

# Équilibrabilité

Antoine Dailly  
Instituto de Matemáticas, UNAM Juriquilla

Travaux effectués en collaboration avec  
Laura Eslava, Adriana Hansberg et Denae Ventura.



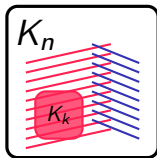
# Contexte : théorie de Ramsey

## Principe

Garantir des sous-structures ordonnées au sein de grandes structures chaotiques.

### Théorème de Ramsey (pour la 2-coloration) (1930)

Pour tout  $k$ , il existe un entier  $R(k)$  tel que, si  $n \geq R(k)$ , alors toute 2-coloration des arêtes de  $K_n$  contient un  $K_k$  monochromatique.



# Contexte : théorie des graphes extrémaux

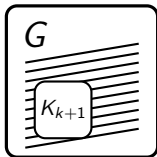
## Principe

Déterminer la densité minimale garantissant une certaine propriété, et les graphes les plus denses ne la vérifiant pas.

### Théorème de Turán (1941)

Si  $G$  d'ordre  $n$  contient strictement plus de  $\left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}$  arêtes, alors  $G$  contient un  $K_{k+1}$ .

Le graphe extrémal est le graphe  $k$ -parti complet équilibré d'ordre  $n$ .



## Notations pour la suite

- ▶ On considère des 2-colorations des arêtes de  $K_n$  :  
 $E(K_n) = R \sqcup B$ .
- ▶ On note  $\text{ex}(n, G)$  le nombre d'arêtes maximal dans un graphe d'ordre  $n$  sans  $G$  induit.

# Notations pour la suite

- ▶ On considère des 2-colorations des arêtes de  $K_n$  :  
 $E(K_n) = R \sqcup B$ .
- ▶ On note  $\text{ex}(n, G)$  le nombre d'arêtes maximal dans un graphe d'ordre  $n$  sans  $G$  induit.

Objectif : généraliser l'idée de Ramsey et chercher d'autres motifs inévitables que les copies monochromatiques.

### Définition

Une  $(r, b)$ -copie d'un graphe  $G(V, E)$  (avec  $r + b = |E|$ ) est une copie de  $G$  avec  $r$  arêtes dans  $R$  et  $b$  arêtes dans  $B$ .

### Définition

Une  $(r, b)$ -copie d'un graphe  $G(V, E)$  (avec  $r + b = |E|$ ) est une copie de  $G$  avec  $r$  arêtes dans  $R$  et  $b$  arêtes dans  $B$ .

$\Rightarrow$  Par Ramsey, quand  $n$  est suffisamment grand, on a toujours une  $(0, |E|)$ -copie ou une  $(|E|, 0)$ -copie de  $G$ .

### Définition

Une  $(r, b)$ -copie d'un graphe  $G(V, E)$  (avec  $r + b = |E|$ ) est une copie de  $G$  avec  $r$  arêtes dans  $R$  et  $b$  arêtes dans  $B$ .

⇒ Par Ramsey, quand  $n$  est suffisamment grand, on a toujours une  $(0, |E|)$ -copie ou une  $(|E|, 0)$ -copie de  $G$ .

On cherche à **garantir** l'existence d'une  $(r, b)$ -copie de  $G$   
(pour  $r > 0$  donné).



## Définition

Une  $(r, b)$ -copie d'un graphe  $G(V, E)$  (avec  $r + b = |E|$ ) est une copie de  $G$  avec  $r$  arêtes dans  $R$  et  $b$  arêtes dans  $B$ .

⇒ Par Ramsey, quand  $n$  est suffisamment grand, on a toujours une  $(0, |E|)$ -copie ou une  $(|E|, 0)$ -copie de  $G$ .

On cherche à **garantir** l'existence d'une  $(r, b)$ -copie de  $G$   
(pour  $r > 0$  donné).

⇒ Besoin d'une certaine **densité de chaque classe de couleur**.

# $r$ -tonalité

## Définition

Une  $(r, b)$ -copie d'un graphe  $G(V, E)$  (avec  $r + b = |E|$ ) est une copie de  $G$  avec  $r$  arêtes dans  $R$  et  $b$  arêtes dans  $B$ .

⇒ Par Ramsey, quand  $n$  est suffisamment grand, on a toujours une  $(0, |E|)$ -copie ou une  $(|E|, 0)$ -copie de  $G$ .

On cherche à **garantir** l'existence d'une  $(r, b)$ -copie de  $G$   
(pour  $r > 0$  donné).

⇒ Besoin d'une certaine **densité de chaque classe de couleur**.

## $r$ -tonalité

Si, pour tout  $n$  suffisamment grand, il existe un  $k(n, r)$  tel que toute 2-coloration  $R \sqcup B$  des arêtes de  $K_n$  avec  $|R|, |B| > k(n, r)$  contient une  $(r, b)$ -copie de  $G$ , alors  $G$  est  **$r$ -tonal**.

Équilibrabilité : quand  $r = \frac{|E|}{2}$

### Copie équilibrée

Une **copie équilibrée** de  $G(V, E)$  est une  $(r, b)$ -copie de  $G$  avec  $r \in \left\{ \left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil \right\}$ .

Équilibrabilité : quand  $r = \frac{|E|}{2}$

### Copie équilibrée

Une **copie équilibrée** de  $G(V, E)$  est une  $(r, b)$ -copie de  $G$  avec  $r \in \left\{ \left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil \right\}$ .

### Équilibrabilité (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Soit **bal**( $n, G$ ) le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration  $R \sqcup B$  des arêtes de  $K_n$  vérifiant  $|R|, |B| > \text{bal}(n, G)$  contient une copie équilibrée de  $G$ .

Équilibrabilité : quand  $r = \frac{|E|}{2}$

### Copie équilibrée

Une **copie équilibrée** de  $G(V, E)$  est une  $(r, b)$ -copie de  $G$  avec  $r \in \left\{ \left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil \right\}$ .

### Équilibrabilité (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Soit  $\text{bal}(n, G)$  le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration  $R \sqcup B$  des arêtes de  $K_n$  vérifiant  $|R|, |B| > \text{bal}(n, G)$  contient une copie équilibrée de  $G$ .

S'il existe un  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\text{bal}(n, G)$  existe, alors  $G$  est dit **équilibrable**.

Équilibrabilité : quand  $r = \frac{|E|}{2}$

### Copie équilibrée

Une **copie équilibrée** de  $G(V, E)$  est une  $(r, b)$ -copie de  $G$  avec  $r \in \left\{ \left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil \right\}$ .

### Équilibrabilité (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Soit  $\text{bal}(n, G)$  le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration  $R \sqcup B$  des arêtes de  $K_n$  vérifiant  $|R|, |B| > \text{bal}(n, G)$  contient une copie équilibrée de  $G$ .

S'il existe un  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\text{bal}(n, G)$  existe, alors  $G$  est dit **équilibrable** et  $\text{bal}(n, G)$  est appelé son **nombre d'équilibration**.

Équilibrabilité : quand  $r = \frac{|E|}{2}$

### Copie équilibrée

Une **copie équilibrée** de  $G(V, E)$  est une  $(r, b)$ -copie de  $G$  avec  $r \in \left\{ \left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil \right\}$ .

### Équilibrabilité (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Soit  $\text{bal}(n, G)$  le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration  $R \sqcup B$  des arêtes de  $K_n$  vérifiant  $|R|, |B| > \text{bal}(n, G)$  contient une copie équilibrée de  $G$ .

S'il existe un  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\text{bal}(n, G)$  existe, alors  $G$  est dit **équilibrable** et  $\text{bal}(n, G)$  est appelé son **nombre d'équilibrage**.

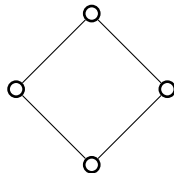
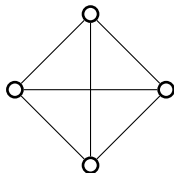
Problème type Ramsey

Problème type extrémal

# Caractérisation

**Théorème** (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable **si et seulement si** il a à la fois :



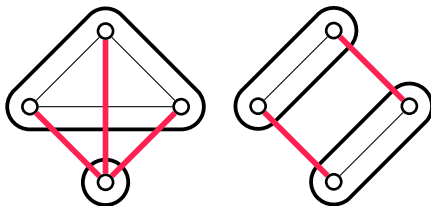


# Caractérisation

## Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable **si et seulement si** il a à la fois :

1. Une coupe traversée par la moitié de ses arêtes ;

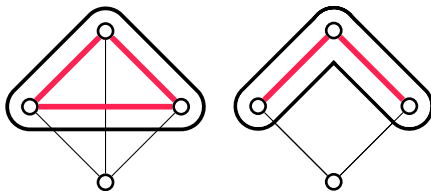


# Caractérisation

## Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable **si et seulement si** il a à la fois :

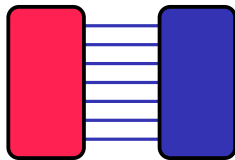
1. Une coupe traversée par la moitié de ses arêtes ;
2. Un sous-graphe induit contenant la moitié de ses arêtes.



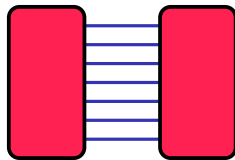
# Preuve de la caractérisation (1)

$G$  est équilibrable  $\Rightarrow$

Il doit s'insérer dans ces deux colorations spéciales de  $K_n$  :



type A

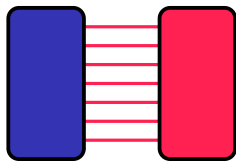


type B

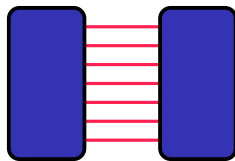
# Preuve de la caractérisation (1)

$G$  est équilibrable  $\Rightarrow$

Il doit s'insérer dans ces deux colorations spéciales de  $K_n$  :



type A

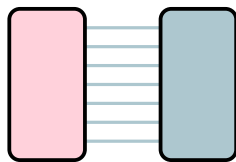


type B

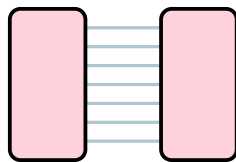
# Preuve de la caractérisation (1)

$G$  est équilibrable  $\Rightarrow$

Il doit s'insérer dans ces deux colorations spéciales de  $K_n$  :



type A

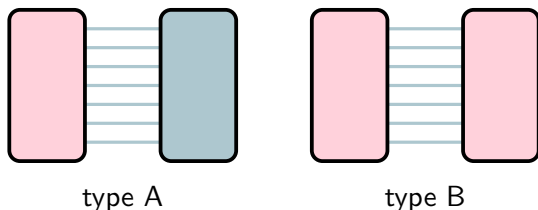


type B

# Preuve de la caractérisation (1)

$G$  est équilibrable  $\Rightarrow$

Il doit s'insérer dans ces deux colorations spéciales de  $K_n$  :



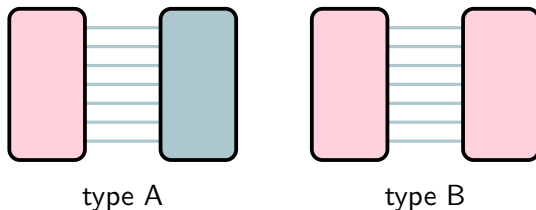
Ces deux colorations spéciales de  $K_n$  peuvent être équilibrées ( $|R| = |B| = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$ ) pour une infinité de valeurs de  $n$ .

# Preuve de la caractérisation (2)

## Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Pour tout  $t$ , il existe  $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$  tel que, si  $n$  est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de  $K_n$  avec  $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$  contient une copie de type A ou de type B de  $K_{2t}$ .

Également montré (mais avec une borne de  $\epsilon(\binom{n}{2})$ ) par Cutler et Montágh (2008) et Fox et Sudakov (2008).

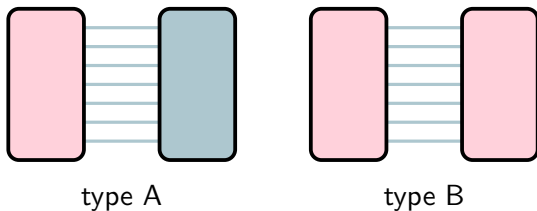


## Preuve de la caractérisation (2)

### Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Pour tout  $t$ , il existe  $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$  tel que, si  $n$  est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de  $K_n$  avec  $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$  contient une copie de type A ou de type B de  $K_{2t}$ .

Également montré (mais avec une borne de  $\epsilon(\binom{n}{2})$ ) par Cutler et Montágh (2008) et Fox et Sudakov (2008).



$\Rightarrow$  Donne une borne subquadratique pour  $\text{bal}(n, G)$



## Preuve de la caractérisation (3)

### **Théorème** (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Pour tout  $t$ , il existe  $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{m(t)}})$  tel que, si  $n$  est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de  $K_n$  avec  $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$  contient une copie de type A ou de type B de  $K_{2t}$ .

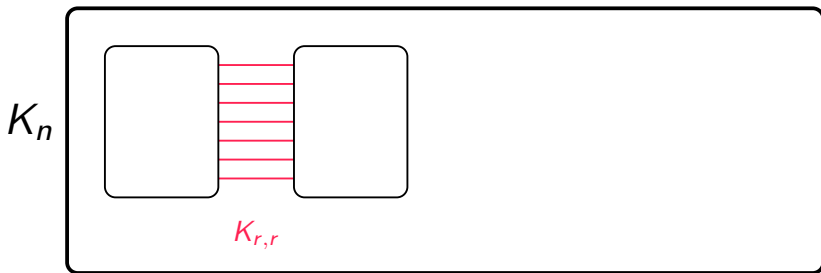
$K_n$



# Preuve de la caractérisation (3)

## Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

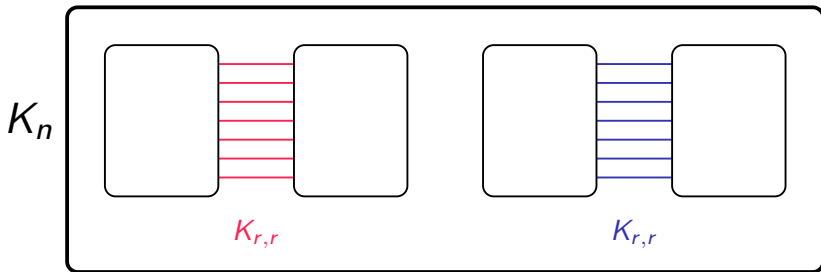
Pour tout  $t$ , il existe  $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$  tel que, si  $n$  est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de  $K_n$  avec  $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$  contient une copie de type A ou de type B de  $K_{2t}$ .



## Preuve de la caractérisation (3)

**Théorème** (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

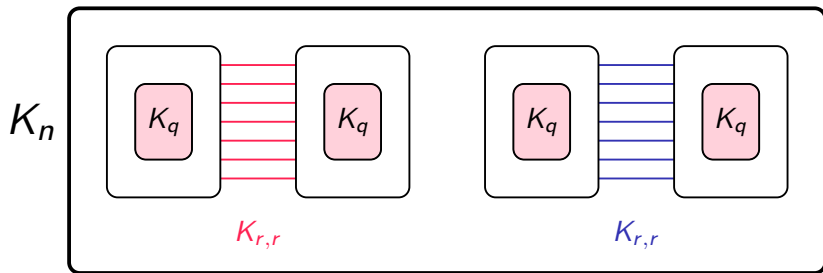
Pour tout  $t$ , il existe  $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$  tel que, si  $n$  est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de  $K_n$  avec  $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$  contient une copie de type A ou de type B de  $K_{2t}$ .



# Preuve de la caractérisation (3)

## Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

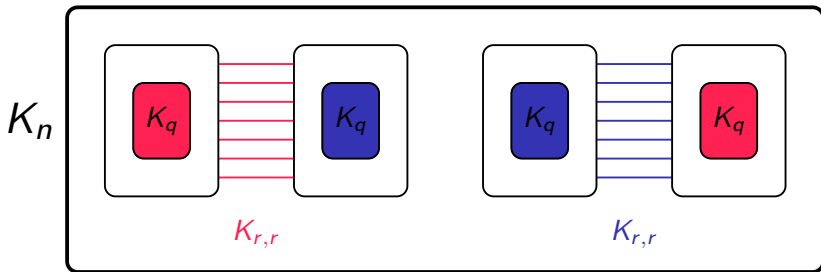
Pour tout  $t$ , il existe  $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$  tel que, si  $n$  est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de  $K_n$  avec  $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$  contient une copie de type A ou de type B de  $K_{2t}$ .



# Preuve de la caractérisation (3)

## Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

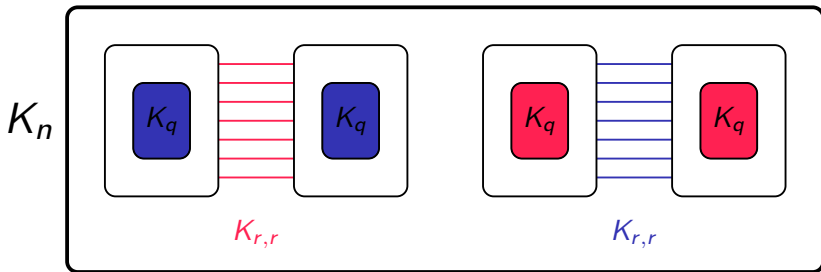
Pour tout  $t$ , il existe  $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$  tel que, si  $n$  est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de  $K_n$  avec  $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$  contient une copie de type A ou de type B de  $K_{2t}$ .



# Preuve de la caractérisation (3)

## Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

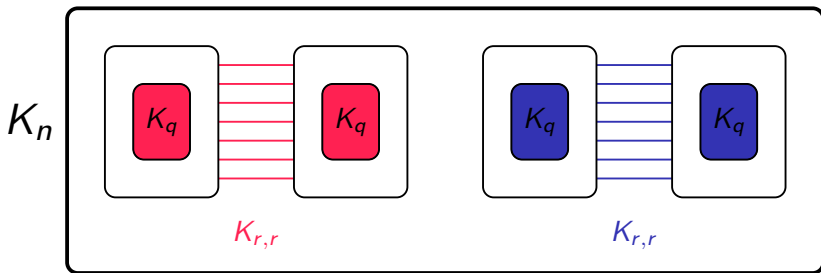
Pour tout  $t$ , il existe  $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$  tel que, si  $n$  est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de  $K_n$  avec  $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$  contient une copie de type A ou de type B de  $K_{2t}$ .



# Preuve de la caractérisation (3)

## Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

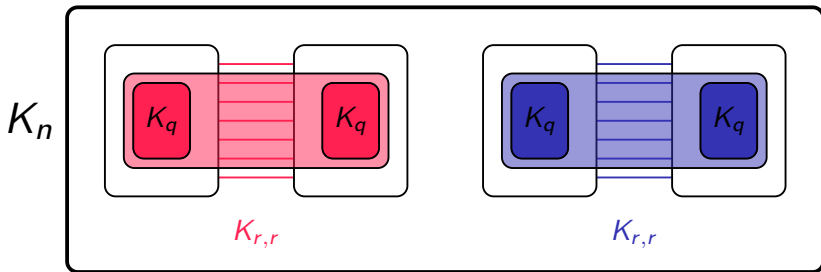
Pour tout  $t$ , il existe  $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$  tel que, si  $n$  est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de  $K_n$  avec  $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$  contient une copie de type A ou de type B de  $K_{2t}$ .



# Preuve de la caractérisation (3)

## Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Pour tout  $t$ , il existe  $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$  tel que, si  $n$  est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de  $K_n$  avec  $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$  contient une copie de type A ou de type B de  $K_{2t}$ .

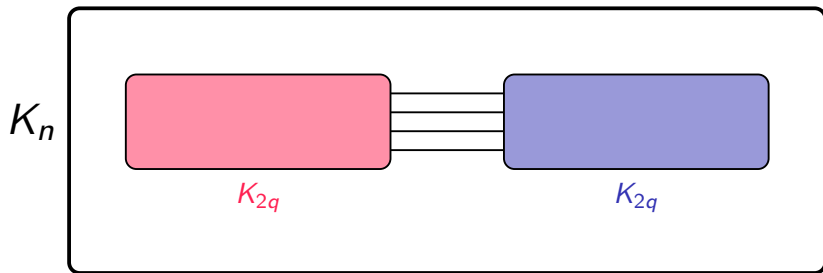




# Preuve de la caractérisation (3)

## Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

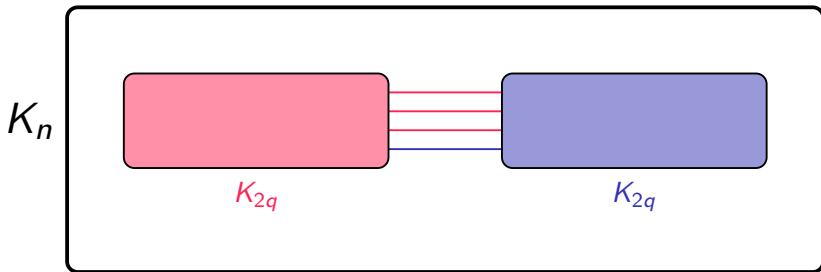
Pour tout  $t$ , il existe  $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$  tel que, si  $n$  est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de  $K_n$  avec  $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$  contient une copie de type A ou de type B de  $K_{2t}$ .



## Preuve de la caractérisation (3)

### Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

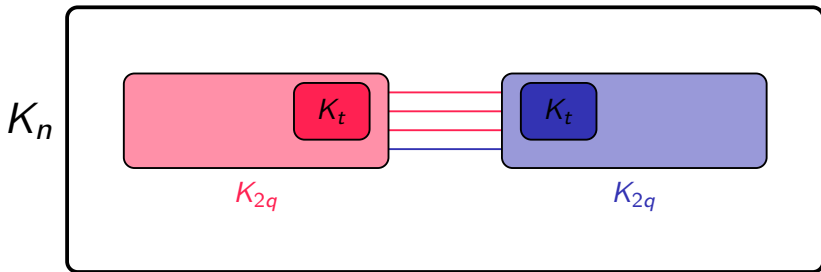
Pour tout  $t$ , il existe  $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$  tel que, si  $n$  est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de  $K_n$  avec  $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$  contient une copie de type A ou de type B de  $K_{2t}$ .



## Preuve de la caractérisation (3)

### **Théorème** (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Pour tout  $t$ , il existe  $\phi(n, t) \in \mathcal{O}(n^{2 - \frac{1}{m(t)}})$  tel que, si  $n$  est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de  $K_n$  avec  $|R|, |B| \geq \phi(n, t)$  contient une copie de type A ou de type B de  $K_{2t}$ .



## Résultats précédents

- ▶ Caro, Hansberg, Montejano (2019)
  - ▶  $\text{bal}(n, K_4) = n - 1$  ou  $n$  (selon la valeur de  $n \bmod 4$ )
  - ▶ Aucun autre graphe complet avec un nombre pair d'arêtes n'est équilibrable !

## Résultats précédents

- ▶ Caro, Hansberg, Montejano (2019)
  - ▶  $\text{bal}(n, K_4) = n - 1$  ou  $n$  (selon la valeur de  $n \bmod 4$ )
  - ▶ Aucun autre graphe complet avec un nombre pair d'arêtes n'est équilibrable !
- ▶ Caro, Hansberg, Montejano (2020)
  - ▶ Les arbres sont équilibrables  
Pour  $n \geq 4k$ ,  $\text{bal}(n, T_k) \leq (k-1)n$
  - ▶ Pour  $k$  pair et  $n \geq \max(3, \frac{k^2}{4} + 1)$ ,  
 $\text{bal}(n, K_{1,k}) = \text{bal}(n, K_{1,k+1}) = (\frac{k-2}{2})n - \frac{k^2}{8} + \frac{k}{4}$
  - ▶ Pour  $n \geq \frac{9}{32}k^2 + \frac{1}{4}k + 1$ ,  
 $\text{bal}(n, P_{4k}) = \text{bal}(n, P_{4k+1}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - \frac{1}{2})$   
 $\text{bal}(n, P_{4k-2}) = \text{bal}(n, P_{4k-1}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k)$   
⚠  $P_k$  désigne le chemin sur  $k$  arêtes (désolé 😊)

## Résultats précédents

- ▶ Caro, Hansberg, Montejano (2019)
  - ▶  $\text{bal}(n, K_4) = n - 1$  ou  $n$  (selon la valeur de  $n \bmod 4$ )
  - ▶ Aucun autre graphe complet avec un nombre pair d'arêtes n'est équilibrable !
- ▶ Caro, Hansberg, Montejano (2020)
  - ▶ Les arbres sont équilibrables  
Pour  $n \geq 4k$ ,  $\text{bal}(n, T_k) \leq (k-1)n$
  - ▶ Pour  $k$  pair et  $n \geq \max(3, \frac{k^2}{4} + 1)$ ,  
 $\text{bal}(n, K_{1,k}) = \text{bal}(n, K_{1,k+1}) = (\frac{k-2}{2})n - \frac{k^2}{8} + \frac{k}{4}$
  - ▶ Pour  $n \geq \frac{9}{32}k^2 + \frac{1}{4}k + 1$ ,  
 $\text{bal}(n, P_{4k}) = \text{bal}(n, P_{4k+1}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - \frac{1}{2})$   
 $\text{bal}(n, P_{4k-2}) = \text{bal}(n, P_{4k-1}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k)$   
⚠  $P_k$  désigne le chemin sur  $k$  arêtes (désolé ☹)
- ▶ Caro, Lauri, Zarb (2020)
  - ▶ Nombres d'équilibrage des graphes sur au plus 4 arêtes

## **Théorème** (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient  $k$  un entier strictement positif,  $n$  un entier tel que  $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$ , et  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ .

## Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient  $k$  un entier strictement positif,  $n$  un entier tel que  $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$ , et  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ .

►  $C_{4k+2}$  n'est pas équilibrable ;



## Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient  $k$  un entier strictement positif,  $n$  un entier tel que  $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$ , et  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ .

- ▶  $C_{4k+2}$  n'est pas équilibrable ;
- ▶  $C_{4k+\epsilon}$  est équilibrable
- ▶  $C_{4k}$  est équilibrable

## Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient  $k$  un entier strictement positif,  $n$  un entier tel que  $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$ , et  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ .

- ▶  $C_{4k+2}$  n'est pas équilibrable ;
- ▶  $C_{4k+\epsilon}$  est équilibrable, et  
 $\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)$  ;
- ▶  $C_{4k}$  est équilibrable

## Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient  $k$  un entier strictement positif,  $n$  un entier tel que  $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$ , et  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ .

- ▶  $C_{4k+2}$  n'est pas équilibrable ;
- ▶  $C_{4k+\epsilon}$  est équilibrable, et  $\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)$  ;
- ▶  $C_{4k}$  est équilibrable, et  $(k-1)n - (k-1)^2 \leq \text{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k$ .

## Cycles $C_{4k+2}$

### Proposition

Le cycle  $C_{4k+2}$  n'est pas équilibrable.

Preuve par contradiction

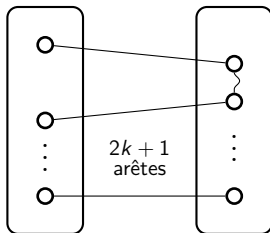
# Cycles $C_{4k+2}$

## Proposition

Le cycle  $C_{4k+2}$  n'est pas équilibrable.

## Preuve par contradiction

$C_{4k+2}$  a une coupe contenant la moitié de ses arêtes.



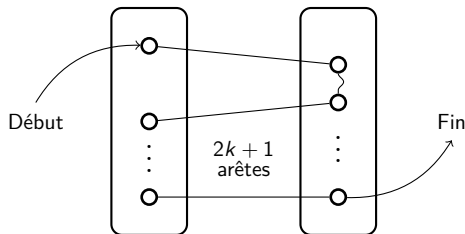
# Cycles $C_{4k+2}$

## Proposition

Le cycle  $C_{4k+2}$  n'est pas équilibrable.

## Preuve par contradiction

$C_{4k+2}$  a une coupe contenant la moitié de ses arêtes.



# Cycles impairs

## Proposition

Soient  $k$  un entier strictement positif,  $n$  un entier tel que  $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$ , et  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ .

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

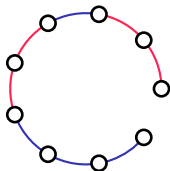
# Cycles impairs

## Proposition

Soient  $k$  un entier strictement positif,  $n$  un entier tel que  $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$ , et  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ .

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

Preuve (pour  $C_{4k+1}$ )



$P_{4k}$  équilibré  $\Rightarrow$   
 $2k$  arêtes de chaque couleur





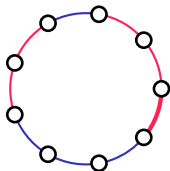
# Cycles impairs

## Proposition

Soient  $k$  un entier strictement positif,  $n$  un entier tel que  $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$ , et  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ .

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

Preuve (pour  $C_{4k+1}$ )



$P_{4k}$  équilibré  $\Rightarrow$   
 $2k$  arêtes de chaque couleur

On peut refermer le cycle  
qui sera équilibré

# Cycles impairs

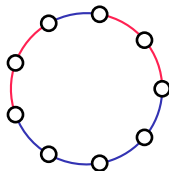
## Proposition

Soient  $k$  un entier strictement positif,  $n$  un entier tel que  $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$ , et  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ .

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

Preuve (pour  $C_{4k+1}$ )

$C_{4k+1}$  équilibré  $\Rightarrow$   
Une couleur avec  $2k+1$  arêtes



# Cycles impairs

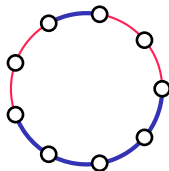
## Proposition

Soient  $k$  un entier strictement positif,  $n$  un entier tel que  $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$ , et  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ .

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

Preuve (pour  $C_{4k+1}$ )

$C_{4k+1}$  équilibré  $\Rightarrow$   
Une couleur avec  $2k+1$  arêtes



# Cycles impairs

## Proposition

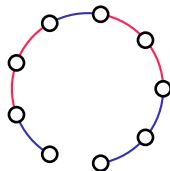
Soient  $k$  un entier strictement positif,  $n$  un entier tel que  $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$ , et  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ .

$$\begin{aligned}\text{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \text{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)\end{aligned}$$

Preuve (pour  $C_{4k+1}$ )

$C_{4k+1}$  équilibré  $\Rightarrow$   
Une couleur avec  $2k+1$  arêtes

En retirer une donne  
un  $P_{4k}$  équilibré



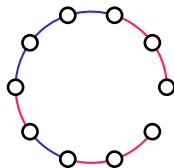
## Cycles $C_{4k}$

La preuve pour les cycles impairs ne fonctionne pas :

## Cycles $C_{4k}$

La preuve pour les cycles impairs ne fonctionne pas :

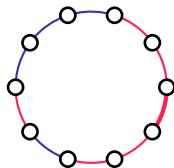
$P_{4k-1}$  équilibré



## Cycles $C_{4k}$

La preuve pour les cycles impairs ne fonctionne pas :

$P_{4k-1}$  équilibré  
 $\Rightarrow$  Cycle potentiellement  
non-équilibré

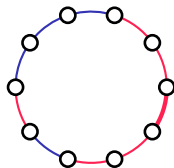




## Cycles $C_{4k}$

La preuve pour les cycles impairs ne fonctionne pas :

$P_{4k-1}$  équilibré  
 $\Rightarrow$  Cycle potentiellement  
non-équilibré



**Théorème** (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Pour  $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$ ,

$$(k-1)n - (k-1)^2 \leq \text{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k$$

## Cycles $C_{4k}$ : borne inférieure

### Proposition

Pour tout  $n \geq 4k$ ,  $\text{bal}(n, C_{4k}) \geq (k-1)n - (k-1)^2$ .

## Cycles $C_{4k}$ : borne inférieure

### Proposition

Pour tout  $n \geq 4k$ ,  $\text{bal}(n, C_{4k}) \geq (k-1)n - (k-1)^2$ .

### Preuve

On construit une 2-coloration  $R \sqcup B$  sans  $C_{4k}$  équilibré et telle que  $|B| \geq |R| = (k-1)n - (k-1)^2$ .

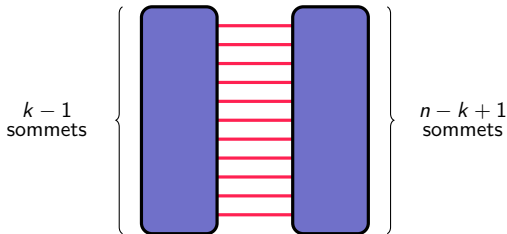
## Cycles $C_{4k}$ : borne inférieure

### Proposition

Pour tout  $n \geq 4k$ ,  $\text{bal}(n, C_{4k}) \geq (k-1)n - (k-1)^2$ .

### Preuve

On construit une 2-coloration  $R \sqcup B$  sans  $C_{4k}$  équilibré et telle que  $|B| \geq |R| = (k-1)n - (k-1)^2$ .



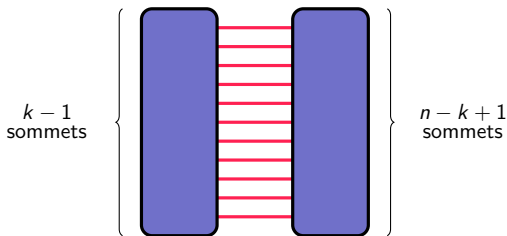
## Cycles $C_{4k}$ : borne inférieure

### Proposition

Pour tout  $n \geq 4k$ ,  $\text{bal}(n, C_{4k}) \geq (k-1)n - (k-1)^2$ .

### Preuve

On construit une 2-coloration  $R \sqcup B$  sans  $C_{4k}$  équilibré et telle que  $|B| \geq |R| = (k-1)n - (k-1)^2$ .



$\Rightarrow$  Un cycle ne peut avoir qu'au plus  $2k-2$  arêtes dans  $R$ .

## Cycles $C_{4k}$ : borne supérieure (1)

### Proposition

Soient  $k > 0$  et  $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$  :

$$\text{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k.$$

Preuve par contradiction

# Cycles $C_{4k}$ : borne supérieure (1)

## Proposition

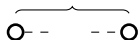
Soient  $k > 0$  et  $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$  :

$$\text{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k.$$

## Preuve par contradiction

$|R|, |B| > \text{bal}(n, P_{4k-2}) \Rightarrow$  Il y a un  $P_{4k-2}$  équilibré.

$4k - 1$  sommets



# Cycles $C_{4k}$ : borne supérieure (1)

## Proposition

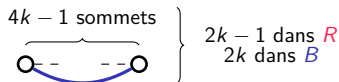
Soient  $k > 0$  et  $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$  :

$$\text{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k.$$

## Preuve par contradiction

$|R|, |B| > \text{bal}(n, P_{4k-2}) \Rightarrow$  Il y a un  $P_{4k-2}$  équilibré.

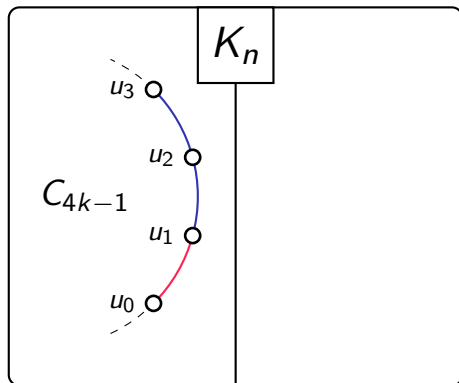
$\Rightarrow$  On le ferme avec (wlog) une  $B$





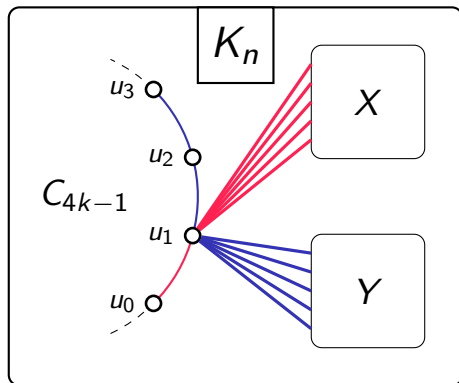
## Cycles $C_{4k}$ : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



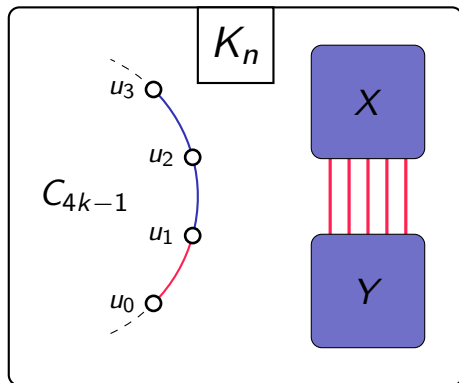
## Cycles $C_{4k}$ : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



# Cycles $C_{4k}$ : borne supérieure (2)

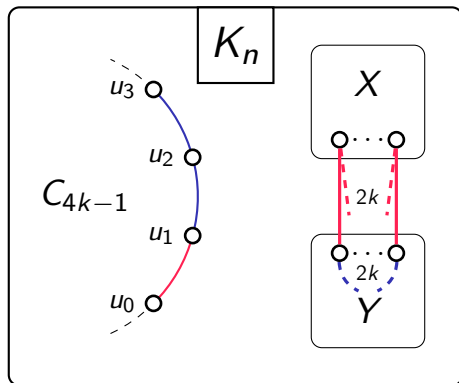
Preuve par contradiction (suite)



Des lemmes forcent les couleurs de  $E(X)$ ,  $E(Y)$  et  $E(X, Y)$ .

# Cycles $C_{4k}$ : borne supérieure (2)

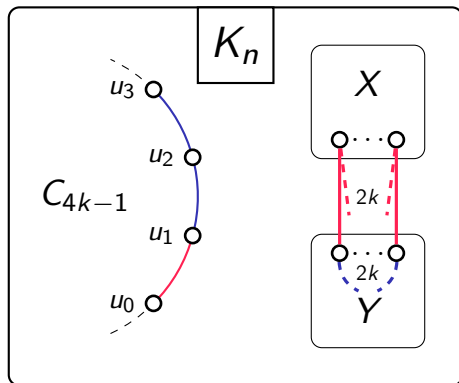
Preuve par contradiction (suite)



On ne peut pas avoir  $|X|, |Y| \geq k$

# Cycles $C_{4k}$ : borne supérieure (2)

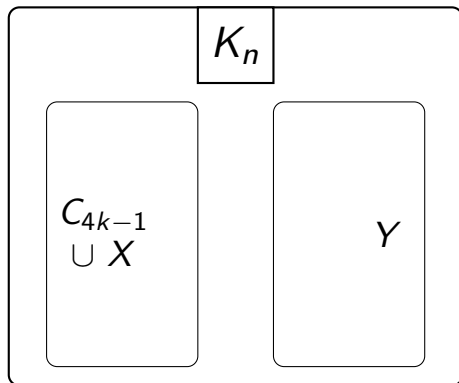
Preuve par contradiction (suite)



On ne peut pas avoir  $|X|, |Y| \geq k \Rightarrow$  wlog, supposons  $|X| < k$

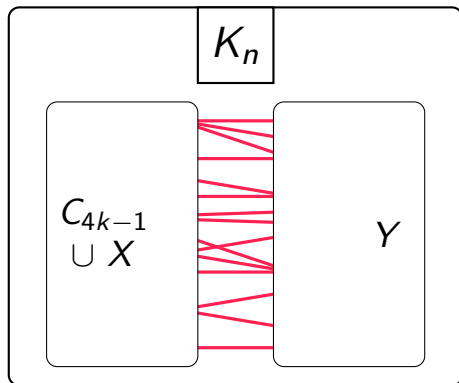
## Cycles $C_{4k}$ : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



## Cycles $C_{4k}$ : borne supérieure (2)

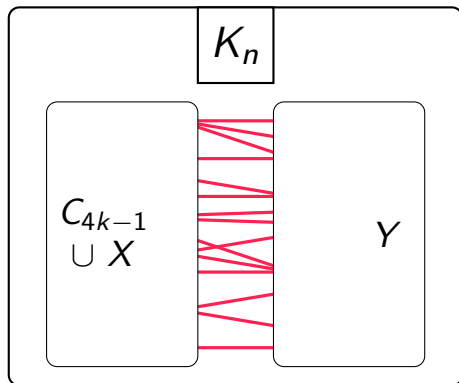
Preuve par contradiction (suite)



Considérons le graphe induit par  $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$ .

# Cycles $C_{4k}$ : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



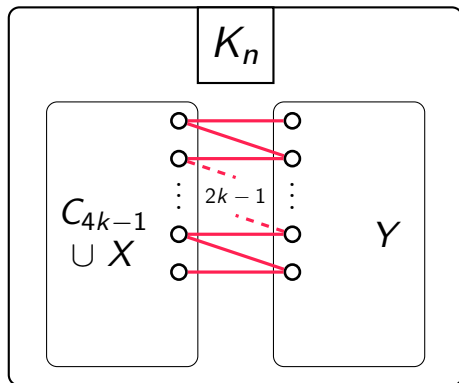
Considérons le graphe induit par  $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$ .

Il contient  $\geq (k-1)n$  arêtes ; or  $\text{ex}(n, P_{2k-1}) \leq (k-1)n$  [FS13]



# Cycles $C_{4k}$ : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)

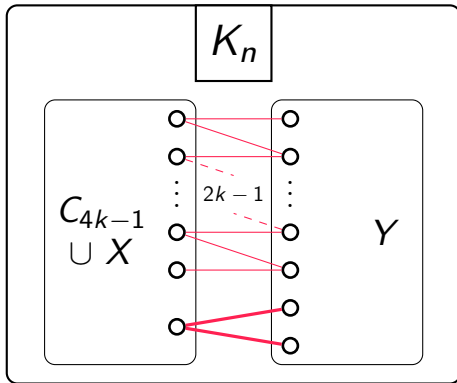


Considérons le graphe induit par  $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$ .

Il contient  $\geq (k-1)n$  arêtes; or  $\text{ex}(n, P_{2k-1}) \leq (k-1)n$  [FS13]  $\Rightarrow$  Il contient un  $P_{2k-1}$ .

# Cycles $C_{4k}$ : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



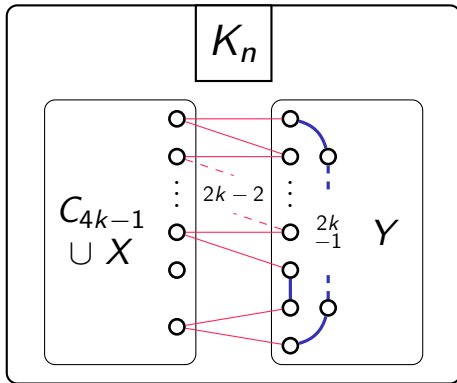
Considérons le graphe induit par  $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$ .

Il contient  $\geq (k-1)n$  arêtes; or  $\text{ex}(n, P_{2k-1}) \leq (k-1)n$  [FS13]  $\Rightarrow$  Il contient un  $P_{2k-1}$ .

Il reste suffisamment d'arêtes dans  $R$  pour avoir un  $K_{1,2}$ .

# Cycles $C_{4k}$ : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



Considérons le graphe induit par  $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$ .

Il contient  $\geq (k-1)n$  arêtes; or  $\text{ex}(n, P_{2k-1}) \leq (k-1)n$  [FS13]  $\Rightarrow$  Il contient un  $P_{2k-1}$ .

Il reste suffisamment d'arêtes dans  $R$  pour avoir un  $K_{1,2}$ .

On complète avec des arêtes dans  $Y$ , qui seront dans  $B$ , et on obtient un  $C_{4k}$  équilibré.

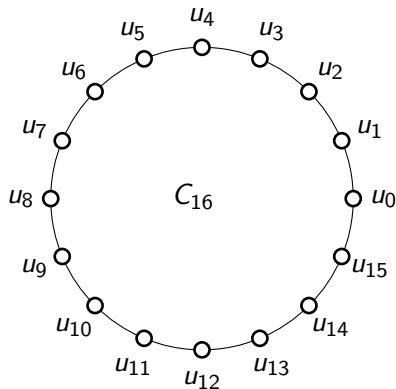
$\Rightarrow$  Contradiction

# Circulants $C_{k,l}$

# Circulants $C_{k,\ell}$

## Définition

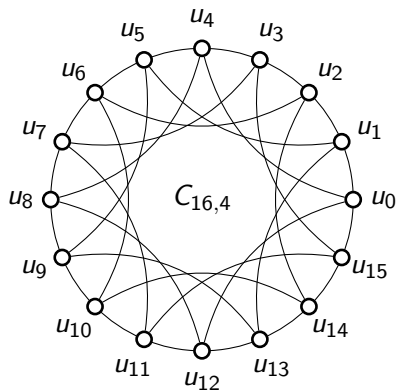
$C_{k,\ell}$  est un cycle  $C_k$



# Circulants $C_{k,\ell}$

## Définition

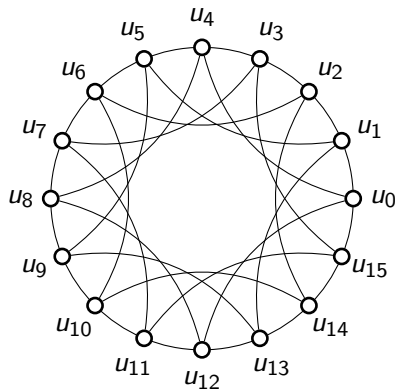
$C_{k,\ell}$  est un cycle  $C_k$  avec les cordes  $u_i u_{i+\ell}$ .



# Circulants $C_{k,\ell}$

## Définition

$C_{k,\ell}$  est un cycle  $C_k$  avec les cordes  $u_i u_{i+\ell}$ .



Contient les antiprismes et les échelles de Möbius.

# Circulants $C_{k,\ell}$

## **Théorème** (D., Hansberg, Ventura, 2021)

Soient  $k > 3$  et  $\ell \in \{2, \dots, k-2\}$ . Le graphe  $C_{k,\ell}$  est équilibrable si et seulement si  $k$  est pair et  $(k, \ell) \neq (6, 2)$ .



# Circulants $C_{k,\ell}$

## **Théorème** (D., Hansberg, Ventura, 2021)

Soient  $k > 3$  et  $\ell \in \{2, \dots, k-2\}$ . Le graphe  $C_{k,\ell}$  est équilibrable si et seulement si  $k$  est pair et  $(k, \ell) \neq (6, 2)$ .

Preuve en huit cas ! Chaque fois, on exploite la caractérisation.

# Circulants $C_{k,\ell}$

## **Théorème** (D., Hansberg, Ventura, 2021)

Soient  $k > 3$  et  $\ell \in \{2, \dots, k-2\}$ . Le graphe  $C_{k,\ell}$  est équilibrable si et seulement si  $k$  est pair et  $(k, \ell) \neq (6, 2)$ .

Preuve en huit cas ! Chaque fois, on exploite la caractérisation.

Preuve du cas  $k = 4a$ ,  $\ell$  pair

# Circulants $C_{k,\ell}$

## **Théorème** (D., Hansberg, Ventura, 2021)

Soient  $k > 3$  et  $\ell \in \{2, \dots, k-2\}$ . Le graphe  $C_{k,\ell}$  est équilibrable si et seulement si  $k$  est pair et  $(k, \ell) \neq (6, 2)$ .

Preuve en huit cas ! Chaque fois, on exploite la caractérisation.

Preuve du cas  $k = 4a$ ,  $\ell$  pair

## **Proposition**

Si, dans  $G(V, E)$ ,  $I$  est un ensemble indépendant tel que  $\sum_{u \in I} d(u) = \frac{|E|}{2}$ , alors  $G$  est équilibrable.

# Circulants $C_{k,\ell}$

## Théorème (D., Hansberg, Ventura, 2021)

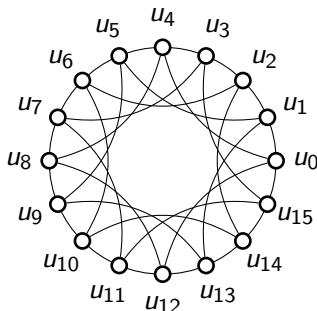
Soient  $k > 3$  et  $\ell \in \{2, \dots, k-2\}$ . Le graphe  $C_{k,\ell}$  est équilibrable si et seulement si  $k$  est pair et  $(k, \ell) \neq (6, 2)$ .

Preuve en huit cas ! Chaque fois, on exploite la caractérisation.

Preuve du cas  $k = 4a$ ,  $\ell$  pair

## Proposition

Si, dans  $G(V, E)$ ,  $I$  est un ensemble indépendant tel que  $\sum_{u \in I} d(u) = \frac{|E|}{2}$ , alors  $G$  est équilibrable.



# Circulants $C_{k,\ell}$

## Théorème (D., Hansberg, Ventura, 2021)

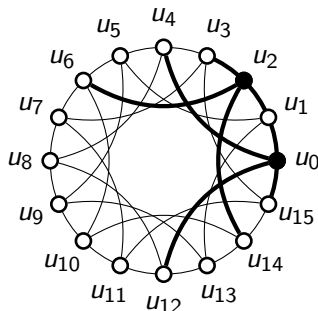
Soient  $k > 3$  et  $\ell \in \{2, \dots, k-2\}$ . Le graphe  $C_{k,\ell}$  est équilibrable si et seulement si  $k$  est pair et  $(k, \ell) \neq (6, 2)$ .

Preuve en huit cas ! Chaque fois, on exploite la caractérisation.

Preuve du cas  $k = 4a$ ,  $\ell$  pair

## Proposition

Si, dans  $G(V, E)$ ,  $I$  est un ensemble indépendant tel que  $\sum_{u \in I} d(u) = \frac{|E|}{2}$ , alors  $G$  est équilibrable.



# Circulants $C_{k,\ell}$

## Théorème (D., Hansberg, Ventura, 2021)

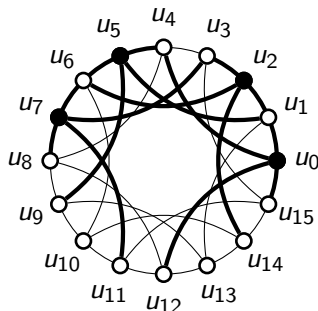
Soient  $k > 3$  et  $\ell \in \{2, \dots, k-2\}$ . Le graphe  $C_{k,\ell}$  est équilibrable si et seulement si  $k$  est pair et  $(k, \ell) \neq (6, 2)$ .

Preuve en huit cas ! Chaque fois, on exploite la caractérisation.


Preuve du cas  $k = 4a$ ,  $\ell$  pair


## Proposition


Si, dans  $G(V, E)$ ,  $I$  est un ensemble indépendant tel que  $\sum_{u \in I} d(u) = \frac{|E|}{2}$ , alors  $G$  est équilibrable.




# Résumé


 Équilibrable


 Non-équilibrable

 valeur exacte de  $\text{bal}(n, G)$

 bornes non-triviales pour  $\text{bal}(n, G)$

# Résumé

 Équilibrable

 Non-équilibrable

 valeur exacte de  $\text{bal}(n, G)$

 bornes non-triviales pour  $\text{bal}(n, G)$

## Circulants

$K_n$

$K_2, K_3, K_4$

$n \geq 5,$   
 $\frac{n(n-1)}{2}$  pair

[Caro, Hansberg,  
Montejano, 2020]

[Caro, Lauri, Zarb, 2020]

Cycles

Impairs

$C_{4k}$

$C_{4k+2}$

[D., Eslava, Hansberg,  
Ventura, 2020+]

$C_{k,\ell}$

$C_{2k,\ell}$   
dont antiprismes  
et échelles de Möbius

$C_{6,2}$




$C_{2k+1,\ell}$

[D., Hansberg, Ventura, 2021]




# Résumé

 Équilibrable



valeur exacte de  $\text{bal}(n, G)$

 Non-équilibrable



bornes non-triviales pour  $\text{bal}(n, G)$

Circulants

$K_n$

$K_2, K_3, K_4$

$n \geq 5,$   
 $\frac{n(n-1)}{2}$  pair

[Caro, Hansberg,  
Montejano, 2020]

[Caro, Lauri, Zarb, 2020]

Cycles

Impairs

$C_{4k}$

$C_{4k+2}$

[D., Eslava, Hansberg,  
Ventura, 2020+]

$C_{k,\ell}$

$C_{2k,\ell}$   
dont antiprismes  
et échelles de Möbius

$C_{6,2}$



$C_{2k+1,\ell}$

[D., Hansberg, Ventura, 2021]

Grilles

$G_{2k,2\ell}$

$T_{8k}, T_{8k+1}$

$G_{2k+1,2\ell+1}$

$T_{8k+4}, T_{8k+5}$

[D., Hansberg, Ventura, 2021]

- $K_n$  avec  $\frac{n(n-1)}{2}$  impair

Solutions entières communes de  $k(n-k) = \frac{1}{2} \binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$  et  
 $\binom{\ell}{2} = \frac{1}{2} \binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$

- $K_n$  avec  $\frac{n(n-1)}{2}$  impair

Solutions entières communes de  $k(n-k) = \frac{1}{2} \binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$  et  $\binom{\ell}{2} = \frac{1}{2} \binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$

⇒ Explicites, mais difficiles à combiner... trouvé par ordinateur :

1.  $n \in \{2, 3, 7, 11, 14, 38, 62, 79, 359, 43.262\} \Rightarrow$  Équilibrables
2. Autres  $n \leq 2.303.999.904.000.003 \Rightarrow$  Non-équilibrables

# Travaux en cours

- $K_n$  avec  $\frac{n(n-1)}{2}$  impair

Solutions entières communes de  $k(n-k) = \frac{1}{2} \binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$  et  $\binom{\ell}{2} = \frac{1}{2} \binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$

⇒ Explicites, mais difficiles à combiner... trouvé par ordinateur :

1.  $n \in \{2, 3, 7, 11, 14, 38, 62, 79, 359, 43.262\} \Rightarrow$  Équilibrables
  2. Autres  $n \leq 2.303.999.904.000.003 \Rightarrow$  Non-équilibrables
- $2K_n$

# Travaux en cours

- $K_n$  avec  $\frac{n(n-1)}{2}$  impair

Solutions entières communes de  $k(n-k) = \frac{1}{2} \binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$  et  $\binom{\ell}{2} = \frac{1}{2} \binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$

⇒ Explicites, mais difficiles à combiner... trouvé par ordinateur :

1.  $n \in \{2, 3, 7, 11, 14, 38, 62, 79, 359, 43.262\} \Rightarrow$  Équilibrables
2. Autres  $n \leq 2.303.999.904.000.003 \Rightarrow$  Non-équilibrables

- $2K_n$

Équilibrable  $\Leftrightarrow n$  est la somme de deux carrés

# Graphes non-équilibrables

## Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable **si et seulement si** il a à la fois :

1. Une coupe traversée par la moitié de ses arêtes ;
2. Un sous-graphe induit contenant la moitié de ses arêtes.

- ▶  $C_{4k+2}$  a le sous-graphe induit, mais pas la coupe
- ▶  $K_5$  n'a aucun des deux

# Graphes non-équilibrables

## Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable **si et seulement si** il a à la fois :

1. Une coupe traversée par la moitié de ses arêtes ;
2. Un sous-graphe induit contenant la moitié de ses arêtes.

- ▶  $C_{4k+2}$  a le sous-graphe induit, mais pas la coupe
- ▶  $K_5$  n'a aucun des deux

→ Comment différencier des « niveaux » de non-équilibrabilité ?

# Le nombre d'équilibrage de liste

## Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :



# Le nombre d'équilibrage de liste

## Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :

1. Les arêtes sont colorées par  $\{r\}$ ,  $\{b\}$  ou  $\{r, b\}$ .

# Le nombre d'équilibrage de liste

## Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :

1. Les arêtes sont colorées par  $\{r\}$ ,  $\{b\}$  ou  $\{r, b\}$ .
2. Les arêtes colorées par  $\{r, b\}$  sont appelées **bicolores** ; on peut choisir leur couleur.

# Le nombre d'équilibrage de liste

## Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :

1. Les arêtes sont colorées par  $\{r\}$ ,  $\{b\}$  ou  $\{r, b\}$ .
2. Les arêtes colorées par  $\{r, b\}$  sont appelées **bicolores** ; on peut choisir leur couleur.
3. En notant  $c$  la 2-liste-coloration,  $R = \{e \mid r \in c(e)\}$  et  $B = \{e \mid b \in c(e)\}$ .

# Le nombre d'équilibrage de liste

## Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :

1. Les arêtes sont colorées par  $\{r\}$ ,  $\{b\}$  ou  $\{r, b\}$ .
2. Les arêtes colorées par  $\{r, b\}$  sont appelées **bicolores** ; on peut choisir leur couleur.
3. En notant  $c$  la 2-liste-coloration,  $R = \{e \mid r \in c(e)\}$  et  $B = \{e \mid b \in c(e)\}$ .

### Définition (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soit  $\text{lbal}(n, G)$  le plus petit entier tel que toute 2-liste-coloration  $R \cup B$  des arêtes de  $K_n$  vérifiant  $|R|, |B| > \text{lbal}(n, G)$  contient une copie équilibrée de  $G$ .

$\text{lbal}(n, G)$  est appelé le **nombre d'équilibrage de liste** de  $G$ .

# Le nombre d'équilibrage de liste

## Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :

1. Les arêtes sont colorées par  $\{r\}$ ,  $\{b\}$  ou  $\{r, b\}$ .
2. Les arêtes colorées par  $\{r, b\}$  sont appelées **bicolores** ; on peut choisir leur couleur.
3. En notant  $c$  la 2-liste-coloration,  $R = \{e \mid r \in c(e)\}$  et  $B = \{e \mid b \in c(e)\}$ .

### Définition (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soit  $\text{lbal}(n, G)$  le plus petit entier tel que toute 2-liste-coloration  $R \cup B$  des arêtes de  $K_n$  vérifiant  $|R|, |B| > \text{lbal}(n, G)$  contient une copie équilibrée de  $G$ .

$\text{lbal}(n, G)$  est appelé le **nombre d'équilibrage de liste** de  $G$ .

⇒ Tous les graphes ont un nombre d'équilibrage de liste !

# Premiers résultats

## Proposition

Si  $\text{bal}(n, G)$  existe, alors  $\text{lbal}(n, G) = \text{bal}(n, G)$ .

Sinon,  $\frac{1}{2} \binom{n}{2} \leq \text{lbal}(n, G) < \binom{n}{2}$ .

# Premiers résultats

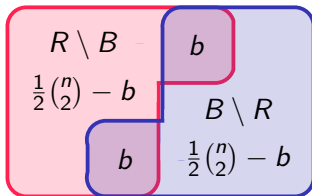
## Proposition

Si  $\text{bal}(n, G)$  existe, alors  $\text{lbal}(n, G) = \text{bal}(n, G)$ .

Sinon,  $\frac{1}{2} \binom{n}{2} \leq \text{lbal}(n, G) < \binom{n}{2}$ .

## Compter les arêtes bicolores

Si  $|R|, |B| = \frac{1}{2} \binom{n}{2} + b$  :



# Premiers résultats

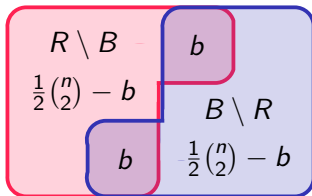
## Proposition

Si  $\text{bal}(n, G)$  existe, alors  $\text{lbal}(n, G) = \text{bal}(n, G)$ .

Sinon,  $\frac{1}{2} \binom{n}{2} \leq \text{lbal}(n, G) < \binom{n}{2}$ .

## Compter les arêtes bicolores

Si  $|R|, |B| = \frac{1}{2} \binom{n}{2} + b$  :



$\Rightarrow 2b$  arêtes  
bicolores



# Premiers résultats

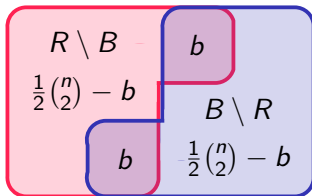
## Proposition

Si  $\text{bal}(n, G)$  existe, alors  $\text{lbal}(n, G) = \text{bal}(n, G)$ .

Sinon,  $\frac{1}{2} \binom{n}{2} \leq \text{lbal}(n, G) < \binom{n}{2}$ .

## Compter les arêtes bicolores

Si  $|R|, |B| = \frac{1}{2} \binom{n}{2} + b$  :



$\Rightarrow 2b$  arêtes bicolores

## Proposition

Si  $k$  arêtes bicolores garantissent une copie équilibrée de  $G$ , alors

$\text{lbal}(n, G) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \lceil \frac{k}{2} \rceil - 1$ .

## Une borne supérieure générale

$$\blacktriangleright \mathcal{H}(G) = \left\{ H \leq G \mid e(H) = \left\lfloor \frac{e(G)}{2} \right\rfloor, H \text{ sans sommet isolé} \right\}$$

# Une borne supérieure générale

$$\blacktriangleright \mathcal{H}(G) = \left\{ H \leq G \mid e(H) = \left\lfloor \frac{e(G)}{2} \right\rfloor, H \text{ sans sommet isolé} \right\}$$

**Théorème** (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Pour tous  $G(V, E)$  et  $n \geq |V|$ , on a

$$\text{Ibal}(n, G) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \left\lceil \frac{\text{ex}(n, \mathcal{H}(G))}{2} \right\rceil.$$

# Une borne supérieure générale

$$\blacktriangleright \mathcal{H}(G) = \left\{ H \leq G \mid e(H) = \left\lfloor \frac{e(G)}{2} \right\rfloor, H \text{ sans sommet isolé} \right\}$$

**Théorème** (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Pour tous  $G(V, E)$  et  $n \geq |V|$ , on a

$$\text{lbal}(n, G) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \left\lceil \frac{\text{ex}(n, \mathcal{H}(G))}{2} \right\rceil.$$

## Preuve

S'il y a au moins  $\text{ex}(n, \mathcal{H}(G)) + 1$  arêtes bicolores, on peut les sélectionner, compléter pour obtenir une copie de  $G$ , puis assigner les arêtes bicolores pour l'équilibrer.

# Application de la borne supérieure générale

# Application de la borne supérieure générale

## Cycles $C_{4k+2}$

- $\mathcal{H}(C_{4k+2}) =$  les forêts linéaires de taille  $2k + 1$

# Application de la borne supérieure générale

## Cycles $C_{4k+2}$

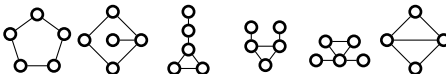
- ▶  $\mathcal{H}(C_{4k+2}) =$  les forêts linéaires de taille  $2k + 1$
- ▶  $\text{Ibal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$  [Liu, Lidicky, Palmer, 2013]

# Application de la borne supérieure générale

## Cycles $C_{4k+2}$

- $\mathcal{H}(C_{4k+2}) =$  les forêts linéaires de taille  $2k + 1$
- $\text{Ibal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$  [Liu, Lidicky, Palmer, 2013]

## $K_5$

- $\mathcal{H}(K_5) =$  

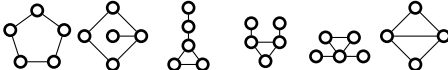


# Application de la borne supérieure générale

## Cycles $C_{4k+2}$

- $\mathcal{H}(C_{4k+2}) =$  les forêts linéaires de taille  $2k + 1$
- $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$  [Liu, Lidicky, Palmer, 2013]

## $K_5$

- $\mathcal{H}(K_5) =$  

**Théorème** (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

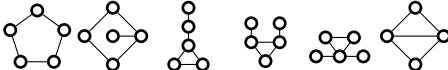
Pour tout entier  $n \geq 5$ ,  $\text{ex}(n, \mathcal{H}(K_5)) = \text{ex}(n, \{C_3, C_4, C_5\})$ .

# Application de la borne supérieure générale

## Cycles $C_{4k+2}$

- ▶  $\mathcal{H}(C_{4k+2}) =$  les forêts linéaires de taille  $2k + 1$
- ▶  $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$  [Liu, Lidicky, Palmer, 2013]

## $K_5$

- ▶  $\mathcal{H}(K_5) =$  

**Théorème** (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Pour tout entier  $n \geq 5$ ,  $\text{ex}(n, \mathcal{H}(K_5)) = \text{ex}(n, \{C_3, C_4, C_5\})$ .

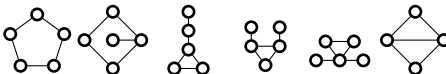
- ▶  $\text{lbal}(n, K_5) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + (1 + \epsilon) \frac{1}{4\sqrt{2}} n^{\frac{3}{2}}$  [Füredi, Simonovits, 2013]

# Application de la borne supérieure générale

## Cycles $C_{4k+2}$

- $\mathcal{H}(C_{4k+2}) =$  les forêts linéaires de taille  $2k + 1$
- $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$  [Liu, Lidicky, Palmer, 2013]

## $K_5$

- $\mathcal{H}(K_5) =$  

**Théorème** (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Pour tout entier  $n \geq 5$ ,  $\text{ex}(n, \mathcal{H}(K_5)) = \text{ex}(n, \{C_3, C_4, C_5\})$ .

- $\text{lbal}(n, K_5) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + (1 + \epsilon) \frac{1}{4\sqrt{2}} n^{\frac{3}{2}}$  [Füredi, Simonovits, 2013]

→ Qualité de cette borne ?

Nombre d'équilibrage de liste de  $C_{4k+2}$

# Nombre d'équilibrage de liste de $C_{4k+2}$

**Théorème** (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

$$\text{Ibal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$$

# Nombre d'équilibrage de liste de $C_{4k+2}$

**Théorème** (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

$$\text{lb}_\text{al}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$$

## Idée de la preuve

1. Supposons que  $|R|, |B| > \frac{1}{2} \binom{n}{2}$  : il y a au moins 2 arêtes bicolores.

# Nombre d'équilibrage de liste de $C_{4k+2}$

**Théorème** (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

$$\text{lb}_{\text{al}}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$$

## Idée de la preuve

1. Supposons que  $|R|, |B| > \frac{1}{2} \binom{n}{2}$  : il y a au moins 2 arêtes bicolores.
2. Soit  $t \geq 3k + 1$ . On trouve une copie de type A ou de type B de  $K_{2t}$ .



# Nombre d'équilibrage de liste de $C_{4k+2}$

**Théorème** (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

$$\text{lb}_{\text{al}}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$$

## Idée de la preuve

1. Supposons que  $|R|, |B| > \frac{1}{2} \binom{n}{2}$  : il y a au moins 2 arêtes bicolores.
2. Soit  $t \geq 3k + 1$ . On trouve une copie de type A ou de type B de  $K_{2t}$ .



3. Si copie de type A : copie équilibrée de  $C_{4k+2}$ .



# Nombre d'équilibrage de liste de $C_{4k+2}$

**Théorème** (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

$$\text{lb}_{\text{al}}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$$

## Idée de la preuve

1. Supposons que  $|R|, |B| > \frac{1}{2} \binom{n}{2}$  : il y a au moins 2 arêtes bicolores.
2. Soit  $t \geq 3k + 1$ . On trouve une copie de type A ou de type B de  $K_{2t}$ .



3. Si copie de type A : copie équilibrée de  $C_{4k+2}$ .
4. Si copie de type B : peu importe où se situe l'arête bicolore, on trouve une copie équilibrée de  $C_{4k+2}$ .

## Borne inférieure pour $K_5$

## Borne inférieure pour $K_5$

### Proposition

Soit  $c = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$ . On a  $\text{Ibal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1 - \epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$ .

## Borne inférieure pour $K_5$

### Proposition

Soit  $c = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$ . On a  $\text{lb}(\text{al}(n, K_5)) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1 - \epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$ .

### Preuve

On construit une 2-liste-coloration des arêtes de  $K_n$  qui ne contient pas de  $K_5$  équilibré.

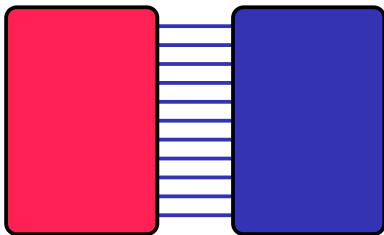
## Borne inférieure pour $K_5$

### Proposition

Soit  $c = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$ . On a  $\text{lb}_2(n, K_5) \geq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + (1 - \epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$ .

### Preuve

On construit une 2-liste-coloration des arêtes de  $K_n$  qui ne contient pas de  $K_5$  équilibré.



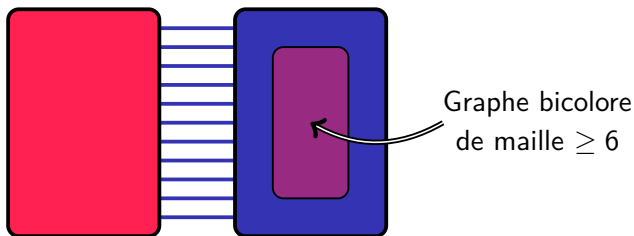
# Borne inférieure pour $K_5$

## Proposition

Soit  $c = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$ . On a  $\text{lb}(\text{al}(n, K_5)) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1 - \epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$ .

## Preuve

On construit une 2-liste-coloration des arêtes de  $K_n$  qui ne contient pas de  $K_5$  équilibré.



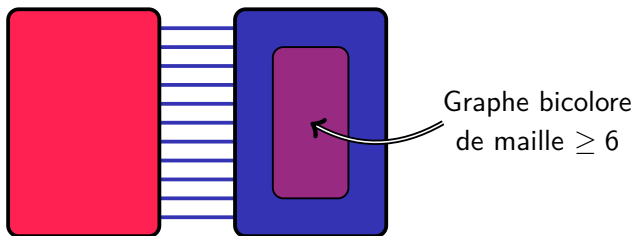
# Borne inférieure pour $K_5$

## Proposition

Soit  $c = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$ . On a  $\text{lb}(\text{al}(n, K_5)) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1 - \epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$ .

## Preuve

On construit une 2-liste-coloration des arêtes de  $K_n$  qui ne contient pas de  $K_5$  équilibré.



Ensuite, on montre que  $|R|, |B| > \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1 - \epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$ .

# Qualité de la borne supérieure générale



# Qualité de la borne supérieure générale

## Cycles $C_{4k+2}$

- ▶ Borne supérieure générale :  $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$
- ▶ Valeur exacte :  $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$

# Qualité de la borne supérieure générale

## Cycles $C_{4k+2}$

- ▶ Borne supérieure générale :  $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$
- ▶ Valeur exacte :  $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$

## $K_5$

- ▶ Borne supérieure générale :  $\text{lbal}(n, K_5) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + (1 + \epsilon) \frac{1}{4\sqrt{2}} n^{\frac{3}{2}}$
- ▶ Borne inférieure :  $\text{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + (1 - \epsilon) \left( \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \right)^{\frac{5}{2}} n^{\frac{3}{2}}$

# Qualité de la borne supérieure générale

## Cycles $C_{4k+2}$

- ▶ Borne supérieure générale :  $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$
- ▶ Valeur exacte :  $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$

## $K_5$

- ▶ Borne supérieure générale :  $\text{lbal}(n, K_5) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + (1 + \epsilon) \frac{1}{4\sqrt{2}} n^{\frac{3}{2}}$
- ▶ Borne inférieure :  $\text{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + (1 - \epsilon) \left( \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \right)^{\frac{5}{2}} n^{\frac{3}{2}}$

# Qualité de la borne supérieure générale

## Cycles $C_{4k+2}$

- ▶ Borne supérieure générale :  $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$
- ▶ Valeur exacte :  $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2} \binom{n}{2}$

## $K_5$

- ▶ Borne supérieure générale :  $\text{lbal}(n, K_5) \leq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + (1 + \epsilon) \frac{1}{4\sqrt{2}} n^{\frac{3}{2}}$
- ▶ Borne inférieure :  $\text{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2} \binom{n}{2} + (1 - \epsilon) \left( \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \right)^{\frac{5}{2}} n^{\frac{3}{2}}$

→ Des différences existent au sein des graphes non-équilibrables.

# Le mot de la fin

## Conclusion

- ▶ Résultats d'équilibrabilité et sur  $\text{bal}(n, G)$
- ▶ Introduction de  $\text{lbal}(n, G)$  pour étudier les graphes non-équilibrables

# Le mot de la fin

## Conclusion

- ▶ Résultats d'équilibrabilité et sur  $\text{bal}(n, G)$
- ▶ Introduction de  $\text{lbal}(n, G)$  pour étudier les graphes non-équilibrables

## Questions ouvertes

- ▶ Complexité
- ▶ Plus de classes de graphes
- ▶ Plus de couleurs

# Le mot de la fin

## Conclusion

- ▶ Résultats d'équilibrabilité et sur  $\text{bal}(n, G)$
- ▶ Introduction de  $\text{lbal}(n, G)$  pour étudier les graphes non-équilibrables

## Questions ouvertes

- ▶ Complexité
- ▶ Plus de classes de graphes
- ▶ Plus de couleurs

