A. Dailly, L. Eslava, A. Hansberg et D. Ventura : Équilibrabilité et nombre d'équilibrage des cycles

Antoine Dailly, Instituto de Matemáticas, UNAM Juriquilla, Mexique, antoine.dailly@im.unam.mx
Laura Eslava, IIMAS, UNAM Ciudad Universitaria, Mexique
Adriana Hansberg, Instituto de Matemáticas, UNAM Juriquilla, Mexique
Denae Ventura, Instituto de Matemáticas, UNAM Juriquilla, Mexique

Dans une 2-coloration $R \sqcup B$ des arêtes de K_n, une *copie équilibrée* d'un graphe $G(V, E)$ est une copie de G telle que $\{|E \cap R|, |E \cap B|\} = \left\{\left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil\right\}$, *i.e.* la moitié des arêtes sont dans R et l'autre dans B. La question de l'existence garantie d'une copie équilibrée d'un graphe donné se situe à l'intersection entre la théorie de Ramsey et la théorie des graphes extrémaux :

Définition 1 ([1]). *Soient G un graphe simple et fini et n un entier. Soit $\mathrm{bal}(n, G)$ le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration $R \sqcup B$ des arêtes de K_n vérifiant $|R|, |B| > \mathrm{bal}(n, G)$ contient une copie équilibrée de G.*

S'il existe un n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\mathrm{bal}(n, G)$ existe, alors G est dit équilibrable *et $\mathrm{bal}(n, G)$ est appelé son* nombre d'équilibrage*.*

Dans leur article introductif, Caro, Hansberg et Montejano [1] ont caractérisé les graphes équilibrables : il s'agit des graphes ayant une coupe et un sous-graphe induit contenant chacun la moitié des arêtes du graphe.

Nous étudions l'équilibrabilité et, le cas échéant, le nombre d'équilibrage des cycles. Nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 2. *Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.*

- *$C_{4k+\epsilon}$ est équilibrable, et $\mathrm{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)$;*
- *C_{4k} est équilibrable, et $(k-1)n - (k-1)^2 \leq \mathrm{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k$;*
- *C_{4k+2} n'est pas équilibrable.*

Notre preuve utilise la caractérisation des graphes équilibrables, puis nous partons du nombre d'équilibrage des chemins [1] pour trouver celui des cycles.

Références

[1] Caro, Y., Hansberg, A., & Montejano, A. (2018). Unavoidable chromatic patterns in 2-colorings of the complete graph. *arXiv preprint arXiv :1810.12375.*