2 の格子点を一つにまとめたとき、新しい格子が黒である確率 $\mathcal{R}(p)$ は

$$\mathcal{R}(p) = p^4 + 4p^3(1-p) \quad (1)$$

ここで、 $\mathcal{R}(p) = p$ となる $p (\geq 0)$ を調べると、

$$p = 0, 1, \frac{1 + \sqrt{13}}{6} (\simeq 0.768) \quad (2)$$

となるから、臨界確率 p_c は、

$$p_c = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \quad (3)$$

となり、格子点を遠くから見たとき $p > p_c$ なら真黒、 $p < p_c$ なら真白に見える。

二つ目の例は拡散現象のくりこみ変換である。ある (密度) 関数 $p(x, t)$ が以下の拡散方程式を満たすとする。

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t)$$

ここで $\kappa > 0$ は拡散係数である。初期状態を $p(x, 0) = p_0(x)$ としたときの解は、正規分布の重ね合わせにより

$$p(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} N(x-y, 2\kappa t) p_0(y) dy$$

と表すことができる。但し $N(x, \sigma^2)$ は分散 σ^2 の正規分布

$$N(x, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

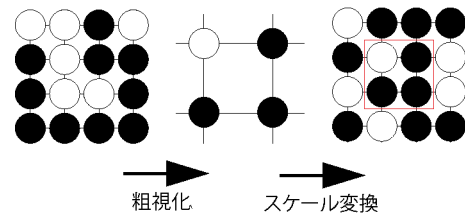


図 1 無限に広がる碁盤を遠くから見たらどう見えるか

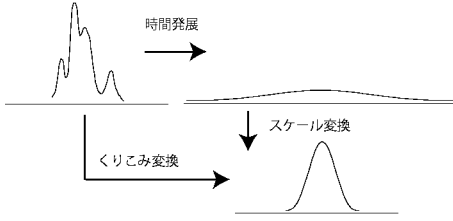


図 2 拡散現象のくりこみ変換

である．拡散方程式の解 $p(x, t)$ のくりこみ変換として， $p(x, t)$ の時間を指数関数的に e^{2ct} で進めて拡散を引き起こすと同時に， x 軸を $\sqrt{2\kappa e^{2ct}}$ の割合で縮めるスケール変換をした分布を考える．

$$\mathcal{R}(p(x, t)) := \frac{\sqrt{2\kappa e^{2ct}}}{\sigma} p\left(\frac{\sqrt{2\kappa e^{2ct}}}{\sigma}x, t\right) \quad (4)$$

ここで σ は正の定数である．この変換により $\mathcal{R}(p(x, t))$ は時間と共に有限の分散を持つ正規分布 $N(x, \sigma^2)$ に収束する．この性質を利用して，ネットワーク上に有限の空間構造を生み出す自律分散制御を考えることができ，アドホックネットワークの自律分散的なクラスタリング技術に应用が可能である [4]．

3. 準静的アプローチ

準静的アプローチとは，IP 電話の再試行トラヒックを例にして，ユーザとの相互作用のあるシステムについて，その安定性を調べる方法として検討しているものである [5]．図 3 は文献 [5] で検討対象としているシステムモデルである．まず，再試行以外の通話処理の流れを説明する．通話の設定要求が到着したとき，まず前段の呼処理としてルーティングやチャネル確保を行った後，後段の通話チャネルを確保し，通話終了まで通話チャネルを占有した後，退去する．再試行を考えない場合に，前段は M/M/1，後段は M/G/s/s でモデル化している．次に再試行であるが二種類のタイプを考える．まず，通話チャネルが全て使用中だった場合に，通話要求が呼損となったものが，ある時間経って時間的にランダム化され，再び通話要求としてシステムに再入力するものである．もう一つはユーザの心理的要因に起因するもので，前段の呼処理の混雑により待ち時間が増大し，ユーザが待ちきれずに再び通話要求を発生させるものである．このシステムは以下の特徴を持っている．

- 通信システムとユーザの相互作用の記述

システムが輻輳するとユーザの処理待ち時間などが増加し，

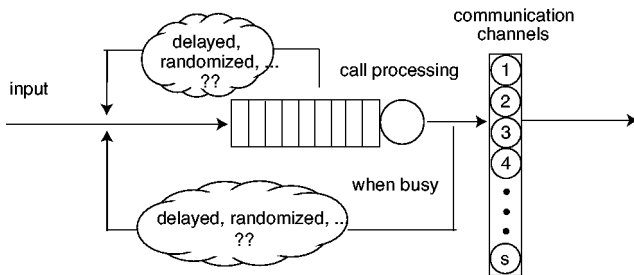


図 3 システムモデル

そのことがユーザからの再試行トラヒックを励起して通信システムの更なる輻輳を招く．このようにユーザやシステムの動きはそれぞれ単体の性質で決まっているのではなく，相互関係が本質的になる．

- ユーザと通信システムの階層分離

大規模システムを考えているので，システムの動作速度は人間の体感可能な時間スケールに比べて極めて速い．

本稿では，二種類の再試行のうち呼設定処理におけるユーザの心理的要因に起因する再試行のみを対象にし，準静的アプローチの考え方を説明する．

呼設定処理における待ち時間の増大に伴って再試行が増えるモデルを考えると，前段の待ち行列の系内客数に何らかの形で比例した再試行が発生すると考えるのが自然である．そこで，現時点での系内客数に比例する再試行が加わるとして，図 4 の状態遷移速度図を考えてみる．ここで λ_0 は再試行を含まない入力レートで， μ は呼処理のサービスレートである．また ϵ (≥ 0) は比例係数である．図 4 のモデルは $\epsilon > 0$ で定常状態を持たないため，系内客数が発散し，その結果入力トラヒックも発散することになる．

現実のシステムでは，通常の状態で入力トラヒックが発散することはないので，上記モデルのどこに問題があるか考察してみる．再試行のレートが現時点の系内客数に比例するということは，システム動作速度が非常に遅い（相対的には人間の観察能力についての時間分解能や反応動作が極めて高い）ことを意味する．つまり，ユーザが現時点でのシステムの状態に即座に反応しうることを意味している．しかし現実の高速システムでは，システムの現時点の状態にユーザが反応することは出来ないため，図 4 のモデル化は適切ではないことになる．

準静的アプローチは，以下のような手順で再試行を含む入力トラヒック量とシステムの安定性を評価するものである．まず，ユーザが認知したり反応したりできる時間スケールを T とし，時間を T 単位で区切って離散的に取り扱う．その上で，システムの動作速度がユーザに比べて極めて速いとする極限をとり，時間間隔 T はユーザにとっては短い時間であっても，システムにとって極めて長い時間であるとし，システムは T の時間内では定常状態にあるとする．またシステムの時間変化は，定常状態を保ったままゆっくりと「準静的に」遷移すると考える．

このような考え方にに基づき，離散時間で考えて時刻 k での再試行を含む入力レートを λ_k としたとき，次の時刻 $k+1$ での再試行を含む入力レートを λ_{k+1} を

$$\lambda_{k+1} = \lambda_0 + \epsilon \frac{\lambda_k / \mu}{1 - \lambda_k / \mu} \quad (5)$$

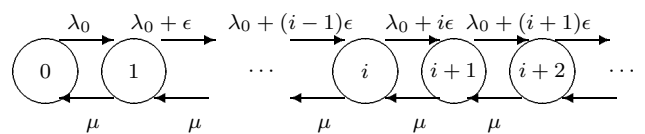


図 4 系内客数に比例した再試行トラヒックが入力する場合の状態遷移速度図

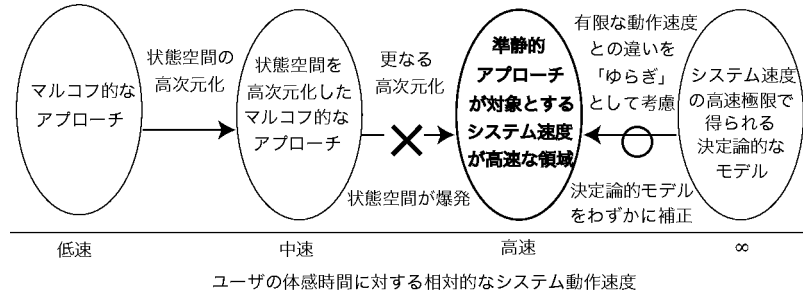


図 6 準静的アプローチの狙い

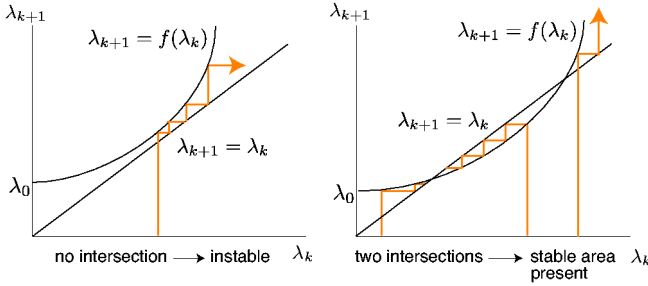


図 5 システム動作の高速極限での安定性

とする。右辺第二項は再試行トラヒックを表し、M/M/1 の定常状態での平均系内客数に比例するとしている。

このシステムが安定であるとは、時間が十分経過した後に入力トラヒックが発散しないこと、つまり $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k < \infty$ とする。これは式 (5) を $\lambda_{k+1} = f(\lambda_k)$ としたとき、この曲線が傾き 1 の直線と交点を持つかどうかで判断することができる (図 5 参照)。両者のグラフに交点が無ければ入力トラヒックが発散するが、交点があれば適当な初期条件を選べば入力トラヒックは安定である。

図 4 のようなモデルから出発して、ユーザの動作速度を徐々に遅くしていくと、再試行トラヒックは現時点のシステム状態だけでなく、過去の状態にも依存するようになる。例えば適当な時点列を選んで系内客数を観測し、その観測値からある期間の平均系内客数を得ることができる。この前提で平均系内客数に比例する再試行トラヒックモデルを考えると、過去の n 個の時点の系内客数の組を状態として、 n 次元マルコフチェーンとして表すことができる。しかしながら、我々の興味のある高速システムでは $n \gg 1$ なので、状態空間の爆発によりマルコフ的な計算を適用することは難しい。準静的アプローチでは、システムの高速極限を考えることにより決定論的な振舞いを取り出し、現実には通信システムの動作は (高速ではあるが) 有限であるので、決定論的な取り扱いからのずれを「ゆらぎ」として考慮するアプローチである (図 6)。

4. 再試行を含む入力レートのくりこみ変換

ユーザは過去の時間間隔 T での平均系内客数に比例した再試行を発生させるとして、時刻 t での入力レート $\Lambda(t; T)$ として以下のモデルを考える。

$$\Lambda(t; T) = \lambda_0 + \frac{\epsilon}{T} \int_{t-T}^{t-} Q(s) ds \quad (6)$$

ここで $Q(t)$ は時刻 t での系内客数である。

もし人間の知覚の時間分解能が非常に高く、瞬間的にシステム状態を知覚できるとして時間間隔 $T \rightarrow 0$ の極限を考えると

$$\lim_{T \rightarrow +0} \frac{1}{T} \int_{t-T}^{t-} Q(s) ds = Q(t^-) \quad (7)$$

と書けるから、 $\lambda(t) := \Lambda(t; +0)$ とすると

$$\lambda(t) := \lambda_0 + \epsilon Q(t^-) \quad (8)$$

となる。これは図 4 の状態遷移速度図が表すシステムモデルに対応する。

ここで、再試行を含む入力レートと系内客数は相互に影響を及ぼし合っていることに注意する。入力レートの変化は系内客数に影響を与え、逆に平均系内客数の変化は式 (6) を通して入力レートに影響を与える。このことから、時間間隔 T を変えることによって式 (6) の入力レートを変化させると、結果的に系内客数 $Q(t)$ に影響が及ぶことがわかる。そのため、式 (6) の系内客数 $Q(t)$ は、本来、人間の知覚可能な時間間隔 T に依存した量になる必要がある。

系内客数 $Q(t)$ の T 依存性を考慮して再試行を含む入力レートの特性を考える為に、以下の手順でくりこみ変換を導入して考察する。 $\alpha \geq 1$ に対して、人間の知覚可能な時間分解能が $1/\alpha$ になったことを表す変換 K_α を考える。

$$\begin{aligned} K_\alpha(\Lambda(t; T)) &= \Lambda(t; \alpha T) \\ &= \lambda_0 + \frac{\epsilon}{\alpha T} \int_{t-\alpha T}^{t-} Q^*(\alpha, s) ds \end{aligned} \quad (9)$$

ここで $Q^*(\alpha, t)$ は人間の知覚可能な時間分解能が $1/\alpha$ になったことにより、再試行を含む入力レートが影響を受け、その結果として実現する系内客数であり、 $Q^*(1, t) = Q(t)$ である (この記法に従えば、式 (7), (8) に現れる $Q(t^-)$ は、仮に α の範囲に $\alpha < 1$ も許すとして形式的に $Q^*(+0, t^-)$ となる)。

次に、時刻 t を中心として時間スケールを α 倍細かくする変換 S_α を考える。

$$\begin{aligned} S_\alpha(\Lambda(t; T)) &= \lambda_0 + \frac{\epsilon \alpha}{T} \int_{t-T/\alpha}^{t-} Q(\alpha s) ds \\ &= \lambda_0 + \frac{\epsilon \alpha}{T} \int_{t-T/\alpha}^{t-} Q^*(1, \alpha s) ds \end{aligned} \quad (10)$$

これは時間スケールの変換 (時間を計るモノサシの目盛りの変更) なので, $Q(t)$ の関数形自体には影響を与えない.

以上から, くりこみ変換 \mathcal{R}_α を以下のように定義する [2].

$$\mathcal{R}_\alpha := \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{K}_\alpha \quad (11)$$

具体的に入力レート $\Lambda(t; T)$ をくりこみ変換すると以下のようになる.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\alpha(\Lambda(t; T)) &= \{\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{K}_\alpha\}(\Lambda(t; T)) \\ &= \lambda_0 + \frac{\epsilon}{T} \int_{t-T}^{t-} Q^*(\alpha, \alpha s) ds \end{aligned} \quad (12)$$

因に, くりこみ変換は半群をなし, くりこみ群と呼ばれる.

$$\mathcal{R}_1(\Lambda(t; T)) = \Lambda(t; T) \quad (13)$$

$$\{\mathcal{R}_\alpha \circ \mathcal{R}_\beta\}(\Lambda(t; T)) = \mathcal{R}_{\alpha\beta}(\Lambda(t; T)) \quad (14)$$

$$\{\mathcal{R}_{\alpha\beta} \circ \mathcal{R}_\gamma\}(\Lambda(t; T)) = \{\mathcal{R}_\alpha \circ \mathcal{R}_{\beta\gamma}\}(\Lambda(t; T)) \quad (15)$$

以降では $\Lambda_\alpha(t; T) := \mathcal{R}_\alpha(\Lambda(t; T))$ と表記する.

5. くりこみ群方程式による超高速システムの考察

$Q^*(\alpha, t)$ の関数形が α の値によってどのように変化するかを知ることは難しいため, 一般の α に対してどのような入力レート $\Lambda_\alpha(t; T)$ が得られるかを知ることは出来ない. ここでは特別な場合として $\alpha \gg 1$ となるくりこみ変換を考え, $\Lambda_\alpha(t; T)$ を考察する. これは, 人間の知覚可能な時間スケールに比べてシステムの状態変化が極めて速い状況である. このとき, 以下のくりこみ群方程式が成り立つとする.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Lambda_\alpha(t; T) = 0 \quad (16)$$

これは, 人間の知覚可能な時間分解能をこれ以上粗くしても何も変化が無い状態を意味し, 人間とシステムの動作時間スケールが著しく異なる高速システムを考えていることに対応する.

パラメータ α による微分の影響を明示的に見るために, 式 (12) の表現を考え易い形に変えることを考える. 時間スケールの変換 \mathcal{S}_α は時間を計るモノサシの目盛りの変更をしているにすぎず, 入力レート $\Lambda(t; T)$ の変換としては恒等変換になるので, 式 (10) は

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\alpha(\Lambda(t; T)) &= \lambda_0 + \frac{\epsilon \alpha}{T} \int_{t-T/\alpha}^{t-} Q^*(1, \alpha s) ds \\ &= \lambda_0 + \frac{\epsilon}{T} \int_{t-T}^{t-} Q^*(1, s) ds \\ &= \Lambda(t; T) \end{aligned} \quad (17)$$

となる. このことを使って式 (16) の意味を考察する. 式 (12) から,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \Lambda_\alpha(t; T) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{R}_\alpha(\Lambda(t; T)) \\ &= \frac{\epsilon}{T} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t-T}^{t-} Q^*(\alpha, \alpha s) ds \end{aligned} \quad (18)$$

であるが, \mathcal{S}_α が恒等変換であることを使うと, 式 (16) と (17) から

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \Lambda_\alpha(t; T) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{K}_\alpha(\Lambda(t; T)) \\ &= \epsilon \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{\alpha T} \int_{t-\alpha T}^{t-} Q^*(\alpha, s) ds \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

が得られる. ここで,

$$\frac{1}{\alpha T} \int_{t-\alpha T}^{t-} Q^*(\alpha, s) ds$$

は時間間隔 $[t - \alpha T, t)$ で観測した平均系内容数である. これが α に依存しないということは, 観測時間長を長くしても平均系内容数が不変であることであり, この時間間隔で観測した平均系内容数は定常状態にあるとして良いことを意味している.

6. 断熱近似

ここでは, くりこみ群とは別の考え方で準静的アプローチを再考察してみる.

断熱近似とは, 分子や固体中などで原子核の運動は電子に比べるとはるかに遅いことを利用し, 各瞬間において原子核を静止させて電子の状態を求める近似法である. この考え方は, 動作速度の大きく異なる対象を含んだシステムを考察するのに利用できる. 以下, 文献 [6] に従った形で断熱近似を導入する.

外力が無ければ $q(t) = 0$ に緩和するシステムで, 平衡点 $q(t) = 0$ からのずれの大きさに比例して緩和する方向に遷移するシステムを考え, 以下のように外力 $F(t)$ を加える.

$$\frac{d}{dt} q(t) = -\gamma q(t) + F(t) \quad (20)$$

但し $\gamma > 0$ である. 上記方程式の解は以下のように書ける.

$$q(t) = \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} F(s) ds \quad (21)$$

q は外力 $F(t)$ に対する応答だと考えることができる. q は一般に現時刻 t の外力 $F(t)$ だけではなく, 過去の外力にも依存する. もし q の変化が $F(t)$ の変化に比べて非常に速いとして, q が現時点 t の現時点の外力 $F(t)$ だけに依存する状況を考える. 例えば $F(t)$ の時定数を $1/\delta$ とし, a を定数として, 仮に

$$F(t) = a e^{-\delta t} \quad (22)$$

としてみる. これを式 (21) に代入して積分を実行すると,

$$q(t) = \frac{a}{\gamma - \delta} \left(e^{-\delta t} - e^{-\gamma t} \right) \quad (23)$$

となる. ここで q の変化が $F(t)$ の変化に比べて非常に速いとして, $\gamma \gg \delta$ であれば

$$q(t) \simeq \frac{a}{\gamma} e^{-\delta t} \equiv \frac{1}{\gamma} F(t) \quad (24)$$

これは, システムに固有の時定数 $1/\gamma$ が外力の変化の時定数 $1/\delta$ より極めて短いことに対応する. このように, システ

ムに固有の時定数 $1/\gamma$ が外力の変化の時定数 $1/\delta$ より極めて短いとして扱うことを断熱近似 (adiabatic approximation) という。 $q(t) \simeq (1/\gamma) F(t)$ という関係は、式 (20) において $dq(t)/dt = 0$ と置いた結果と同じである。

準静的アプローチと断熱近似の関係を考えるため、出発点として式 (12) を考える。

$$\Lambda_\alpha(t; T) = \lambda_0 + \frac{\epsilon}{T} \int_{t-T}^{t-} Q^*(\alpha, \alpha s) ds \quad (25)$$

入力レート $\Lambda_\alpha(t; T)$ は系内客数の平均値 $\frac{1}{T} \int_{t-T}^t Q^*(\alpha, \alpha s) ds$ から即座に影響を受けるが、逆に $\Lambda_\alpha(t; T)$ の変化は系内客数の平均値に対して非常にゆっくりとしか影響を及ぼさない。つまり、 $\Lambda_\alpha(t; T)$ の変化は系内客数の平均値の変化に比べて極めて速い。これを断熱近似の考え方に当てはめて考察してみる。 $q(t)$ を入力レート $\Lambda_\alpha(t; s)$ の λ_0 からのずれとする。

$$q(t) := \Lambda_\alpha(t; s) - \lambda_0 \quad (26)$$

すると式 (24) より

$$\Lambda_\alpha(t; s) \simeq \lambda_0 + \frac{1}{\gamma} F(t) \quad (27)$$

この式と式 (25) を比較して

$$q(t) = \frac{\epsilon}{T} \int_{t-T}^{t-} Q^*(\alpha, \alpha s) ds \simeq \frac{1}{\gamma} F(t) \quad (28)$$

との対応関係が得られるから、式 (20) は

$$\frac{d}{dt} q(t) = \gamma \left\{ -q(t) + \frac{\epsilon}{T} \int_{t-T}^{t-} Q^*(\alpha, \alpha s) ds \right\} \quad (29)$$

となる。断熱近似 $dq(t)/dt = 0$ から以下の式を得る。

$$\frac{d}{dt} \int_{t-T}^{t-} Q^*(\alpha, \alpha s) ds = 0 \quad (30)$$

このことから、平均系内客数は定常状態にあるとして求めることができる。また、平均系内客数に変化が無いことから、定常状態を保ちながら準静的にゆっくり変化する現象を表すと解釈することができる。この変化は非常にゆっくり起きるため、 T を時間の単位とするような「時間の早送り」をすれば変化が観測できるはずである。そのような考えで、時刻 T を時間の単位として離散時間で状態の変化を追ったものが式 (5) に対応する。

7. 再試行を含む到着呼数の時間発展方程式

ゆっくり変化する入力レートによる到着呼数の時間変化を記述するため、 $X(t, T)$ を実際に $[t-T, t)$ 間に到着した呼数として $X(t, T)$ の時間発展を考える。ここでの時間スケールは、 T を時間の単位とするような時間の早回しをしたもので、人間が観測する変化のスケールでの現象である。

$$\begin{aligned} dX(t, T) &:= X(t+dt, T) - X(t, T) \\ &= X(t+dt, dt) - X(t-T+dt, dt) \end{aligned} \quad (31)$$

としよう。再試行を含む通話の設定要求の到着タイミングは十

分にランダム化されており、Poisson 分布に従うとする。また、対象とするシステムは大規模であって λ_0 は非常に大きいため、到着呼数の分布は正規分布に十分近いとする。すると、到着呼数は Wiener 過程 $W(t)$ を使って

$$\begin{aligned} X(t+dt, dt) &= \Lambda_\alpha(t, T) dt + \sqrt{\Lambda_\alpha(t, T)} dW(t) \\ &= \left(\lambda_0 + \frac{X(t, T)/(\mu T)}{1 - X(t, T)/(\mu T)} \right) dt \\ &\quad + \sqrt{\lambda_0 + \frac{X(t, T)/(\mu T)}{1 - X(t, T)/(\mu T)}} dW(t) \end{aligned} \quad (32)$$

$$X(t-s+dt, dt) = \frac{X(t, T)}{T} dt + \sqrt{\frac{X(t, T)}{T}} dW(t) \quad (33)$$

と表現することができる。従って式 (31) は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} dX(t, T) &= \left(\lambda_0 - \frac{X(t, T)}{T} + \frac{X(t, T)/(\mu T)}{1 - X(t, T)/(\mu T)} \right) dt \\ &\quad + \sqrt{\lambda_0 + \frac{X(t, T)}{T} + \frac{X(t, T)/(\mu T)}{1 - X(t, T)/(\mu T)}} dW(t) \end{aligned} \quad (34)$$

文献 [7] では、式 (34) による評価結果とシミュレーション結果を比較し、両者が良く一致することが示されている。

8. おわりに

本稿では、動作時間スケールによる階層型ネットワークアーキテクチャの構成に向け、ユーザとシステムの相互作用を扱う準静的アプローチを例にし、くりこみ群的な考え方と断熱近似的な取り扱いを導入した。その結果、準静的アプローチの物理的意味を明らかにすることができた。

謝 辞

本研究は科研費基盤研究 (B) 21300027 より研究費の援助を受けて実施したものです。

文 献

- [1] 会田 雅樹, 高野 知佐, 作元 雄輔, “動作時間スケールの階層構造を基盤とするネットワークアーキテクチャ,” 電子情報通信学会誌, 特集 情報爆発時代に向けた新たな通信技術—限界打破への挑戦—, vol. 94, no. 5, pp. 401–406, May 2011.
- [2] 大野 克嗣, 田崎 晴明, 東島 清, “くりこみ理論の地平,” 数理科学, vol 35, no. 4, pp. 5–12, 1997.
- [3] 竹田 辰興, 電気通信大学 計算理工学特論 講義資料, 2010. web.mac.com/takeda_t/Bonryu/Lecture_files/TCSE9~10.pdf
- [4] Chisa Takano, Masaki Aida, Masayuki Murata and Makoto Imase, “Autonomous decentralized mechanism of structure formation adapting to network conditions,” *SAINT 2011 Workshops (HEUNET 2011)*, Munich, Germany, July 2011.
- [5] 会田 雅樹, 高野 知佐, 村田 正幸, 今瀬 真, “再試行を含む通信システムのための準静的な安定性評価法,” 日本オペレーションズリサーチ学会誌, 特集 インターネット性能評価の新潮流, vol. 53, no. 6, pp. 334–339, June 2008.
- [6] Hermann Haken, *Synergetics: An Introduction. Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry and Biology*, Springer, 1978.
- [7] 渡部 康平, 田邊 慎子, 会田 雅樹, “再試行トラヒックの振舞いを解析する準静的アプローチにおけるゆらぎのモデル化方法に関する考察,” 信学技報 IN2010-178, 2011 年 3 月