多次元空間における最小包含円のアルゴリズムに関する研究

A Study on an Algorithm of Smallest Enclosing Circle in Multidimensional Space

佐武 拓斗 渡部 康平 中川 健治

Takuto Sabu Kohei Watabe Kenji Nakagawa

長岡技術科学大学 大学院 工学科研究科

Graduate School of Engineering, Nagaoka University of Technology

1 まえがき

計算幾何学とは，コンピュータを用いて，幾何学問題を解くための様々なアルゴリズムを研究する学問である．計算幾何学の問題の中には最小包含円を求める問題があり，基地局の設置問題に対して利用される．しかしながら，3 次元以上に対応したアルゴリズムはほぼない．最小包含円はユークリッド距離を Kullback-Leibler(KL) 情報量に置き換えることで，通信路容量を求めることができる [1]．通信路容量に応用するためには，多次元に対応したアルゴリズムが必要となる．そこで，新たな多次元に対応する最小包含円のアルゴリズムを提案する．提案したアルゴリズムの妥当性を数学的に証明することは困難である．本稿では，提案したアルゴリズムで様々な問題を解き，妥当性の調査に関して報告する．

2 提案法について

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の有限個の点 $P_1,\ldots,P_m$ から最小包含円を求めるには，$P_1,\ldots,P_m$ の中から最小包含円を構成する 2 点，もしくは 3 点を選ぶ．そこから，最小包含円の中心点を求める．中心点は各座標点からの等距離点である．よって，等距離点を求めればよい．しかしながら，等距離点が必ずしも，最小包含円の中心点でない場合がある．簡単な例として，3 点が一直線上にある場合を図 1 に示す．

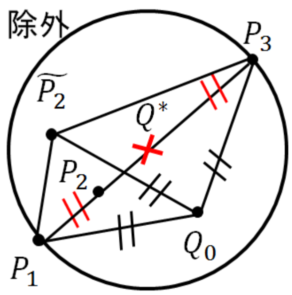

図 1 P_1，P_2，P_3 が一直線上にある場合

この場合は P_1 と P_3 の等距離点 Q^* が求める中心となるが，P_2 が P_1 と P_3 の一直線上にあるため，等距離点から中心を求めることはできない．そこで，提案法では，P_2 の次元を上げ，別方向に微小 ϵ 分だけずらす．ずらした座標点を $\tilde{P}_2$ とし，等距離点 Q_0 を求める．次に，Q_0 が辺 P_1P_3 に関して $\tilde{P}_2$ と反対側にあることを確認して P_2 を除外し，等距距離点 Q^* を求める．P_2 をずらしたことで，問題自体が変化してしまうが，ϵ が微小であれば元の問題とほぼ変わらない．

提案法の処理手順は，まず次元を上げ，別方向に ϵ ずらす．次に等距離点を求め，最小包含円を構成する上で必要とならない点を除外する．除外するには各点に対する重心座標 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ を求める．その中で，負の値があった場合，負の値の中から最小となる点を除外する．$\boldsymbol{\lambda}$ に負の要素がなくなるまで，この手順を繰り返す．

3 妥当性の調査実験及び考察

妥当性の評価を行うために，m と n の値を任意に変更させ，-1000 以上 1000 以下の整数を座標成分とする m 点をランダムに生成した場合に正しい答えが導出されるかどうか確認を行った．パターン数は 1 万とし，ϵ の値は 0.01 とした．その結果を表 1 に示す．

表 1 提案法の正答率

m \ n	2	3	10	20
3	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
4	97.6%	99.7%	100.0%	100.0%
5	96.3%	95.0%	100.0%	100.0%
8	94.4%	85.3%	99.5%	100.0%
10	93.9%	82.6%	98.5%	100.0%

表 1 をみると，点の個数である m が増えるにつれて正答率が減少することがわかる．だが，次元 n が増加するにつれて正答率は上がる．$n = 20$ の際には 100.0%の正答率となった．$n = 20$ 以外では 100.0%の結果にならなかった．その原因を調査した結果，問題によって，本来除外されてはならない点が除外されることにより，正しい解が得られないことが判明した．しかしながら，この手法は次元が大きければ，正答率が高いため，多次元に対しては有効であると考える．n が十分に大きいとした際の従来法の計算量は $m!$ となる．また，このアルゴリズムの計算量は $O(m^4)$ となるため，従来法より計算量は少ない．完成した場合には，多次元に対して非常に有効な手法になると考える．

4 まとめと今後の展望

本稿では提案法に対して次元が大きくなれば，正答率が上がるため，多次元に対して非常に有効な手法になり得ると述べた．今後はこのアルゴリズムを完成させる予定である．

参考文献

[1] 中川健治，渡部康平，“通信路容量を達成する入力シンボルについての一考察”, 第 37 回 情報理論とその応用シンポジウム，富山，2014.