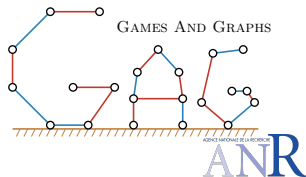


Jeux octaux et de soustraction dans les graphes

Antoine Dailly (G-SCOP, Grenoble)

Avec Laurent Beaudou (LIMOS), Pierre Coupechoux (LAAS),
Sylvain Gravier (Institut Fourier), Julien Moncel (LAAS),
Aline Parreau (LIRIS), Éric Sopena (LaBRI).

Travaux réalisés dans le cadre de l'ANR GAG.



Séminaire Alcoloco LIMOS, 6 décembre 2018

Jeux combinatoires

Définition



Jeux combinatoires

Définition

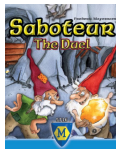
1. Jeux à deux joueurs



Jeux combinatoires

Définition

1. Jeux à deux joueurs
2. Sans hasard



Jeux combinatoires

Définition

1. Jeux à deux joueurs
2. Sans hasard
3. Information parfaite



Jeux combinatoires

Définition

1. Jeux à deux joueurs
2. Sans hasard
3. Information parfaite
4. Jeux finis, sans égalité



Jeux combinatoires

Définition

1. Jeux à deux joueurs
2. Sans hasard
3. Information parfaite
4. Jeux finis, sans égalité
5. Le gagnant est déterminé par qui joue le dernier coup



Jeux combinatoires

Définition

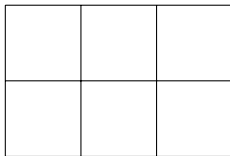
1. Jeux à deux joueurs
2. Sans hasard
3. Information parfaite
4. Jeux finis, sans égalité
5. Le gagnant est déterminé par qui joue le dernier coup



Les joueurs jouent parfaitement !

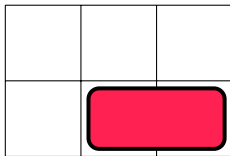
Jouons !

CRAM : Les joueurs mettent des dominos sur une grille. Le joueur qui met le dernier domino gagne.



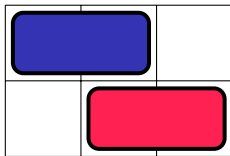
Jouons !

CRAM : Les joueurs mettent des dominos sur une grille. Le joueur qui met le dernier domino gagne.



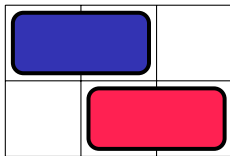
Jouons !

CRAM : Les joueurs mettent des dominos sur une grille. Le joueur qui met le dernier domino gagne.



Jouons !

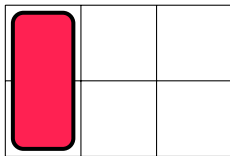
CRAM : Les joueurs mettent des dominos sur une grille. Le joueur qui met le dernier domino gagne.



⇒ Victoire du deuxième joueur.

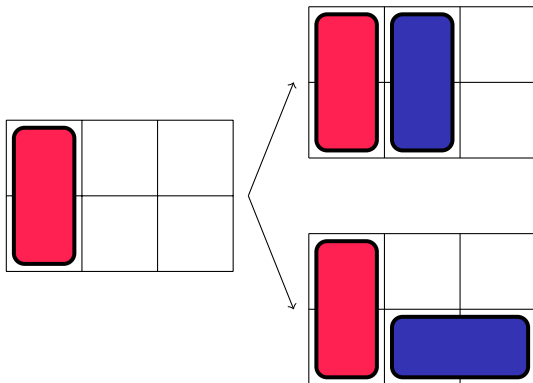
Jouons !

CRAM : Les joueurs mettent des dominos sur une grille. Le joueur qui met le dernier domino gagne.



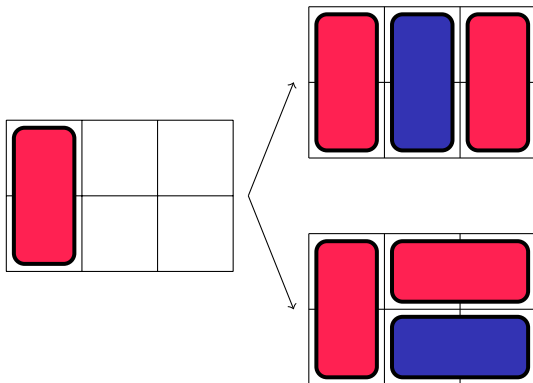
Jouons !

CRAM : Les joueurs mettent des dominos sur une grille. Le joueur qui met le dernier domino gagne.



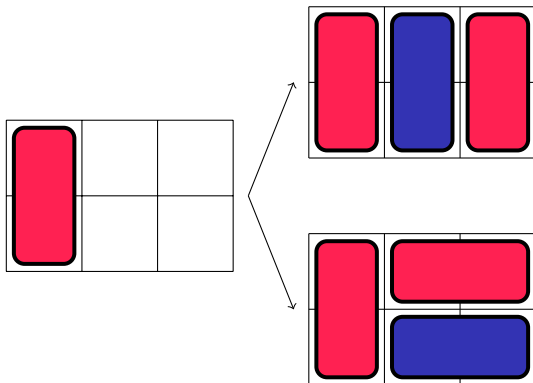
Jouons !

CRAM : Les joueurs mettent des dominos sur une grille. Le joueur qui met le dernier domino gagne.



Jouons !

CRAM : Les joueurs mettent des dominos sur une grille. Le joueur qui met le dernier domino gagne.



⇒ Victoire du premier joueur.

Quelques définitions

Quelques définitions

Impartial et partisan

Un jeu est **impartial** \Leftrightarrow les deux joueurs ont les mêmes options.
Sinon, le jeu est **partisan**.

Quelques définitions

Impartial et partisan

Un jeu est **impartial** \Leftrightarrow les deux joueurs ont les mêmes options.
Sinon, le jeu est **partisan**.

→ Ici, jeux **impartiaux**

Quelques définitions

Impartial et partisan

Un jeu est **impartial** \Leftrightarrow les deux joueurs ont les mêmes options.
Sinon, le jeu est **partisan**.

\rightarrow Ici, jeux **impartiaux**

Issue

Un jeu est **\mathcal{N}** \Leftrightarrow le premier joueur a une stratégie gagnante.
Sinon, le jeu est **\mathcal{P}** .

Quelques définitions

Impartial et partisan

Un jeu est **impartial** \Leftrightarrow les deux joueurs ont les mêmes options.
Sinon, le jeu est **partisan**.

\rightarrow Ici, jeux **impartiaux**

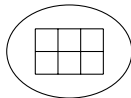
Issue

Un jeu est **\mathcal{N}** \Leftrightarrow le premier joueur a une stratégie gagnante.
Sinon, le jeu est **\mathcal{P}** .

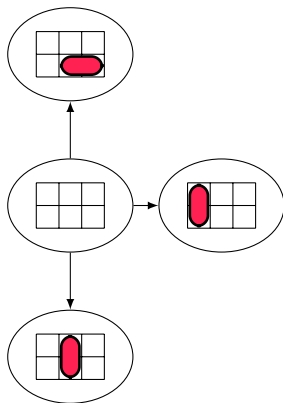
Problématiques des jeux combinatoires

1. Un jeu donné est-il \mathcal{N} ou \mathcal{P} ?
2. Quelle est la stratégie gagnante?

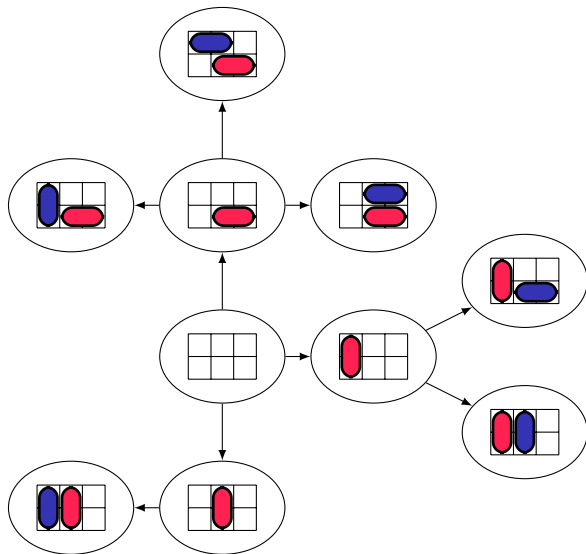
Un premier algorithme : le graphe de jeu



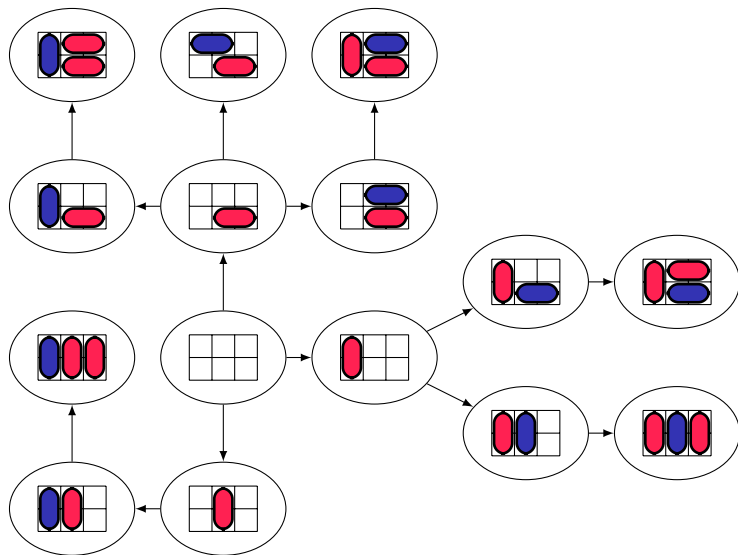
Un premier algorithme : le graphe de jeu



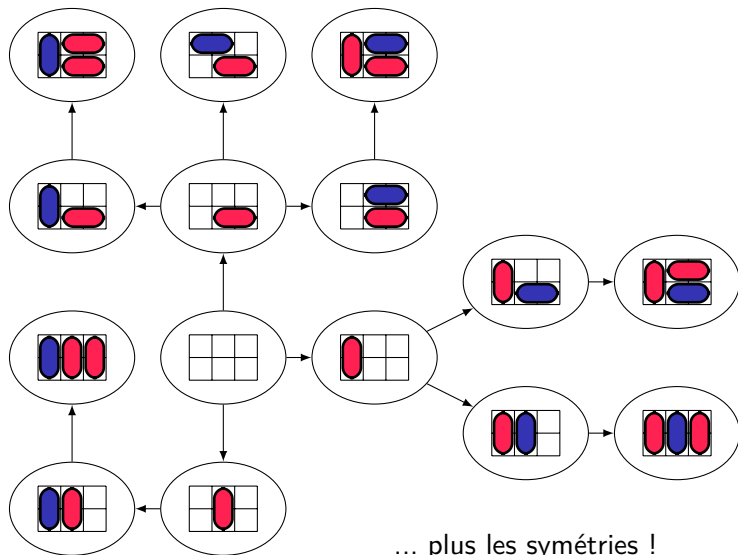
Un premier algorithme : le graphe de jeu



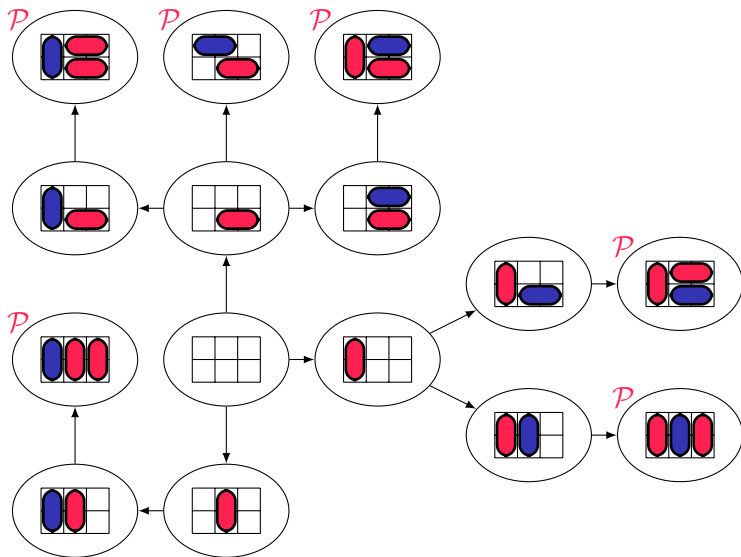
Un premier algorithme : le graphe de jeu



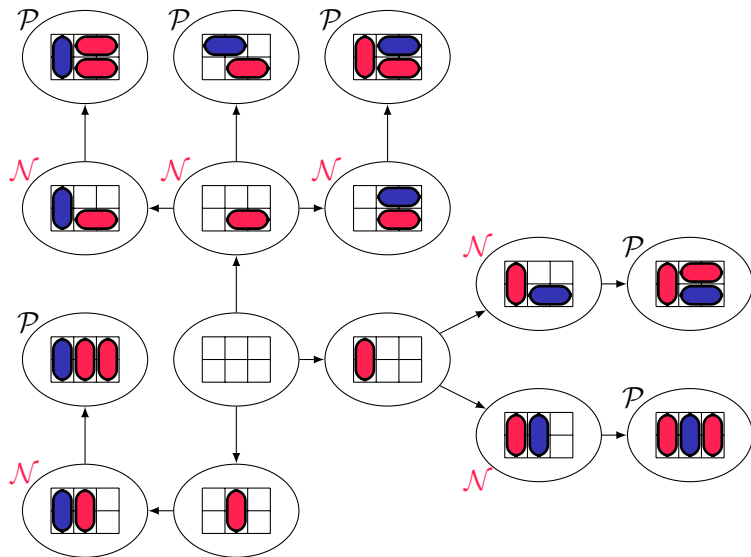
Un premier algorithme : le graphe de jeu



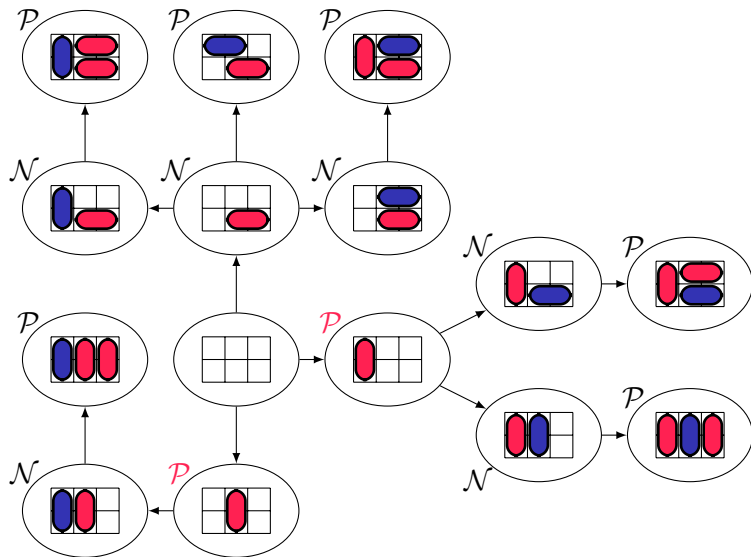
Un premier algorithme : le graphe de jeu



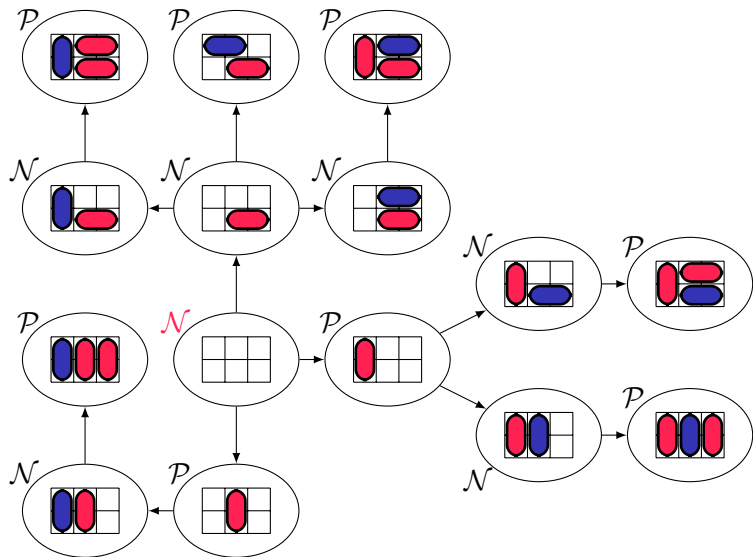
Un premier algorithme : le graphe de jeu



Un premier algorithme : le graphe de jeu



Un premier algorithme : le graphe de jeu



Le graphe de jeu : bilan

- Complet, fini, donne issue et stratégie

Le graphe de jeu : bilan

- ▶ Complet, fini, donne issue et stratégie
- ▶ ... mais exponentiel en général !

Le graphe de jeu : bilan

- ▶ Complet, fini, donne issue et stratégie
- ▶ ... mais exponentiel en général !

⇒ Méthodes plus fines pour étudier les jeux : théorie de Sprague-Grundy

Sommer des jeux

Sommer des jeux

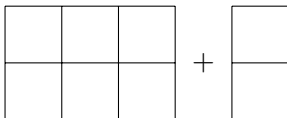
Somme

Dans $G + H$, les joueurs jouent soit sur G soit sur H . Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.

Sommer des jeux

Somme

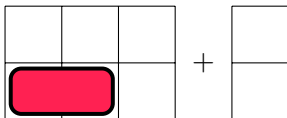
Dans $G + H$, les joueurs jouent **soit** sur G **soit** sur H . Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.



Sommer des jeux

Somme

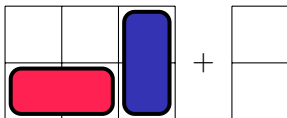
Dans $G + H$, les joueurs jouent **soit** sur G **soit** sur H . Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.



Sommer des jeux

Somme

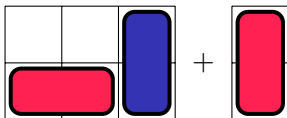
Dans $G + H$, les joueurs jouent **soit** sur G **soit** sur H . Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.



Sommer des jeux

Somme

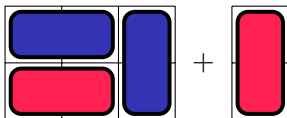
Dans $G + H$, les joueurs jouent **soit** sur G **soit** sur H . Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.



Sommer des jeux

Somme

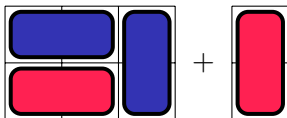
Dans $G + H$, les joueurs jouent **soit** sur G **soit** sur H . Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.



Sommer des jeux

Somme

Dans $G + H$, les joueurs jouent **soit** sur G **soit** sur H . Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.

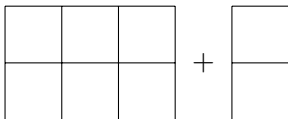


Pourquoi sommer des jeux ?

Sommer des jeux

Somme

Dans $G + H$, les joueurs jouent **soit** sur G **soit** sur H . Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.

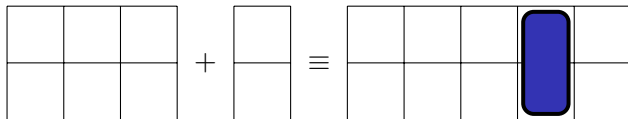


Pourquoi sommer des jeux ?

Sommer des jeux

Somme

Dans $G + H$, les joueurs jouent **soit** sur G **soit** sur H . Quand un des deux est fini, ils jouent sur l'autre.
Le joueur qui joue le dernier coup gagne.



Pourquoi sommer des jeux ?

Sommer un jeu \mathcal{P}

Proposition

Si G est \mathcal{P} , alors $G + H$ a la même issue que H .

Sommer un jeu \mathcal{P}

Proposition

Si G est \mathcal{P} , alors $G + H$ a la même issue que H .

Preuve par induction

► Si H est \mathcal{P} :

$$G + H$$

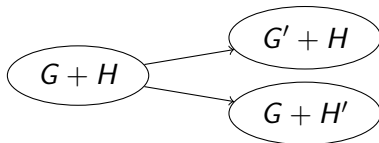
Sommer un jeu \mathcal{P}

Proposition

Si G est \mathcal{P} , alors $G + H$ a la même issue que H .

Preuve par induction

► Si H est \mathcal{P} :



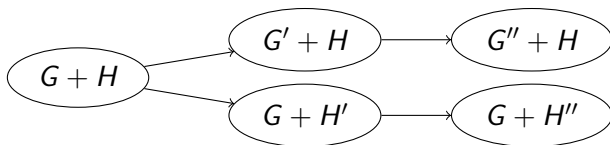
Sommer un jeu \mathcal{P}

Proposition

Si G est \mathcal{P} , alors $G + H$ a la même issue que H .

Preuve par induction

► Si H est \mathcal{P} :



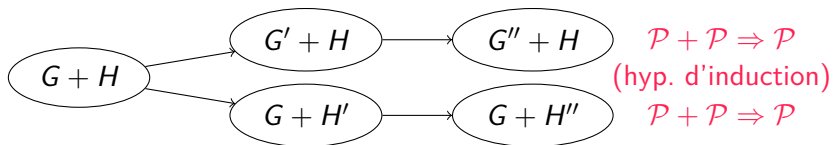
Sommer un jeu \mathcal{P}

Proposition

Si G est \mathcal{P} , alors $G + H$ a la même issue que H .

Preuve par induction

► Si H est \mathcal{P} :



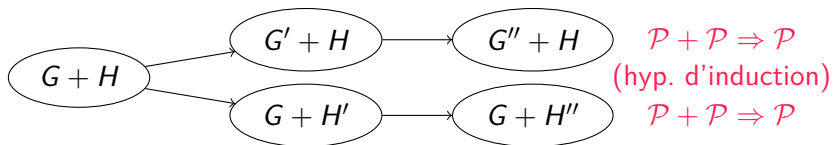
Sommer un jeu \mathcal{P}

Proposition

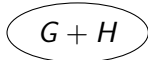
Si G est \mathcal{P} , alors $G + H$ a la même issue que H .

Preuve par induction

► Si H est \mathcal{P} :



► Si H est \mathcal{N} :



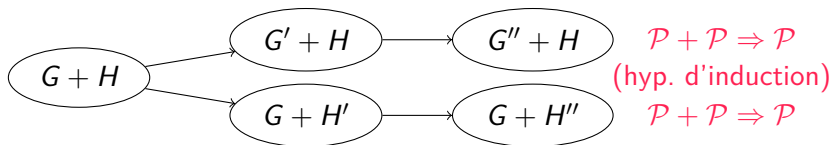
Sommer un jeu \mathcal{P}

Proposition

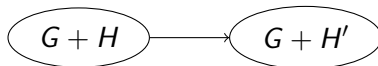
Si G est \mathcal{P} , alors $G + H$ a la même issue que H .

Preuve par induction

► Si H est \mathcal{P} :



► Si H est \mathcal{N} :



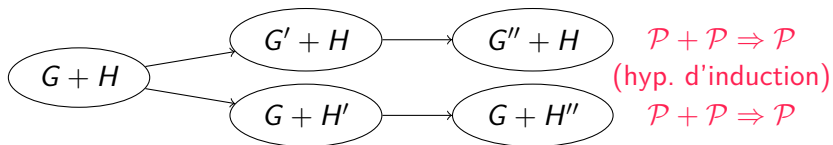
Sommer un jeu \mathcal{P}

Proposition

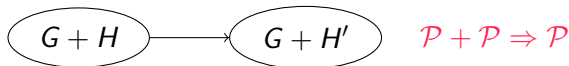
Si G est \mathcal{P} , alors $G + H$ a la même issue que H .

Preuve par induction

► Si H est \mathcal{P} :



► Si H est \mathcal{N} :



Sommer des jeux \mathcal{N}

Sommer des jeux \mathcal{N}

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \Rightarrow \mathcal{P}$$

Sommer des jeux \mathcal{N}

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \Rightarrow \mathcal{P}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \Rightarrow \mathcal{N}$$

Sommer des jeux \mathcal{N}

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \Rightarrow \mathcal{P}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \Rightarrow \mathcal{N}$$

\Rightarrow Définition de **classes d'équivalence** pour les jeux

Valeurs de Grundy

Équivalence de jeux

$G \equiv H \Leftrightarrow \forall J, G + J \text{ et } H + J \text{ ont les mêmes issues}$

Valeurs de Grundy

Équivalence de jeux

$G \equiv H \Leftrightarrow \forall J, G + J$ et $H + J$ ont les mêmes issues

Valeur de Grundy

Association des classes d'équivalences aux entiers naturels :

Valeurs de Grundy

Équivalence de jeux

$G \equiv H \Leftrightarrow \forall J, G + J$ et $H + J$ ont les mêmes issues

Valeur de Grundy

Association des classes d'équivalences aux entiers naturels :

► $\mathcal{G}(G) = 0 \Leftrightarrow G$ est \mathcal{P}

Valeurs de Grundy

Équivalence de jeux

$G \equiv H \Leftrightarrow \forall J, G + J$ et $H + J$ ont les mêmes issues

Valeur de Grundy

Association des classes d'équivalences aux entiers naturels :

- ▶ $\mathcal{G}(G) = 0 \Leftrightarrow G$ est \mathcal{P}
- ▶ $\mathcal{G}(G) = \text{mex}\{\mathcal{G}(G') \mid G' \text{ option de } G\}$



Valeurs de Grundy

Équivalence de jeux

$G \equiv H \Leftrightarrow \forall J, G + J$ et $H + J$ ont les mêmes issues

Valeur de Grundy

Association des classes d'équivalences aux entiers naturels :

- ▶ $\mathcal{G}(G) = 0 \Leftrightarrow G$ est \mathcal{P}
- ▶ $\mathcal{G}(G) = \text{mex}\{\mathcal{G}(G') \mid G' \text{ option de } G\}$



Valeurs de Grundy

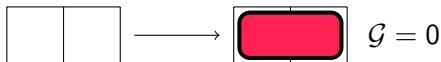
Équivalence de jeux

$G \equiv H \Leftrightarrow \forall J, G + J$ et $H + J$ ont les mêmes issues

Valeur de Grundy

Association des classes d'équivalences aux entiers naturels :

- ▶ $\mathcal{G}(G) = 0 \Leftrightarrow G$ est \mathcal{P}
- ▶ $\mathcal{G}(G) = \text{mex}\{\mathcal{G}(G') \mid G' \text{ option de } G\}$



Valeurs de Grundy

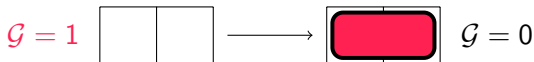
Équivalence de jeux

$G \equiv H \Leftrightarrow \forall J, G + J$ et $H + J$ ont les mêmes issues

Valeur de Grundy

Association des classes d'équivalences aux entiers naturels :

- ▶ $\mathcal{G}(G) = 0 \Leftrightarrow G$ est \mathcal{P}
- ▶ $\mathcal{G}(G) = \text{mex}\{\mathcal{G}(G') \mid G' \text{ option de } G\}$



Valeurs de Grundy

Équivalence de jeux

$G \equiv H \Leftrightarrow \forall J, G + J \text{ et } H + J \text{ ont les mêmes issues}$

Valeur de Grundy

Association des classes d'équivalences aux entiers naturels :

- ▶ $\mathcal{G}(G) = 0 \Leftrightarrow G \text{ est } \mathcal{P}$
- ▶ $\mathcal{G}(G) = \text{mex}\{\mathcal{G}(G') \mid G' \text{ option de } G\}$



Valeurs de Grundy

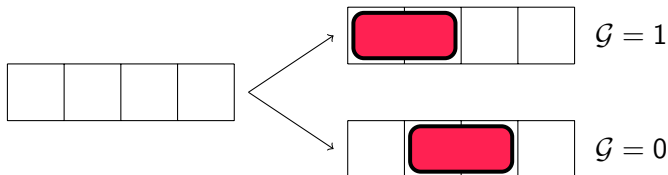
Équivalence de jeux

$G \equiv H \Leftrightarrow \forall J, G + J$ et $H + J$ ont les mêmes issues

Valeur de Grundy

Association des classes d'équivalences aux entiers naturels :

- ▶ $\mathcal{G}(G) = 0 \Leftrightarrow G$ est \mathcal{P}
- ▶ $\mathcal{G}(G) = \text{mex}\{\mathcal{G}(G') \mid G' \text{ option de } G\}$



Valeurs de Grundy

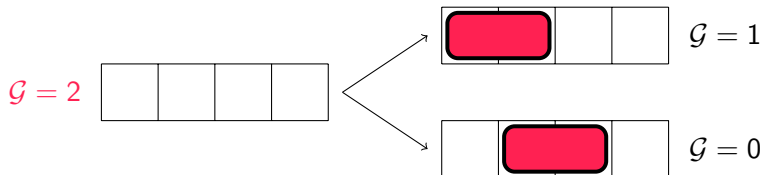
Équivalence de jeux

$G \equiv H \Leftrightarrow \forall J, G + J$ et $H + J$ ont les mêmes issues

Valeur de Grundy

Association des classes d'équivalences aux entiers naturels :

- ▶ $\mathcal{G}(G) = 0 \Leftrightarrow G$ est \mathcal{P}
- ▶ $\mathcal{G}(G) = \text{mex}\{\mathcal{G}(G') \mid G' \text{ option de } G\}$



Propriétés des valeurs de Grundy

Proposition

$$\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H) \Leftrightarrow G + H \text{ est } \mathcal{P}$$

Propriétés des valeurs de Grundy

Proposition

$$\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H) \Leftrightarrow G + H \text{ est } \mathcal{P}$$

Théorème (Sprague 1935, Grundy 1939)

$$\mathcal{G}(G + H) = \mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$$

Propriétés des valeurs de Grundy

Proposition

$$\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H) \Leftrightarrow G + H \text{ est } \mathcal{P}$$

Théorème (Sprague 1935, Grundy 1939)

$$\mathcal{G}(G + H) = \mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$$

$$14 \oplus 6 :$$

Propriétés des valeurs de Grundy

Proposition

$$\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H) \Leftrightarrow G + H \text{ est } \mathcal{P}$$

Théorème (Sprague 1935, Grundy 1939)

$$\mathcal{G}(G + H) = \mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$$

$$14 \oplus 6 : \begin{array}{r} 1110 \\ 0110 \\ \hline \end{array}$$

Propriétés des valeurs de Grundy

Proposition

$$\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H) \Leftrightarrow G + H \text{ est } \mathcal{P}$$

Théorème (Sprague 1935, Grundy 1939)

$$\mathcal{G}(G + H) = \mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$$

$$14 \oplus 6 : \begin{array}{r} 1110 \\ 0110 \\ \hline 1 \end{array}$$

Propriétés des valeurs de Grundy

Proposition

$$\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H) \Leftrightarrow G + H \text{ est } \mathcal{P}$$

Théorème (Sprague 1935, Grundy 1939)

$$\mathcal{G}(G + H) = \mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$$

$$14 \oplus 6 : \begin{array}{r} 1\textcolor{red}{1}10 \\ 0\textcolor{red}{1}10 \\ \hline 1\textcolor{red}{0} \end{array}$$

Propriétés des valeurs de Grundy

Proposition

$$\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H) \Leftrightarrow G + H \text{ est } \mathcal{P}$$

Théorème (Sprague 1935, Grundy 1939)

$$\mathcal{G}(G + H) = \mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$$

$$14 \oplus 6 : \begin{array}{r} 1110 \\ 0110 \\ \hline 1000 \end{array}$$

Propriétés des valeurs de Grundy

Proposition

$$\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H) \Leftrightarrow G + H \text{ est } \mathcal{P}$$

Théorème (Sprague 1935, Grundy 1939)

$$\mathcal{G}(G + H) = \mathcal{G}(G) \oplus \mathcal{G}(H)$$

$$14 \oplus 6 : \begin{array}{r} 1110 \\ 0110 \\ \hline 1000 \end{array}$$

→ Outils puissants pour étudier les jeux impartiaux

Jeux taking-breaking

Jeux taking-breaking

Se jouent sur des **pires de jetons**.

Jeux taking-breaking

Jeux taking-breaking

Se jouent sur des **pires de jetons**. Deux types de coups :

- ▶ **Taking** : enlever des jetons
- ▶ **Breaking** : diviser des piles

Jeux taking-breaking

Jeux taking-breaking

Se jouent sur des **pires de jetons**. Deux types de coups :

- ▶ **Taking** : enlever des jetons
- ▶ **Breaking** : diviser des piles

Exemples

- ▶ NIM (Bouton, 1901)
- ▶ WYTHOFF (Wythoff, 1907)
- ▶ Jeu de Grundy (Berlekamp, Conway, Guy, 1982)
- ▶ CRAM sur une ligne
- ▶ ... et plus encore !

Jeux taking-breaking

Jeux taking-breaking

Se jouent sur des **pires de jetons**. Deux types de coups :

- ▶ **Taking** : enlever des jetons
- ▶ **Breaking** : diviser des piles

Exemples

- ▶ NIM (Bouton, 1901)
- ▶ WYTHOFF (Wythoff, 1907)
- ▶ Jeu de Grundy (Berlekamp, Conway, Guy, 1982)
- ▶ CRAM sur une ligne
- ▶ ... et plus encore !
- ▶ **Jeux de soustraction, jeux octaux**

Jeux de soustraction

Jeu de soustraction $\text{SUB}(S)$

Jeu taking-breaking avec **uniquement** des coups de type taking.

Jeux de soustraction

Jeu de soustraction SUB(S)

Jeu taking-breaking avec **uniquement des coups de type taking**.
Enlever k jetons $\Leftrightarrow k \in S$.

Jeux de soustraction

Jeu de soustraction $SUB(S)$

Jeu taking-breaking avec **uniquement des coups de type taking**.
Enlever k jetons $\Leftrightarrow k \in S$.

Exemple : $SUB(\{2, 4\})$



Jeux de soustraction

Jeu de soustraction $SUB(S)$

Jeu taking-breaking avec **uniquement des coups de type taking**.
Enlever k jetons $\Leftrightarrow k \in S$.

Exemple : $SUB(\{2, 4\})$



Jeux de soustraction

Jeu de soustraction $\text{SUB}(S)$

Jeu taking-breaking avec **uniquement des coups de type taking**.
Enlever k jetons $\Leftrightarrow k \in S$.

Exemple : $\text{SUB}(\{2, 4\})$



Jeux de soustraction

Jeu de soustraction $SUB(S)$

Jeu taking-breaking avec **uniquement des coups de type taking**.
Enlever k jetons $\Leftrightarrow k \in S$.

Exemple : $SUB(\{2, 4\})$



Jeux de soustraction

Jeu de soustraction $SUB(S)$

Jeu taking-breaking avec **uniquement des coups de type taking**.
Enlever k jetons $\Leftrightarrow k \in S$.

Exemple : $SUB(\{2, 4\})$



Étudier un jeu de soustraction

Problèmes de décision

- ▶ Le jeu est-il \mathcal{N} ou \mathcal{P} ?
- ▶ Quelle est la stratégie gagnante ?

Étudier un jeu de soustraction

Problèmes de décision

- ▶ Le jeu est-il \mathcal{N} ou \mathcal{P} ?
- ▶ Quelle est la stratégie gagnante ?

→ Généralement PSPACE-complet...

Étudier un jeu de soustraction

Problèmes de décision

- ▶ Le jeu est-il \mathcal{N} ou \mathcal{P} ?
- ▶ Quelle est la stratégie gagnante ?

→ Généralement PSPACE-complet...

Remarque

Jouer sur plusieurs piles \equiv Jouer sur la somme

Étudier un jeu de soustraction

Problèmes de décision

- ▶ Le jeu est-il \mathcal{N} ou \mathcal{P} ?
- ▶ Quelle est la stratégie gagnante ?

→ Généralement PSPACE-complet...

Remarque

Jouer sur plusieurs piles \equiv Jouer sur la somme

\Rightarrow Étudier le jeu sur une pile suffit !

Étudier un jeu de soustraction

Problèmes de décision

- ▶ Le jeu est-il \mathcal{N} ou \mathcal{P} ?
- ▶ Quelle est la stratégie gagnante ?

→ Généralement PSPACE-complet...

Remarque

Jouer sur plusieurs piles \equiv Jouer sur la somme

\Rightarrow Étudier le jeu sur une pile suffit !

Séquence de Grundy

Liste des valeurs de Grundy pour des piles de taille 0, 1, 2, etc.

Étudier un jeu de soustraction

Théorème (Folklore)

Si S fini, alors la séquence de $\text{SUB}(S)$ est ultimement périodique.

Étudier un jeu de soustraction

Théorème (Folklore)

Si S fini, alors la séquence de $\text{SUB}(S)$ est **ultimement périodique**.

Théorème (Albert, Nowakowski, Wolfe 2007)

Si S fini, alors la séquence de $\text{SUB}(\mathbb{N} \setminus S)$ est **ultimement arithmétique périodique**.

Étudier un jeu de soustraction

Théorème (Folklore)

Si S fini, alors la séquence de $\text{SUB}(S)$ est **ultimement périodique**.

Théorème (Albert, Nowakowski, Wolfe 2007)

Si S fini, alors la séquence de $\text{SUB}(\mathbb{N} \setminus S)$ est **ultimement arithmétique périodique**.

Problèmes ouverts

- ▶ Périodicité de $\text{SUB}(S)$ pour S quelconque ?
- ▶ Un jeu est-il périodique ou ultimement périodique ?

Jeux octaux

Jeu octal

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un **code octal**.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3\dots}$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$:

Jeux octaux

Jeu octal

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un **code octal**.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3\dots}$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$:

- Retirer i jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$

Jeux octaux

Jeu octal

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un **code octal**.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3\dots}$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$:

- ▶ Retirer i jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- ▶ Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$

Jeux octaux

Jeu octal

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un **code octal**.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3\dots}$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$:

- ▶ Retirer i jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- ▶ Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- ▶ Laisser une pile non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$

Jeux octaux

Jeu octal

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un **code octal**.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3\dots}$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$:

- ▶ Retirer i jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- ▶ Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- ▶ Laisser une pile non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$
- ▶ Couper la pile en deux $\Leftrightarrow b_i^2 = 1$

Jeux octaux

Jeu octal

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un **code octal**.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3\dots}$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$:

- ▶ Retirer i jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- ▶ Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- ▶ Laisser une pile non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$
- ▶ Couper la pile en deux $\Leftrightarrow b_i^2 = 1$

Exemple : **0.024**



Jeux octaux

Jeu octal

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un **code octal**.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3\dots}$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$:

- ▶ Retirer i jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- ▶ Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- ▶ Laisser une pile non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$
- ▶ Couper la pile en deux $\Leftrightarrow b_i^2 = 1$

Exemple : **0.024**



Jeux octaux

Jeu octal

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un **code octal**.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3\dots}$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$:

- ▶ Retirer i jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- ▶ Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- ▶ Laisser une pile non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$
- ▶ Couper la pile en deux $\Leftrightarrow b_i^2 = 1$

Exemple : **0.024**



Jeux octaux

Jeu octal

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un **code octal**.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3\dots}$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$:

- ▶ Retirer i jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- ▶ Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- ▶ Laisser une pile non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$
- ▶ Couper la pile en deux $\Leftrightarrow b_i^2 = 1$

Exemple : **0.024**



Jeux octaux

Jeu octal

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un **code octal**.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3\dots}$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$:

- ▶ Retirer i jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- ▶ Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- ▶ Laisser une pile non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$
- ▶ Couper la pile en deux $\Leftrightarrow b_i^2 = 1$

Exemple : **0.024**



Jeux octaux

Jeu octal

Jeu taking-breaking dont les règles sont définies par un **code octal**.

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3\dots}$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$:

- ▶ Retirer i jetons $\Leftrightarrow d_i \neq 0$
- ▶ Vider la pile $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- ▶ Laisser une pile non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$
- ▶ Couper la pile en deux $\Leftrightarrow b_i^2 = 1$

Des exemples connus

- ▶ NIM est **0.33333...**
- ▶ Les jeux de soustraction : $d_i \in \{0, 3\}$
- ▶ CRAM sur une ligne est **0.07**

Étudier les jeux octaux

Comme pour les jeux de soustraction : la [séquence de Grundy](#).

Étudier les jeux octaux

Comme pour les jeux de soustraction : la **séquence de Grundy**.

Problème : c'est beaucoup plus compliqué !

- ▶ Séquence de Grundy de **0.7** : période 2
- ▶ Séquence de Grundy de **0.07** : prépériode 68, période 34
- ▶ Séquence de Grundy de **0.007** : 2^{28} valeurs calculées, pas de régularité détectée !

Étudier les jeux octaux

Comme pour les jeux de soustraction : la **séquence de Grundy**.

Problème : c'est beaucoup plus compliqué !

- ▶ Séquence de Grundy de **0.7** : période **2**
- ▶ Séquence de Grundy de **0.07** : prépériode 68, période **34**
- ▶ Séquence de Grundy de **0.007** : **2^{28}** valeurs calculées, pas de régularité détectée !

Conjecture (Guy 1982)

Un jeu octal **fini** a une séquence de Grundy **ultimement périodique**.

Généraliser les jeux octaux

Deux façons :

Généraliser les jeux octaux

Deux façons :

1. Diviser une pile en plus de sous-piles \rightarrow Jeux hexadécimaux

Généraliser les jeux octaux

Deux façons :

1. Diviser une pile en plus de sous-piles → Jeux hexadécimaux
2. Travailler sur d'autres structures que les piles de jetons

Généraliser les jeux octaux

Deux façons :

1. Diviser une pile en plus de sous-piles \rightarrow Jeux hexadécimaux
2. Travailler sur d'autres structures que les piles de jetons

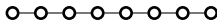
\Rightarrow Jouer à des jeux octaux... sur des graphes ! (enfin !)

Des piles de jetons aux graphes

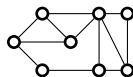
Observation



Jouer sur une pile



Jouer sur un chemin



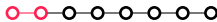
Jouer sur
un graphe

Des piles de jetons aux graphes

Observation



Jouer sur une pile



Jouer sur un chemin



Jouer sur
un graphe

► Retirer des jetons \rightarrow Supprimer un sous-graphe connexe

Des piles de jetons aux graphes

Observation



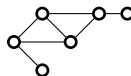
Jouer sur une pile

~



Jouer sur un chemin

~



Jouer sur
un graphe

► Retirer des jetons → Supprimer un sous-graphe connexe

Des piles de jetons aux graphes

Observation



Jouer sur une pile

~



Jouer sur un chemin

~

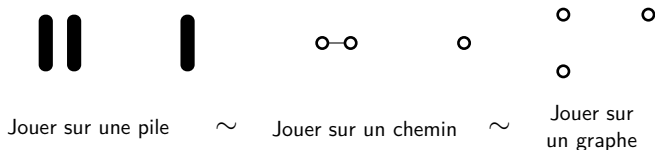


Jouer sur
un graphe

- ▶ Retirer des jetons → Supprimer un sous-graphe connexe
- ▶ Diviser une pile → Déconnecter un graphe

Des piles de jetons aux graphes

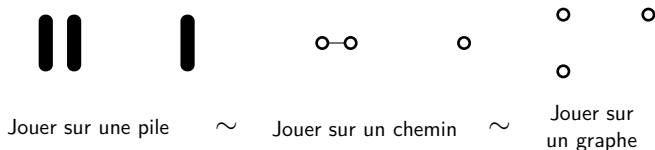
Observation



- ▶ Retirer des jetons \rightarrow Supprimer un sous-graphe connexe
- ▶ Diviser une pile \rightarrow Déconnecter un graphe

Des piles de jetons aux graphes

Observation



- ▶ Retirer des jetons → Supprimer un sous-graphe connexe
- ▶ Diviser une pile → Déconnecter un graphe

Jeu octal sur des graphes (BCDGMPS 2018)

Dans $\mathbf{d_0.d_1d_2d_3\dots}$, soit $d_i = b_i^0 + 2b_i^1 + 4b_i^2$:

- ▶ Supprimer une composante connexe d'ordre $i \Leftrightarrow d_i \neq 0$
- ▶ Vider le graphe $\Leftrightarrow b_i^0 = 1$
- ▶ Laisser un graphe non-vide $\Leftrightarrow b_i^1 = 1$
- ▶ Déconnecter le graphe $\Leftrightarrow b_i^2 = 1$

Jeux de suppression de sommets

ARC-KAYLES (Schaefer, 1978)

Supprimer 2 sommets adjacents \Rightarrow **0.07**

Jeux de suppression de sommets

ARC-KAYLES (Schaefer, 1978)

Supprimer 2 sommets adjacents \Rightarrow **0.07**

CRAM est **0.07** sur les grilles

Jeux de suppression de sommets

ARC-KAYLES (Schaefer, 1978)

Supprimer 2 sommets adjacents \Rightarrow **0.07**

CRAM est **0.07** sur les grilles

GRIM (Adams *et al.*, 2015)

Supprimer un sommet non-isolé \Rightarrow **0.6**

Jeux de suppression de sommets

ARC-KAYLES (Schaefer, 1978)

Supprimer 2 sommets adjacents \Rightarrow **0.07**

CRAM est **0.07** sur les grilles

GRIM (Adams *et al.*, 2015)

Supprimer un sommet non-isolé \Rightarrow **0.6**

NODE-KAYLES (Schaefer, 1978)

Supprimer un sommet et tous ses voisins \Rightarrow Pas un jeu octal

Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

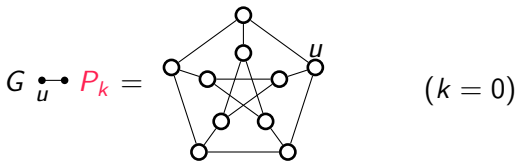
- ▶ Jeux octaux \rightarrow séquence de Grundy
- ▶ Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow ?$

Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- ▶ Jeux octaux \rightarrow séquence de Grundy
- ▶ Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow ?$

Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

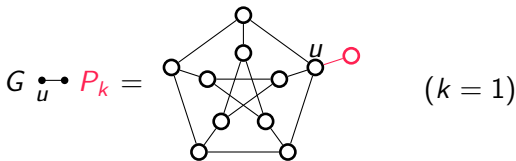


Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- ▶ Jeux octaux \rightarrow séquence de Grundy
- ▶ Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow ?$

Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

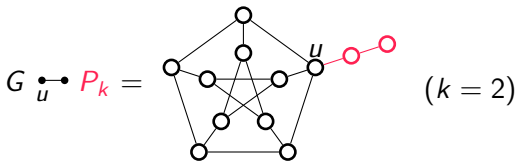


Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- ▶ Jeux octaux \rightarrow séquence de Grundy
- ▶ Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow ?$

Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

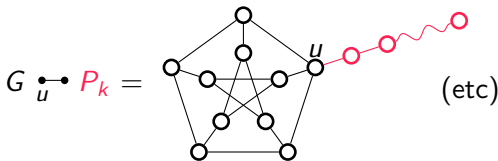


Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- ▶ Jeux octaux \rightarrow séquence de Grundy
- ▶ Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow ?$

Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.

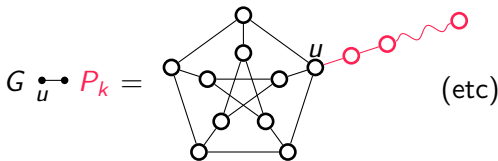


Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- ▶ Jeux octaux \rightarrow séquence de Grundy
- ▶ Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow ?$

Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.



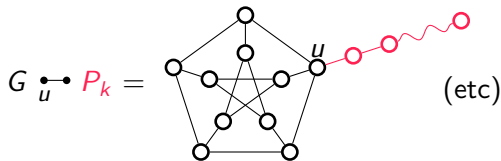
\rightarrow Approche déjà utilisée pour NODE-KAYLES (Fleischer et Trippen, 2004) et ARC-KAYLES (Huggan et Stevens, 2016)

Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- ▶ Jeux octaux \rightarrow séquence de Grundy
- ▶ Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow ?$

Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.



\rightarrow Approche déjà utilisée pour NODE-KAYLES (Fleischer et Trippen, 2004) et ARC-KAYLES (Huggan et Stevens, 2016)

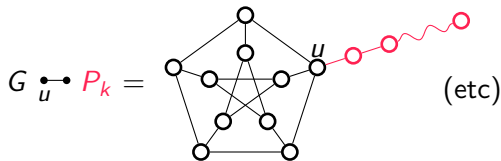
Difficile pour les jeux octaux !

Définir la régularité des jeux octaux dans les graphes

- ▶ Jeux octaux \rightarrow séquence de Grundy
- ▶ Jeux octaux sur les graphes $\rightarrow ?$

Idée

Étudier l'évolution des valeurs de Grundy quand on attache un chemin à un sommet donné.



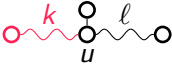
\rightarrow Approche déjà utilisée pour NODE-KAYLES (Fleischer et Trippen, 2004) et ARC-KAYLES (Huggan et Stevens, 2016)

Difficile pour les jeux octaux ! \Rightarrow Nous étudions les **jeux de soustraction connexes** $\text{CSG}(S)$

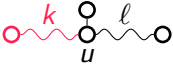
Résultats de régularité

Jeu	Graphe et sommet u	Régularité	Référence
-----	----------------------	------------	-----------

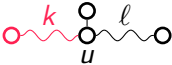
Résultats de régularité

Jeu	Graphe et sommet u	Régularité	Référence
ARC-KAYLES 0.07			Huggan et Stevens, 2016

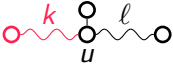
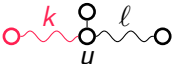
Résultats de régularité

Jeu	Graphe et sommet u	Régularité	Référence
ARC-KAYLES 0.07		Ultime périodicité conjecturée	Huggan et Stevens, 2016

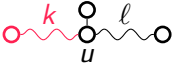
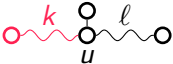
Résultats de régularité

Jeu	Graphe et sommet u	Régularité	Référence
ARC-KAYLES 0.07		Ultime périodicité conjecturée	Huggan et Stevens, 2016
Tout CSG (S fini)	Tout graphe G , tout sommet u	Ultime périodicité	D., Moncel, Parreau (2018+)

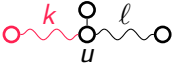
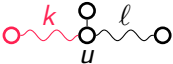
Résultats de régularité

Jeu	Graphe et sommet u	Régularité	Référence
ARC-KAYLES 0.07		Ultime périodicité conjecturée	Huggan et Stevens, 2016
Tout CSG (S fini)	Tout graphe G , tout sommet u	Ultime périodicité	D., Moncel, Parreau (2018+)
$CSG(S)$, $S = \{1, \dots, N\}$	Étoile $K_{1,n}$, u sommet central	Période $N + 1$	D., Moncel, Parreau (2018+)
		Période $N + 1$ Pré-période 0 ou $N + 1$	

Résultats de régularité

Jeu	Graphe et sommet u	Régularité	Référence
ARC-KAYLES 0.07		Ultime périodicité conjecturée	Huggan et Stevens, 2016
Tout CSG (S fini)	Tout graphe G , tout sommet u	Ultime périodicité	D., Moncel, Parreau (2018+)
$CSG(S)$, $S = \{1, \dots, N\}$	Étoile $K_{1,n}$, u sommet central	Période $N + 1$	D., Moncel, Parreau (2018+)
		Période $N + 1$ Prépériode 0 ou $N + 1$	
$CSG(S)$ $S = \{1, 2, 3\}$	Toute étoile subdivisée, u sommet central ou feuille	Période $N + 1 = 4$	D., Moncel, Parreau (2018+)
$CSG(S)$ $S = \{1, 2\}$		Période $N + 1 = 3$	BDGMPS (2018)

Résultats de régularité

Jeu	Graphe et sommet u	Régularité	Référence
ARC-KAYLES 0.07		Ultime périodicité conjecturée	Huggan et Stevens, 2016
Tout CSG (S fini)	Tout graphe G , tout sommet u	Ultime périodicité	D., Moncel, Parreau (2018+)
$CSG(S)$, $S = \{1, \dots, N\}$	Étoile $K_{1,n}$, u sommet central	Période $N + 1$	D., Moncel, Parreau (2018+)
		Période $N + 1$ Prépériode 0 ou $N + 1$	
$CSG(S)$ $S = \{1, 2, 3\}$	Toute étoile subdivisée, u sommet central ou feuille	Période $N + 1 = 4$	D., Moncel, Parreau (2018+)
$CSG(S)$ $S = \{1, 2\}$		Période $N + 1 = 3$	Beaudou, D., Gravier, Moncel, Parreau, Sopena (2018)

Un résultat de périodicité sur les jeux de soustraction connexes

Théorème (D., Moncel, Parreau 2018+)

Si S est fini, alors pour tout graphe G et sommet u la séquence des $G \bullet_u \bullet P_k$ pour $\text{CSG}(S)$ est ultimement périodique.

Un résultat de périodicité sur les jeux de soustraction connexes

Théorème (D., Moncel, Parreau 2018+)

Si S est fini, alors pour tout graphe G et sommet u la séquence des $G \bullet_u \bullet P_k$ pour $\text{CSG}(S)$ est ultimement périodique.

Idée de la preuve

Induction sur $|G|$.

1. $|G| \in \{0, 1\}$: cas des chemins

Un résultat de périodicité sur les jeux de soustraction connexes

Théorème (D., Moncel, Parreau 2018+)

Si S est fini, alors pour tout graphe G et sommet u la séquence des $G \xrightarrow{u} P_k$ pour $\text{CSG}(S)$ est ultimement périodique.

Idée de la preuve

Induction sur $|G|$.

1. $|G| \in \{0, 1\}$: cas des chemins
2. Sinon, trois types de coups possibles :
 - 2.1 Jouer sur $P_k \rightarrow |L|$ coups différents
 - 2.2 Jouer sur G sans supprimer $u \rightarrow$ au plus $2^{|G|-1}$ coups différents
 - 2.3 Vider $G \rightarrow$ au plus $|L|$ coups différents

Un résultat de périodicité sur les jeux de soustraction connexes

Théorème (D., Moncel, Parreau 2018+)

Si S est fini, alors pour tout graphe G et sommet u la séquence des $G \bullet_u \bullet P_k$ pour $\text{CSG}(S)$ est ultimement périodique.

Idée de la preuve

Induction sur $|G|$.

1. $|G| \in \{0, 1\}$: cas des chemins
2. Sinon, trois types de coups possibles :
 - 2.1 Jouer sur $P_k \rightarrow |L|$ coups différents
 - 2.2 Jouer sur G sans supprimer $u \rightarrow$ au plus $2^{|G|-1}$ coups différents
 - 2.3 Vider $G \rightarrow$ au plus $|L|$ coups différents

$$\Rightarrow \mathcal{G}(G) \leq C$$

Un résultat de périodicité sur les jeux de soustraction connexes

Théorème (D., Moncel, Parreau 2018+)

Si S est fini, alors pour tout graphe G et sommet u la séquence des $G \bullet_u \bullet P_k$ pour $\text{CSG}(S)$ est ultimement périodique.

Idée de la preuve

Induction sur $|G|$.

1. $|G| \in \{0, 1\}$: cas des chemins
2. Sinon, trois types de coups possibles :
 - 2.1 Jouer sur $P_k \rightarrow |L|$ coups différents
 - 2.2 Jouer sur G sans supprimer $u \rightarrow$ au plus $2^{|G|-1}$ coups différents
 - 2.3 Vider $G \rightarrow$ au plus $|L|$ coups différents

$$\Rightarrow \mathcal{G}(G) \leq C$$

Chaque coup emmène vers une séquence périodique, par calcul du mex on a le résultat.

Questions

1. Quelle période pour un jeu de soustraction ?
2. Quels jeux sont purement périodiques, sur quels graphes ?
3. Et les jeux $\text{CSG}(\mathbb{N} \setminus S)$?

Questions

1. Quelle période pour un jeu de soustraction ?
2. Quels jeux sont purement périodiques, sur quels graphes ?
3. Et les jeux $\text{CSG}(\mathbb{N} \setminus S)$?

La famille $\text{CSG}(\{1, \dots, N\})$

Retirer de 1 à N sommets connectés, sans déconnecter le graphe.

La famille $\text{CSG}(\{1, \dots, N\})$

Retirer de 1 à N sommets connectés, sans déconnecter le graphe.

Théorème (Folklore)

La séquence de Grundy des chemins est $\overline{0, 1, 2, \dots, N}$.

La famille $\text{CSG}(\{1, \dots, N\})$

Retirer de 1 à N sommets connectés, sans déconnecter le graphe.

Théorème (Folklore)

La séquence de Grundy des chemins est $\overline{0, 1, 2, \dots, N}$.

Question

Y a-t-il des familles pour lesquelles la séquence des $G \xrightarrow{\bullet} P_k$ a période $N + 1$?

Un méta-lemme pour $\text{CSG}(\{1, \dots, N\})$

On étudie l'issue de $G + G \xrightarrow{\mathbf{u}} P_{N+1} \rightarrow$ est-elle \mathcal{P} ?

Un méta-lemme pour $\text{CSG}(\{1, \dots, N\})$

On étudie l'issue de $G + G \overset{\bullet}{\underset{u}{\dashrightarrow}} P_{N+1} \rightarrow$ est-elle \mathcal{P} ?

Méta-lemme

Si :

1. $G + G \overset{\bullet}{\underset{u}{\dashrightarrow}} P_{N+1}$ est \mathcal{N}
2. $H + H \overset{\bullet}{\underset{u}{\dashrightarrow}} P_{N+1}$ est \mathcal{P} pour tout sous-graphe H de G contenant u

Alors les coups gagnants sont dans la composante G , suppriment u et laissent au moins 2 sommets.

Un méta-lemme pour $\text{CSG}(\{1, \dots, N\})$

On étudie l'issue de $G + G \overset{u}{\bullet} \bullet P_{N+1} \rightarrow$ est-elle \mathcal{P} ?

Méta-lemme

Si :

1. $G + G \overset{u}{\bullet} \bullet P_{N+1}$ est \mathcal{N}
2. $H + H \overset{u}{\bullet} \bullet P_{N+1}$ est \mathcal{P} pour tout sous-graphe H de G contenant u

Alors les coups gagnants sont dans la composante G , suppriment u et laissent au moins 2 sommets.

Preuve

► Jouer sur $P_{N+1} \rightarrow$ Réponse vers $G + G$

Un méta-lemme pour $\text{CSG}(\{1, \dots, N\})$

On étudie l'issue de $G + G \overset{u}{\bullet\bullet} P_{N+1} \rightarrow$ est-elle \mathcal{P} ?

Méta-lemme

Si :

1. $G + G \overset{u}{\bullet\bullet} P_{N+1}$ est \mathcal{N}
2. $H + H \overset{u}{\bullet\bullet} P_{N+1}$ est \mathcal{P} pour tout sous-graphe H de G contenant u

Alors les coups gagnants sont dans la composante G , suppriment u et laissent au moins 2 sommets.

Preuve

- Jouer sur $P_{N+1} \rightarrow$ Réponse vers $G + G$
- Jouer sur G sans supprimer $u \rightarrow$ Réponse vers $H + H \overset{u}{\bullet\bullet} P_{N+1}$

Un méta-lemme pour $\text{CSG}(\{1, \dots, N\})$

On étudie l'issue de $G + G \overset{u}{\bullet\bullet} P_{N+1} \rightarrow$ est-elle \mathcal{P} ?

Méta-lemme

Si :

1. $G + G \overset{u}{\bullet\bullet} P_{N+1}$ est \mathcal{N}
2. $H + H \overset{u}{\bullet\bullet} P_{N+1}$ est \mathcal{P} pour tout sous-graphe H de G contenant u

Alors les coups gagnants sont dans la composante G , suppriment u et laissent au moins 2 sommets.

Preuve

- ▶ Jouer sur $P_{N+1} \rightarrow$ Réponse vers $G + G$
- ▶ Jouer sur G sans supprimer $u \rightarrow$ Réponse vers $H + H \overset{u}{\bullet\bullet} P_{N+1}$
- ▶ Laisser 0 ou 1 sommet \rightarrow Réponse vers P_{N+1} ou $P_1 + P_{N+2}$

Des étoiles plein les jeux !

Théorème (D., Moncel, Parreau, 2018+)

Si G est une étoile, alors la séquence des $G_{\vec{u} \rightarrow P_k}$ est périodique de période $N + 1$.

Des étoiles plein les jeux !

Théorème (D., Moncel, Parreau, 2018+)

Si G est une étoile, alors la séquence des $G_{\vec{u} \rightarrow P_k}$ est périodique de période $N + 1$.

Théorème (D., Moncel, Parreau, 2018+)

Si $G = S_{1,\ell}$ et u est le sommet central, alors la séquence des $G_{\vec{u} \rightarrow P_k}$ est ultimement périodique de période $N + 1$.

Des étoiles plein les jeux !

Théorème (D., Moncel, Parreau, 2018+)

Si G est une étoile, alors la séquence des $G_{\vec{u} \rightarrow P_k}$ est périodique de période $N + 1$.

Théorème (D., Moncel, Parreau, 2018+)

Si $G = S_{1,\ell}$ et u est le sommet central, alors la séquence des $G_{\vec{u} \rightarrow P_k}$ est ultimement périodique de période $N + 1$.

Remarque

Périodique pour certaines valeurs de ℓ , prépériode $N + 1$ pour d'autres.

Les étoiles subdivisées ?

Problème : beaucoup de cas de base à considérer...

Les étoiles subdivisées ?

Problème : beaucoup de cas de base à considérer...

Théorème (BCDGMPS, 2018)

Si G est une étoile subdivisée et u est une feuille ou le sommet central, alors la séquence des $G_{\bullet \rightarrow \bullet} P_k$ est périodique de période 3 pour $\text{CSG}(\{1, 2\})$.

Théorème (D., Moncel, Parreau, 2018+)

Si G est une étoile subdivisée et u est une feuille ou le sommet central, alors la séquence des $G_{\bullet \rightarrow \bullet} P_k$ est périodique de période 4 pour $\text{CSG}(\{1, 2, 3\})$.

Les étoiles subdivisées ?

Problème : beaucoup de cas de base à considérer...

Théorème (BCDGMPS, 2018)

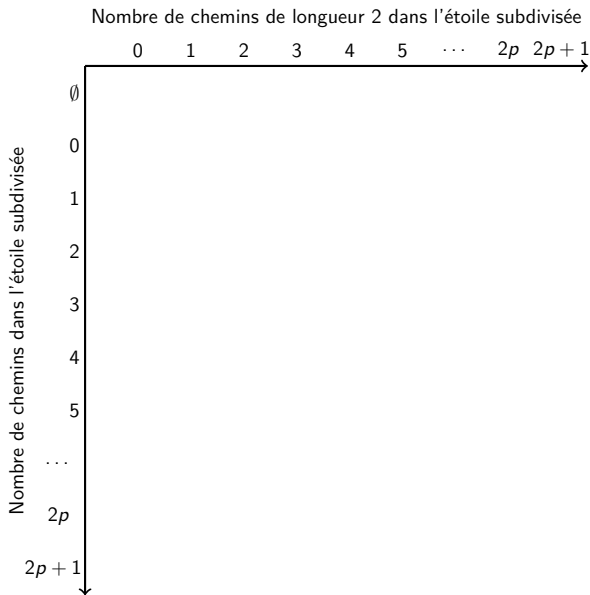
Si G est une étoile subdivisée et u est une feuille ou le sommet central, alors la séquence des $G_{\bullet \rightarrow P_k}$ est périodique de période 3 pour $\text{CSG}(\{1, 2\})$.

Théorème (D., Moncel, Parreau, 2018+)

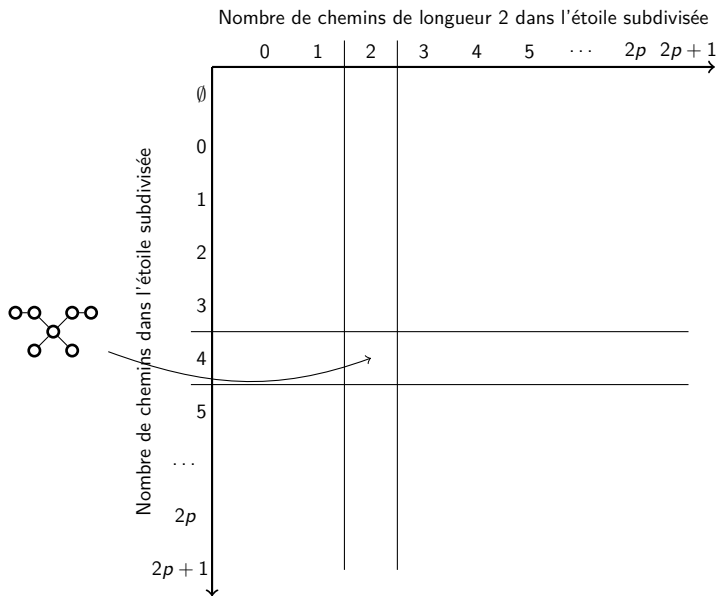
Si G est une étoile subdivisée et u est une feuille ou le sommet central, alors la séquence des $G_{\bullet \rightarrow P_k}$ est périodique de période 4 pour $\text{CSG}(\{1, 2, 3\})$.

⇒ Réduction des chemins dans les étoiles subdivisées.

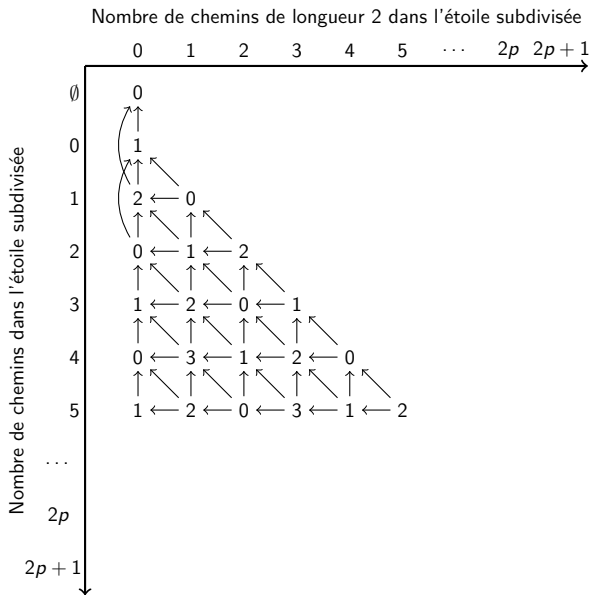
Les valeurs de Grundy des étoiles pour $\text{CSG}(\{1, 2\})$



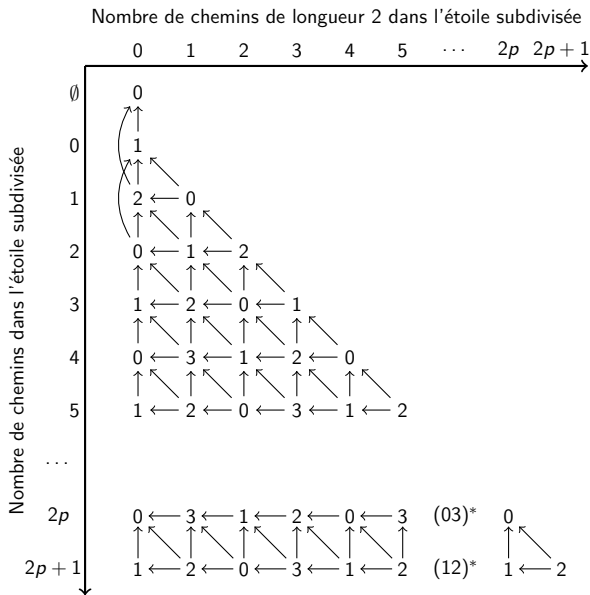
Les valeurs de Grundy des étoiles pour $\text{CSG}(\{1, 2\})$



Les valeurs de Grundy des étoiles pour $\text{CSG}(\{1, 2\})$



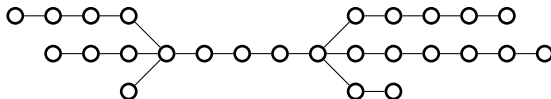
Les valeurs de Grundy des étoiles pour $\text{CSG}(\{1, 2\})$



CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

Réduction des chemins dans les biétoiles

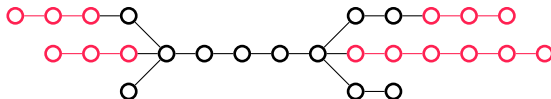
Périodicité \Rightarrow réduction des chemins des étoiles.



CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

Réduction des chemins dans les biétoiles

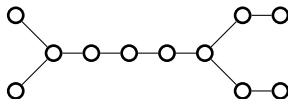
Périodicité \Rightarrow réduction des chemins des étoiles.



CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité \Rightarrow réduction des chemins des étoiles.

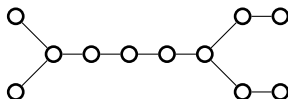


CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité \Rightarrow réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.



CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité \Rightarrow réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.



CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité \Rightarrow réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.



CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité \Rightarrow réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.



Réduction de chemins pour CSG($\{1, 2\}$)



Chemins

CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

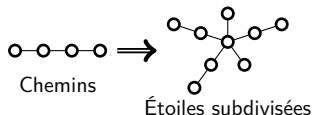
Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité \Rightarrow réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.



Réduction de chemins pour CSG($\{1, 2\}$)



CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

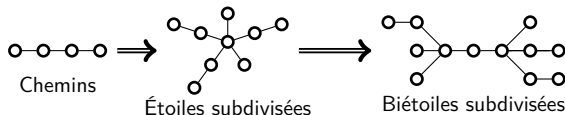
Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité \Rightarrow réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.



Réduction de chemins pour CSG($\{1, 2\}$)



CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées

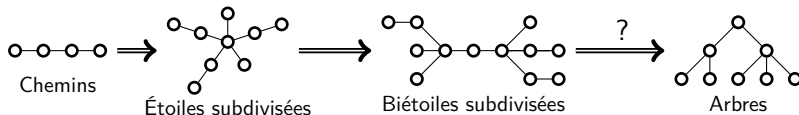
Réduction des chemins dans les biétoiles

Périodicité \Rightarrow réduction des chemins des étoiles.

Réduction du chemin central.



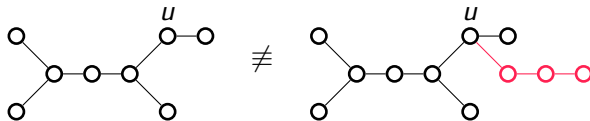
Réduction de chemins pour CSG($\{1, 2\}$)



CSG($\{1, 2\}$) sur les arbres ?

Proposition

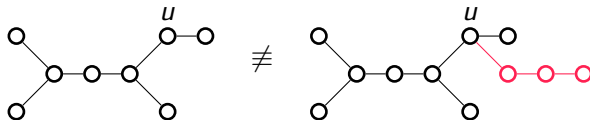
La réduction des chemins **n'est pas valable** pour les arbres :



CSG($\{1, 2\}$) sur les arbres ?

Proposition

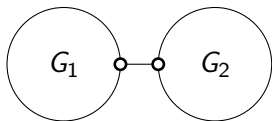
La réduction des chemins **n'est pas valable** pour les arbres :



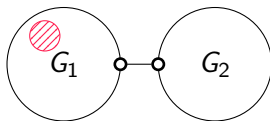
Question ouverte

Quelle période pour les arbres ?

Jeux de soustraction connexes et isthmes

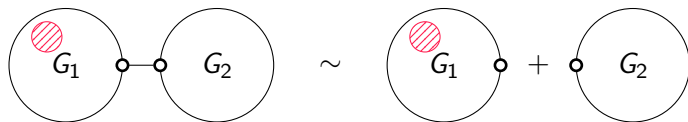


Jeux de soustraction connexes et isthmes



Jouer sur le graphe

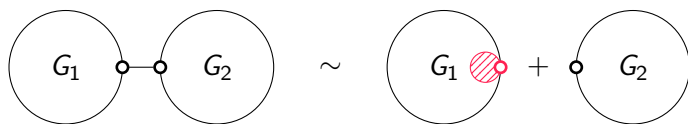
Jeux de soustraction connexes et isthmes



Jouer sur le graphe

Jouer sur les deux sous-graphes

Jeux de soustraction connexes et isthmes

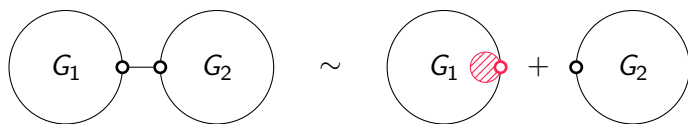


Jouer sur le graphe

Jouer sur les deux sous-graphes

... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

Jeux de soustraction connexes et isthmes



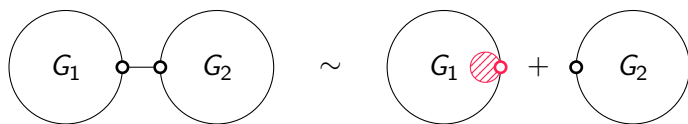
Jouer sur le graphe

Jouer sur les deux sous-graphes

... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

\Rightarrow Possible de définir une pseudo-somme ?

Jeux de soustraction connexes et isthmes



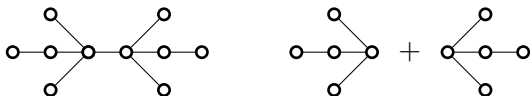
Jouer sur le graphe

Jouer sur les deux sous-graphes

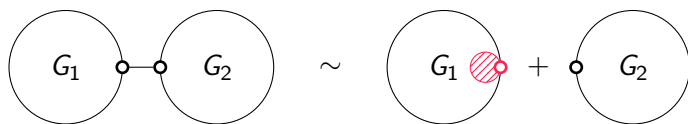
... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

\Rightarrow Possible de définir une pseudo-somme ?

Application : $\text{CSG}(\{1, 2\})$ sur les biétoiles subdivisées



Jeux de soustraction connexes et isthmes



Jouer sur le graphe

Jouer sur les deux sous-graphes

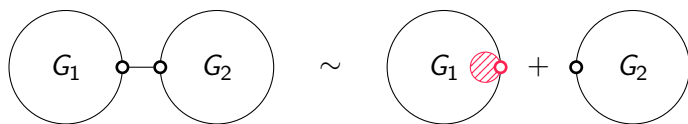
... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

\Rightarrow Possible de définir une pseudo-somme ?

Application : CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées



Jeux de soustraction connexes et isthmes



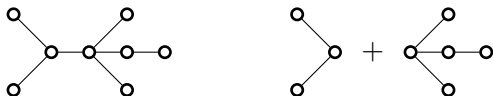
Jouer sur le graphe

Jouer sur les deux sous-graphes

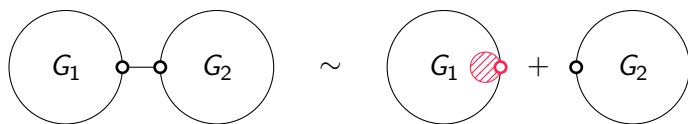
... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

\Rightarrow Possible de définir une pseudo-somme ?

Application : CSG($\{1, 2\}$) sur les biétoiles subdivisées



Jeux de soustraction connexes et isthmes



Jouer sur le graphe

Jouer sur les deux sous-graphes

... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

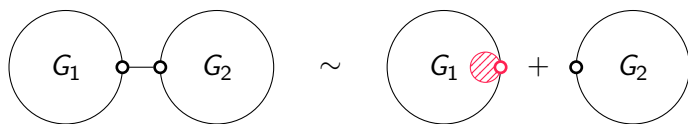
\Rightarrow Possible de définir une pseudo-somme ?

Application : $\text{CSG}(\{1, 2\})$ sur les biétoiles subdivisées



\Rightarrow L'isthme est atteignable à la toute fin

Jeux de soustraction connexes et isthmes



Jouer sur le graphe

Jouer sur les deux sous-graphes

... sauf en jouant sur le départ de l'isthme !

\Rightarrow Possible de définir une pseudo-somme ?

Application : $\text{CSG}(\{1, 2\})$ sur les biétoiles subdivisées



\Rightarrow L'isthme est atteignable à la toute fin

\Rightarrow Deux pseudo-sommes et raffinements des valeurs de Grundy

Les valeurs de Grundy des biétoiles pour $\text{CSG}(\{1, 2\})$

La valeur de Grundy de la biétoile en fonction des valeurs affinées des deux étoiles quand le chemin central est de longueur 1 :

Les valeurs de Grundy des biétoiles pour $\text{CSG}(\{1, 2\})$

La valeur de Grundy de la biétoile en fonction des valeurs affinées des deux étoiles quand le chemin central est de longueur 1 :

	0	1	1*	2	2*	2 [□]	3	3 [□]
0	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus
1	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus
1*	\oplus	\oplus	2	\oplus	0	\oplus	\oplus	\oplus
2	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus
2*	\oplus	\oplus	0	\oplus	1	1	\oplus	0
2 [□]	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	1	\oplus	\oplus	\oplus
3	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus
3 [□]	\oplus	\oplus	\oplus	\oplus	0	\oplus	\oplus	\oplus

où \oplus est la nim-somme.

Les valeurs de Grundy des biétoiles pour $\text{CSG}(\{1, 2\})$

La valeur de Grundy de la biétoile en fonction des valeurs affinées des deux étoiles quand le chemin central est de longueur 2 :

	0	0*	1	1*	1 \square	2	2*	2 \square	3	3 \square
0	\oplus	\oplus_1	\oplus	2	\oplus_1	\oplus	0	\oplus_1	\oplus	\oplus_1
0*	\oplus_1	\oplus_1	\oplus_1	2	\oplus_1	\oplus_1	0	\oplus_1	\oplus_1	\oplus_1
1	\oplus	\oplus_1	\oplus	3	\oplus_1	\oplus	1	\oplus_1	\oplus	\oplus_1
1*	2	2	3	0	3	0	1	1	1	0
1 \square	\oplus_1	\oplus_1	\oplus_1	3	\oplus_1	\oplus_1	1	\oplus_1	\oplus_1	\oplus_1
2	\oplus	\oplus_1	\oplus	0	\oplus_1	\oplus	2	\oplus_1	\oplus	\oplus_1
2*	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2 \square	\oplus_1	\oplus_1	\oplus_1	1	\oplus_1	\oplus_1	2	0	\oplus_1	1
3	\oplus	\oplus_1	\oplus	1	\oplus_1	\oplus	3	\oplus_1	\oplus	\oplus_1
3 \square	\oplus_1	\oplus_1	\oplus_1	0	\oplus_1	\oplus_1	3	1	\oplus_1	0

où \oplus est la nim-somme et $x\oplus_1y$ signifie $x \oplus y \oplus 1$.

Au final

Conclusion

- ▶ Généralisation des jeux octaux aux graphes
- ▶ Résultats de régularité pour les jeux de soustraction
- ▶ Pseudo-somme pour les biétoiles

Au final

Conclusion

- ▶ Généralisation des jeux octaux aux graphes
- ▶ Résultats de régularité pour les jeux de soustraction
- ▶ Pseudo-somme pour les biétoiles

Perspectives

- ▶ CSG : même période que les jeux de soustraction classiques ?
- ▶ Explorer d'autres familles de jeux octaux sur des graphes
- ▶ Complexité

Au final

Conclusion

- ▶ Généralisation des jeux octaux aux graphes
- ▶ Résultats de régularité pour les jeux de soustraction
- ▶ Pseudo-somme pour les biétoiles

Perspectives

- ▶ CSG : même période que les jeux de soustraction classiques ?
- ▶ Explorer d'autres familles de jeux octaux sur des graphes
- ▶ Complexité

