

再試行トラヒックの振舞いを解析する準静的アプローチにおける ゆらぎのモデル化方法に関する考察

渡部 康平[†] 田邊 槇子[†] 会田 雅樹[†]

[†] 首都大学東京大学院 システムデザイン研究科 〒191-0065 東京都日野市旭が丘 6-6

E-mail: [†]{watabe-kouhei,tanabe-makiko,maida}@sd.tmu.ac.jp

あらまし 我々は、IP 電話システムを例にユーザの心理的要因による再試行トラヒックを考慮し、ユーザとシステムの相互作用を記述するトラヒックモデルを構築してきた。また同時に、再試行を考慮したトラヒックモデルにおけるトラヒックの時間発展を記述する準静的アプローチを提案してきた。準静的アプローチは、システムの動作速度が無限に高速であるとした場合のトラヒックの挙動と有限の場合の差を確率的ゆらぎによって表現するが、これらの方法がトラヒックモデルを適切に表現できているかどうかは、いまだ十分に検証されていない。そこで本研究では、M/M/1 に系内客数に比例したレートで発生する再試行トラヒックを加えたモデルについて、従来方法であるモンテカルロシミュレーションと準静的アプローチによってトラヒックの挙動を評価、比較し、準静的アプローチがトラヒックモデルを適切に表現できていることを示す。

キーワード 再試行トラヒック, 時間スケール, システム安定性

On Modeling of Fluctuations on Quasi-Static Approach Analyzing the Behavior of the Retry Traffic

Kohei WATABE[†], Makiko TANABE[†], and Masaki AIDA[†]

[†] Graduate School of System Design, Tokyo Metropolitan University

Asahigaoka 6-6, Hino-shi, Tokyo 191-0065, Japan

E-mail: [†]{watabe-kouhei,tanabe-makiko,maida}@sd.tmu.ac.jp

Abstract We have built up the traffic model that describes interactions between systems and users. The traffic model considers retry traffic that is caused by user psychology. Moreover, we have proposed the quasi-static approach that investigate the temporal evaluation of traffic. In the quasi-static approach, the difference between the behavior of the infinite speed system and that of the finite speed system is treated as a stochastic fluctuations. However, it is not verified yet whether the quasi-static approach can appropriately express the traffic model. In this paper, we focus on M/M/1 system with retry traffic, and we calculate its temporal evaluation of the traffic through traditional Monte-Carlo simulation and the quasi-static approach. Consequently, we can show that the quasi-static approach can appropriately express the traffic model as well as traditional approach.

Key words retry traffic, time scale, system stability

1. はじめに

インターネットにおいては、システムに対する過負荷によって引き起こされる輻輳やそれに伴うシステムダウンが大きな問題になっている。過負荷の一因として、ユーザが再試行することで複数のサービス要求を発生させる再試行トラヒックがあると考えられる。この再試行トラヒックには、ユーザによるコネクションの張り直しやリロードなどが含まれる。よって、シス

テムのリソースを適切に設定し、安定なシステムを構築するには、これらの再試行トラヒックを考慮に入れた評価を行うことが必要である。

再試行トラヒックにはその性質上、2 種類が存在すると考えられる。一つはシステムの処理能力不足によって棄却されたサービス要求の再試行トラヒックである。つまり、要求された処理量が一時的、もしくは継続的に許容可能な処理量を越えた場合に、その超過分が棄却され、再び新たなサービス要求とし

て生起するトラヒックである。もう一方は、サービス提供までの待ち時間に起因する再試行トラヒックである。サービス要求を出すユーザは、待ち時間が長くなると心理的要因により新たなサービス要求を発生させる。この遅延による再試行は元のサービス要求を中止することなく発せられ、重複したサービス要求となる。

待ち行列モデルにおける再試行トラヒックに関する研究としては、M/G/s/s に再試行トラヒックを考慮した M/G/s/s retrial queue model が知られている [1]。M/G/s/s retrial queue model は、サービス要求のシステム到着時に M/G/s/s の s 個のサーバ全てが使用中であったときサービス要求は棄却され、棄却されたサービス要求は指数分布に従う時間だけ待機した後に再び新たなサービス要求として到着する。

このモデルは、IP 電話システムに代表される Resource reReservation Protocol (RSVP) [2] などによる帯域予約型のサービスのモデル化として捉えることができる。到着したサービス要求が M/G/s/s のサーバを占有することが、帯域を占有することに相当し、空き帯域がない状態でサービス要求が到着すると再試行が発生する。この再試行は、前述の 2 種類の再試行トラヒックのうち、前者のサービス要求の棄却による再試行に相当する。よって、後者の遅延による再試行トラヒックの影響は M/G/s/s retrial queue model では考慮されていない。

この問題に対して [3] では、IP 電話システムを例に、サービス要求の棄却による再試行に加え、遅延によって発生する再試行トラヒックの挙動を準静的なトラヒックモデルとしてモデル化している。遅延による再試行は待ち時間を感じるユーザの心理的要因によって発生するため、トラヒックの挙動はシステムとユーザの間の相互作用によって決定する。準静的なトラヒックモデルとは、システムがユーザに対して無限に高速に動作するとする理想化を行うもので、この相互作用によるトラヒックの挙動の簡単な記述を可能にしている。

さらに [3] では、システムの動作速度が無限に高速と仮定した場合の挙動と有限の場合のずれを確率的ゆらぎとして表現することにより、実際のシステムのトラヒックの挙動やその発散確率を推定する準静的アプローチを提案している。この準静的アプローチは非常に高速動作するシステムにおいて希少確率で入力トラヒックが発散するシステムの挙動を簡単に記述できるという点で、従来方法であるマルコフモデルやシミュレーションによるアプローチよりも優れている可能性がある。しかし、準静的アプローチが、対応するトラヒックモデルの挙動を適切に表現できているかどうかについては十分な検証がなされていない。

本研究では、従来方法であるモンテカルロシミュレーションを用いた記述と準静的アプローチによる記述を比較可能なパラメータ条件において比較し、準静的アプローチの妥当性を検証する。

2. IP 電話システムにおける準静的アプローチ

2.1 準静的なトラヒックモデル

文献 [3] では、IP 電話システムにおける呼制御システムと

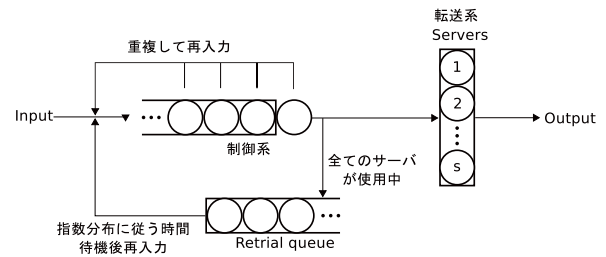


図 1 心理的要因による再試行を伴う IP 電話システムのモデル

ユーザを例に取り、時間スケールの異なるサブシステムからなるシステムの挙動を記述する方法を提示している。本小節では、[3] が示す IP 電話の準静的なトラヒックモデルについて解説する。

文献 [3] が想定する IP 電話システムのモデルを図 1 に示す。モデルは M/M/1 で表現される制御系と M/G/s/s で表現される転送系からなり、サービス要求は最初に制御系において通話に先立つシグナリング処理を受け、その後、通話に伴う帯域の確保に関する処理を受ける。M/G/s/s において全てのサーバが busy 状態であるときに、制御系を通過してサービス要求が到着した際は、サービス要求は棄却される。サービス要求を棄却されたユーザは再試行を行うとし、棄却されたサービス要求は新たなサービス要求となっており、指数分布で決定される時間だけ待機した後に再び制御系の M/M/1 に到着する。また、ユーザは制御系の M/M/1 のキューによる待ち時間の増加に反応し、心理的要因によって再試行を行い、重複したサービス要求を発生させるとする。この制御系からの再試行が本モデルを特徴付けている。

今、ユーザが待ち時間の増加を感じ、再試行を実際に行うことによるシステム状態の変化の時間スケールは、個々の到着による制御系の系内客数変化の時間スケールと比較して極めて長いと仮定する。文献 [3] では、ユーザの挙動が離散的に、系内客数変化に対して準静的な変化過程を追うとして、時間スケールの違いを表現したトラヒックモデルを構築し、システムの安定条件を考察している。

ある定数 $T (> 0)$ に対して、トラヒックモデルは以下のようになる。

- ユーザの再試行による入力レート変化は離散時刻 kT ($k = 1, 2, \dots$) のみ起こる。
- 時間区間 $(kT, (k+1)T]$ 内におけるユーザの心理的要因による制御系からの再試行は、時間区間 $((k-1)T, kT]$ の制御系の平均系内客数に比例して発生する (図 2 参照)。
- システムはユーザに対して無限に高速に動作し、有限の時間区間 $(kT, (k+1)T]$ 内の平均系内客数は確率 1 で定常状態確率から導かれる平均に一致する。

ここで T はユーザがシステムの挙動に対して反応する鈍感さを表している。文献 [3] では、ユーザの反応に関する研究 [4] から $T = 1$ 秒としていた。

入力レートは離散時刻 kT にのみ変化し、システムの動作速度が無限に高速と仮定しているため、 T 内においてシステムは定

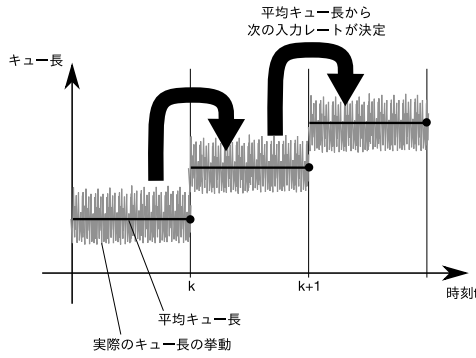


図2 入力量の変化と制御系系内客数の関係

常状態に達する。よって、時間区間 $(kT, (k+1)T]$ での制御系へのサービス要求の入力レート λ_{k+1} は、時間区間 $((k-1)T, kT]$ での入力レート λ_k のみで決まるため、以下の漸化式で算出できる。

$$\lambda_{k+1} = \lambda_0 + \lambda_k B(\lambda_k/\mu, s) + \varepsilon \frac{\lambda_k/\eta}{1 - \lambda_k/\eta} \quad (1)$$

ここで、 λ_0 は初期の入力レート、 μ と s はそれぞれ転送系でのサービスレートとサーバ数、 η は制御系でのサービスレートを表し、 ε は再試行トラヒックの強度を表す正の定数である。また、 $B(\rho, s)$ は転送系での呼損率を意味する Erlang B 式であり、以下で与えられる。

$$B(\rho, s) = \frac{\rho^s/s!}{1 + \rho + \rho^2/2! + \dots + \rho^s/s!}$$

(1) の右辺第2項と第3項は、それぞれ転送系からの再試行と、制御系からの再試行を表している。

ユーザの心理的要因に由来する制御系からの再試行レートが制御系の系内客数の時間平均に比例することは、各ユーザの再試行回数が制御系の M/M/1 での系内滞在時間（転送系到着までの待ち時間）に比例して発生することを意味している。今、時間区間 $((k-1)T, kT]$ 内でのサービス要求の到着数を $M(\lambda_k)$ とし、時間区間 $((k-1)T, kT]$ 内で i 番目に到着したユーザのサービス要求がキューに到着する直前の系内客数を Q_i^k ($i = 1, 2, \dots, M(\lambda_k)$) とする。 $M(\lambda_k)$ はパラメータ $\lambda_k T$ のポアソン分布に従う確率変数であることに注意する。PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages) 則 [5] を用いることにより、システムが無限に高速であるという条件（すなわち $\lambda_k \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow \infty$ の極限）においては以下の等式が成り立つ。

$$\lim_{\lambda_k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k/\eta}{1 - \lambda_k/\eta} = \lim_{\lambda_k \rightarrow \infty} \frac{1}{M(\lambda_k)} \sum_{i=1}^{M(\lambda_k)} Q_i^k \quad \text{a.s.} \quad (2)$$

(2) の左辺が (1) の右辺第3項と対応していることに注意する。さらに Little の公式 [6] を用いれば、時間区間 $((k-1)T, kT]$ 内で i 番目に到着したユーザのサービス要求の系内滞在時間を W_i^k ($i = 1, 2, \dots, M(\lambda_k)$) として、

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_k \rightarrow \infty} \frac{1}{M(\lambda_k)} \sum_{i=1}^{M(\lambda_k)} Q_i^k &= \lambda_k \lim_{\lambda_k \rightarrow \infty} \frac{1}{M(\lambda_k)} \sum_{i=1}^{M(\lambda_k)} W_i^k \\ &= \lim_{\lambda_k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{M(\lambda_k)} W_i^k \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

となる。これにより、 $\lambda_k \rightarrow \infty$ の高速極限においては、各ユーザがそれぞれの受ける待ち時間に比例した回数だけ再試行を行うことにより、入力トラヒックの挙動が (1) のように表されることがわかる。システムが無限に高速であるという仮定により、(2) の等号が成立し、(1) で初期入力レート λ_0 から確定的に入力レートの時間変化を決定し、システムの安定条件を検証することができる [3], [7]。

2.2 準静的アプローチ

前述のとおり、(1) はシステムが高速極限で動作する際の振る舞いを記述するものであったが、実際のシステムの動作速度は有限であり、必ずしも (1) で振る舞いを記述することはできない。(2) の等号は極限を取らなければ成立せず、右辺が等号の値を平均に確率的にばらつくことになる。

(2) での極限を取らずに、到着数 λ_k を有限とする場合のモデルを、従来のマルコフモデルによって記述しようとした場合、 $M(\lambda_k)$ 個の過去の状態 $\{Q_i^k\}$ ($i = 1, \dots, M(\lambda_k)$) を考慮して $M(\lambda_k)$ 次元の状態空間が必要となる。しかし、システムが非常に高速な場合は $M(\lambda_k) \gg 1$ となり、解析が困難となる。また、シミュレーション的な手法によって入力量の発散確率を求める場合、その確率が非常に小さい場合は膨大な時間を要してしまうため、現実的とは言えない。

そこで、[3] では、時刻 t での入力トラヒック量を $X(t)$ とし、 $X(t)$ の時間発展を以下のような Langevin 方程式の形で平均的挙動に確率的ゆらぎを加える形で表現するアプローチを取り、これを準静的アプローチと呼んでいる。

$$\frac{d}{dt} X(t) = F(X(t)) + \sqrt{D(X(t))} \xi(t) \quad (3)$$

ここで $\xi(t)$ は $E[\xi(t)] = 0$, $E[\xi(t)\xi(t')] = \delta(t-t')$ となる白色ガウス雑音である。離散的に扱っていた時刻 kT を連続量に戻して扱っていることに注意する。 $F(X)$, $D(X)$ はそれぞれ、以下のように与えられる。

$$F(X) = \lambda_0 + B\left(\frac{X}{\mu T}, s\right) + \varepsilon \frac{X/(\eta T)}{1 - X/(\eta T)} - \frac{X}{T} \quad (4)$$

$$D(X) = \frac{X}{T} + c(X) \quad (5)$$

ここで $c(X)$ はステップ関数であり、転送系からの再試行のゆらぎを意味している（詳細は [3] を参照）。 $F(X)$, $D(X)$ の導出や妥当性については3.節で詳しく議論する。

さらに、 $Y = 2\sqrt{D(X)}$ と変数変換を施すことにより、以下のようにゆらぎの量を一定とすることができる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Y(t) &= G(Y(t)) + \xi(t) \\ G(y) &= \frac{F(x) - 1/4}{\sqrt{x/T + c(x)}}, \quad y = 2\sqrt{x/T + c(x)} \end{aligned}$$

これにより、 $-G(Y)$ を積分したポテンシャル関数を描き、 $Y(t)$ の挙動を考察することができる。

ポテンシャル関数はその勾配に沿って下る方向に Y が変化するという傾向を表す関数である。図3にポテンシャル関数の一例を示す。例では、ポテンシャルが極小になっている安定点付近に Y が分布しやすいが、 $\xi(t)$ で表されるゆらぎによってポテ

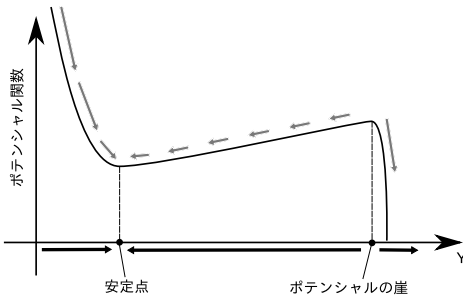


図3 ポテンシャル関数

ンシャルの崖となっている急勾配まで達すると発散してしまう。

Langevin 方程式 (3) は、以下に示す Fokker-Planck 方程式と等価であることが知られている。

$$\frac{\partial}{\partial t} p(y, t) = -\frac{\partial}{\partial y} G(y) p(y, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} p(y, t) \quad (6)$$

ここで、 $p(y, t)$ は時刻 t の Y の確率密度関数を表している。(6) を用いるにより、時間経過に伴う入力トラヒックの分布の変化をシミュレートすることができ、入力トラヒックの発散確率などを算出することができる。

3. 準静的アプローチの妥当性の検証

3.1 M/M/1 モデルでの比較

高速極限からの挙動にゆらぎを付加する準静的アプローチは、ユーザの挙動を離散的に扱うモデルを連続化して扱っており、また、ゆらぎの与え方として正規分布を用いるなどの理由から、実際に有限速度のシステムの挙動を適切に表現できているかは検証が必要である。

準静的アプローチの妥当性を検証するにあたって、我々は最もシンプルなモデルである再試行のない単純な M/M/1 システムから確認を始める。単純な M/M/1 システムの入力トラヒックは恒常的に一定であり、単位時間における実際の到着量がポアソン分布に従うことが解析的に分かっている。

まず、M/M/1 に対応する Langevin 方程式を考える。(4) の右辺第 2 項と第 3 項がそれぞれ、次時刻の転送系と制御系からの再試行に相当し、また、(5) の $c(X)$ は転送系からの再試行のゆらぎであったため、単純な M/M/1 における実際の入力量の Langevin 方程式は (3) の $F(X)$ と $D(X)$ に以下を代入したものになる。

$$F(X) = \lambda_0 - \frac{X}{T} \quad (7)$$

$$D(X) = \frac{X}{T} \quad (8)$$

次に、これと等価な Fokker-Planck 方程式を考えると、

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} F(x) p(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} D(x) p(x, t) \quad (9)$$

となる。ポテンシャル関数からシステムの安定性を考察することが目的ではなく、 X の分布を比較することが目的であるため、変数変換を行っていないことに注意する。

(9) に従い、入力量 $X(t)$ の分布を計算していき、十分に時間

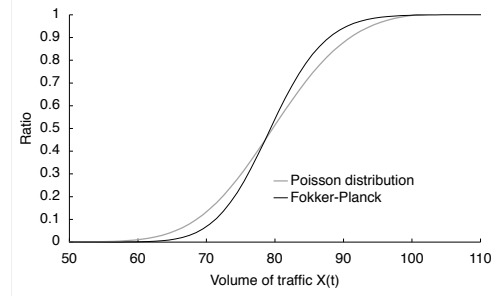


図4 (7) と (8) を用いた場合の $X(t)$ の分布とポアソン分布の比較

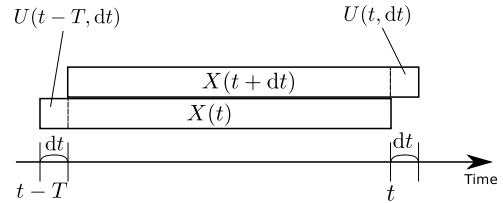


図5 過去 T 秒間の実際の到着量 $X(t)$ の変遷

を経過させたものを図 4 に示す。ここでは入力レート $\lambda_0 = 80$ 、サービスレート $\mu = 100$ 、シミュレーション時間は 100 秒としている。図からわかるとおり、定常状態において理論値であるポアソン分布に一致していないため、(7) と (8) を再考しなければならない。

この問題を解決するためには、Langevin 方程式の成り立ちを詳細に検証する必要がある。 λ_k は $((k-1)T, kT]$ での入力レートであったので、 $X(t)$ は $(t-T, t]$ での実際の入力量と定義するのが自然である。このことを考慮して、微小時間 dt 間での $X(t)$ の変化量 $dX(t)$ を考えると、

$$\begin{aligned} dX(t) &= X(t+dt) - X(t) \\ &= U(t, dt) - U(t-T, dt) \end{aligned}$$

となる (図 5 参照)。ここで、 $U(t, dt)$ は時間区間 $(t, t+dt]$ 内の実際の到着量である。

このとき、確率変数である $U(t, dt)$ の平均と分散は、到着がポアソン到着であることから、ともに $\lambda_0 dt$ となる。また、 $U(t-T, dt)$ についても平均と分散ともに $(X(t)/T)dt$ となる (証明は付録を参照)。よって、 $dX(t)$ は以下のようにかける。

$$dX(t) \simeq \lambda_0 dt - \frac{X(t)}{T} dt + \sqrt{\lambda_0 + \frac{X(t)}{T}} N(t) \sqrt{dt}$$

ここで、 $N(t)$ は異なる t に対して独立な標準正規分布に従う確率変数である。また、 $N(t) \sqrt{dt}$ は Wiener 過程 $W(t)$ を用いて $dW(t)$ とかける。結果として、Langevin 方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X(t) &= \lambda_0 - \frac{X(t)}{T} + \sqrt{\lambda_0 + \frac{X(t)}{T}} \frac{dW(t)}{dt} \\ &= \lambda_0 - \frac{X(t)}{T} + \sqrt{\lambda_0 + \frac{X(t)}{T}} \xi(t) \end{aligned}$$

となり、 $D(t) = \lambda_0 + X(t)/T$ とすることが適切であることがわかる。図 6 は $D(t) = \lambda_0 + X(t)/T$ として、Fokker-Planck 方程式を計算することにより得られた分布とポアソン分布の比

較である。これは、長さの区間で定義された量 $X(t)$ を形式的に時点 t の関数として (3) を与えたために必要となる補正である。図より、準静的アプローチにより適切に M/M/1 システムの入力量の挙動を表せていることがわかる。

3.2 M/M/1 retrial queue モデルでの比較

単純な M/M/1 における入力量の分布が再現できることが確認できたため、M/M/1 の系内客数に比例して再試行が発生するモデルにおいて検証を行う。これは [3] における IP 電話のモデルの制御系部に相当する。再試行を生む制御系は IP 電話のモデルを特徴付ける部分であり、準静的アプローチによって本システムが適切に記述できるかを検証する上で重要なモデルとなっている。また、検証により得られた結果は IP 電話システムに限らず、一般に再試行を伴う M/M/1 型の制御系を持つシステムに適用可能である。

記述するモデルは、M/M/1 システムに $((k-1)T, kT]$ 内における到着時系内客数 $\{Q_i^k\}$ の平均に比例して、時間区間 $(kT, (k+1)T]$ に再試行トラヒックの入力レートが加算されるモデルである。このモデルにおける実際の入力量の挙動は前節で検証した単純な M/M/1 のように理論的な分布が知られていない。そこで、本研究ではモンテカルロシミュレーションによって時刻 t における入力量の分布を求め、準静的アプローチの結果と比較することにする。

単純な M/M/1 の場合同様、入力量の推移に対応する Langevin 方程式を考える。システムが無限に高速であると仮定した際の入力レートの推移は以下で与えられる。

$$\lambda_{k+1} = \lambda_0 + \varepsilon \frac{\lambda_k / \eta}{1 - \lambda_k / \eta}$$

これを λ_k の差分 $\Delta\lambda_k$ の形に書き換えると、

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_k &= \lambda_{k+1} - \lambda_k \\ &= \lambda_0 - \lambda_k + \varepsilon \frac{\lambda_k / \eta}{1 - \lambda_k / \eta} \end{aligned}$$

Langevin 方程式で表すためにこれを自然に連続化すると、時刻 t での入力レートを $\lambda(t)$ として、

$$d\lambda(t) = \frac{1}{T} \left(\lambda_0 - \lambda(t) + \varepsilon \frac{\lambda(t)/\eta}{1 - \lambda(t)/\eta} \right) dt$$

となる。有限速度で動作するシステムを考えるには、入力レート $\lambda(t)$ を実際の単位時間あたりの到着量 $X(t)/T$ で置き換える必要がある。また、実際の入力量は確率的にばらつき、図 5 で示した M/M/1 の場合と同様に、過去 T 秒間の実際の入力量 $X(t)$ の変化量は分散 $(X(t)/T)dt$ を持つ減少分と分散 $(\lambda_0 + \varepsilon(X(t)/(\eta T))/(1 - X(t)/(\eta T)))dt$ を持つ増加分からなる。結果として、 $X(t)$ の時間変化を表す Langevin 方程式を構成する $F(X)$ と $D(X)$ は以下ようになる。

$$F(X) = \lambda_0 - \frac{X(t)}{T} + \varepsilon \frac{X(t)/(\eta T)}{1 - X(t)/(\eta T)} \quad (10)$$

$$D(X) = \lambda_0 + \frac{X(t)}{T} + \varepsilon \frac{X(t)/(\eta T)}{1 - X(t)/(\eta T)} \quad (11)$$

(11) の右辺第 3 項は再試行によるトラヒックのゆらぎに相当す

るが、[3] ではこの影響が極めて少ない実験条件で検証をしていた。(10) と (11) を (9) に代入することで、系内客数に比例して再試行が発生する M/M/1 システムの入力量の挙動を再現する Fokker-Planck 方程式が得られる。

図 7 と図 8 に準静的アプローチとモンテカルロシミュレーションによる時刻 20 秒での入力量分布と対応する $X(t)$ のポテンシャル関数を示した。このポテンシャル関数は $X(t)$ に関するものであり、各点におけるゆらぎの量は一定ではないことに注意する。シミュレーション条件は再試行を含まない入力レート $\lambda_0 = 300$ 、サービスレート $\mu = 1000$ 、再試行の強度 $\varepsilon = 100$ 、 $T = 1$ 秒としている。図 7 から準静的アプローチとモンテカルロシミュレーションの結果が一致していることが分かり、また、ポテンシャル関数を見ると、 $X(t) = 350$ の近辺に極小点があり、 $t = 20$ ではこの付近に安定して分布していることがわかる。しかし、シミュレーション開始直後からの時刻の経過と共に分布が移動していく過程は、準静的アプローチとモンテカルロシミュレーションで必ずしも一致しない(図 9)。これは Langevin 方程式において入力量の変化を連続化したことによる影響であると考えられる。

準静的アプローチを IP 電話の例に適用する際には、IP 電話システムのシステムダウンに相当する、入力トラヒックの発散確率が重要であった。そこで、上記の例を $\varepsilon = 200$ とし、よりトラヒックが安定しにくい条件で比較を試みた。図 10 に $\varepsilon = 200$ とした場合のポテンシャル関数を示す。極小点はあるものの、ゆらぎによりわずかに入力トラヒックが大きくなれば、たちまち入力トラヒックが発散してしまうような条件になっている。このような条件において、準静的アプローチとモンテカルロシミュレーションによる入力量 $X(t)$ の時刻 $t = 50$ における分布を比較したものを図 11 に示す。モンテカルロシミュレーションでは、 $X(t)$ が μ を超えた時点で $X(t)$ が発散したとみなし、シミュレーションを終了していることに注意する。図より準静的アプローチとモンテカルロシミュレーションによる分布が一致し、発散確率についても一致していることが確認できる。発散の過程においては、ポテンシャル関数の極小点付近に分布する状態から徐々に発散していくため、図 9 に示した、開始直後の分布が極小点まで移動する過程におけるずれの影響をあまり受けない。

4. おわりに

本研究では、IP 電話システムなどにおいてユーザの心理的要因による再試行を考慮した入力トラヒックの挙動を記述する準静的アプローチの妥当性について検証した。記述対象となるトラヒックモデルと準静的アプローチによる記述の対応関係が明らかになり、入力トラヒックが再試行トラヒックによって徐々に発散していく過程において、準静的アプローチによる結果と従来方法であるモンテカルロシミュレーションによる結果が一致することを確認した。

謝 辞

本研究は科研費基盤研究 (B) 21300027 および NICT 委託研

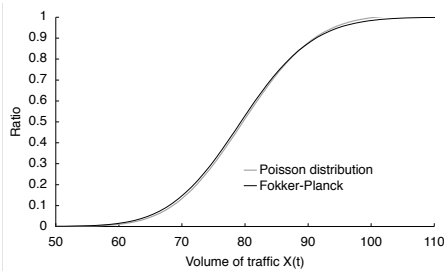


図 6 準静的アプローチによる M/M/1 の入力量分布とポアソン分布

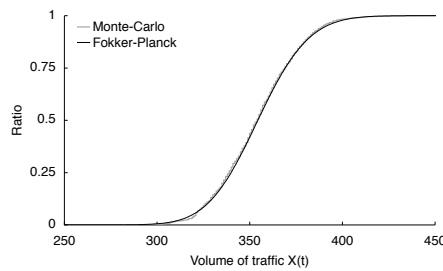


図 7 再試行を伴う M/M/1 の入力量分布 ($\varepsilon = 100, t = 20$)

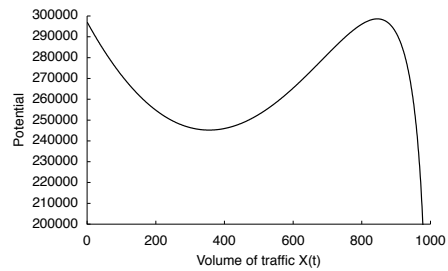


図 8 再試行を伴う M/M/1 のポテンシャル関数 ($\varepsilon = 100$)

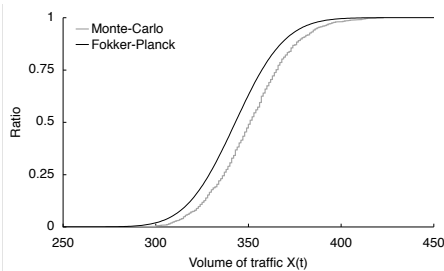


図 9 再試行を伴う M/M/1 の入力量分布 ($\varepsilon = 100, t = 2$)

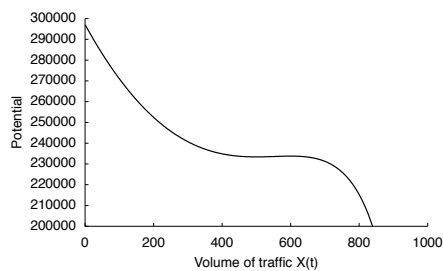


図 10 再試行を伴う M/M/1 のポテンシャル関数 ($\varepsilon = 200$)

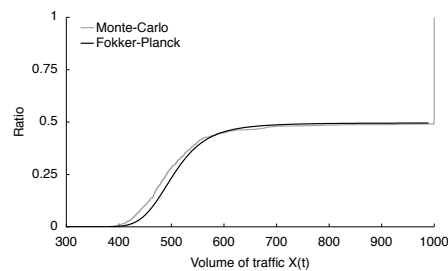


図 11 再試行を伴う M/M/1 の入力量の分布 ($\varepsilon = 200$)

究「新世代ネットワーク技術戦略の実現に向けた萌芽的研究」より研究費の援助を受けて実施した。

文 献

- [1] G.I. Falin and J.G.C. Templeton, Retrial queues, Chapman and Hall, 1997.
- [2] B. Braden, L. Zhang, S. Berson, S. Herzog, and S. Jamin, "Resource ReSerVation Protocol (RSVP) – Version 1 Functional Specification," RFC2205, 1997.
- [3] M. Aida, C. Takano, M. Murata, and M. Imase, "A proposal of quasi-static approach for analyzing the stability of IP telephony systems," In Proceedings of International Conference on Networking (ICN 2008), pp.363–370, April 2008.
- [4] J. Nielsen, Response Times : The 3 Important Limits, ch. 5, Academic Press, 1993.
- [5] R.W. Wolff, "Poisson arrivals see time averages," Operations Research, vol.30, no.2, pp.223–231, 1982.
- [6] J.D.C. Little, "A proof of the queuing formula: $L = \lambda W$," Operations Research, vol.9, no.3, pp.383–387, 1961.
- [7] M. Aida, C. Takano, M. Murata, and M. Imase, "A study of control plane stability with retry traffic : comparison of hard- and soft-state protocols," IEICE Transactions on Communications, vol.91, no.2, pp.437–445, 2008.

付 録

1. 過去の到着量の平均と分散の証明

$(t - T, t]$ 内での到着量が $X(t)$ であったときの $U(t - T, dt)$ の期待値と分散を導出する。

Proof. 今、 $A = U(t - T, dt)$, $B = U(t - T + dt, T - dt)$ とすると、 $A + B = U(t - T, T) = X(t)$ であるという条件下における A の条件付き期待値は、

$$\begin{aligned} E[A|A + B = X] &= \sum_{a=0}^X a \frac{\Pr(A = a) \Pr(B = X - a)}{\Pr(A + B = X)} \\ &= \sum_{a=0}^X a \frac{e^{-\lambda_k dt} (\lambda_k dt)^a \cdot e^{-\lambda_k (T - dt)} (\lambda_k (T - dt))^{X-a} \cdot X!}{a! \cdot (X - a)! \cdot e^{-\lambda_k T} (\lambda_k T)^X} \\ &= \frac{X!}{T^X} \sum_{a=1}^X \frac{1}{(a-1)!(X-a)!} (dt)^a (T - dt)^{X-a} \\ &= \frac{X}{T^X} dt \sum_{a=1}^X {}_{X-1}C_{a-1} \cdot (dt)^{a-1} (T - dt)^{(X-1)-(a-1)} \\ &= \frac{X}{T^X} dt \{dt + (T - dt)\}^{X-1} = \frac{X}{T} dt \end{aligned}$$

同様に 2 次の階乗モーメントは、

$$E[A(A-1)|A + B = X] = \frac{X(X-1)}{T^2} (dt)^2$$

となる。よって、2 次モーメントは、

$$E[A^2|A + B = X] = \frac{X(X-1)}{T^2} (dt)^2 + \frac{X}{T} dt$$

よって、 A の条件付き分散は以下のように近似できる。

$$\text{Var}[A|A + B = X] = \frac{X}{T} dt - \frac{X}{T^2} (dt)^2 \simeq \frac{X}{T} dt$$

□