La coloration *d*-relaxée somme-distinguante

Antoine Dailly[1], Éric Duchêne[2],
Aline Parreau[2], Elżbieta Sidorowicz[3]

JGA 2021

[1] G-SCOP, Grenoble
[2] LIRIS, Lyon
[3] University of Zielona Góra, Pologne

Colorations distinguantes

Principe

Une coloration des arêtes ω d'un graphe G induit une coloration des sommets σ_ω. On veut que σ_ω *distingue* les sommets de G.

Colorations distinguantes

Principe

Une coloration des arêtes ω d'un graphe G induit une coloration des sommets σ_ω. On veut que σ_ω *distingue* les sommets de G.

- Distinction globale : $\forall u, v \in V(G), \sigma_\omega(u) \neq \sigma_\omega(v)$
- Distinction locale : σ_ω est propre

Colorations distinguantes

Principe

Une coloration des arêtes ω d'un graphe G induit une coloration des sommets σ_ω. On veut que σ_ω *distingue* les sommets de G.

- Distinction globale : $\forall u, v \in V(G), \sigma_\omega(u) \neq \sigma_\omega(v)$
- Distinction locale : σ_ω est propre

Exemples

$\sigma_\omega(u)$	Globale	Locale
$\bigcup_{v \in N(u)} \omega(uv)$	[Harary & Plantholt, 1985]	[Györi *et al.*, 2008]
$\sum_{v \in N(u)} \omega(uv)$	[Chartrand *et al.*, 1988]	[Karoński *et al.*, 2004]
$\prod_{v \in N(u)} \omega(uv)$	Non-défini	[Skowronek-Kaziów, 2008]

Colorations distinguantes

Principe

Une coloration des arêtes ω d'un graphe G induit une coloration des sommets σ_ω. On veut que σ_ω *distingue* les sommets de G.

- Distinction globale : $\forall u, v \in V(G), \sigma_\omega(u) \neq \sigma_\omega(v)$
- Distinction locale : σ_ω est propre

Exemples

$\sigma_\omega(u)$	Globale	Locale
$\bigcup_{v \in N(u)} \omega(uv)$	[Harary & Plantholt, 1985]	[Györi *et al.*, 2008]
$+\ \omega$ propre	[Burris & Schelp, 1997]	[Zhang *et al.*, 2002]
$\sum_{v \in N(u)} \omega(uv)$	[Chartrand *et al.*, 1988]	[Karoński *et al.*, 2004]
$+\ \omega$ propre	[Lo, 1985]	[Flandrin *et al.*, 2013]
$\prod_{v \in N(u)} \omega(uv)$	Non-défini	[Skowronek-Kaziów, 2008]
$+\ \omega$ propre	Non-défini	[Li *et al.*, 2017]

Colorations distinguantes

Principe

Une coloration des arêtes ω d'un graphe G induit une coloration des sommets σ_ω. On veut que σ_ω *distingue* les sommets de G.

- Distinction globale : $\forall u, v \in V(G), \sigma_\omega(u) \neq \sigma_\omega(v)$
- Distinction locale : σ_ω est propre

Exemples

$\sigma_\omega(u)$	Globale	Locale
$\bigcup_{v \in N(u)} \omega(uv)$	[Harary & Plantholt, 1985]	[Györi *et al.*, 2008]
$+\ \omega$ propre	[Burris & Schelp, 1997]	[Zhang *et al.*, 2002]
$\sum_{v \in N(u)} \omega(uv)$	[Chartrand *et al.*, 1988]	[Karoński *et al.*, 2004]
$+\ \omega$ propre	[Lo, 1985]	[Flandrin *et al.*, 2013]
$\prod_{v \in N(u)} \omega(uv)$	Non-défini	[Skowronek-Kaziów, 2008]
$+\ \omega$ propre	Non-défini	[Li *et al.*, 2017]

$\rightarrow$ On travaille sur les colorations d'arêtes localement somme-distinguantes

Coloration d'arêtes somme-distinguante

Définition

Soit ω une k-coloration d'arêtes de G. On définit la coloration de sommets σ_ω : $\sigma_\omega(u) = \sum_{v \in N(u)} \omega(uv)$.
Objectif : rendre σ_ω propre en minimisant k.

Coloration d'arêtes somme-distinguante

Définition

Soit ω une k-coloration d'arêtes de G. On définit la coloration de sommets σ_ω : $\sigma_\omega(u) = \sum_{v \in N(u)} \omega(uv)$.
Objectif : rendre σ_ω propre en minimisant k.

Remarques

- Si G non-connexe, travail indépendant sur chaque composante
- Existe toujours si G n'a pas de composante K_2

Coloration d'arêtes somme-distinguante

Définition

Soit ω une k-coloration d'arêtes de G. On définit la coloration de sommets σ_ω : $\sigma_\omega(u) = \sum_{v \in N(u)} \omega(uv)$.
Objectif : rendre σ_ω propre en minimisant k.

Remarques

- Si G non-connexe, travail indépendant sur chaque composante
- Existe toujours si G n'a pas de composante K_2

Conjecture 1-2-3 (Karoński, Luczak, Thomason, 2004)

Si aucune restriction sur ω, alors au plus 3 couleurs suffisent.

Conjecture (Flandrin, Marczyk, Przybylo, Sacle, Woźniak, 2013)

Si ω est propre et $G \neq C_5$, alors $k \leq \Delta(G) + 2$.

État de l'art

Conjecture 1-2-3

- Meilleure borne générale : 5 [Kalkowski, Karoński, Pfender, 2011]
- Vraie pour les graphes 3-colorables [Karoński *et al.*, 2004], et 2 suffisent pour les arbres [Chang *et al.*, 2011]
- Vraie pour les graphes suffisamment grands et très denses ($\delta(G) > 0.99985n$) [Zhong, 2019] ($\delta(G) \geq C \log(\Delta(G))$) [Przybyło, 2020+]
- Borne de 4 pour les graphes d-réguliers, et de 3 si $d \geq 10^8$ [Przybyło, 2021]

État de l'art

Conjecture 1-2-3

- Meilleure borne générale : 5 [Kalkowski, Karoński, Pfender, 2011]
- Vraie pour les graphes 3-colorables [Karoński *et al.*, 2004], et 2 suffisent pour les arbres [Chang *et al.*, 2011]
- Vraie pour les graphes suffisamment grands et très denses ($\delta(G) > 0.99985n$) [Zhong, 2019] ($\delta(G) \geq C\log(\Delta(G))$) [Przybyło, 2020+]
- Borne de 4 pour les graphes d-réguliers, et de 3 si $d \geq 10^8$ [Przybyło, 2021]

Variante propre

- Vraie pour les arbres, K_n, $K_{n,n}$ [Flandrin *et al.*, 2013]
- Borne de $\lceil \frac{10\Delta(G)+2}{3} \rceil$ [Wang & Yan, 2014]
- Borne de 6 pour les graphes subcubiques [Huo *et al.* et Yu *et al.*, 2017]

Coloration d'arêtes d-relaxée somme-distinguante

Objectif : cadre général englobant ces deux conjectures

Coloration d'arêtes d-relaxée somme-distinguante

Objectif : cadre général englobant ces deux conjectures

Définition (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Une k-coloration d'arêtes somme-distinguante est *d-relaxée* si chaque sommet est incident à **au plus** d arêtes de la même couleur.

Coloration d'arêtes d-relaxée somme-distinguante

Objectif : cadre général englobant ces deux conjectures

Définition (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Une k-coloration d'arêtes somme-distinguante est *d-relaxée* si chaque sommet est incident à **au plus** d arêtes de la même couleur.
Le plus petit k tel que G en admet une est noté $\chi'^{d}_{\sum}(G)$.

Coloration d'arêtes d-relaxée somme-distinguante

Objectif : cadre général englobant ces deux conjectures

Définition (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Une k-coloration d'arêtes somme-distinguante est *d-relaxée* si chaque sommet est incident à **au plus** d arêtes de la même couleur.
Le plus petit k tel que G en admet une est noté $\chi'^{d}_{\sum}(G)$.

- $d = \Delta(G)$: Conjecture 1-2-3
- $d = 1$: variante propre

Coloration d'arêtes d-relaxée somme-distinguante

Objectif : cadre général englobant ces deux conjectures

Définition (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Une k-coloration d'arêtes somme-distinguante est *d-relaxée* si chaque sommet est incident à **au plus** d arêtes de la même couleur.
Le plus petit k tel que G en admet une est noté $\chi'^{d}_{\sum}(G)$.

- $d = \Delta(G)$: Conjecture 1-2-3
- $d = 1$: variante propre

Conjecture (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Pour tout $G \notin \{K_2, C_5\}$ connexe, $\chi'^{d}_{\sum}(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{d} \right\rceil + 2$.

Nos résultats

Conjecture (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Pour tout $G \notin \{K_2, C_5\}$ connexe, $\chi'^{d}_{\sum}(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{d} \right\rceil + 2$.

Nos résultats

Conjecture (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Pour tout $G \notin \{K_2, C_5\}$ connexe, $\chi'^{d}_{\sum}(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{d} \right\rceil + 2$.

- Arbres : $\chi'^{d}_{\sum}(T) =$

$$\begin{cases} \frac{\Delta(T)}{d} + 1, & \text{si } \Delta(T) \equiv 0 \bmod d \text{ et il y a 2 sommets adjacents de degré } \Delta(T), \\ \left\lceil \frac{\Delta(T)}{d} \right\rceil, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nos résultats

Conjecture (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Pour tout $G \notin \{K_2, C_5\}$ connexe, $\chi'^{d}_{\sum}(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{d} \right\rceil + 2$.

- Arbres : $\chi'^{d}_{\sum}(T) =$
  $$\begin{cases} \frac{\Delta(T)}{d} + 1, & \text{si } \Delta(T) \equiv 0 \bmod d \text{ et il y a 2 sommets adjacents de degré } \Delta(T), \\ \left\lceil \frac{\Delta(T)}{d} \right\rceil, & \text{sinon.} \end{cases}$$
- Graphes complets :
  - $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \dots, n-2\} \Rightarrow \chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4$
  - $\chi'^{2}_{\sum}(K_n) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$ si $n \not\equiv 3 \bmod 4$ et $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2$ sinon

Nos résultats

Conjecture (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Pour tout $G \notin \{K_2, C_5\}$ connexe, $\chi'^{d}_{\sum}(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{d} \right\rceil + 2$.

- Arbres : $\chi'^{d}_{\sum}(T) =$
$$\begin{cases} \frac{\Delta(T)}{d} + 1, & \text{si } \Delta(T) \equiv 0 \bmod d \text{ et il y a 2 sommets adjacents de degré } \Delta(T), \\ \left\lceil \frac{\Delta(T)}{d} \right\rceil, & \text{sinon.} \end{cases}$$
- Graphes complets :
  - $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\} \Rightarrow \chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4$
  - $\chi'^{2}_{\sum}(K_n) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$ si $n \not\equiv 3 \bmod 4$ et $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2$ sinon
- Graphes subcubiques : $\chi'^{2}_{\sum}(G) \leq 4$

Nos résultats

Conjecture (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Pour tout $G \notin \{K_2, C_5\}$ connexe, $\chi'^{d}_{\sum}(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{d} \right\rceil + 2$.

- Arbres : $\chi'^{d}_{\sum}(T) =$
  $$\begin{cases} \frac{\Delta(T)}{d} + 1, & \text{si } \Delta(T) \equiv 0 \bmod d \text{ et il y a 2 sommets adjacents de degré } \Delta(T), \\ \left\lceil \frac{\Delta(T)}{d} \right\rceil, & \text{sinon.} \end{cases}$$
- Graphes complets :
  - $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \dots, n-2\} \Rightarrow \chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4$
  - $\chi'^{2}_{\sum}(K_n) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$ si $n \not\equiv 3 \bmod 4$ et $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2$ sinon
- Graphes subcubiques : $\chi'^{2}_{\sum}(G) \leq 4$ et tous les sommets de degré 2 peuvent avoir leurs arêtes incidentes de couleurs différentes

Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soient $n \geq 4$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$. Alors :

$$\chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4.$$

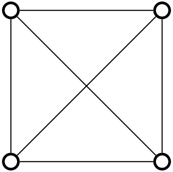
Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soient $n \geq 4$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$. Alors :

$$\chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4.$$

Preuve par induction



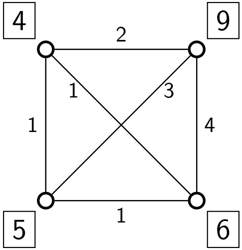
Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soient $n \geq 4$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$. Alors :

$$\chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4.$$

Preuve par induction



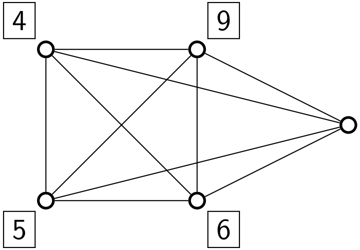
Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soient $n \geq 4$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$. Alors :

$$\chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4.$$

Preuve par induction



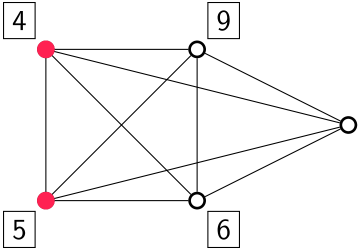
Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soient $n \geq 4$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$. Alors :

$$\chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4.$$

Preuve par induction



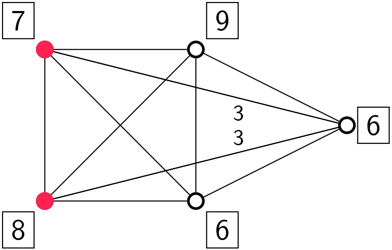
Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soient $n \geq 4$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$. Alors :

$$\chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4.$$

Preuve par induction



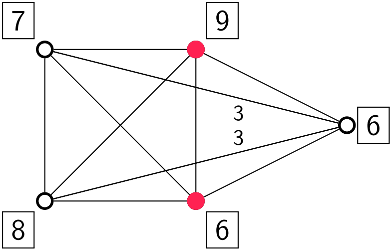
Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soient $n \geq 4$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$. Alors :

$$\chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4.$$

Preuve par induction



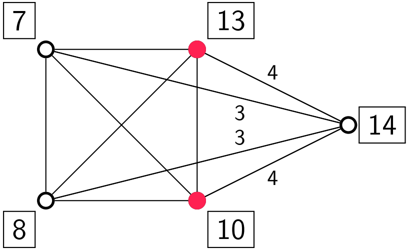
Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soient $n \geq 4$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$. Alors :

$$\chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4.$$

Preuve par induction



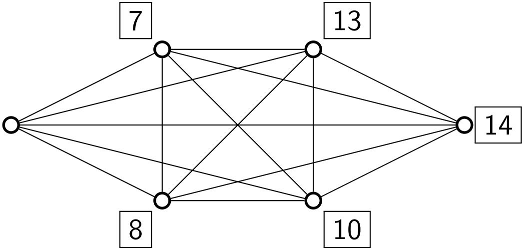
Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soient $n \geq 4$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$. Alors :

$$\chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4.$$

Preuve par induction



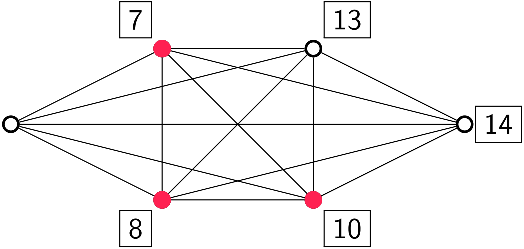
Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soient $n \geq 4$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$. Alors :

$$\chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4.$$

Preuve par induction



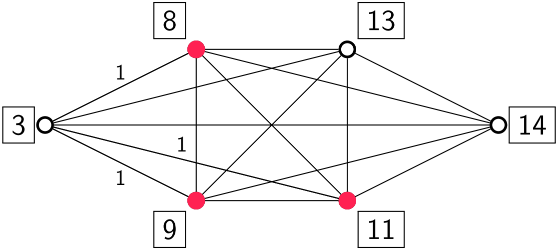
Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soient $n \geq 4$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$. Alors :

$$\chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4.$$

Preuve par induction



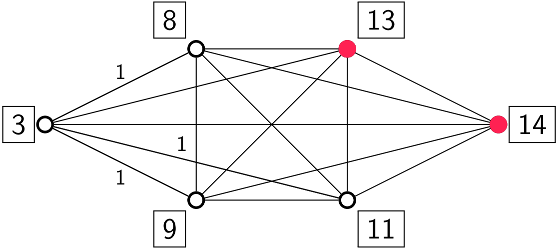
Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soient $n \geq 4$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$. Alors :

$$\chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4.$$

Preuve par induction



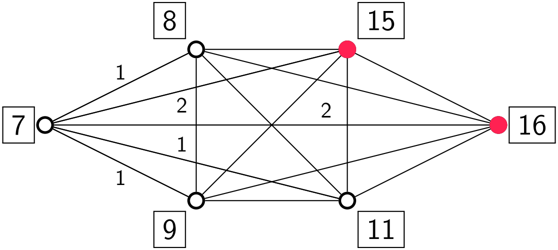
Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \dots, n-2\}$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soient $n \geq 4$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \dots, n-2\}$. Alors :

$$\chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4.$$

Preuve par induction



Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soient $n \geq 4$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$. Alors :

$$\chi'^d_{\sum}(K_n) \leq 4.$$

Preuve par induction

1. La coloration est d-relaxée

Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soient $n \geq 4$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$. Alors :

$$\chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4.$$

Preuve par induction

1. La coloration est d-relaxée
2. Les sommets déjà distingués le restent

Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soient $n \geq 4$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$. Alors :

$$\chi'^{d}_{\sum}(K_n) \leq 4.$$

Preuve par induction

1. La coloration est d-relaxée
2. Les sommets déjà distingués le restent
3. Les sommets ajoutés alternent entre plus grand et plus petit que tous les autres : ils sont donc distingués

Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$

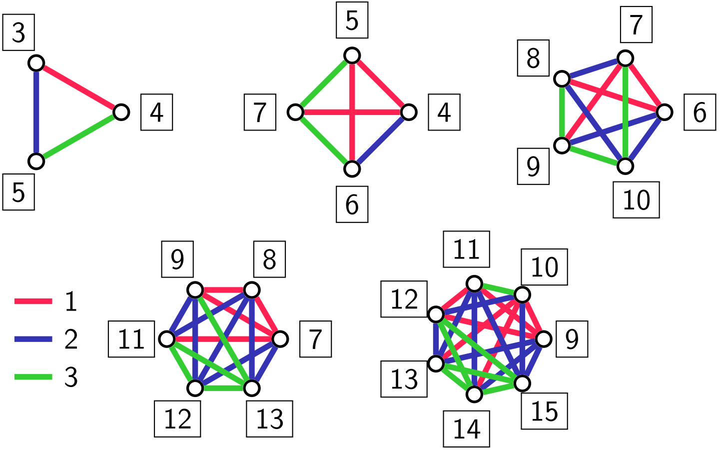
Proposition

Pour $n \in \{3, \ldots, 7\}$ et $d = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, $\chi'^{d}_{\sum}(K_n) = 3$.

Graphes complets, $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$

Proposition

Pour $n \in \{3, \ldots, 7\}$ et $d = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, $\chi'^{d}_{\sum}(K_n) = 3$.



Graphes complets, $d = 2$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soit $n \geq 4$. Alors : $\chi'^{2}_{\sum}(K_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1 & \text{si } n \not\equiv 3 \bmod 4 \\ \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2 & \text{si } n \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$

Graphes complets, $d = 2$

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Soit $n \geq 4$. Alors : $\chi'^{2}_{\sum}(K_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1 & \text{si } n \not\equiv 3 \bmod 4 \\ \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2 & \text{si } n \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$

Preuve en deux temps

1. Construction d'une telle coloration 2-relaxée distinguante

2. Nécessité d'utiliser ce nombre de couleurs

Graphes complets, $d = 2$

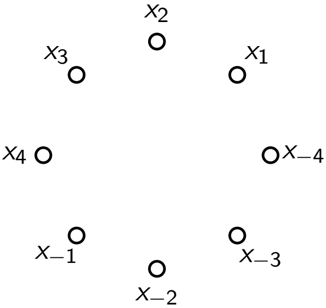
Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

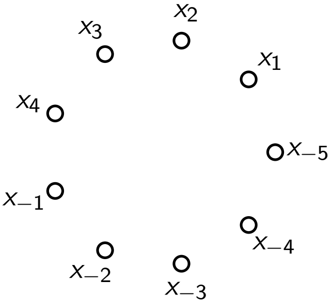
Soit $n \geq 4$. Alors : $\chi'^{2}_{\sum}(K_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1 & \text{si } n \not\equiv 3 \bmod 4 \\ \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2 & \text{si } n \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$

Preuve en deux temps

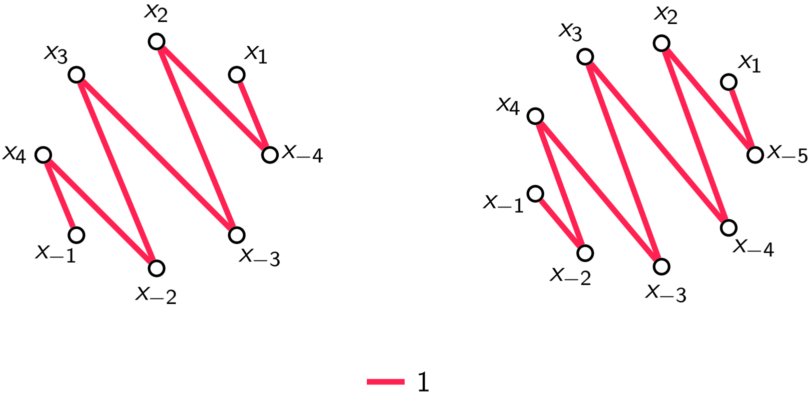
1. Construction d'une telle coloration 2-relaxée distinguante
   1.1 Construction de la coloration 2-relaxée
   1.2 Recoloration pour qu'elle soit distinguante
2. Nécessité d'utiliser ce nombre de couleurs

Graphes complets, $d = 2$: construction initiale

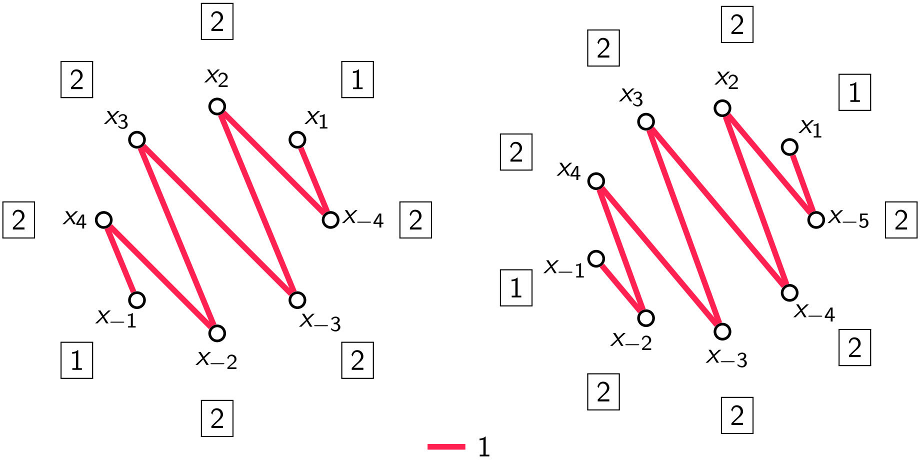




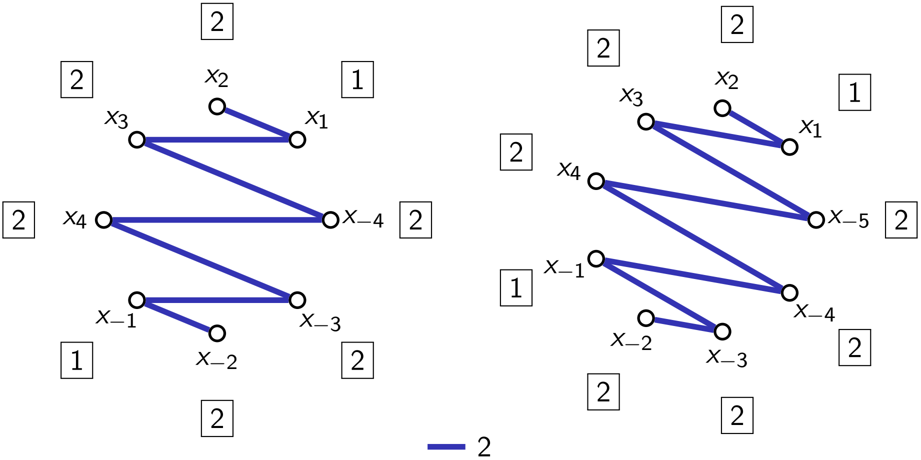
Graphes complets, $d = 2$: construction initiale



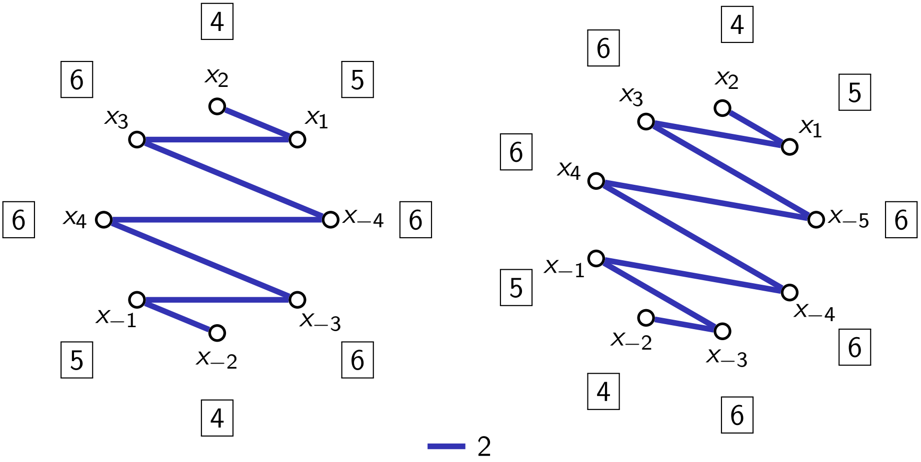
Graphes complets, $d = 2$: construction initiale



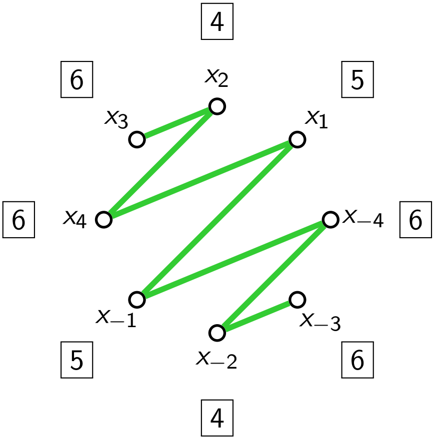
Graphes complets, $d = 2$: construction initiale

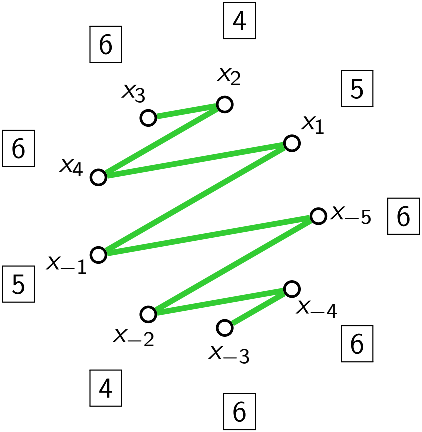


Graphes complets, $d = 2$: construction initiale



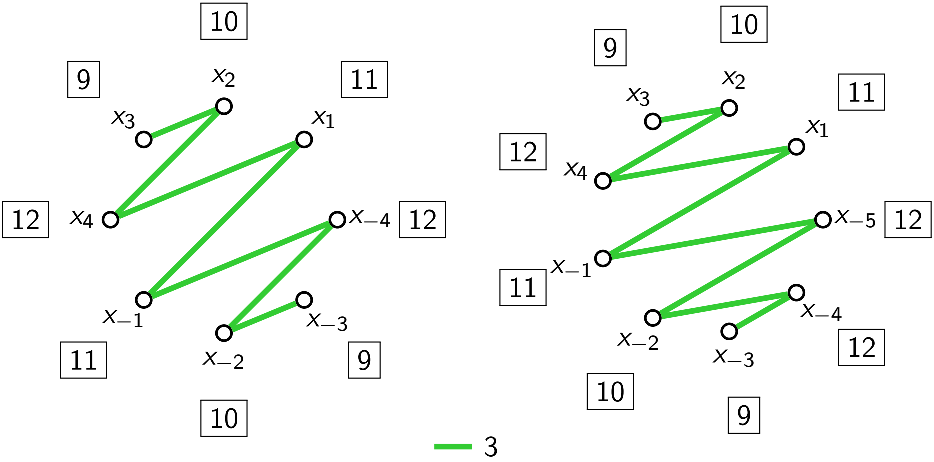
Graphes complets, $d = 2$: construction initiale



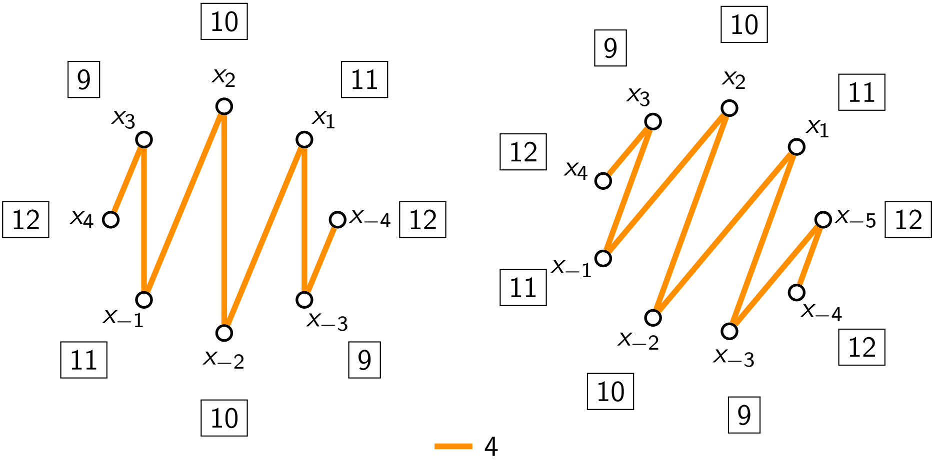


3

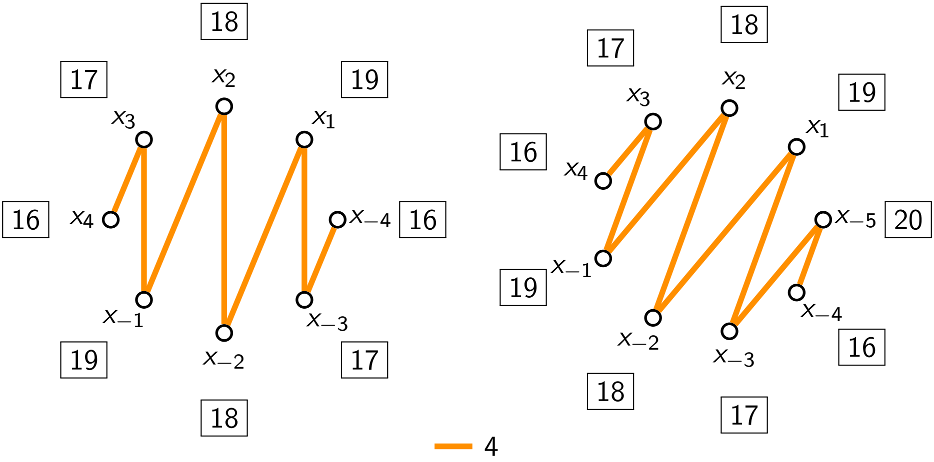
Graphes complets, $d = 2$: construction initiale



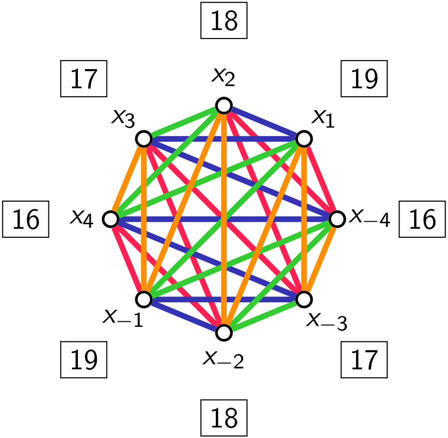
Graphes complets, $d = 2$: construction initiale

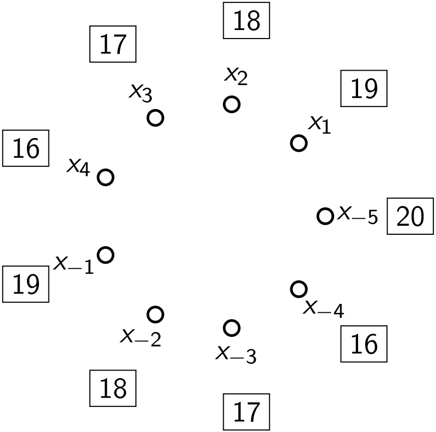


Graphes complets, $d = 2$: construction initiale

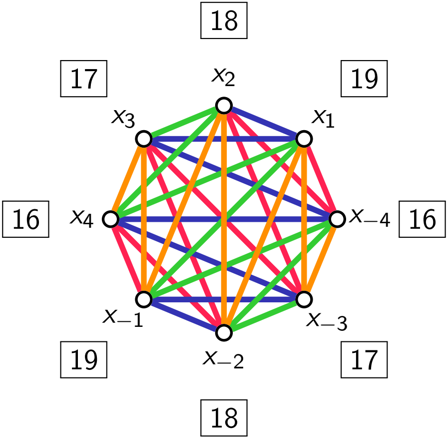


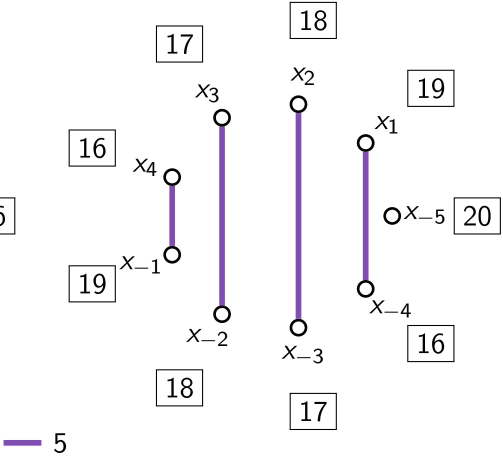
Graphes complets, $d = 2$: construction initiale



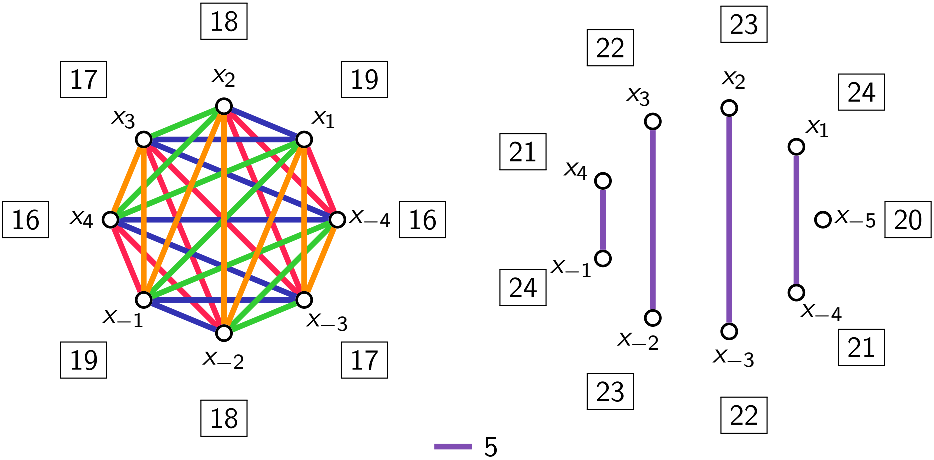


Graphes complets, $d = 2$: construction initiale

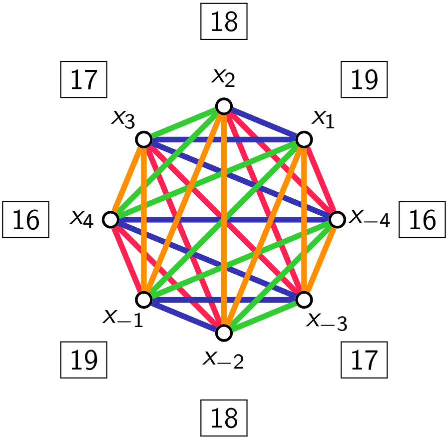


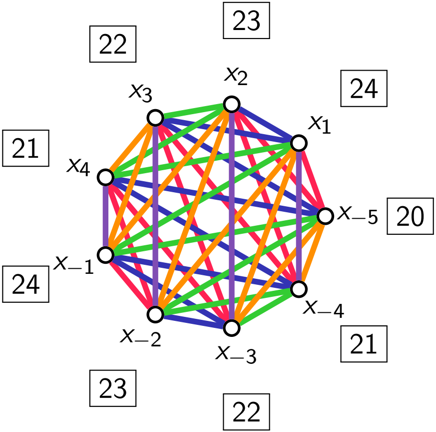


Graphes complets, $d = 2$: construction initiale

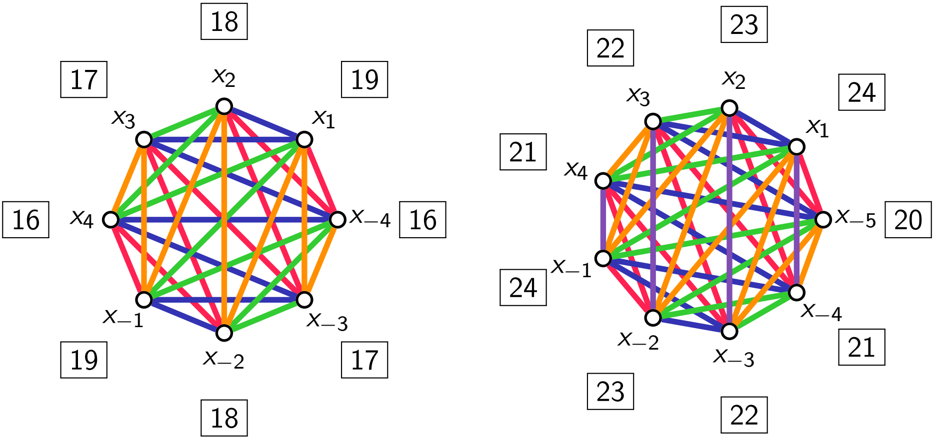


Graphes complets, $d = 2$: construction initiale



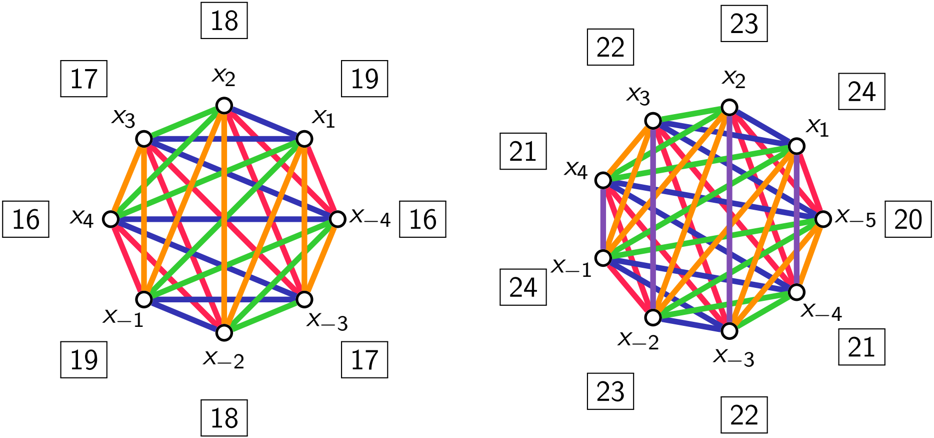


Graphes complets, $d = 2$: construction initiale



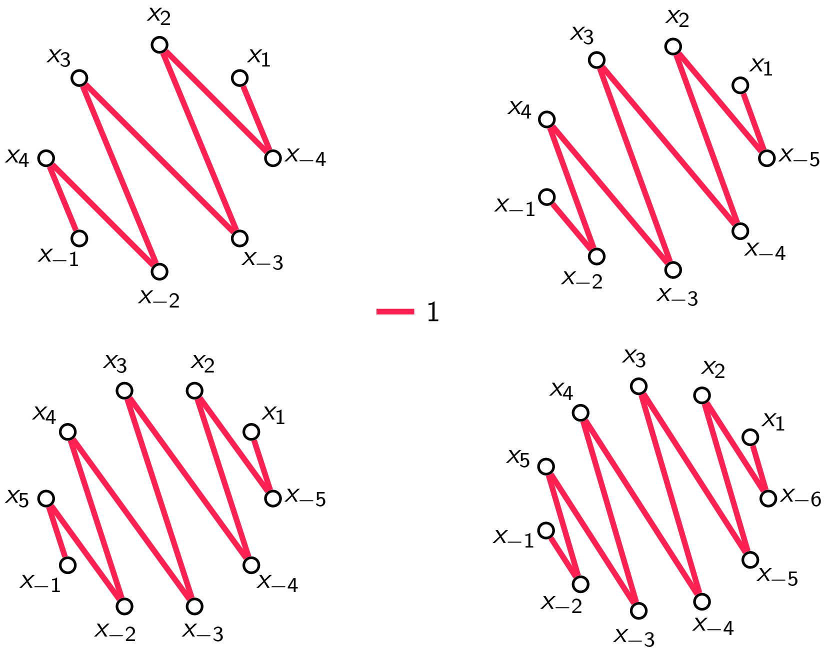
- $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ couleurs utilisées
- Coloration 2-relaxée de K_n

Graphes complets, $d = 2$: construction initiale

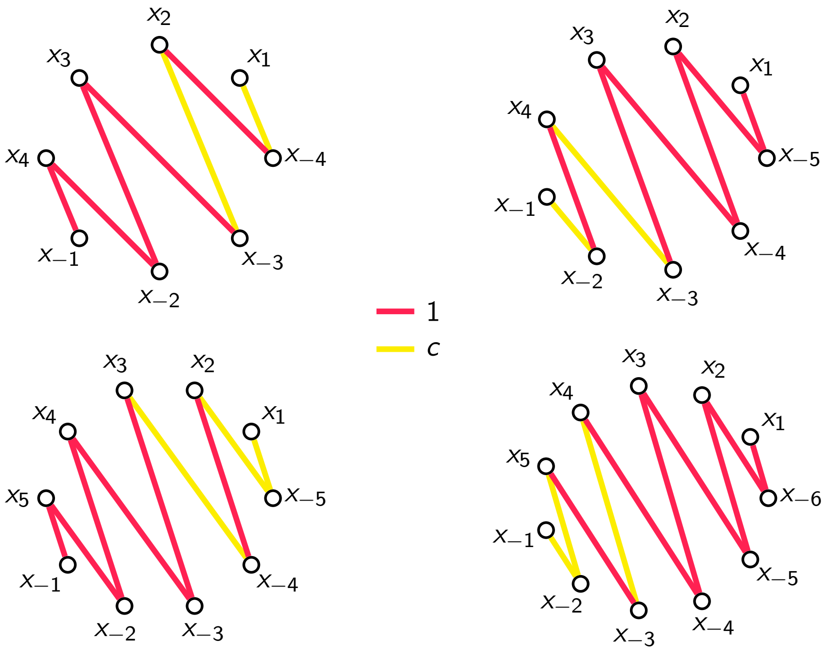


- $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ couleurs utilisées
- Coloration 2-relaxée de K_n
- x_i et x_{-i} ne sont pas distingués

Graphes complets, $d = 2$: recoloration



Graphes complets, $d = 2$: recoloration



Graphes complets : conclusion

d	$\chi'^{d}_{\sum}(K_n)$

Graphes complets : conclusion

d	$\chi'^{d}_{\sum}(K_n)$
1	n si n impair $n+1$ si n pair
$n-1$	3

Graphes complets : conclusion

d	$\chi'^{d}_{\sum}(K_n)$
1	n si n impair $n+1$ si n pair
2	$\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$ si $n \not\equiv 3 \bmod 4$ $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2$ si $n \equiv 3 \bmod 4$
$\in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$	3 si $n \in \{3, \ldots, 7\}$ 3 ou 4 si $n \geq 7$
$n-1$	3

Graphes complets : conclusion

d	$\chi'^{d}_{\sum}(K_n)$
1	n si n impair $n+1$ si n pair
2	$\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$ si $n \not\equiv 3 \bmod 4$ $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 2$ si $n \equiv 3 \bmod 4$
$\in \{3, \ldots, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1\}$	Ouverte
$\in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$	3 si $n \in \{3, \ldots, 7\}$ 3 ou 4 si $n \geq 7$
$n-1$	3

Graphes subcubiques

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Pour tout graphe subcubique $G \not\in \{K_2, C_5\}$, il existe une 4-coloration 2-relaxée distinguante de G telle que tous les sommets de degré 2 sont incidents à deux couleurs différentes.

Graphes subcubiques

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Pour tout graphe subcubique $G \notin \{K_2, C_5\}$, il existe une 4-coloration 2-relaxée distinguante de G telle que tous les sommets de degré 2 sont incidents à deux couleurs différentes.

Preuve par induction sur l'ordre de G

1. Identifier un sommet intéressant u

Graphes subcubiques

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Pour tout graphe subcubique $G \notin \{K_2, C_5\}$, il existe une 4-coloration 2-relaxée distinguante de G telle que tous les sommets de degré 2 sont incidents à deux couleurs différentes.

Preuve par induction sur l'ordre de G

1. Identifier un sommet intéressant u
2. Utiliser l'hypothèse d'induction sur $G - u$ pour construire une telle coloration

Graphes subcubiques

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Pour tout graphe subcubique $G \notin \{K_2, C_5\}$, il existe une 4-coloration 2-relaxée distinguante de G telle que tous les sommets de degré 2 sont incidents à deux couleurs différentes.

Preuve par induction sur l'ordre de G

1. Identifier un sommet intéressant u
2. Utiliser l'hypothèse d'induction sur $G - u$ pour construire une telle coloration
3. Étendre la coloration à G : les contraintes nous permettent d'utiliser le Nullstellensatz combinatoire

Graphes subcubiques

Théorème (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Pour tout graphe subcubique $G \notin \{K_2, C_5\}$, il existe une 4-coloration 2-relaxée distinguante de G telle que tous les sommets de degré 2 sont incidents à deux couleurs différentes.

Preuve par induction sur l'ordre de G

1. Identifier un sommet intéressant u
2. Utiliser l'hypothèse d'induction sur $G - u$ pour construire une telle coloration
3. Étendre la coloration à G : les contraintes nous permettent d'utiliser le Nullstellensatz combinatoire

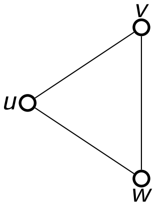
Quatre cas selon la maille, avec différents sous-cas...

Graphes subcubiques : exemple d'un cas

G a un sommet de degré 2 dans un triangle

Graphes subcubiques : exemple d'un cas

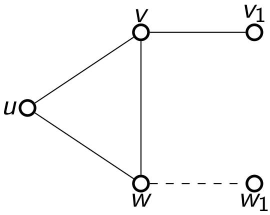
G a un sommet de degré 2 dans un triangle



Sommet
intéressant

Graphes subcubiques : exemple d'un cas

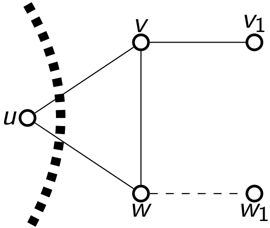
G a un sommet de degré 2 dans un triangle



Sommet intéressant

Graphes subcubiques : exemple d'un cas

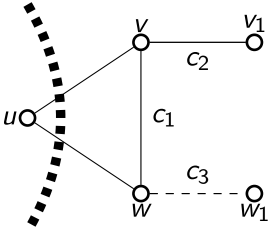
G a un sommet de degré 2 dans un triangle



Coloration
de $G - u$

Graphes subcubiques : exemple d'un cas

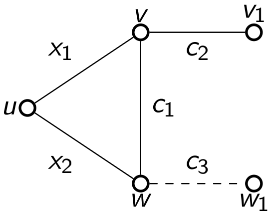
G a un sommet de degré 2 dans un triangle



Coloration
de $G - u$

Graphes subcubiques : exemple d'un cas

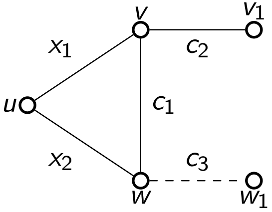
G a un sommet de degré 2 dans un triangle



Extension
à G

Graphes subcubiques : exemple d'un cas

G a un sommet de degré 2 dans un triangle

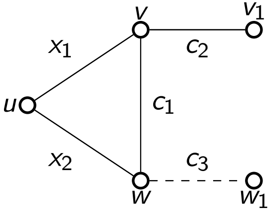


Extension
à G

Que w_1 existe ou non : au plus 2 valeurs interdites pour x_1 et x_2 afin de distinguer u de v et w.
Exemple : w_1 n'existe pas $\Rightarrow x_1, x_2 \neq c_1$ et $x_2 \neq c_1 + c_2$.

Graphes subcubiques : exemple d'un cas

G a un sommet de degré 2 dans un triangle



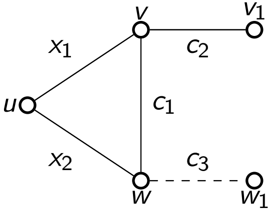
Extension
à G

Que w_1 existe ou non : au plus 2 valeurs interdites pour x_1 et x_2 afin de distinguer u de v et w.
Exemple : w_1 n'existe pas $\Rightarrow x_1, x_2 \neq c_1$ et $x_2 \neq c_1 + c_2$.

Deux conditions : $\left\{ \right.$

Graphes subcubiques : exemple d'un cas

G a un sommet de degré 2 dans un triangle



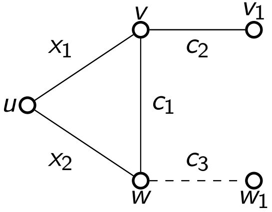
Extension
à G

Que w_1 existe ou non : au plus 2 valeurs interdites pour x_1 et x_2 afin de distinguer u de v et w.
Exemple : w_1 n'existe pas $\Rightarrow x_1, x_2 \neq c_1$ et $x_2 \neq c_1 + c_2$.

$$\text{Deux conditions : } \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & \neq & x_2 \\ & & \end{array} \right.$$

Graphes subcubiques : exemple d'un cas

G a un sommet de degré 2 dans un triangle



Extension à G

Que w_1 existe ou non : au plus 2 valeurs interdites pour x_1 et x_2 afin de distinguer u de v et w.
Exemple : w_1 n'existe pas $\Rightarrow x_1, x_2 \neq c_1$ et $x_2 \neq c_1 + c_2$.

$$\text{Deux conditions : } \begin{cases} x_1 & \neq & x_2 \\ x_1 + c_2 & \neq & x_2 + c_3 \end{cases}$$

Graphes subcubiques : exemple d'un cas

G a un sommet de degré 2 dans un triangle

$$\text{Deux conditions : } \begin{cases} x_1 & \neq & x_2 \\ x_1 + c_2 & \neq & x_2 + c_3 \end{cases}$$

Graphes subcubiques : exemple d'un cas

G a un sommet de degré 2 dans un triangle

$$\text{Deux conditions : } \begin{cases} x_1 & \neq & x_2 \\ x_1 + c_2 & \neq & x_2 + c_3 \end{cases}$$

Soit $P(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + c_2 - x_2 - c_3)$.

Graphes subcubiques : exemple d'un cas

G a un sommet de degré 2 dans un triangle

$$\text{Deux conditions : } \begin{cases} x_1 & \neq & x_2 \\ x_1 + c_2 & \neq & x_2 + c_3 \end{cases}$$

Soit $P(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + c_2 - x_2 - c_3)$. Si x_1 et x_2 ont des valeurs telles que P ne s'annule pas, alors, les conditions sont respectées et on peut étendre la coloration.

Graphes subcubiques : exemple d'un cas

G a un sommet de degré 2 dans un triangle

$$\text{Deux conditions : } \begin{cases} x_1 & \neq & x_2 \\ x_1 + c_2 & \neq & x_2 + c_3 \end{cases}$$

Soit $P(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + c_2 - x_2 - c_3)$. Si x_1 et x_2 ont des valeurs telles que P ne s'annule pas, alors, les conditions sont respectées et on peut étendre la coloration.

Nullstellensatz combinatoire (Alon, 1999)

Soient $P(x_1, \ldots, x_n)$ un polynôme sur un corps F et $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ un monôme de coefficient non-nul et de degré maximal dans P. Pour tous $S_1, \ldots, S_n \subseteq F$ tels que $|S_i| > k_i$, il existe $a_1 \in S_1, \ldots, a_n \in S_n$ tels que $P(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.

Graphes subcubiques : exemple d'un cas

G a un sommet de degré 2 dans un triangle

$$\text{Deux conditions : } \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & \neq & x_2 \\ x_1 + c_2 & \neq & x_2 + c_3 \end{array} \right.$$

Soit $P(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + c_2 - x_2 - c_3)$. Si x_1 et x_2 ont des valeurs telles que P ne s'annule pas, alors, les conditions sont respectées et on peut étendre la coloration.

Nullstellensatz combinatoire (Alon, 1999)

Soient $P(x_1, \ldots, x_n)$ un polynôme sur un corps F et $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ un monôme de coefficient non-nul et de degré maximal dans P. Pour tous $S_1, \ldots, S_n \subseteq F$ tels que $|S_i| > k_i$, il existe $a_1 \in S_1, \ldots, a_n \in S_n$ tels que $P(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.

Le monôme $x_1 x_2$ a coefficient -2 et degré maximal dans P, et $|S_1|, |S_2| > 1 \Rightarrow$ On peut étendre la coloration

Conclusion

Conjecture (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Pour tout $G \notin \{K_2, C_5\}$ connexe, $\chi'^{d}_{\sum}(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{d} \right\rceil + 2$.

$\rightarrow$ Généralise la Conjecture 1-2-3 et sa variante propre

Conclusion

Conjecture (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Pour tout $G \notin \{K_2, C_5\}$ connexe, $\chi'^{d}_{\sum}(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{d} \right\rceil + 2$.

$\rightarrow$ Généralise la Conjecture 1-2-3 et sa variante propre

1. Arbres
2. Graphes complets, $d = 2$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$
3. Graphes subcubiques

Conclusion

Conjecture (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Pour tout $G \notin \{K_2, C_5\}$ connexe, $\chi'^d_{\sum}(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{d} \right\rceil + 2$.

→ Généralise la Conjecture 1-2-3 et sa variante propre

1. Arbres
2. Graphes complets, $d = 2$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$
3. Graphes subcubiques

Questions ouvertes

- Graphes complets : $d \in \{3, \ldots, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1\}$, valeur exacte pour $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$
- Autres classes, bornes générales

Conclusion

Conjecture (D., Duchêne, Parreau, Sidorowicz, 2020+)

Pour tout $G \notin \{K_2, C_5\}$ connexe, $\chi'^{d}_{\sum}(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{d} \right\rceil + 2$.

$\rightarrow$ Généralise la Conjecture 1-2-3 et sa variante propre

1. Arbres
2. Graphes complets, $d = 2$ et $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$
3. Graphes subcubiques

Questions ouvertes

- Graphes complets : $d \in \{3, \ldots, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1\}$, valeur exacte pour $d \in \{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \ldots, n-2\}$
- Autres classes, bornes générales