

通信路容量を達成する出力分布の射影アルゴリズムによる探索について

On the Search by the Projection Algorithm for the Output Distribution that Achieves the Channel Capacity

中川 健治*
Kenji Nakagawa

渡部 康平*
Kohei Watabe

佐武 拓斗*
Takuto Sabu

Abstract— We consider the search algorithm for the output distribution that achieves the channel capacity of a discrete memoryless channel. This algorithm is the iterated projections of an output distribution onto affine subspaces in the set of the output distributions. The problem of the channel capacity has a similar geometric structure as that of the smallest enclosing circle for finite number of points in the Euclidean space. The metric in the Euclidean space is the Euclidean distance and the metric in the space of the output distributions is the Kullback-Leibler divergence. Then, we first consider the smallest enclosing circle in the Euclidean space and develop an algorithm to find the center of the smallest enclosing circle. Based on the investigation, we will apply the obtained algorithm to the problem of the channel capacity.

Keywords— channel capacity, discrete memoryless channel, smallest enclosing circle, information geometry, projection algorithm

1 はじめに

離散的無記憶通信路の通信路容量 C は相互情報量の最大値として定義される。 C はまた、Kullback-Leibler (KL) 情報量に関する min max 問題の解としても定式化される [5],[8]。通信路容量に関する min max 問題における KL 情報量をユークリッド距離に置き換えると、ユークリッド空間における類似の問題が得られる。それは、有限点集合に対する最小包含円の問題である。本論文では、ユークリッド空間における最小包含円問題を幾何的に考察し、ユークリッド距離に関する min max 問題の解を計算するアルゴリズムを開発する。そして得られたアルゴリズムを通信路容量に関する min max 問題に適用して、通信路容量を達成する出力分布を計算するアルゴリズムを作る。このようなアプローチをとる理由は、ユークリッド幾何は我々にとってなじみがある幾何なので、新しい幾何的なアルゴリズムを作りやすいからである。

通信路容量の問題は出力分布に関する最適化問題であり、考える空間はユークリッド空間ではなく確率分布全体がなす集合である。その集合上の幾何学は情報幾何である。ユークリッド幾何と情報幾何は甘利 [1] の α 幾何の立場から統一的に考えることができる。したがって、最小包含円問題の解法アルゴリズムを、幾何的な類似性を通して、通信路容量問題に適用できる。その際に重要なことは、最小包含円問題を考察するのにユークリッド幾何のどんな性質を使ってもよいということではなく、

通信路容量問題に適用可能な性質だけを使う必要がある、ということである。それが実現できれば、最小包含円問題で得られたアルゴリズムをほぼ自動的に通信路容量問題に移植することができる。本論文では、実際に両方の幾何に共通の性質として、距離、重心座標、内積、ピタゴラスの定理、アフライン部分空間への射影のみを使ってアルゴリズムを開発する。このアルゴリズムを本論文では「射影アルゴリズム」という。さらに、通信路行列の rank が m 未満のときには通信路容量の計算に組み合わせ的な困難が生じるが、本論文ではその困難さを緩和する新たなアルゴリズムを提案し、数値的な結果を示す。

1.1 通信路行列と通信路容量の定式化

X を入力情報源とし、 Y を出力情報源とする離散的無記憶通信路 $X \rightarrow Y$ を考える。入力アルファベットを $\{x_1, \dots, x_m\}$ とし、出力アルファベットを $\{y_1, \dots, y_n\}$ とする。 x_i を送信したときに y_j が受信される条件付き確率 P_{ij} を

$$P_{ij} = P(Y = y_j | X = x_i), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

とし、行ベクトル P_i を

$$P_i = (P_{i1}, \dots, P_{in}), i = 1, \dots, m$$

とする。通信路行列 Φ が

$$\Phi = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{m1} & \cdots & P_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

と定義される。

入力分布全体を $\bar{\Delta}^m = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) | \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$, 出力分布全体を $\bar{\Delta}^n = \{Q = (Q_1, \dots, Q_n) | Q_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n Q_j = 1\}$ と定義する。

$\lambda \in \bar{\Delta}^m$ を入力分布とするときの出力分布 $Q \in \bar{\Delta}^n$ が $Q = \lambda \Phi$, すなわち、 $Q_j = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_{ij}, j = 1, \dots, n$ と定義され、相互情報量が $I(\lambda, \Phi) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i P_{ij} \log P_{ij}/Q_j$ と定義される。このとき、通信路容量 C が

$$C = \max_{\lambda \in \bar{\Delta}^m} I(\lambda, \Phi) \quad (2)$$

と定義される。

$Q = (Q_j), Q' = (Q'_j) \in \bar{\Delta}^n$ に対して KL 情報量 $D(Q||Q')$ が $D(Q||Q') \equiv \sum_{j=1}^n Q_j \log Q_j/Q'_j$ と定義さ

* 長岡技術科学大学 〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1 Nagaoka University of Technology, Nagaoka, Niigata, 940-2188, Japan, E-mail: nakagawa@nagaokaut.ac.jp

れる [5]。\$C\$ は KL 情報量によって次のように表すこともできる [5]。

$$C = \min_{Q \in \Delta^n} \max_{1 \leq i \leq m} D(P_i \| Q) \quad (3)$$

通信路行列によっては (2) を達成する入力分布 \$\lambda\$ は必ずしも一意ではないが、(3) を達成する出力分布 \$Q\$ は一意である [5]。その一意性のために、(3) に基づいて、KL 情報量 \$D(P \| Q)\$ の幾何的性質を利用して通信路容量 \$C\$ を達成する出力分布 \$Q\$ を求める方法は考え易い。一方、得られた出力分布が実際に \$C\$ を達成することを証明するには (3) による幾何的考察よりも (2) の凸最適化問題による方が考え易い。実際、(2) に関して次の Kuhn-Tucker 条件が利用できる [6]。

定理 (通信路容量問題に関する Kuhn-Tucker 条件) 入力分布 \$\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \in \bar{\Delta}^m\$ が通信路容量 \$C\$ を達成するための必要十分条件は、ある値 \$C_0\$ が存在して、

$$D(P_i \| \lambda^* \Phi) \begin{cases} = C_0, & \text{for } i \text{ with } \lambda_i^* > 0 \\ \leq C_0, & \text{for } i \text{ with } \lambda_i^* = 0 \end{cases} \quad (4)$$

を満たすことである。このとき、\$C_0\$ は \$C\$ に等しい。

さて、(3) における \$D(P_i \| Q)\$ をユークリッド距離に置き換えると、\$\mathbb{R}^n\$ における類似の問題を考えることができる。すなわち、\$P_1, \dots, P_m \in \mathbb{R}^n\$ に対して、

$$\min_{Q \in \mathbb{R}^n} \max_{1 \leq i \leq m} d(P_i, Q) \quad (5)$$

を考える。ここで、\$d(P_i, Q)\$ は点 \$P_i\$ と \$Q\$ とのユークリッド距離を表す。この問題は点集合 \$\{P_1, \dots, P_m\}\$ に対する最小包含円の問題である。本研究の目的は、最小包含円問題を幾何的に考察して、そこから得られる最適解の探索アルゴリズムを、(3) と (5) の類似性を通して、通信路容量問題に応用し通信路容量を達成する分布の探索アルゴリズムを得ることである。

(3) と (5) は形式的に類似しているだけでなく、\$\Delta^n\$ と \$\mathbb{R}^n\$ は甘利の情報幾何 [1] の観点から統一的に議論できる幾何構造を持っている。そこで、両者に共通の性質だけを利用してアルゴリズムを開発し、それによって得られた結果を証明できれば、一方の結果から他方が自動的に得られる。実際、そのようになっていることが本論文で明らかになる。

そこで、まず、ユークリッド空間における最小包含円問題について考えよう。

2 ユークリッド空間における最小包含円問題

\$n\$ 次元ユークリッド空間 \$\mathbb{R}^n\$ 内の有限個の点 \$P_1, \dots, P_m\$ を考える。これらの点を内部または境界上に含む球のうち半径が最小のものを**最小包含円**といい、これを \$\Gamma(P_1, \dots, P_m)\$ と表す。最小包含円 \$\Gamma(P_1, \dots, P_m)\$ は (5) によって定式化される。(5) を達成する \$Q = Q^*\$ が \$\Gamma(P_1, \dots, P_m)\$ の中心であり、\$d^* = \max_{1 \leq i \leq m} d(P_i, Q^*)\$ がその半径である。

2.1 最小包含円についての解析

式 (5) の \$\min \max\$ 問題は距離 \$d(P_i, Q)\$ によって最小包含円問題を表現していて図形的に理解しやすく、したがって、幾何的な考察によって解法アルゴリズムを開発することができる。実際に本論文では (5) に基づいて新しいアルゴリズムを考えている。

しかしながら、アルゴリズムが正しいことを証明するのに (5) のような二重最適化問題は使いにくい。そこで、(5) と等価な単純最適化問題としての凸最適化問題 (convex programming) が以下のように与えられる。

\$P_1, \dots, P_m\$ の座標を

$$P_i = (P_{i1}, \dots, P_{in}) \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, m \quad (6)$$

とし、\$P_i\$ を並べてできる行列 \$\Phi\$ を

$$\Phi = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{m1} & \cdots & P_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (7)$$

とする。\$P_i\$ のノルムを \$\|P_i\| = (\sum_{j=1}^n P_{ij}^2)^{1/2}\$ として、ベクトル \$\mathbf{a}\$ を \$\mathbf{a} = (\|P_1\|^2, \dots, \|P_m\|^2)\$ と定義する。そこで、\$\lambda \in \mathbb{R}^m\$ に対して関数 \$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\$ を

$$f(\lambda) = \lambda^t \mathbf{a} - \lambda \Phi^t \Phi^t \lambda \quad (8)$$

と定義する。ここで、\$^t\$ はベクトルや行列の転置を表す。\$f\$ は微分可能で上に凸な関数である。このとき、凸最適化問題

$$\max_{\lambda \in \bar{\Delta}^m} f(\lambda) \quad (9)$$

は最小包含円問題 (5) と等価である [11]。(9) を達成する \$\lambda = \lambda^*\$ に対して \$Q^* \equiv \lambda^* \Phi\$ が最小包含円 \$\Gamma(P_1, \dots, P_m)\$ の中心であり、\$d^* \equiv \sqrt{f(\lambda^*)}\$ がその半径である [11]。

(9) に対して次の Kuhn-Tucker 条件が成り立つ [6],[11]。

定理 (最小包含円問題に関する Kuhn-Tucker 条件) \$\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \in \bar{\Delta}^m\$ が (9) を達成するための必要十分条件は、ある \$d_0\$ が存在して、

$$d(P_i, \lambda^* \Phi) \begin{cases} = d_0, & \text{for } i \text{ with } \lambda_i^* > 0 \\ \leq d_0, & \text{for } i \text{ with } \lambda_i^* = 0 \end{cases} \quad (10)$$

を満たすことである。このとき、\$Q^* = \lambda^* \Phi\$ が最小包含円 \$\Gamma(P_1, \dots, P_m)\$ の中心であり、\$d^* = d_0\$ がその半径に等しい。

2.2 \$P_1, \dots, P_m\$ からの等距離点

\$P_1, \dots, P_m\$ に対して、\$Q^0\$ が \$P_1, \dots, P_m\$ からの**等距離点**とは、\$d(P_1, Q^0) = \dots = d(P_m, Q^0)\$ であり、かつ \$Q^0\$ が \$P_1, \dots, P_m\$ で張られるアファイン部分空間 \$L_0\$ に含まれることである。

\$\mathbb{R}^n\$ の原点を \$O\$ とする。以下、記号の簡単化のために、\$\overrightarrow{OP_i}\$ を単に \$P_i\$ と書く。そして、実数 \$\lambda_1, \lambda_2\$ に対して、\$\lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OP_2}\$ を \$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2\$ と書く。したがって、例えば、\$P_2 - P_1\$ は \$\overrightarrow{P_1 P_2}\$ を意味する。場合に応じ

て、 P_i を \mathbb{R}^n の点と考えたり、座標 (P_{i1}, \dots, P_{in}) と考えたり、ベクトル $\vec{OP_i}$ またはその成分と考えたりする。

m 個の点 $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{R}^n$ が一般の位置にある、とは、ベクトルの集合 $\{P_2 - P_1, \dots, P_m - P_1\}$ が一次独立となることである。

2.3 \mathbb{R}^n における内積, Pythagoras の定理, 射影

最小包含円の中心を射影アルゴリズムで求めるために重要な、 \mathbb{R}^n における内積, Pythagoras の定理, 射影について述べる。

2.3.1 内積

\mathbb{R}^n の3点 $Q^1 = (Q_j^1)_{j=1, \dots, n}, Q^2 = (Q_j^2)_{j=1, \dots, n}, Q^3 = (Q_j^3)_{j=1, \dots, n}$ を考える。 Q^1, Q^2, Q^3 の Q^2 における内積 $(Q^1 - Q^2, Q^3 - Q^2)$ を

$$(Q^1 - Q^2, Q^3 - Q^2) = \sum_{j=1}^n (Q_j^1 - Q_j^2)(Q_j^3 - Q_j^2) \quad (11)$$

と定義する。

2.3.2 Pythagoras の定理

\mathbb{R}^n の3点 P, Q, R に対して、次のように Pythagoras の定理とその不等式版が成り立つ。

定理 1 (Pythagoras) $P, Q, R \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned} (P - Q, R - Q) &\geq 0 \\ \iff d^2(P, Q) + d^2(Q, R) &\geq d^2(P, R) \end{aligned} \quad (12)$$

2.3.3 射影

\mathbb{R}^n の点 Q^0 および \mathbb{R}^n の部分集合 L を考える。最小値 $\min_{Q \in L} d(Q, Q^0)$ を達成する点 $Q = Q^1$ を Q^0 の L への射影といい、 $Q^1 = \pi(Q^0|L)$ と表す。以下では、特に、部分集合 L として \mathbb{R}^n のアファイン部分空間だけを考える。

2.4 射影アルゴリズムによる Q^* の探索

[10] で考察したように、等距離点 Q^0 を考え、 Q^0 をあるアファイン部分空間へ射影する方法が有効である。この方法を射影アルゴリズムという。

与えられた点 P_1, \dots, P_m に対する最小包含円 $\Gamma = \Gamma(P_1, \dots, P_m)$ の中心を Q^* とし、半径を d^* とする。本節では、 P_1, \dots, P_m が一般の位置にあると仮定して、あるいくつかの状況で Q^*, d^* が射影アルゴリズムによって得られることを示す。

\mathbb{R}^n の点の位置を表すのに重心座標を利用する [10]。

2.5 状況 1 [毎回の射影で負の重心座標成分がちょうど 1 個ある場合]

まず、次の例題を考える。

例題 1 \mathbb{R}^3 の4点 $P_1 = (-10, 1, -3), P_2 = (-9, -2, 8), P_3 = (-8, 10, -5), P_4 = (4, -8, 8)$ を考える。 P_1, \dots, P_4 は一般の位置にある (2.2 節参照)。 P_1, \dots, P_4 からの等距離点は $Q^0 = (1.93, 4.59, 2.85)$ となり、その重心座標 λ^0 は

$$\lambda^0 = (-0.84, 0.04, 1.11, 0.69) \quad (13)$$

となる。 $\lambda_1^0 = -0.84 < 0$ に対する P_1 を除外して $L_1 = L(P_2, P_3, P_4)$ への Q^0 の射影 $Q^1 = \pi(Q^0|L_1)$ を計算する。 $Q^1 = (0.48, 1.45, -0.16)$ となりその重心座標 λ^1 は

$$\lambda^1 = (0, -0.31, 0.63, 0.68) \quad (14)$$

となる。 $\lambda_2^1 = -0.31 < 0$ に対する P_2 を除外して $L_2 = L(P_3, P_4)$ への Q^1 の射影 $Q^2 = \pi(Q^1|L_2)$ を計算する。 $Q^2 = (-2, 1, 1.5)$ となり、その重心座標 λ^2 は

$$\lambda^2 = (0, 0, 0.5, 0.5) \quad (15)$$

となる。このとき、 $d(P_1, Q^2) = 9.18, d(P_2, Q^2) = 10.01, d(P_3, Q^2) = d(P_4, Q^2) = 12.62$ となり、Kuhn-Tucker 条件 (10) によって Q^2 が最小包含円の中心であること、すなわち $Q^* = Q^2$ がわかる。そして、 $d^* = d(P_3, Q^2)$ である。

本節では、(13), (14) のように毎回の射影で負の重心座標成分がちょうど 1 個あり、(15) のように最後にすべての重心座標の成分が非負になる場合を「状況 1」として、最小包含円を求める射影アルゴリズムを考える。

次の結果が得られている [10]。

定理 2 状況 1 において、最小包含円の中心 Q^* が射影アルゴリズムによって得られる。

2.6 状況 2 [$m = 2, 3, 4$ の場合]

さて、次に \mathbb{R}^n において一般の位置にある m 個の点 P_1, \dots, P_m に対する最小包含円 $\Gamma = \Gamma(P_1, \dots, P_m)$ の中心 Q^* と半径 d^* を射影アルゴリズムによって計算する。目標はすべての m に対して計算するアルゴリズムを見い出すことであるが、現時点では以下のように $m = 2, 3, 4$ の場合だけ解決できている。

2.6.1 $m = 2$ の場合

\mathbb{R}^n における異なる 2 点 P_1, P_2 に対する最小包含円 $\Gamma = \Gamma(P_1, P_2)$ について考える。この場合、線分 P_1P_2 の中点を Q^0 とすると、最小包含円 Γ の中心は $Q^* = Q^0$ であり半径は $d^* = d(P_1, Q^0)$ である [10]。

2.6.2 $m = 3$ の場合

\mathbb{R}^n において一般の位置にある 3 点 P_1, P_2, P_3 に対する最小包含円 $\Gamma = \Gamma(P_1, P_2, P_3)$ について考える。 $L_0 = L(P_1, P_2, P_3)$ を P_1, P_2, P_3 で張られるアファイン部分空間とする。 $Q^0 \in L_0$ を P_1, P_2, P_3 からの等距離点とする。 Q^0 の P_1, P_2, P_3 に関する重心座標を $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0)$ とする。

λ^0 の各成分の符号に基づいて、一般性を失うことなく、以下の場合分けをすることができる。

Case 1: $\lambda_1^0 \geq 0, \lambda_2^0 \geq 0, \lambda_3^0 \geq 0$

Case 2: $\lambda_1^0 < 0, \lambda_2^0 \geq 0, \lambda_3^0 \geq 0$

それぞれの Case について、最小包含円 Γ の中心 Q^* と半径 d^* が射影アルゴリズムによって得られる [10]。

2.6.3 $m = 4$ の場合

\mathbb{R}^n において一般の位置にある 4 点 P_1, P_2, P_3, P_4 に対する最小包含円 $\Gamma = \Gamma(P_1, P_2, P_3, P_4)$ の中心 Q^* と半径 d^* を求める。 $L_0 = L(P_1, \dots, P_4)$ を P_1, \dots, P_4 で張られるアファイン部分空間とし、 $Q^0 \in L_0$ を P_1, \dots, P_4 からの等距離点とする。 Q^0 の P_1, \dots, P_4 に関する重心座標を $\lambda^0 = (\lambda_i^0)_{i=1, \dots, 4}$ とする。一般性を失うことなく、以下の場合分けをすることができる。

Case 1: $\lambda_1^0 \geq 0, \lambda_2^0 \geq 0, \lambda_3^0 \geq 0, \lambda_4^0 \geq 0$

Case 2: $\lambda_1^0 < 0, \lambda_2^0 \geq 0, \lambda_3^0 \geq 0, \lambda_4^0 \geq 0$

Case 3: $\lambda_1^0 < 0, \lambda_2^0 < 0, \lambda_3^0 \geq 0, \lambda_4^0 \geq 0$

それぞれの Case について、最小包含円 Γ の中心 Q^* と半径 d^* が射影アルゴリズムによって得られる [10]。

3 通信路容量の問題

我々は、第 2 章において最小包含円問題に関するいくつかの定理をユークリッド幾何を利用して導いた。特に、ユークリッド空間における距離、内積、Pythagoras の定理、射影を利用して、射影アルゴリズムによって最小包含円の中心 Q^* を探索する方法を得た。通信路容量の問題は (3) と (5) との類似性に基づいて、ユークリッド空間における最小包含円の問題と類似の幾何構造を持つ。本章では、第 2 章の結果に基づいて、通信路容量の問題を幾何的に考察して通信路容量を達成する出力分布 Q^* を探索する射影アルゴリズムを開発する。

3.1 情報幾何

通信路容量の問題の基盤となる幾何は、ユークリッド幾何ではなく「情報幾何」である [1]。ユークリッド幾何と情報幾何の異なる点は、ユークリッド幾何では 1 つの座標系を用いるのに対して、情報幾何では互いに双対な 2 つの座標系を用いることである。情報幾何は、実数 α によって α 幾何という統合的な幾何構造の族として考えられる。ユークリッド幾何は $\alpha = 0$ 、 Δ^n の幾何は $\alpha = \pm 1$ という特別な値に対応する幾何として捉えることができる。したがって、ユークリッド幾何も情報幾何の特別な場合と考えることもできる。 α 幾何では、 α divergence、内積、Pythagoras の定理、 α 射影が使える。最小包含円問題に関する定理の証明において利用したユークリッド幾何の性質が距離、内積、Pythagoras の定理、射影だけなので、そこで得られた定理やアルゴリズムは容易に通信路容量の問題に適用できると期待される。実際に、以下においてそれを示す。

3.2 Δ^n 上の幾何構造

全て正の確率からなる出力分布全体を $\Delta^n = \{Q = (Q_1, \dots, Q_n) | Q_j > 0, j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n Q_j = 1\}$ と定義する。 Δ^n 上に統計的な幾何構造が以下のように導入される [1]。

3.2.1 双対座標系

Δ^n 上に 2 つの座標系、言い換えると、 $Q = (Q_1, \dots, Q_n) \in \Delta^n$ を指定する 2 つの方法が与えられる。

η 座標: $\eta = (\eta_2, \dots, \eta_n), \eta_j = Q_j, j = 2, \dots, n,$

θ 座標: $\theta = (\theta_2, \dots, \theta_n), \theta_j = \log \frac{Q_j}{Q_1}, j = 2, \dots, n$

η 座標系と θ 座標系は互いに双対な座標系である [1]。

3.2.2 内積

3 点 $Q^1, Q^2, Q^3 \in \Delta^n$ を考える。 Q^1, Q^2, Q^3 の Q^2 における内積 $(Q^1 - Q^2, Q^3 - Q^2)$ が次のように定義される。 Q^1, Q^2 の η 座標を、それぞれ、 $\eta^1 = (\eta_j^1)_{j=2, \dots, n}, \eta^2 = (\eta_j^2)_{j=2, \dots, n}$ とし、 Q^2, Q^3 の θ 座標を、それぞれ、 $\theta^2 = (\theta_j^2)_{j=2, \dots, n}, \theta^3 = (\theta_j^3)_{j=2, \dots, n}$ とする。このとき、内積が

$$(Q^1 - Q^2, Q^3 - Q^2) \equiv \sum_{j=2}^n (\eta_j^1 - \eta_j^2)(\theta_j^3 - \theta_j^2) \quad (16)$$

と定義される。

3.2.3 アファイン部分空間

$P_1, \dots, P_m \in \Delta^n$ に対して、 P_1, \dots, P_m で張られるアファイン部分空間 $L(P_1, \dots, P_m) \subset \Delta^n$ が

$$L(P_1, \dots, P_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i \mid \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\} \cap \Delta^n \quad (17)$$

と定義される。 $L(P_1, \dots, P_m)$ は η 座標に関して平坦な Δ^n の部分多様体である [1]。

3.2.4 KL 情報量による射影

$L \subset \Delta^n$ を任意の部分集合とし、 $Q^0 \in \Delta^n$ とする。 $\min_{Q \in L} D(Q \| Q^0)$ を達成する $Q = Q^1$ を Q^0 の L への射影といい、 $Q^1 = \pi(Q^0 | L)$ と表す。以下では、 L としてアファイン部分空間だけを考える。

3.3 通信路容量を達成する出力分布について

式 (1) の通信路行列 Φ の行ベクトル $P_i, i = 1, \dots, m$ が Δ^n において一般の位置にある場合に通信路容量を達成する出力分布 Q^* および通信路容量 C を計算する。

3.4 状況 1 および状況 2 における最適点の探索

2.5 節、2.6 節と全く同様に、状況 1 および状況 2 を定義することができ、最適点、すなわち、通信路容量を達成する出力分布を探索するアルゴリズムが得られる [10]。

4 任意の点配置に対する最適点の探索

4.1 \mathbb{R}^n の点の次元を上げる方法

\mathbb{R}^n において与えられた (必ずしも一般の位置にあるとは限らない) m 個の点 P_1, \dots, P_m に対して、それらの次元を上げた点 $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} P_1(P_{11}, \dots, P_{1n}) &\rightarrow \tilde{P}_1(P_{11}, \dots, P_{1n}, \varepsilon, 0, \dots, 0) \\ P_2(P_{21}, \dots, P_{2n}) &\rightarrow \tilde{P}_2(P_{21}, \dots, P_{2n}, 0, \varepsilon, \dots, 0) \\ &\vdots \\ P_m(P_{m1}, \dots, P_{mn}) &\rightarrow \tilde{P}_m(P_{m1}, \dots, P_{mn}, 0, \dots, 0, \varepsilon) \end{aligned} \quad (18)$$

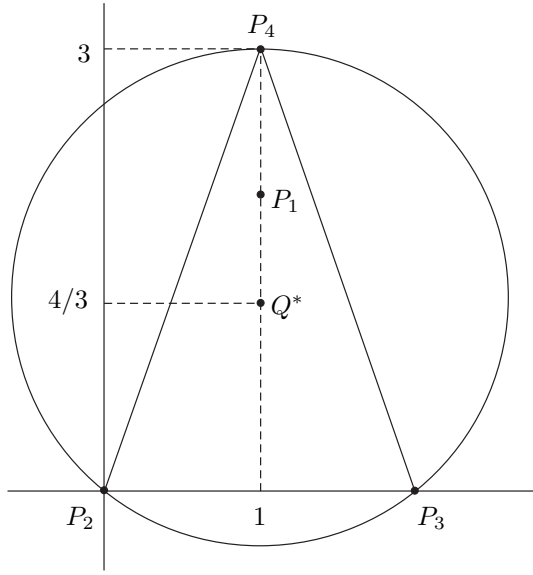


図 1: \mathbb{R}^2 上に与えられた 4 点の例

ただし, $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \neq 0$ で $|\varepsilon|$ は十分小さいとする。そこで,

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_1 \\ \vdots \\ \tilde{P}_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)} \quad (19)$$

とおくと, $\varepsilon \neq 0$ より $\text{rank } \tilde{\Phi} = m$ であるから $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m$ からの等距離点 $\tilde{Q}^0 \in L(\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ が存在する [10]。

そして, 射影アルゴリズム [10] によって $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m$ に対する最小包含円の中心 \tilde{Q}^* が得られたとすると, ε が十分小さい場合, \tilde{Q}^* は真に求めたい P_1, \dots, P_m に対する最小包含円の中心 Q^* に近い。そこで, \tilde{Q}^* の $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m$ に関する重心座標を $\tilde{\lambda}^*$ とし, $\tilde{\lambda}^*$ に含まれる ε を 0 としたものを $\tilde{\lambda}^*|_{\varepsilon=0}$ とすると, $Q^* = \tilde{\lambda}^*|_{\varepsilon=0} \Phi$ が元の最小包含円の中心となる可能性がある。以下に例を与える。

例題 2 \mathbb{R}^2 の 4 点 $P_1(1, 2), P_2(0, 0), P_3(2, 0), P_4(1, 3)$ を考える (図 1 参照)。これら 4 点は一般の位置にはない。これらに対して, その次元を上げた点 $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4 \in \mathbb{R}^6$ を以下のように定義する。

$$P_1(1, 2) \rightarrow \tilde{P}_1(1, 2, \varepsilon, 0, 0, 0)$$

$$P_2(0, 0) \rightarrow \tilde{P}_2(0, 0, 0, \varepsilon, 0, 0)$$

$$P_3(2, 0) \rightarrow \tilde{P}_3(2, 0, 0, 0, \varepsilon, 0)$$

$$P_4(1, 3) \rightarrow \tilde{P}_4(1, 3, 0, 0, 0, \varepsilon)$$

$\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4$ からの等距離点 \tilde{Q}^0 の $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4$ に関する重心座標 $\tilde{\lambda}^0 = (\tilde{\lambda}_i^0)_{i=1, \dots, 4}$ は

$$\tilde{\lambda}^0 = \left(\frac{-42 + 7\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4}{54\varepsilon^2 + 8\varepsilon^4}, \frac{7 + 15\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4}{54\varepsilon^2 + 8\varepsilon^4}, \frac{7 + 15\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4}{54\varepsilon^2 + 8\varepsilon^4}, \frac{28 + 17\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4}{54\varepsilon^2 + 8\varepsilon^4} \right)$$

となる。 $|\varepsilon|$ が十分小さいとき $\tilde{\lambda}_1^0 < 0$ となるので, \tilde{P}_1 を除外する。そして, 射影した点 $\tilde{Q}^1 = \pi(\tilde{Q}^0 | L(\tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4))$ の $\tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4$ に関する重心座標を $\tilde{\lambda}^1 = (\tilde{\lambda}_i^1)_{i=1, \dots, 4}$ として

$$\tilde{\lambda}^1 = \left(0, \frac{5 + \varepsilon^2}{18 + 3\varepsilon^2}, \frac{5 + \varepsilon^2}{18 + 3\varepsilon^2}, \frac{8 + \varepsilon^2}{18 + 3\varepsilon^2} \right) \quad (20)$$

を得る。 $\tilde{\lambda}_i^1 \geq 0, i = 1, \dots, 4$ であるから, Kuhn-Tucker 条件 (10) より $\tilde{\lambda}^1 = \tilde{\lambda}^*$ である。ここで $\varepsilon = 0$ とし, $\tilde{\lambda}^*|_{\varepsilon=0} = (0, 5/18, 5/18, 8/18)$ となり, $Q^* = \tilde{\lambda}^*|_{\varepsilon=0} \Phi = (1, 4/3)$ であるから, 正しく最小包含円 $\Gamma(P_1, \dots, P_4)$ の中心 Q^* が得られる (図 1 参照)。

4.2 通信路行列の次元を上げる方法

本節では, 通信路行列の行ベクトル P_1, \dots, P_m に対してそれらの次元を上げた行ベクトル $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m$ を以下のように定義する。

$$\tilde{P}_i = \left(\frac{P_{i1}}{2m+1}, \dots, \frac{P_{in}}{2m+1}, \overbrace{\frac{1}{2m+1}, \dots, \frac{1}{2m+1}}^{2i-2 \text{ 個}}, \underbrace{\frac{1}{2m+1}, \dots, \frac{1}{2m+1}}_{2m-2i \text{ 個}} \right) \quad (21)$$

ここで, ε は $|\varepsilon|$ が十分小さい実数で $\varepsilon \neq 0$ とする。

例題 3 通信路行列

$$\Phi = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 4/5 & 1/10 & 1/10 \\ 1/10 & 4/5 & 1/10 \end{pmatrix} \quad (22)$$

を考える (図 2 参照)。 Φ の各行の次元を上げて

$$\tilde{P}_1(2/5, 2/5, 1/5, 1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon, 1, 1, 1, 1, 1)/9$$

$$\tilde{P}_2(1/3, 1/3, 1/3, 1, 1, 1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon, 1, 1, 1)/9$$

$$\tilde{P}_3(4/5, 1/10, 1/10, 1, 1, 1, 1, 1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon, 1)/9$$

$$\tilde{P}_4(1/10, 4/5, 1/10, 1, 1, 1, 1, 1, 1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)/9$$

とする。 $\varepsilon = 0.05$ とし $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4$ からの等距離点 \tilde{Q}^0 の重心座標 $\tilde{\lambda}^0$ とし

$$\tilde{\lambda}^0 = (-19.00, 7.98, 6.01, 6.01) \quad (23)$$

を得る。 $\tilde{\lambda}_1^0 = -19.00 < 0$ なので \tilde{P}_1 を除外して, 射影 $\tilde{Q}^1 = \pi(\tilde{Q}^0 | L(\tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4))$ を考える。 \tilde{Q}^1 の重心座標 $\tilde{\lambda}^1$ とし

$$\tilde{\lambda}^1 = (0, -0.14, 0.57, 0.57) \quad (24)$$

を得る。 $\tilde{\lambda}_2^1 = -0.14 < 0$ なので, さらに \tilde{P}_2 を除外して $\tilde{Q}^2 = \pi(\tilde{Q}^1 | L(\tilde{P}_3, \tilde{P}_4))$ を考える。 \tilde{Q}^2 の重心座標 $\tilde{\lambda}^2$ とし

$$\tilde{\lambda}^2 = (0, 0, 1/2, 1/2) \quad (25)$$

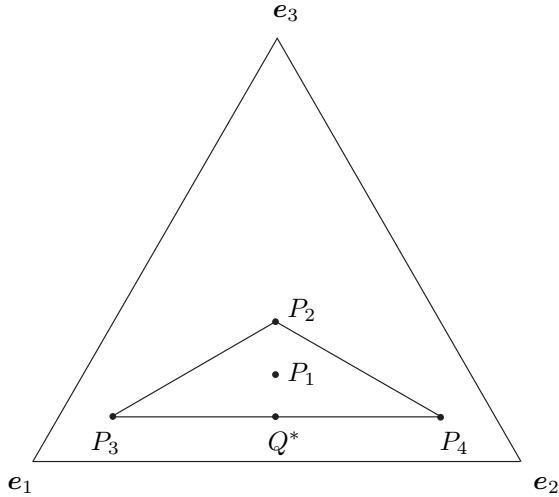


図 2: 入力シンボル数 $m = 4$, 出力シンボル数 $n = 3$ の例

となり, $\tilde{\lambda}^2 = \tilde{\lambda}^*$ を得る。したがって, $Q^* = \tilde{\lambda}^*|_{\epsilon=0} \Phi = (9/20, 9/20, 1/19)$ を得る (図 2 参照)。通信路容量 C は $C = D(P_3 \| Q^*) = 0.540 [\text{bit/symbol}]$ となる。

5 最小包含円を計算するヒューリスティックなアルゴリズム

最小包含円の中心を計算するために下記のヒューリスティックアルゴリズムを提案する。具体的に乱数を用いて発生させた多数の最小包含円問題に対して得られた解が正しい解である割合を示す。

5.1 ヒューリスティックアルゴリズム HA

- (HA1) 点 P_1, \dots, P_m に対して, それらの次元を上げた点を $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m$ とする。
- (HA2) $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_m$ からの等距離点 \tilde{Q}^0 の重心座標 $\tilde{\lambda}^0 = (\tilde{\lambda}_i^0)_{i=1, \dots, m}$ を計算する。
- (HA3) $\tilde{\lambda}_i^0 \geq 0, i = 1, \dots, m$ ならばアルゴリズムは終了し \tilde{Q}^0 を出力する。
- (HA4) $\tilde{\lambda}_i^0, i = 1, \dots, m$ に中に負のものがあれば, 最小のものに対応する点, 例えば \tilde{P}_1 とする, を除外して $\tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_m$ を残す。
- (HA5) $m - 1$ 個の点 $\tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_m$ に対して (HA1) から繰り返す。

上記のアルゴリズムに基づいてシミュレーションを実行した結果を次の表 1 に示す。シミュレーション方法は, -1000 以上 1000 以下の整数を一様ランダムに n 個発生させて \mathbb{R}^n の点の座標とする。それを m 回繰り返して, \mathbb{R}^n の m 個の点を得る。得られた m 個の点を P_1, \dots, P_m として, ヒューリスティックアルゴリズム HA で最小包含円の中心 Q^* を計算する。以上の計算を 1 セットとして, 表 1 に示す m, n のそれぞれの組に対して 10000 セット実行して, 正しく Q^* が得られた割合を示す。表 1 全体では 20 万セットが実行されている。

6 今後の課題

1. 本論文では点の個数が $m = 2, 3, 4$ の場合にのみ最適点 Q^* を計算するアルゴリズムを得たが, これを任意の m に対して拡張する。

表 1: ヒューリスティックアルゴリズムの成功率

$m \backslash n$	2	3	10	20
3	100%	100%	100%	100%
4	98%	99%	100%	100%
5	96%	95%	100%	100%
8	94%	85%	99%	100%
10	93%	83%	98%	100%

2. 本論文で利用した最小包含円問題と通信路容量問題の幾何学的な類似性を, レートひずみ関数の最適点を計算するアルゴリズムを開発する。
3. 通信路容量に関する有本アルゴリズムを, 逆に最小包含円問題に移植して, 最適点を探索するアルゴリズムを得る。

参考文献

- [1] S. Amari, *Differential-Geometrical Methods in Statistics*, Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, 1985.
- [2] Arimoto, S., “An algorithm for computing the capacity of arbitrary discrete memoryless channels,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-18, pp.14-20, 1972.
- [3] Blahut, R.E., “Computation of channel capacity and rate-distortion functions,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-18, pp.460-473, 1972.
- [4] Cheng, D., Hu, X and Martin, C., “On the Smallest Enclosing Balls,” *Communications in Information and Systems*, vol.6, no.2, pp.137-160, 2006.
- [5] Csiszár, I. and Körner, J., *Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems*, Academic Press, Orlando, 1982.
- [6] Gallager, G., *Information Theory and Reliable Communication*, Wiley, New York, 1968.
- [7] Muroga, S., “On the capacity of a discrete channel. I,” *J. Phys. Soc. Japan*, vol.8, pp.484-494, 1953.
- [8] Nakagawa, K. and Kanaya, F., “A New Geometric Capacity Characterization of a Discrete Memoryless Channel,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.34, no.2, pp.318-321, 1988.
- [9] 中川健治, 渡部康平, “通信路容量を達成する入力シンボルについての一考察,” *SITA2014 予稿集*, pp.530-535, 2014.
- [10] 中川健治, 渡部康平, 佐武拓斗, “通信路容量を達成する出力分布の射影アルゴリズムによる探索について,” *第9回シャノン理論ワークショップ (STW2015) 予稿集*, 2015.
- [11] Schönherr, S., “Quadratic Programming in Geometric Optimization: Theory, Implementation, and Applications,” *Dissertation of Swiss Federal Institute of Technology*, <http://www.inf.ethz.ch/personal/emo/DoctThesisFiles/schoenherr02.pdf>
- [12] Strang, G., *Linear algebra and its applications*, Academic Press, New York, 1976.