Équilibrabilité

Antoine Dailly
Instituto de Matemáticas, UNAM Juriquilla

Travaux effectués en collaboration avec
Laura Eslava, Adriana Hansberg et Denae Ventura.

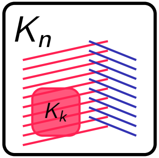
Contexte : théorie de Ramsey

Principe

Garantir des sous-structures ordonnées au sein de grandes structures chaotiques.

Théorème de Ramsey (pour la 2-coloration) (1930)

Pour tout k, il existe un entier $R(k)$ tel que, si $n \geq R(k)$, alors toute 2-coloration des arêtes de K_n contient un K_k monochromatique.



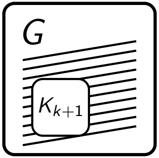
Contexte : théorie des graphes extrémaux

Principe

Déterminer la densité minimale garantissant une certaine propriété, et les graphes les plus denses ne la vérifiant pas.

Théorème de Turán (1941)

Si G d'ordre n contient strictement plus de $\left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}$ arêtes, alors G contient un K_{k+1}.
Le graphe extrémal est le graphe k-parti complet équilibré d'ordre n.



Notations pour la suite

- On considère des 2-colorations des arêtes de K_n : $E(K_n) = R \sqcup B$.
- On note $\mathrm{ex}(n, G)$ le nombre d'arêtes maximal dans un graphe d'ordre n sans G induit.

Notations pour la suite

- On considère des 2-colorations des arêtes de K_n : $E(K_n) = R \sqcup B$.
- On note $\mathrm{ex}(n, G)$ le nombre d'arêtes maximal dans un graphe d'ordre n sans G induit.

Objectif : généraliser l'idée de Ramsey et chercher d'autres motifs inévitables que les copies monochromatiques.

r-tonalité

Définition

Une (r, b)-copie d'un graphe $G(V, E)$ (avec $r + b = |E|$) est une copie de G avec r arêtes dans R et b arêtes dans B.

r-tonalité

Définition

Une (r, b)-copie d'un graphe $G(V, E)$ (avec $r + b = |E|$) est une copie de G avec r arêtes dans R et b arêtes dans B.

$\Rightarrow$ Par Ramsey, quand n est suffisamment grand, on a toujours une $(0, |E|)$-copie ou une $(|E|, 0)$-copie de G.

r-tonalité

Définition

Une (r, b)-copie d'un graphe $G(V, E)$ (avec $r + b = |E|$) est une copie de G avec r arêtes dans R et b arêtes dans B.

$\Rightarrow$ Par Ramsey, quand n est suffisamment grand, on a toujours une $(0, |E|)$-copie ou une $(|E|, 0)$-copie de G.

On cherche à garantir l'existence d'une (r, b)-copie de G (pour $r > 0$ donné).

r-tonalité

Définition

Une (r, b)-copie d'un graphe $G(V, E)$ (avec $r + b = |E|$) est une copie de G avec r arêtes dans R et b arêtes dans B.

$\Rightarrow$ Par Ramsey, quand n est suffisamment grand, on a toujours une $(0, |E|)$-copie ou une $(|E|, 0)$-copie de G.

On cherche à garantir l'existence d'une (r, b)-copie de G (pour $r > 0$ donné).

$\Rightarrow$ Besoin d'une certaine densité de chaque classe de couleur.

r-tonalité

Définition

Une (r, b)-copie d'un graphe $G(V, E)$ (avec $r + b = |E|$) est une copie de G avec r arêtes dans R et b arêtes dans B.

$\Rightarrow$ Par Ramsey, quand n est suffisamment grand, on a toujours une $(0, |E|)$-copie ou une $(|E|, 0)$-copie de G.

On cherche à garantir l'existence d'une (r, b)-copie de G (pour $r > 0$ donné).

$\Rightarrow$ Besoin d'une certaine densité de chaque classe de couleur.

r-tonalité

Si, pour tout n suffisamment grand, il existe un $k(n, r)$ tel que toute 2-coloration $R \sqcup B$ des arêtes de K_n avec $|R|, |B| > k(n, r)$ contient une (r, b)-copie de G, alors G est r-tonal.

Équilibrabilité : quand $r = \frac{|E|}{2}$

Copie équilibrée

Une copie équilibrée de $G(V, E)$ est une (r, b)-copie de G avec $r \in \left\{\left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil\right\}$.

Équilibrabilité : quand $r = \frac{|E|}{2}$

Copie équilibrée

Une copie équilibrée de $G(V, E)$ est une (r, b)-copie de G avec $r \in \left\{\left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil\right\}$.

Équilibrabilité (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Soit $\mathrm{bal}(n, G)$ le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration $R \sqcup B$ des arêtes de K_n vérifiant $|R|, |B| > \mathrm{bal}(n, G)$ contient une copie équilibrée de G.

Équilibrabilité : quand $r = \frac{|E|}{2}$

Copie équilibrée

Une copie équilibrée de $G(V, E)$ est une (r, b)-copie de G avec $r \in \left\{ \left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil \right\}$.

Équilibrabilité (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Soit $\mathrm{bal}(n, G)$ le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration $R \sqcup B$ des arêtes de K_n vérifiant $|R|, |B| > \mathrm{bal}(n, G)$ contient une copie équilibrée de G.
S'il existe un n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\mathrm{bal}(n, G)$ existe, alors G est dit équilibrable

Équilibrabilité : quand $r = \frac{|E|}{2}$

Copie équilibrée

Une copie équilibrée de $G(V, E)$ est une (r, b)-copie de G avec $r \in \left\{\left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil\right\}$.

Équilibrabilité (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Soit $\mathrm{bal}(n, G)$ le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration $R \sqcup B$ des arêtes de K_n vérifiant $|R|, |B| > \mathrm{bal}(n, G)$ contient une copie équilibrée de G.
S'il existe un n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\mathrm{bal}(n, G)$ existe, alors G est dit équilibrable et $\mathrm{bal}(n, G)$ est appelé son nombre d'équilibrage.

Équilibrabilité : quand $r = \frac{|E|}{2}$

Copie équilibrée

Une copie équilibrée de $G(V, E)$ est une (r, b)-copie de G avec $r \in \left\{\left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil\right\}$.

Équilibrabilité (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Soit $\mathrm{bal}(n, G)$ le plus petit entier, s'il existe, tel que toute 2-coloration $R \sqcup B$ des arêtes de K_n vérifiant $|R|, |B| > \mathrm{bal}(n, G)$ contient une copie équilibrée de G.
S'il existe un n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\mathrm{bal}(n, G)$ existe, alors G est dit équilibrable et $\mathrm{bal}(n, G)$ est appelé son nombre d'équilibrage.

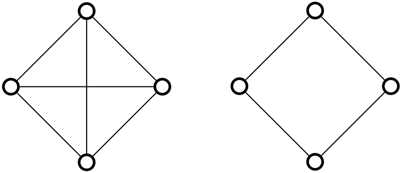
Problème type Ramsey

Problème type extrémal

Caractérisation

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable si et seulement si il a à la fois :

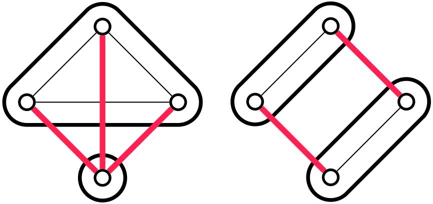


Caractérisation

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable si et seulement si il a à la fois :

1. Une coupe traversée par la moitié de ses arêtes ;

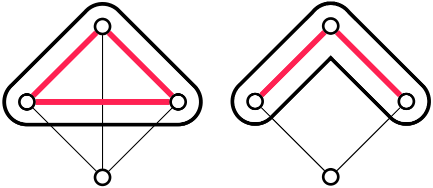


Caractérisation

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

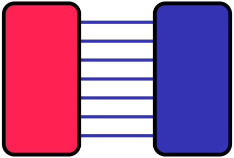
Un graphe est équilibrable si et seulement si il a à la fois :

1. Une coupe traversée par la moitié de ses arêtes ;
2. Un sous-graphe induit contenant la moitié de ses arêtes.

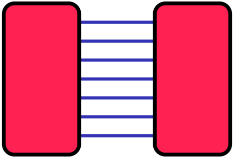


Preuve de la caractérisation (1)

G est équilibrable $\Rightarrow$
Il doit s'insérer dans ces deux colorations spéciales de K_n :



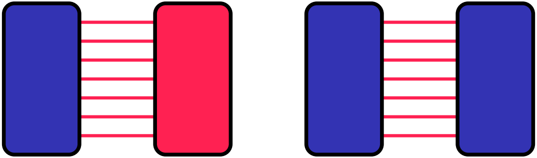
type A



type B

Preuve de la caractérisation (1)

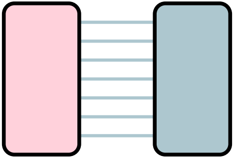
G est équilibrable $\Rightarrow$
Il doit s'insérer dans ces deux colorations spéciales de K_n :



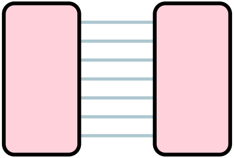
type A type B

Preuve de la caractérisation (1)

G est équilibrable $\Rightarrow$
Il doit s'insérer dans ces deux colorations spéciales de K_n :



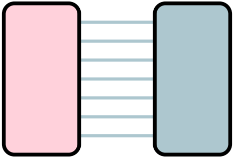
type A



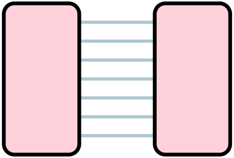
type B

Preuve de la caractérisation (1)

G est équilibrable $\Rightarrow$
Il doit s'insérer dans ces deux colorations spéciales de K_n :



type A



type B

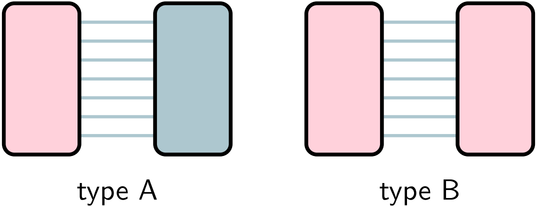
Ces deux colorations spéciales de K_n peuvent être équilibrées ($|R| = |B| = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$) pour une infinité de valeurs de n.

Preuve de la caractérisation (2)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Pour tout t, il existe $\phi(n,t) \in \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n,t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t}.

Également montré (mais avec une borne de $\epsilon\binom{n}{2}$) par Cutler et Montágh (2008) et Fox et Sudakov (2008).

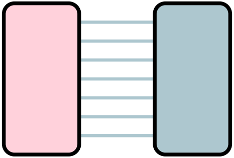


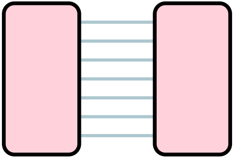
Preuve de la caractérisation (2)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Pour tout t, il existe $\phi(n,t) \in \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n,t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t}.

Également montré (mais avec une borne de $\epsilon\binom{n}{2}$) par Cutler et Montágh (2008) et Fox et Sudakov (2008).


type A


type B

$\Rightarrow$ Donne une borne subquadratique pour $\mathrm{bal}(n, G)$

Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

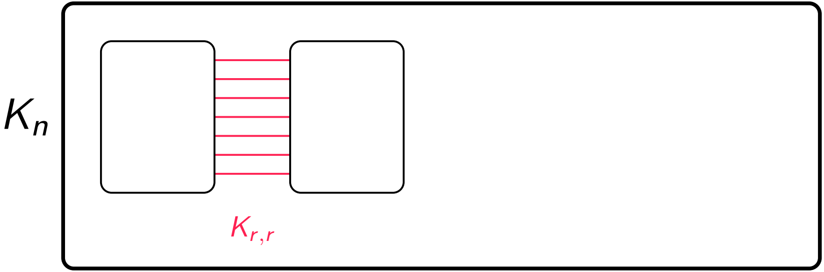
Pour tout t, il existe $\phi(n,t) \in \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n,t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t}.

K_n

Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

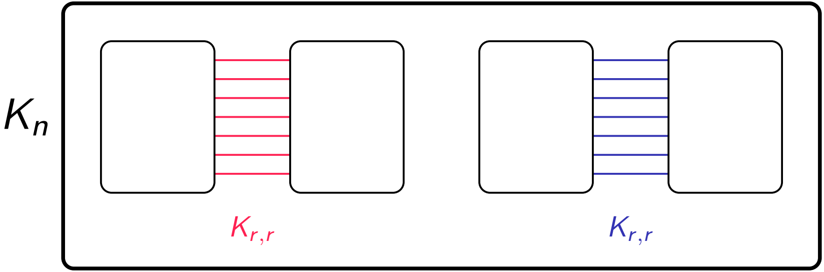
Pour tout t, il existe $\phi(n,t) \in \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n,t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t}.



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

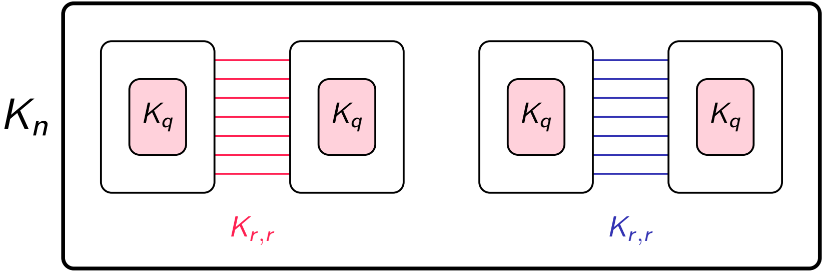
Pour tout t, il existe $\phi(n,t) \in \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n,t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t}.



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

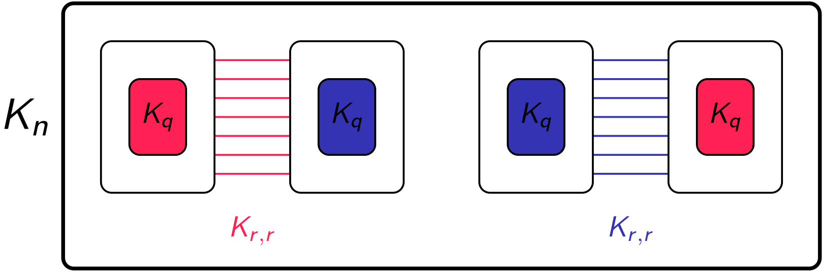
Pour tout t, il existe $\phi(n,t) \in \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n,t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t}.



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

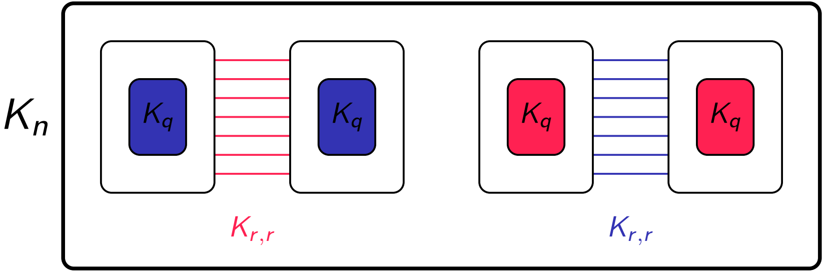
Pour tout t, il existe $\phi(n,t) \in \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n,t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t}.



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

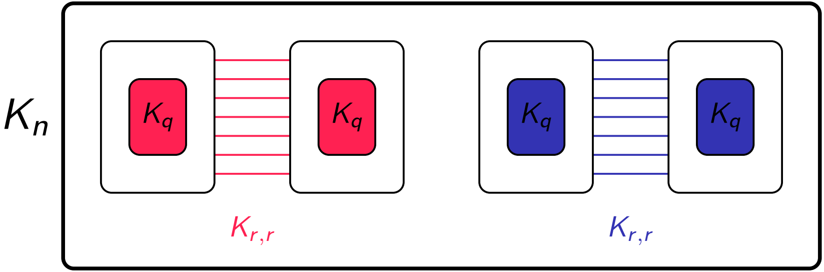
Pour tout t, il existe $\phi(n,t) \in \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n,t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t}.



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

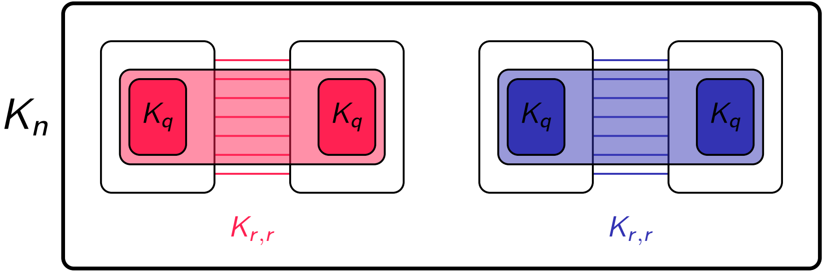
Pour tout t, il existe $\phi(n,t) \in \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n,t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t}.



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

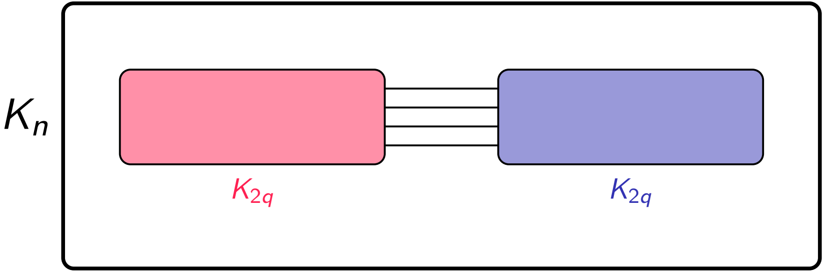
Pour tout t, il existe $\phi(n,t) \in \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n,t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t}.



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

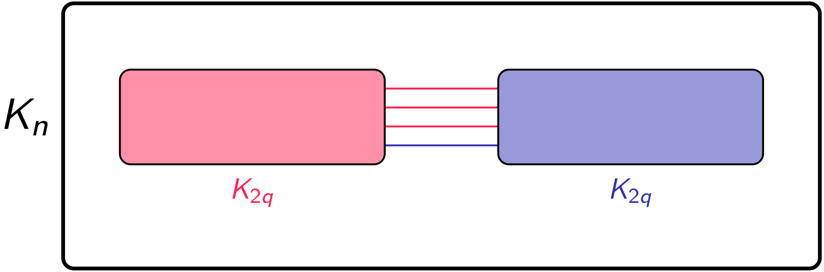
Pour tout t, il existe $\phi(n,t) \in \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n,t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t}.



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

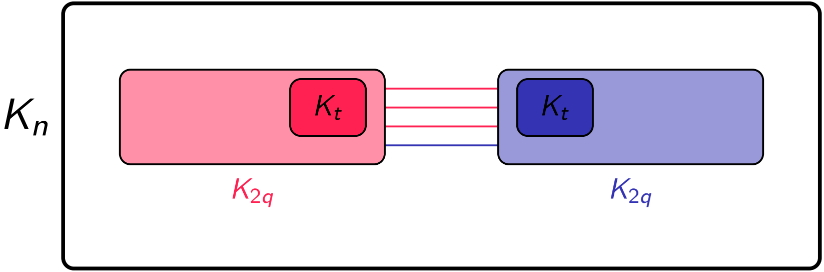
Pour tout t, il existe $\phi(n,t) \in \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n,t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t}.



Preuve de la caractérisation (3)

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Pour tout t, il existe $\phi(n,t) \in \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{m(t)}})$ tel que, si n est suffisamment grand, alors, toute 2-coloration des arêtes de K_n avec $|R|, |B| \geq \phi(n,t)$ contient une copie de type A ou de type B de K_{2t}.



Résultats précédents

- Caro, Hansberg, Montejano (2019)
  - $\mathrm{bal}(n, K_4) = n - 1$ ou n (selon la valeur de $n \bmod 4$)
  - Aucun autre graphe complet avec un nombre pair d'arêtes n'est équilibrable !

Résultats précédents

- Caro, Hansberg, Montejano (2019)
  - $\mathrm{bal}(n, K_4) = n - 1$ ou n (selon la valeur de n mod 4)
  - Aucun autre graphe complet avec un nombre pair d'arêtes n'est équilibrable !
- Caro, Hansberg, Montejano (2020)
  - Les arbres sont équilibrables
    Pour $n \geq 4k$, $\mathrm{bal}(n, T_k) \leq (k-1)n$
  - Pour k pair et $n \geq \max(3, \frac{k^2}{4} + 1)$,
    $\mathrm{bal}(n, K_{1,k}) = \mathrm{bal}(n, K_{1,k+1}) = \left(\frac{k-2}{2}\right) n - \frac{k^2}{8} + \frac{k}{4}$
  - Pour $n \geq \frac{9}{32}k^2 + \frac{1}{4}k + 1$,
    $\mathrm{bal}(n, P_{4k}) = \mathrm{bal}(n, P_{4k+1}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - \frac{1}{2})$
    $\mathrm{bal}(n, P_{4k-2}) = \mathrm{bal}(n, P_{4k-1}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k)$
    ⚠ P_k désigne le chemin sur k arêtes (désolé ☹)

Résultats précédents

- Caro, Hansberg, Montejano (2019)
  - $\mathrm{bal}(n, K_4) = n - 1$ ou n (selon la valeur de $n \bmod 4$)
  - Aucun autre graphe complet avec un nombre pair d'arêtes n'est équilibrable !
- Caro, Hansberg, Montejano (2020)
  - Les arbres sont équilibrables
    Pour $n \geq 4k$, $\mathrm{bal}(n, T_k) \leq (k-1)n$
  - Pour k pair et $n \geq \max(3, \frac{k^2}{4} + 1)$,
    $\mathrm{bal}(n, K_{1,k}) = \mathrm{bal}(n, K_{1,k+1}) = \left(\frac{k-2}{2}\right) n - \frac{k^2}{8} + \frac{k}{4}$
  - Pour $n \geq \frac{9}{32}k^2 + \frac{1}{4}k + 1$,
    $\mathrm{bal}(n, P_{4k}) = \mathrm{bal}(n, P_{4k+1}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - \frac{1}{2})$
    $\mathrm{bal}(n, P_{4k-2}) = \mathrm{bal}(n, P_{4k-1}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k)$
    ⚠ P_k désigne le chemin sur k arêtes (désolé ☹)
- Caro, Lauri, Zarb (2020)
  - Nombres d'équilibrage des graphes sur au plus 4 arêtes

Cycles

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

Cycles

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

- C_{4k+2} n'est pas équilibrable ;

Cycles

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

- C_{4k+2} n'est pas équilibrable ;
- $C_{4k+\epsilon}$ est équilibrable
- C_{4k} est équilibrable

Cycles

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

- C_{4k+2} n'est pas équilibrable ;
- $C_{4k+\epsilon}$ est équilibrable, et
  $\mathrm{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)$;
- C_{4k} est équilibrable

Cycles

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

- C_{4k+2} n'est pas équilibrable ;
- $C_{4k+\epsilon}$ est équilibrable, et $\mathrm{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) = (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon)$;
- C_{4k} est équilibrable, et $(k-1)n - (k-1)^2 \leq \mathrm{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k$.

Cycles C_{4k+2}

Proposition

Le cycle C_{4k+2} n'est pas équilibrable.

Preuve par contradiction

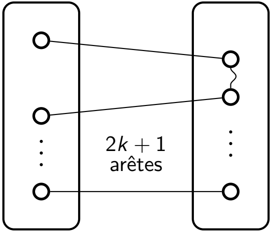
Cycles C_{4k+2}

Proposition

Le cycle C_{4k+2} n'est pas équilibrable.

Preuve par contradiction

C_{4k+2} a une coupe contenant la moitié de ses arêtes.



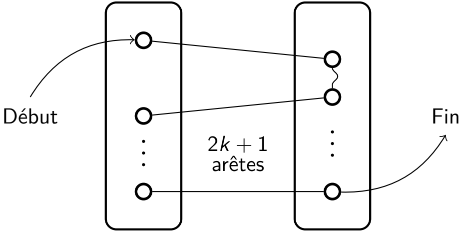
Cycles C_{4k+2}

Proposition

Le cycle C_{4k+2} n'est pas équilibrable.

Preuve par contradiction

C_{4k+2} a une coupe contenant la moitié de ses arêtes.



Cycles impairs

Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \mathrm{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon) \end{aligned}$$

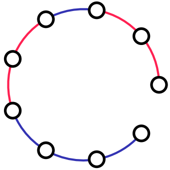
Cycles impairs

Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \mathrm{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon) \end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})



P_{4k} équilibré $\Rightarrow$
$2k$ arêtes de chaque couleur

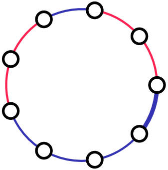
Cycles impairs

Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \mathrm{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon) \end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})



P_{4k} équilibré $\Rightarrow$
$2k$ arêtes de chaque couleur

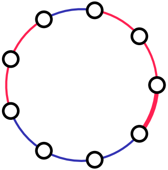
Cycles impairs

Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \mathrm{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon) \end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})



P_{4k} équilibré $\Rightarrow$
$2k$ arêtes de chaque couleur

On peut refermer le cycle
qui sera équilibré

Cycles impairs

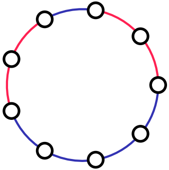
Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \mathrm{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon) \end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})

C_{4k+1} équilibré $\Rightarrow$
Une couleur avec $2k+1$ arêtes



Cycles impairs

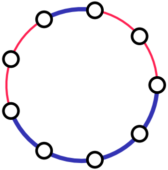
Proposition

Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \mathrm{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon) \end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})

C_{4k+1} équilibré $\Rightarrow$
Une couleur avec $2k+1$ arêtes



Cycles impairs

Proposition

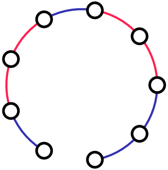
Soient k un entier strictement positif, n un entier tel que $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$, et $\epsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{bal}(n, C_{4k+\epsilon}) &= \mathrm{bal}(n, P_{4k+\epsilon-1}) \\ &= (k-1)n - \frac{1}{2}(k^2 - k - 1 - \epsilon) \end{aligned}$$

Preuve (pour C_{4k+1})

C_{4k+1} équilibré $\Rightarrow$
Une couleur avec $2k+1$ arêtes

En retirer une donne
un P_{4k} équilibré



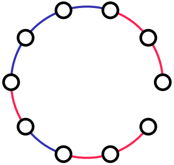
Cycles C_{4k}

La preuve pour les cycles impairs ne fonctionne pas :

Cycles C_{4k}

La preuve pour les cycles impairs ne fonctionne pas :

P_{4k-1} équilibré



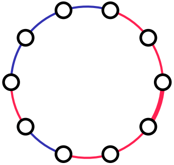
Cycles C_{4k}

La preuve pour les cycles impairs ne fonctionne pas :

P_{4k-1} équilibré

$\Rightarrow$ Cycle potentiellement

non-équilibré



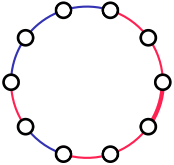
Cycles C_{4k}

La preuve pour les cycles impairs ne fonctionne pas :

P_{4k-1} équilibré

$\Rightarrow$ Cycle potentiellement

non-équilibré



Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Pour $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$,

$$(k-1)n - (k-1)^2 \ \leq \mathrm{bal}(n, C_{4k}) \leq \ (k-1)n + 12k^2 + 3k$$

Cycles C_{4k} : borne inférieure

Proposition

Pour tout $n \geq 4k$, $\mathrm{bal}(n, C_{4k}) \geq (k-1)n - (k-1)^2$.

Cycles C_{4k} : borne inférieure

Proposition

Pour tout $n \geq 4k$, $\mathrm{bal}(n, C_{4k}) \geq (k-1)n - (k-1)^2$.

Preuve

On construit une 2-coloration $R \sqcup B$ sans C_{4k} équilibré et telle que $|B| \geq |R| = (k-1)n - (k-1)^2$.

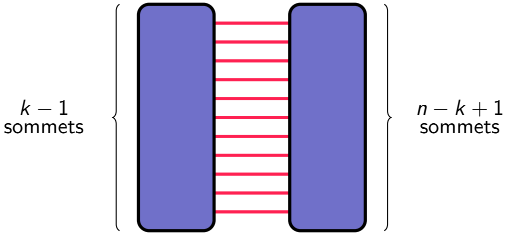
Cycles C_{4k} : borne inférieure

Proposition

Pour tout $n \geq 4k$, $\mathrm{bal}(n, C_{4k}) \geq (k-1)n - (k-1)^2$.

Preuve

On construit une 2-coloration $R \sqcup B$ sans C_{4k} équilibré et telle que $|B| \geq |R| = (k-1)n - (k-1)^2$.



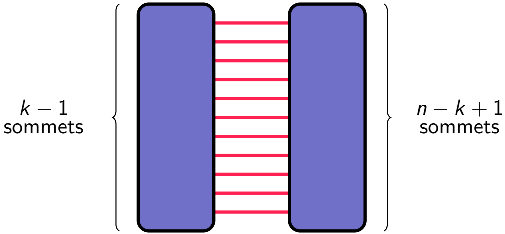
Cycles C_{4k} : borne inférieure

Proposition

Pour tout $n \geq 4k$, $\mathrm{bal}(n, C_{4k}) \geq (k-1)n - (k-1)^2$.

Preuve

On construit une 2-coloration $R \sqcup B$ sans C_{4k} équilibré et telle que $|B| \geq |R| = (k-1)n - (k-1)^2$.



$\Rightarrow$ Un cycle ne peut avoir qu'au plus $2k-2$ arêtes dans R.

Cycles C_{4k} : borne supérieure (1)

Proposition

Soient $k > 0$ et $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$:

$$\mathrm{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k.$$

Preuve par contradiction

Cycles C_{4k} : borne supérieure (1)

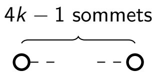
Proposition

Soient $k > 0$ et $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$:

$$\mathrm{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k.$$

Preuve par contradiction

$|R|, |B| > \mathrm{bal}(n, P_{4k-2}) \quad \Rightarrow \quad$ Il y a un P_{4k-2} équilibré.



Cycles C_{4k} : borne supérieure (1)

Proposition

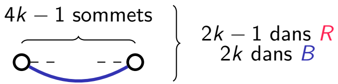
Soient $k > 0$ et $n \geq \frac{9}{2}k^2 + \frac{13}{4}k + \frac{49}{32}$:

$$\mathrm{bal}(n, C_{4k}) \leq (k-1)n + 12k^2 + 3k.$$

Preuve par contradiction

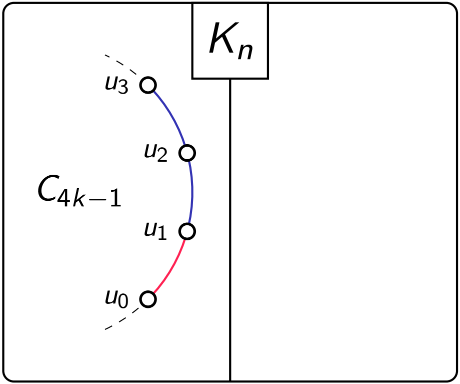
$$|R|, |B| > \mathrm{bal}(n, P_{4k-2}) \quad \Rightarrow \quad \text{Il y a un } P_{4k-2} \text{ équilibré.}$$

$$\Rightarrow \quad \text{On le ferme avec (wlog) une } B$$



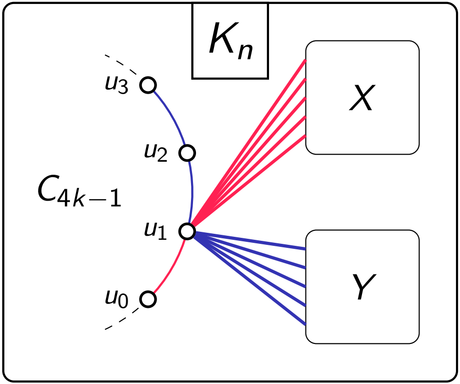
Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



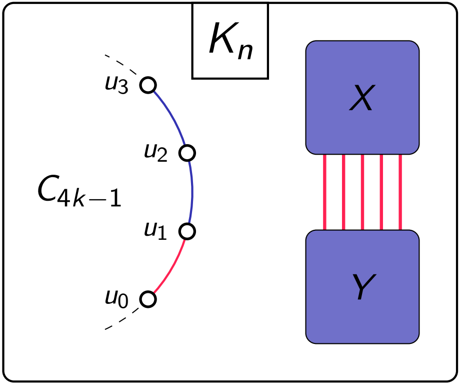
Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

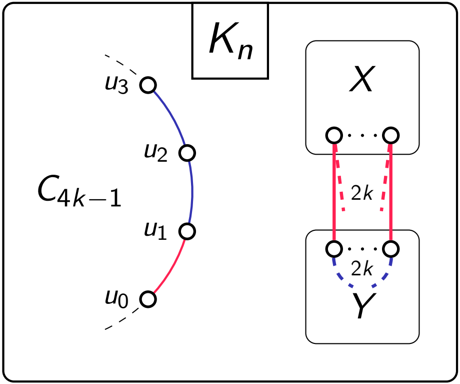
Preuve par contradiction (suite)



Des lemmes forcent les couleurs de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(X, Y)$.

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

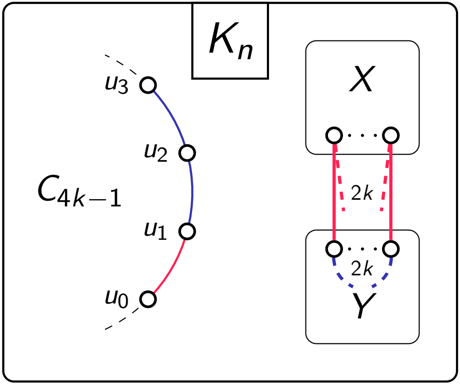
Preuve par contradiction (suite)



On ne peut pas avoir $|X|, |Y| \geq k$

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

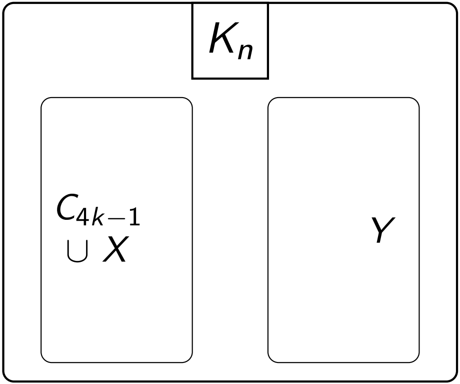
Preuve par contradiction (suite)



On ne peut pas avoir $|X|, |Y| \geq k \Rightarrow$ wlog, supposons $|X| < k$

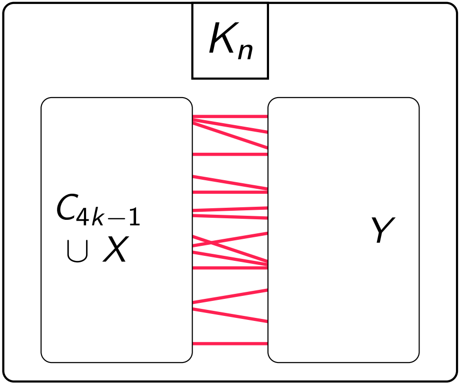
Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

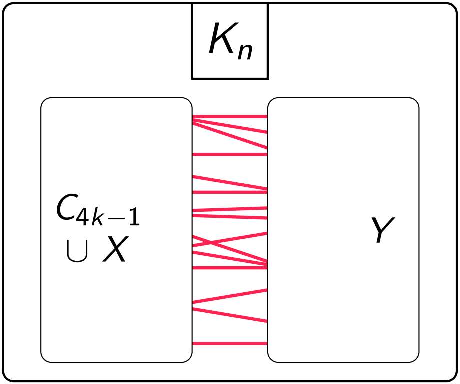
Preuve par contradiction (suite)



Considérons le graphe induit par $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$.

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)

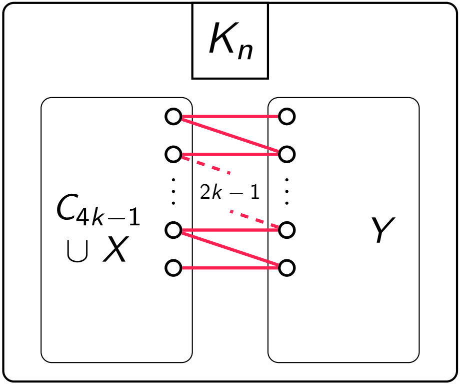


Considérons le graphe induit par $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$.

Il contient $\geq (k-1)n$ arêtes ; or $\mathrm{ex}(n, P_{2k-1}) \leq (k-1)n$ [FS13]

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)

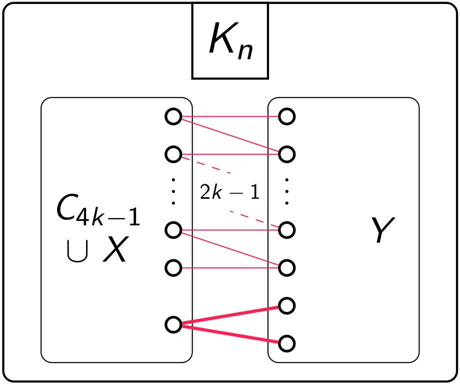


Considérons le graphe induit par $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$.

Il contient $\geq (k-1)n$ arêtes ; or $\mathrm{ex}(n, P_{2k-1}) \leq (k-1)n$ [FS13] $\Rightarrow$ Il contient un P_{2k-1}.

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



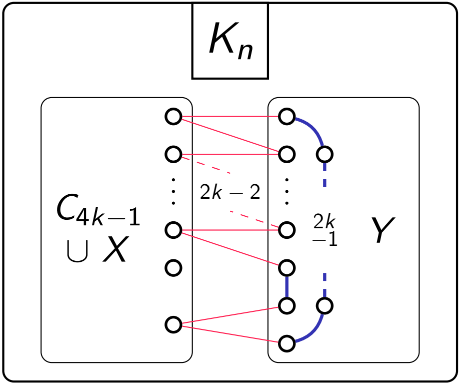
Considérons le graphe induit par $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$.

Il contient $\geq (k-1)n$ arêtes ; or $\mathrm{ex}(n, P_{2k-1}) \leq (k-1)n$ [FS13] $\Rightarrow$ Il contient un P_{2k-1}.

Il reste suffisamment d'arêtes dans R pour avoir un $K_{1,2}$.

Cycles C_{4k} : borne supérieure (2)

Preuve par contradiction (suite)



Considérons le graphe induit par $(C_{4k+1} \cup X, Y) \cap R$.

Il contient $\geq (k-1)n$ arêtes ; or $\mathrm{ex}(n, P_{2k-1}) \leq (k-1)n$ [FS13] $\Rightarrow$ Il contient un P_{2k-1}.

Il reste suffisamment d'arêtes dans R pour avoir un $K_{1,2}$.

On complète avec des arêtes dans Y, qui seront dans B, et on obtient un C_{4k} équilibré.

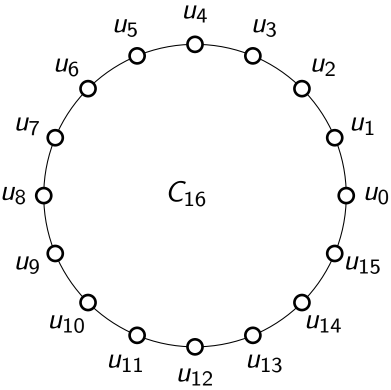
$\Rightarrow$ Contradiction

Circulants $C_{k,\ell}$

Circulants $C_{k,\ell}$

Définition

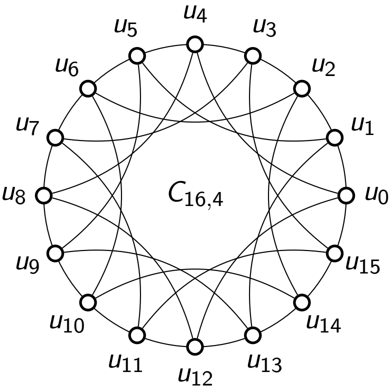
$C_{k,\ell}$ est un cycle C_k



Circulants $C_{k,\ell}$

Définition

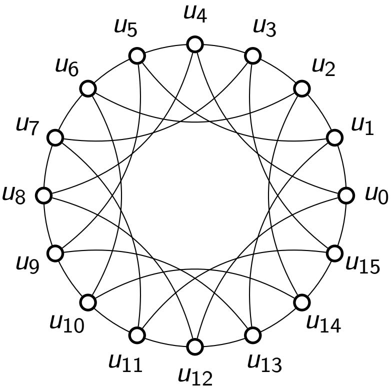
$C_{k,\ell}$ est un cycle C_k avec les cordes $u_i u_{i+\ell}$.



Circulants $C_{k,\ell}$

Définition

$C_{k,\ell}$ est un cycle C_k avec les cordes $u_i u_{i+\ell}$.



Contient les antiprismes et les échelles de Möbius.

Circulants $C_{k,\ell}$

Théorème (D., Hansberg, Ventura, 2021)

Soient $k > 3$ et $\ell \in \{2, \ldots, k-2\}$. Le graphe $C_{k,\ell}$ est équilibrable si et seulement si k et pair et $(k, \ell) \neq (6, 2)$.

Circulants $C_{k,\ell}$

Théorème (D., Hansberg, Ventura, 2021)

Soient $k > 3$ et $\ell \in \{2, \ldots, k-2\}$. Le graphe $C_{k,\ell}$ est équilibrable si et seulement si k et pair et $(k, \ell) \neq (6, 2)$.

Preuve en huit cas ! Chaque fois, on exploite la caractérisation.

Circulants $C_{k,\ell}$

Théorème (D., Hansberg, Ventura, 2021)

Soient $k > 3$ et $\ell \in \{2, \ldots, k-2\}$. Le graphe $C_{k,\ell}$ est équilibrable si et seulement si k et pair et $(k, \ell) \neq (6, 2)$.

Preuve en huit cas ! Chaque fois, on exploite la caractérisation.

Preuve du cas $k = 4a$, ℓ pair

Circulants $C_{k,\ell}$

Théorème (D., Hansberg, Ventura, 2021)

Soient $k > 3$ et $\ell \in \{2, \ldots, k-2\}$. Le graphe $C_{k,\ell}$ est équilibrable si et seulement si k et pair et $(k, \ell) \neq (6, 2)$.

Preuve en huit cas ! Chaque fois, on exploite la caractérisation.

Preuve du cas $k = 4a$, ℓ pair

Proposition

Si, dans $G(V, E)$, I est un ensemble indépendant tel que $\sum_{u \in I} d(u) = \frac{|E|}{2}$, alors G est équilibrable.

Circulants $C_{k,\ell}$

Théorème (D., Hansberg, Ventura, 2021)

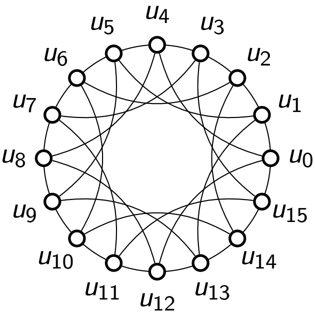
Soient $k > 3$ et $\ell \in \{2, \dots, k-2\}$. Le graphe $C_{k,\ell}$ est équilibrable si et seulement si k et pair et $(k, \ell) \neq (6, 2)$.

Preuve en huit cas ! Chaque fois, on exploite la caractérisation.

Preuve du cas $k = 4a$, ℓ pair

Proposition

Si, dans $G(V, E)$, I est un ensemble indépendant tel que $\sum_{u \in I} d(u) = \frac{|E|}{2}$, alors G est équilibrable.



Circulants $C_{k,\ell}$

Théorème (D., Hansberg, Ventura, 2021)

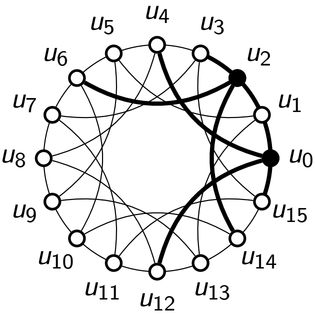
Soient $k > 3$ et $\ell \in \{2, \ldots, k-2\}$. Le graphe $C_{k,\ell}$ est équilibrable si et seulement si k et pair et $(k, \ell) \neq (6, 2)$.

Preuve en huit cas ! Chaque fois, on exploite la caractérisation.

Preuve du cas $k = 4a$, ℓ pair

Proposition

Si, dans $G(V, E)$, I est un ensemble indépendant tel que $\sum_{u \in I} d(u) = \frac{|E|}{2}$, alors G est équilibrable.



Circulants $C_{k,\ell}$

Théorème (D., Hansberg, Ventura, 2021)

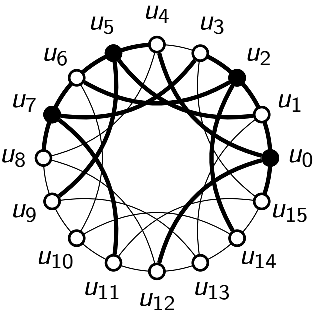
Soient $k > 3$ et $\ell \in \{2, \ldots, k-2\}$. Le graphe $C_{k,\ell}$ est équilibrable si et seulement si k et pair et $(k, \ell) \neq (6, 2)$.

Preuve en huit cas ! Chaque fois, on exploite la caractérisation.

Preuve du cas $k = 4a$, ℓ pair

Proposition

Si, dans $G(V, E)$, I est un ensemble indépendant tel que $\sum_{u \in I} d(u) = \frac{|E|}{2}$, alors G est équilibrable.



Résumé

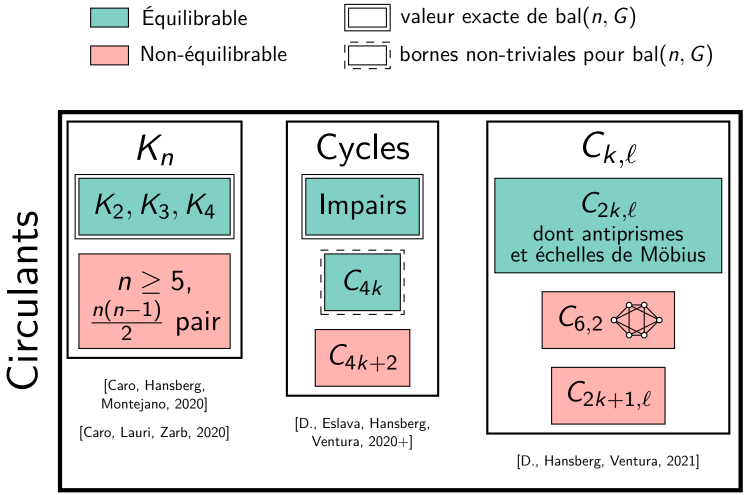
Équilibrable

Non-équilibrable

valeur exacte de bal(n, G)

bornes non-triviales pour bal(n, G)

Résumé



Équilibrable
Non-équilibrable
valeur exacte de bal(n, G)
bornes non-triviales pour bal(n, G)
Circulants
K_n
K_2, K_3, K_4
$n \geq 5$, $\frac{n(n-1)}{2}$ pair
[Caro, Hansberg, Montejano, 2020]
[Caro, Lauri, Zarb, 2020]
Cycles
Impairs
C_{4k}
C_{4k+2}
[D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+]
$C_{k,\ell}$
$C_{2k,\ell}$ dont antiprismes et échelles de Möbius
$C_{6,2}$
$C_{2k+1,\ell}$
[D., Hansberg, Ventura, 2021]

Résumé

Équilibrable

Non-équilibrable

valeur exacte de bal(n, G)

bornes non-triviales pour bal(n, G)

Circulants

K_n

K_2, K_3, K_4

$n \geq 5$, $\frac{n(n-1)}{2}$ pair

[Caro, Hansberg, Montejano, 2020]

[Caro, Lauri, Zarb, 2020]

Cycles

Impairs

C_{4k}

C_{4k+2}

[D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+]

$C_{k,\ell}$

$C_{2k,\ell}$
dont antiprismes
et échelles de Möbius

$C_{6,2}$ 

$C_{2k+1,\ell}$

[D., Hansberg, Ventura, 2021]

Grilles

$G_{2k,2\ell}$

$G_{2k+1,2\ell+1}$

T_{8k}, T_{8k+1}

T_{8k+4}, T_{8k+5}

[D., Hansberg, Ventura, 2021]

Travaux en cours

- K_n avec $\frac{n(n-1)}{2}$ impair
  Solutions entières communes de $k(n-k) = \frac{1}{2}\binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$ et $\binom{\ell}{2} = \frac{1}{2}\binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$

Travaux en cours

- K_n avec $\frac{n(n-1)}{2}$ impair
  Solutions entières communes de $k(n-k) = \frac{1}{2}\binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$ et $\binom{\ell}{2} = \frac{1}{2}\binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$
  $\Rightarrow$ Explicites, mais difficiles à combiner... trouvé par ordinateur :
  1. $n \in \{2, 3, 7, 11, 14, 38, 62, 79, 359, 43.262\} \Rightarrow$ Équilibrables
  2. Autres $n \leq 2.303.999.904.000.003 \Rightarrow$ Non-équilibrables

Travaux en cours

- K_n avec $\frac{n(n-1)}{2}$ impair
  Solutions entières communes de $k(n-k) = \frac{1}{2}\binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$ et $\binom{\ell}{2} = \frac{1}{2}\binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$
  $\Rightarrow$ Explicites, mais difficiles à combiner... trouvé par ordinateur :
  1. $n \in \{2, 3, 7, 11, 14, 38, 62, 79, 359, 43.262\} \Rightarrow$ Équilibrables
  2. Autres $n \leq 2.303.999.904.000.003 \Rightarrow$ Non-équilibrables
- $2K_n$

Travaux en cours

- K_n avec $\frac{n(n-1)}{2}$ impair
  Solutions entières communes de $k(n-k) = \frac{1}{2}\binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$ et $\binom{\ell}{2} = \frac{1}{2}\binom{n}{2} \pm \frac{1}{2}$
  $\Rightarrow$ Explicites, mais difficiles à combiner... trouvé par ordinateur :
  1. $n \in \{2, 3, 7, 11, 14, 38, 62, 79, 359, 43.262\} \Rightarrow$ Équilibrables
  2. Autres $n \leq 2.303.999.904.000.003 \Rightarrow$ Non-équilibrables
- $2K_n$
  Équilibrable $\Leftrightarrow$ n est la somme de deux carrés

Graphes non-équilibrables

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable si et seulement si il a à la fois :

1. Une coupe traversée par la moitié de ses arêtes ;
2. Un sous-graphe induit contenant la moitié de ses arêtes.

- C_{4k+2} a le sous-graphe induit, mais pas la coupe
- K_5 n'a aucun des deux

Graphes non-équilibrables

Théorème (Caro, Hansberg, Montejano, 2020)

Un graphe est équilibrable si et seulement si il a à la fois :

1. Une coupe traversée par la moitié de ses arêtes ;
2. Un sous-graphe induit contenant la moitié de ses arêtes.

- C_{4k+2} a le sous-graphe induit, mais pas la coupe
- K_5 n'a aucun des deux

$\rightarrow$ Comment différencier des « niveaux » de non-équilibrabilité ?

Le nombre d'équilibrage de liste

Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :

Le nombre d'équilibrage de liste

Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :

1. Les arêtes sont colorées par $\{r\}$, $\{b\}$ ou $\{r, b\}$.

Le nombre d'équilibrage de liste

Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :

1. Les arêtes sont colorées par $\{r\}$, $\{b\}$ ou $\{r, b\}$.
2. Les arêtes colorées par $\{r, b\}$ sont appelées bicolores ; on peut choisir leur couleur.

Le nombre d'équilibrage de liste

Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :

1. Les arêtes sont colorées par $\{r\}$, $\{b\}$ ou $\{r, b\}$.
2. Les arêtes colorées par $\{r, b\}$ sont appelées bicolores ; on peut choisir leur couleur.
3. En notant c la 2-liste-coloration, $R = \{e \mid r \in c(e)\}$ et $B = \{e \mid b \in c(e)\}$.

Le nombre d'équilibrage de liste

Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :

1. Les arêtes sont colorées par $\{r\}$, $\{b\}$ ou $\{r, b\}$.
2. Les arêtes colorées par $\{r, b\}$ sont appelées bicolores ; on peut choisir leur couleur.
3. En notant c la 2-liste-coloration, $R = \{e \mid r \in c(e)\}$ et $B = \{e \mid b \in c(e)\}$.

Définition (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soit $\mathrm{lbal}(n, G)$ le plus petit entier tel que toute 2-liste-coloration $R \cup B$ des arêtes de K_n vérifiant $|R|, |B| > \mathrm{lbal}(n, G)$ contient une copie équilibrée de G.
$\mathrm{lbal}(n, G)$ est appelé le nombre d'équilibrage de liste de G.

Le nombre d'équilibrage de liste

Idée

Passer d'une 2-coloration d'arêtes à une 2-liste-coloration d'arêtes :

1. Les arêtes sont colorées par $\{r\}$, $\{b\}$ ou $\{r, b\}$.
2. Les arêtes colorées par $\{r, b\}$ sont appelées bicolores ; on peut choisir leur couleur.
3. En notant c la 2-liste-coloration, $R = \{e \mid r \in c(e)\}$ et $B = \{e \mid b \in c(e)\}$.

Définition (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Soit $\mathrm{lbal}(n, G)$ le plus petit entier tel que toute 2-liste-coloration $R \cup B$ des arêtes de K_n vérifiant $|R|, |B| > \mathrm{lbal}(n, G)$ contient une copie équilibrée de G.
$\mathrm{lbal}(n, G)$ est appelé le nombre d'équilibrage de liste de G.

$\Rightarrow$ Tous les graphes ont un nombre d'équilibrage de liste !

Premiers résultats

Proposition

Si $\mathrm{bal}(n, G)$ existe, alors $\mathrm{lbal}(n, G) = \mathrm{bal}(n, G)$.
Sinon, $\frac{1}{2}\binom{n}{2} \leq \mathrm{lbal}(n, G) < \binom{n}{2}$.

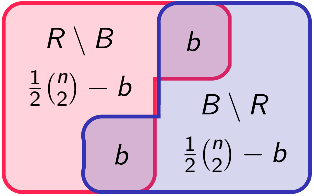
Premiers résultats

Proposition

Si $\mathrm{bal}(n, G)$ existe, alors $\mathrm{lbal}(n, G) = \mathrm{bal}(n, G)$.
Sinon, $\frac{1}{2}\binom{n}{2} \leq \mathrm{lbal}(n, G) < \binom{n}{2}$.

Compter les arêtes bicolores

Si $|R|, |B| = \frac{1}{2}\binom{n}{2} + b$:



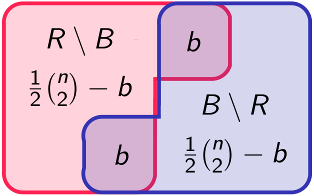
Premiers résultats

Proposition

Si $\mathrm{bal}(n, G)$ existe, alors $\mathrm{lbal}(n, G) = \mathrm{bal}(n, G)$.
Sinon, $\frac{1}{2}\binom{n}{2} \leq \mathrm{lbal}(n, G) < \binom{n}{2}$.

Compter les arêtes bicolores

Si $|R|, |B| = \frac{1}{2}\binom{n}{2} + b$:



$\Rightarrow 2b$ arêtes bicolores

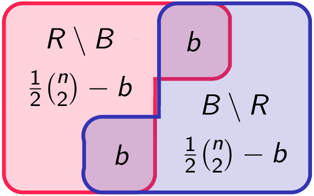
Premiers résultats

Proposition

Si $\mathrm{bal}(n, G)$ existe, alors $\mathrm{lbal}(n, G) = \mathrm{bal}(n, G)$.
Sinon, $\frac{1}{2}\binom{n}{2} \leq \mathrm{lbal}(n, G) < \binom{n}{2}$.

Compter les arêtes bicolores

Si $|R|, |B| = \frac{1}{2}\binom{n}{2} + b$:



$\Rightarrow 2b$ arêtes bicolores

Proposition

Si k arêtes bicolores garantissent une copie équilibrée de G, alors $\mathrm{lbal}(n, G) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \lceil \frac{k}{2} \rceil - 1$.

Une borne supérieure générale

- $\mathcal{H}(G) = \left\{ H \leq G \mid e(H) = \left\lfloor \frac{e(G)}{2} \right\rfloor,\ H \text{ sans sommet isolé} \right\}$

Une borne supérieure générale

- $\mathcal{H}(G) = \left\{ H \leq G \mid e(H) = \left\lfloor \frac{e(G)}{2} \right\rfloor,\ H \text{ sans sommet isolé} \right\}$

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Pour tous $G(V,E)$ et $n \geq |V|$, on a

$$\mathrm{lbal}(n, G) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \left\lceil \frac{\mathrm{ex}(n, \mathcal{H}(G))}{2} \right\rceil.$$

Une borne supérieure générale

- $\mathcal{H}(G) = \left\{ H \leq G \mid e(H) = \left\lfloor \frac{e(G)}{2} \right\rfloor,\ H \text{ sans sommet isolé} \right\}$

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Pour tous $G(V,E)$ et $n \geq |V|$, on a

$$\mathrm{lbal}(n, G) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \left\lceil \frac{\mathrm{ex}(n, \mathcal{H}(G))}{2} \right\rceil .$$

Preuve

S'il y a au moins $\mathrm{ex}(n, \mathcal{H}(G)) + 1$ arêtes bicolores, on peut les sélectionner, compléter pour obtenir une copie de G, puis assigner les arêtes bicolores pour l'équilibrer.

Application de la borne supérieure générale

Application de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- $\mathcal{H}(C_{4k+2}) =$ les forêts linéaires de taille $2k + 1$

Application de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

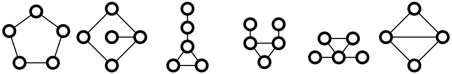
- $\mathcal{H}(C_{4k+2}) =$ les forêts linéaires de taille $2k+1$
- $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$ [Liu, Lidicky, Palmer, 2013]

Application de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- $\mathcal{H}(C_{4k+2}) =$ les forêts linéaires de taille $2k+1$
- $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$ [Liu, Lidicky, Palmer, 2013]

K_5

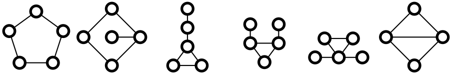
- $\mathcal{H}(K_5) =$ 

Application de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- $\mathcal{H}(C_{4k+2}) =$ les forêts linéaires de taille $2k+1$
- $\mathrm{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$ [Liu, Lidicky, Palmer, 2013]

K_5

- $\mathcal{H}(K_5) =$ 

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

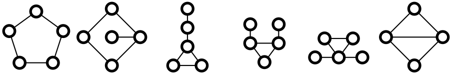
Pour tout entier $n \geq 5$, $\mathrm{ex}(n, \mathcal{H}(K_5)) = \mathrm{ex}(n, \{C_3, C_4, C_5\})$.

Application de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- $\mathcal{H}(C_{4k+2})$ = les forêts linéaires de taille $2k+1$
- $\mathrm{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$ [Liu, Lidicky, Palmer, 2013]

K_5

- $\mathcal{H}(K_5) =$ 

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Pour tout entier $n \geq 5$, $\mathrm{ex}(n, \mathcal{H}(K_5)) = \mathrm{ex}(n, \{C_3, C_4, C_5\})$.

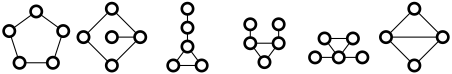
- $\mathrm{lbal}(n, K_5) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1+\epsilon)\frac{1}{4\sqrt{2}} n^{\frac{3}{2}}$ [Füredi, Simonovits, 2013]

Application de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- $\mathcal{H}(C_{4k+2})$ = les forêts linéaires de taille $2k+1$
- $\mathrm{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$ [Liu, Lidicky, Palmer, 2013]

K_5

- $\mathcal{H}(K_5) =$ 

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

Pour tout entier $n \geq 5$, $\mathrm{ex}(n, \mathcal{H}(K_5)) = \mathrm{ex}(n, \{C_3, C_4, C_5\})$.

- $\mathrm{lbal}(n, K_5) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1+\epsilon)\frac{1}{4\sqrt{2}}n^{\frac{3}{2}}$ [Füredi, Simonovits, 2013]

$\rightarrow$ Qualité de cette borne ?

Nombre d'équilibrage de liste de C_{4k+2}

Nombre d'équilibrage de liste de C_{4k+2}

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

$\mathrm{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$

Nombre d'équilibrage de liste de C_{4k+2}

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

$\mathrm{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$

Idée de la preuve

1. Supposons que $|R|, |B| > \frac{1}{2}\binom{n}{2}$: il y a au moins 2 arêtes bicolores.

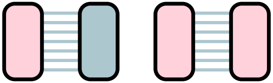
Nombre d'équilibrage de liste de C_{4k+2}

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

$\mathrm{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$

Idée de la preuve

1. Supposons que $|R|, |B| > \frac{1}{2}\binom{n}{2}$: il y a au moins 2 arêtes bicolores.
2. Soit $t \geq 3k+1$. On trouve une copie de type A ou de type B de K_{2t}.

type A  type B

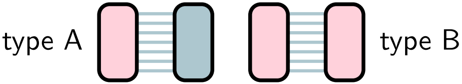
Nombre d'équilibrage de liste de C_{4k+2}

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

$\mathrm{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$

Idée de la preuve

1. Supposons que $|R|, |B| > \frac{1}{2}\binom{n}{2}$: il y a au moins 2 arêtes bicolores.
2. Soit $t \geq 3k+1$. On trouve une copie de type A ou de type B de K_{2t}.



3. Si copie de type A : copie équilibrée de C_{4k+2}.

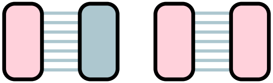
Nombre d'équilibrage de liste de C_{4k+2}

Théorème (D., Eslava, Hansberg, Ventura, 2020+)

$\mathrm{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$

Idée de la preuve

1. Supposons que $|R|, |B| > \frac{1}{2}\binom{n}{2}$: il y a au moins 2 arêtes bicolores.
2. Soit $t \geq 3k+1$. On trouve une copie de type A ou de type B de K_{2t}.

type A  type B

3. Si copie de type A : copie équilibrée de C_{4k+2}.
4. Si copie de type B : peu importe où se situe l'arête bicolore, on trouve une copie équilibrée de C_{4k+2}.

Borne inférieure pour K_5

Borne inférieure pour K_5

Proposition

Soit $c = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$. On a $\mathrm{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1-\epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$.

Borne inférieure pour K_5

Proposition

Soit $c = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$. On a $\mathrm{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1-\epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$.

Preuve

On construit une 2-liste-coloration des arêtes de K_n qui ne contient pas de K_5 équilibré.

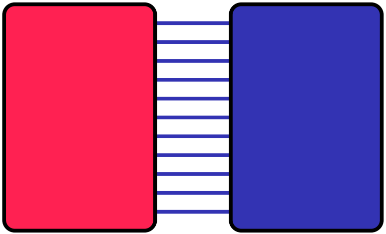
Borne inférieure pour K_5

Proposition

Soit $c = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$. On a $\mathrm{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1-\epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$.

Preuve

On construit une 2-liste-coloration des arêtes de K_n qui ne contient pas de K_5 équilibré.



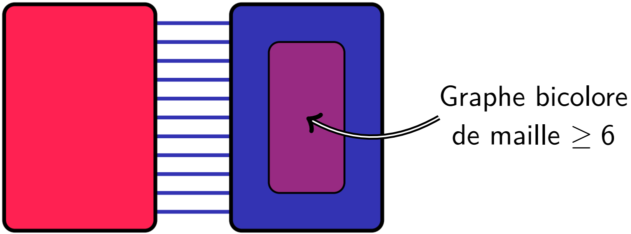
Borne inférieure pour K_5

Proposition

Soit $c = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$. On a $\mathrm{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1-\epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$.

Preuve

On construit une 2-liste-coloration des arêtes de K_n qui ne contient pas de K_5 équilibré.



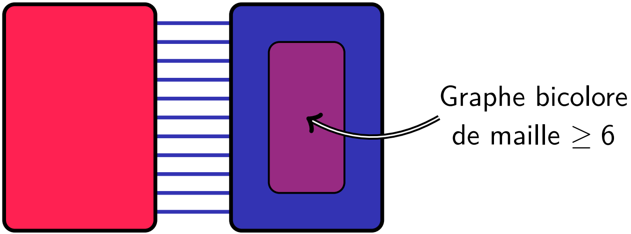
Borne inférieure pour K_5

Proposition

Soit $c = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}}$. On a $\mathrm{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1-\epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$.

Preuve

On construit une 2-liste-coloration des arêtes de K_n qui ne contient pas de K_5 équilibré.



Ensuite, on montre que $|R|, |B| > \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1-\epsilon)cn^{\frac{3}{2}}$.

Qualité de la borne supérieure générale

Qualité de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- Borne supérieure générale : $\mathrm{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$
- Valeur exacte : $\mathrm{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$

Qualité de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- Borne supérieure générale : $\mathrm{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$
- Valeur exacte : $\mathrm{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$

K_5

- Borne supérieure générale : $\mathrm{lbal}(n, K_5) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1+\epsilon)\frac{1}{4\sqrt{2}}n^{\frac{3}{2}}$
- Borne inférieure : $\mathrm{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1-\epsilon)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}} n^{\frac{3}{2}}$

Qualité de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- Borne supérieure générale : $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$
- Valeur exacte : $\text{lbal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$

K_5

- Borne supérieure générale : $\text{lbal}(n, K_5) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1+\epsilon)\frac{1}{4\sqrt{2}}n^{\frac{3}{2}}$
- Borne inférieure : $\text{lbal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1-\epsilon)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}} n^{\frac{3}{2}}$

Qualité de la borne supérieure générale

Cycles C_{4k+2}

- Borne supérieure générale : $\text{Ibal}(n, C_{4k+2}) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \theta(kn - k^2)$
- Valeur exacte : $\text{Ibal}(n, C_{4k+2}) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$

K_5

- Borne supérieure générale : $\text{Ibal}(n, K_5) \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1+\epsilon)\frac{1}{4\sqrt{2}} n^{\frac{3}{2}}$
- Borne inférieure : $\text{Ibal}(n, K_5) \geq \frac{1}{2}\binom{n}{2} + (1-\epsilon)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{5}{2}} n^{\frac{3}{2}}$

$\rightarrow$ Des différences existent au sein des graphes non-équilibrables.

Le mot de la fin

Conclusion

- Résultats d'équilibrabilité et sur $\mathrm{bal}(n, G)$
- Introduction de $\mathrm{lbal}(n, G)$ pour étudier les graphes non-équilibrables

Le mot de la fin

Conclusion

- Résultats d'équilibrabilité et sur $\mathrm{bal}(n, G)$
- Introduction de $\mathrm{lbal}(n, G)$ pour étudier les graphes non-équilibrables

Questions ouvertes

- Complexité
- Plus de classes de graphes
- Plus de couleurs

Le mot de la fin

Conclusion

- Résultats d'équilibrabilité et sur bal(n, G)
- Introduction de Ibal(n, G) pour étudier les graphes non-équilibrables

Questions ouvertes

- Complexité
- Plus de classes de graphes
- Plus de couleurs