通信路容量を計算する新しいアルゴリズムの研究

A Study of New Algorithm to Calculate the Channel Capacity

佐武 拓斗 Takuto Sabu　渡部 康平 Kohei Watabe　中川 健治 Kenji Nakagawa

長岡技術科学大学 大学院 工学研究科
Graduate School of Engineering, Nagaoka University of Technology

1　まえがき

良い通信路符号を作るために，通信路容量を求めることが重要である．通信路容量とは任意に小さい誤りで伝送可能なデータの最大量であり，符号化の限界を知ることができる重要な指標となる．

本研究では，この通信路容量を求める新しいアルゴリズムを提案する．本稿では，提案したアルゴリズムで様々な問題を解き，通信路容量及び，通信路容量を達成する出力分布が正しく得られる割合に関して報告する．

2　射影アルゴリズム

X を入力情報源とし，Y を出力情報源とする離散的無記憶通信路を考える．入力記号を $a_1, \cdots, a_m$ とし，出力記号を $b_1, \cdots, b_n$ とする．a_i を送信したとき b_j が受信される条件付き確率を $P_{ij} = P(Y = b_j | X = a_i), i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n$ として，通信路行列を

$$\Phi = (P_{ij}), i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n$$

とし，Φ の各行ベクトルを

$$P_i = (P_{i1}, \cdots, P_{in}), i = 1, \cdots, m$$

とする．$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in \overline{\Delta}^m$ を入力分布とし，$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\lambda}\Phi, \boldsymbol{q} = (q_1, \cdots, q_n) \in \overline{\Delta}^n$ を出力分布とする．このとき，相互情報量 $I(\boldsymbol{\lambda}, \Phi) = \sum_i \lambda_i \sum_j P_{ij} \log P_{ij}/q_j$ に対して通信路容量 C が $C = \max_{\boldsymbol{\lambda} \in \overline{\Delta}^m} I(\boldsymbol{\lambda}, \Phi)$ と定義される．また C は次のように KL 情報量 [1] によって定式化される．

$$C = \min_{q \in \overline{\Delta}^m} \max_{1 \le i \le m} D(P_i || \boldsymbol{q}) \tag{1}$$

提案法は (1) 式が幾何学問題である最小包含円を解く問題と構造が同じであることを利用して解く方法である．提案法を射影アルゴリズムと名づける．提案法は，通信路行列の中から通信路容量を求める上で不要となる行を除外し，必要となる行を用いて解く手法である．アルゴリズムを以下に示す．

1) 通信路行列 Φ の $P_1, \cdots, P_m$ に対して，次元を上げて，$\tilde{P}_1, \cdots, \tilde{P}_m$ とする．ずらす量は微小 ϵ とする．
2) $\tilde{P}_1, \cdots, \tilde{P}_m$ からの等距離点 $\tilde{Q}^0 \in L(\tilde{P}_1, \cdots, \tilde{P}_m)$ の重心座標を $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathbf{0}} = (\lambda_1^0, \cdots, \lambda_m^0)$ とし，計算する．
3) $\lambda_i^0 \ge 0, \quad i = 1, \cdots, m$ ならばアルゴリズムは終了し $\tilde{Q}^0$ を出力する．
4) $\lambda_i^0, \quad i = 1, \cdots, m$ の中に負のものがあれば，最小のもの，すなわち負で絶対値が最大のものに対応する点を除外する．例えば λ_1^0 であれば，$\tilde{P}_1$ を除外して $\tilde{P}_2, \cdots, \tilde{P}_m$ を残す．
5) $m - 1$ 個の点 $\tilde{P}_2, \cdots, \tilde{P}_m$ に対して 2) から繰り返す．

3　妥当性の評価実験及び考察

妥当性の評価を行うために，m と n の値を任意に変更させ，$\sum_{i=1}^m P_i = 1$ を満たす実数を通信路行列に対してランダムに生成した．その場合に正しい答えが導出されるかどうかの確認を行った．パターン数は 1 万とし，ϵ の値は 0.01 とした．その結果を表 1 に示す．

表 1　射影アルゴリズムの正答率

m \ n	2	3	10	20
3	99.97%	99.95%	99.95%	99.99%
4	99.92%	99.92%	99.95%	99.96%
5	99.91%	99.89%	99.91%	99.96%
8	99.90%	99.83%	99.90%	99.96%
10	99.89%	99.58%	99.85%	99.92%

表 1 の結果から最小値でも 99.58% の正答率となった．n の値によっては，m が増加するごとに正答率が減少しているように見える．しかし，微小な値なためその法則が当てはまらない可能性もある．今回試したパターンでは 100% の正答率にならなかった．その原因を調査した結果，本来除外されてはならない行が除外されることにより，正しい解が得られないことが判明した．しかしながら，どのような問題に対して，この現象がおきるのかはっきりしていない．この現象がおきる問題の特徴をつかむことができれば，正答率が 100% となるアルゴリズムの完成に近づけると考える．

4　まとめと今後の展望

本稿では提案したアルゴリズムの正答率について評価した．今後は除外されてはならない行が除外される問題の特徴をつかみ，原因を判明させる．そして，正答率が 100% となるアルゴリズムを完成させる予定である．

参考文献

[1] Kenji Nakagawa, Kohei Watabe, Takuto Sabu, “On the Algorithm for the Output Distribution that Achieves the Channel Capacity”, arXiv:1601.01394v2[cs.IT], January 2016.