МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«МИРЭА – Российский технологический университет»

ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Лабораторная работа 2

по курсу «**Случайные процессы**»

Тема: **Марковский процесс с непрерывным временем и пятью состояниями**

Выполнил:
Студент 4-го курса
Жолковский Д.А.

Группа: КМБО-01-16

МОСКВА 2019

Лабораторная работа по случайным процессам № 2

«Марковский процесс с непрерывным временем и пятью состояниями»

Задание

Дана матрица интенсивностей однородного марковского процесса с непрерывным временем

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} & \lambda_{15} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} & \lambda_{25} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \lambda_{34} & \lambda_{35} \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} & \lambda_{43} & \lambda_{44} & \lambda_{45} \\ \lambda_{51} & \lambda_{52} & \lambda_{53} & \lambda_{53} & \lambda_{55} \end{pmatrix}$$

Следуя **Указаниям** нужно:

1. Построить граф состояний марковского процесса.

2. Написать систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний (с заданными интенсивностями).

3. Написать систему уравнений для нахождения стационарных вероятностей.

4. Найти стационарное распределение вероятностей состояний $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$.

5. Считая, что в начальный момент времени $t = 0$ система находится в состоянии 1, провести моделирование развития системы до события с номером K, при котором впервые будет выполнено неравенство

$$\delta_K = \max(|\nu_i(K) - \nu_i(K-1)|; i = 1,...,5) \le 0{,}0001,$$

где $\nu_i(K) = \frac{R_i(K)}{K}$ – относительная частота попадания системы в состояние i с 1-го по K событие (считаем, что $\nu_i(0) = 0$ при всех i), $R_i(K)$ – число попаданий системы в состояние i в событиях с 1-го по K. Событием считается переход системы из одного состояния в другое.

6. Составить таблицу 1 с данными о событиях:

– номер события l;

– момент $t_{соб}(l)$ наступления события l;

– состояние системы после события $C(l)$;

– время $\tau(l)$ пребывания системы в состоянии $C(l)$ с момента $t_{соб}(l)$ до перехода системы в другое состояние;

– значение отклонения δ_l.

В таблицу поместить данные о событиях с 1-го по 100, а также о событиях $K-5,\ K-4,\ K-3,\ K-2,\ K-1,\ K$, если $K>100$.

7. Составить таблицу 2 с данными о состояниях следующего вида:

– номер состояния i;

– число $R_i(100)$ попаданий системы в состояние i в событиях с 1-го по 100;

– относительная частота $\nu_i(100)$ попадания системы в состояние i в событиях с 1-го по 100;

– общее время $T_i(100)$ пребывания системы в состоянии i с момента $t_{соб}(1)$ до $t_{соб}(101)$, т.е. до времени наступления события 101.

– доля $\Delta_i(100)$ времени пребывания системы в состоянии i в период с $t_{соб}(1)$ до $t_{соб}(101)$.

8. Составить таблицу 3 с данными о состояниях следующего вида:

– номер состояния i;

– число $R_i(K)$ попаданий системы в состояние i в событиях с 1-го по K;

– относительная частота $\nu_i(K)$ попадания системы в состояние i в событиях с 1-го по K;

– общее время $T_i(K)$ пребывания системы в состоянии i с момента $t_{соб}(1)$ до $t_{соб}(K+1)$, т.е. до времени наступления события $K+1$.

– доля $\Delta_i(K)$ времени пребывания системы в состоянии i в период с $t_{соб}(1)$ до $t_{соб}(K+1)$.

Вычисления и вывод результатов проводить с точностью до 0,00001 .

Краткие теоретические сведения

Случайный процесс $X_t, t \geq 0$ называется марковским, если для любого целого неотрицательного m, любых моментов времени $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_m < s,\ t > 0$, любого набора состояний $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_m}, E_i, E_j$ выполнено равенство

$$P\left(X_{s+t} = E_j \middle| X_{s_1} = E_{i_1};\ \ldots; X_{s_m} = E_{i_m}; X_s = E_i\right) = P\left(X_{s+t} = E_j \middle|\ X_s = E_i\right).$$

Процесс X_t называется однородным (по времени), если условная вероятность $P\left(X_{s+t} = E_j \middle|\ X_s = E_i\right)$ перехода из состояния E_i в состояние E_j не зависит от s.

$p_{ij} = P\left(X_{s+t} = E_j \middle|\ X_s = E_i\right)$.

$P(t) = ||p_{ij}(t)||$ - матрица вероятностей перехода за время t.

Предполагаем, что переходные вероятности $p_{ij}(t)$ дифференцируемы в нуле: $p'_{ij}(0) = \lambda_{ij}$, при $i \neq j$ $p_{ij}(t) = \lambda_{ij}t + o(t), \quad p_{ii}(t) = 1 + \lambda_{ii}t + o(t)$.

$P'(0) = \Lambda = ||\lambda_{ij}||$ - матрица интенсивностей (плотность вероятностей) перехода.

Ориентированный граф состояний, вершины которого (обозначаемых прямоугольниками) служат состояния E_i системы, а стрелками обозначены возможные непосредственные переходы из состояния E_i в состояние E_j. При этом каждой стрелке приписана соответствующая плотность $\lambda_{ij}\ (\lambda_{ij} > 0)$ вероятности перехода.

Пределы, если они существуют, $p_i = \lim\limits_{t\to\infty} p_i(t)$ называются *предельными* (или финитными) вероятностями состояний.

Распределение вероятностей состояний, которое не зависит от времени $p_i(t + \tau) = p_i(t) = p_i$ для любых $t, \tau \geq 0$ и любых *i*=1,2,… называется стационарным.

дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\frac{dp_i}{dt} = \lambda_{ii}p_i(t) + \sum_{i\neq j} \lambda_{ji}p_j(t) = \sum_{i\neq j} \lambda_{ji}p_j(t) - p_i(t)\sum_{i\neq j} \lambda_{ij}, i = 1,2,\ldots$$

Формулы для нахождения стационарного распределения:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\neq j} \lambda_{ji}p_j - p_i \sum\limits_{i\neq j} \lambda_{ij} = 0, i = 1,2,\ldots,n \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 \end{cases}$$

Средства высокоуровневого интерпретируемого языка программирования Python, которые использованы в программе расчета

numpy.linalg.matrix_power – возведение матрицы в натуральную степень
numpy.linalg.solve – решение слау
numpy.round – округление всех элементов матрицы
numpy.concatenate – конкатенация матриц
numpy.identity – единичная матрица
numpy.ones – матрица, целиком состоящая из единиц
numpy.max – максимальный элемент в матрице
numpy.absolute – модуль матрицы
numpy.set_printoptions – форматирование выхода (например, без экспоненциальной формы)
.shape – получение размерности матрицы
.reshape – изменение размерности матрицы
yield – создание части генерируемой последовательности (используется вместо return для генераторов)
math.log – натуральный логарифм.
random.choices – выбор одного из элементов с возможностью задания весов (вероятностей)
random.uniform – рандомное число в заданном диапазоне.
tuple – преобразование массива в кортеж
itertools.product – проход по всем комбинациям
copy.copy – безопасное копирование переменной
inspect.isgeneratorfunction – проверка, является ли функция генератором
range – генератор массива
networkx.MultiDiGraph – создание графа
@... – декоратор функции, A @ B – матричное произведение (A * B) – скалярное
pandas.DataFrame – создание таблицы (удобный формат для записи и чтения)
parser.parse_args – парсинг командной строки
.tolist – метод преобразования матрицы в список
enumerate – проход по итерируемому объекту с перечислением индексов его элементов

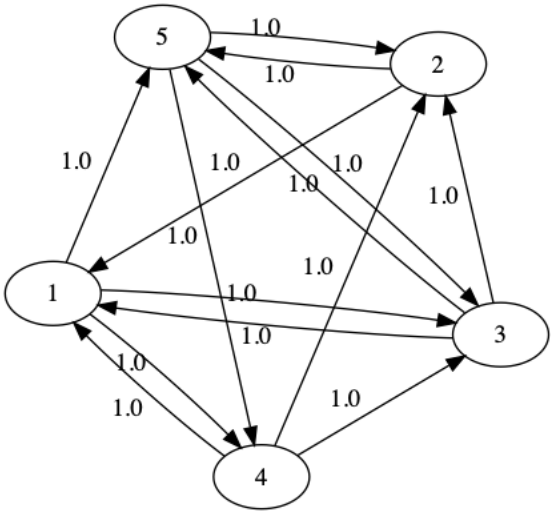
Результаты расчетов

Вариант №10

Исходные данные:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1 Построить граф состояний марковского процесса.



2 Написать систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний (с заданными интенсивностями).

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{q} = -3p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \\ \frac{dp_2}{q} = -2p_2 + p_3 + p_4 + p_5 \\ \frac{dp_3}{q} = p_1 - 3p_3 + p_4 + p_5 \\ \frac{dp_4}{q} = p_1 - 3p_4 + p_5 \\ \frac{dp_5}{q} = p_1 + p_2 + p_3 - 3p_5 \end{cases}$$

3 Написать систему уравнений для нахождения стационарных вероятностей.

$$\begin{cases} -3p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0 \\ -2p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0 \\ p_1 - 3p_3 + p_4 + p_5 = 0 \\ p_1 - 3p_4 + p_5 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 - 3p_5 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases}$$

3 Найти стационарное распределение вероятностей состояний.

$(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) =$

$$\begin{pmatrix} 0.19608 & 0.26797 & 0.18301 & 0.13725 & 0.21569 \end{pmatrix}$$

5.
K = 7536

6 Таблица 1.

l	$t_{\text{соб}}(l)$	$C(l)$	$\tau(l)$	δ_l
1	0.10426	4	0.10426	1.0
2	0.2008	1	0.09655	0.5
3	1.23922	3	1.03842	0.33333
4	1.57812	2	0.33891	0.25
5	1.76707	5	0.18895	0.2
6	2.6551	2	0.88803	0.13333
7	2.67188	1	0.01677	0.11905
8	2.68582	5	0.01394	0.10714
9	3.11975	4	0.43393	0.09722
10	4.27323	2	1.15348	0.07778
11	5.22844	1	0.95522	0.07273
12	5.40541	3	0.17697	0.07576
13	5.79365	1	0.38824	0.05769
14	6.28093	4	0.48727	0.06044
15	7.36766	1	1.08673	0.04762
16	7.44824	4	0.08058	0.05
17	7.49037	1	0.04213	0.04044
18	7.98521	3	0.49484	0.04902
19	8.29031	2	0.3051	0.04386
20	8.29682	1	0.00651	0.03421
21	8.45618	4	0.15937	0.0381
22	8.55346	1	0.09728	0.0303
23	8.75084	3	0.19738	0.03755
24	9.13865	5	0.38781	0.03804

25	9.16094	3	0.02229	0.03333
26	9.23959	1	0.07864	0.02615
27	9.25729	3	0.0177	0.02991
28	9.61411	1	0.35682	0.02381
29	9.99357	4	0.37946	0.02833
30	10.26583	2	0.27226	0.02874
31	10.58967	1	0.32384	0.02151
32	10.96439	3	0.37472	0.0252
33	11.10245	5	0.13806	0.02746
34	11.33324	4	0.23078	0.02406
35	11.86942	1	0.53619	0.01933
36	12.03478	3	0.16536	0.02222
37	12.23818	2	0.20339	0.02327
38	13.05795	1	0.81978	0.01778
39	13.4287	3	0.37075	0.02024
40	13.46175	5	0.03305	0.02244
41	14.56527	4	1.10352	0.02012
42	14.90506	1	0.33979	0.01626
43	14.9943	3	0.08924	0.01827
44	15.06153	5	0.06723	0.02008
45	15.29744	2	0.23591	0.01919
46	15.57072	1	0.27328	0.01498
47	15.75318	5	0.18246	0.0185
48	15.83652	4	0.08334	0.01729
49	15.95432	3	0.1178	0.01616
50	16.07373	5	0.11941	0.01714
51	16.11317	3	0.03944	0.01529
52	16.26931	2	0.15614	0.01659
53	16.7008	1	0.43149	0.01343
54	16.73736	5	0.03656	0.01572
55	16.79465	4	0.05728	0.01515
56	17.44621	2	0.65156	0.01526
57	18.36836	1	0.92216	0.01253
58	18.52733	5	0.15897	0.01452
59	18.66129	3	0.13396	0.01344
60	18.71636	2	0.05507	0.01412
61	19.15755	5	0.44119	0.01366
62	19.26242	3	0.10487	0.01269
63	19.46152	5	0.1991	0.01306
64	19.92669	3	0.46517	0.01215
65	20.34197	1	0.41528	0.0113
66	20.45863	5	0.11666	0.01235
67	20.67491	2	0.21628	0.01266
68	21.55426	5	0.87935	0.01185
69	22.09469	3	0.54043	0.0113
70	22.33453	1	0.23984	0.01056
71	22.72426	4	0.38972	0.01207
72	22.75547	1	0.03121	0.01017
73	22.79879	4	0.04332	0.01161
74	23.68042	1	0.88163	0.00981
75	23.70738	4	0.02696	0.01117
76	23.80737	1	0.09999	0.00947

77	24.47661	4	0.66924	0.01077
78	24.77537	1	0.29876	0.00916
79	24.8052	4	0.02984	0.01039
80	25.04211	2	0.2369	0.01076
81	25.50438	5	0.46227	0.01019
82	25.67298	4	0.1686	0.00994
83	25.67748	1	0.0045	0.00867
84	26.23584	4	0.55836	0.00961
85	26.37587	3	0.14003	0.00952
86	26.61812	1	0.24224	0.00834
87	28.63848	4	2.02037	0.00922
88	29.19838	1	0.55989	0.0081
89	29.24356	4	0.04518	0.00894
90	29.25479	2	0.01123	0.00961
91	30.65169	5	1.3969	0.00916
92	31.06137	4	0.40968	0.0086
93	32.03611	2	0.97473	0.00923
94	32.03685	5	0.00074	0.00881
95	32.64346	4	0.60661	0.00829
96	32.88051	3	0.23705	0.00855
97	33.06953	2	0.18902	0.00881
98	33.10747	1	0.03794	0.00747
99	33.21964	5	0.11218	0.00835
100	33.33982	2	0.12017	0.00848
…	…	…	…	…
7531	2732.24217	2	0.10237	0.00011
7532	2734.54975	5	2.30758	0.0001
7533	2735.02643	2	0.47668	0.00011
7534	2735.12814	1	0.10171	0.0001
7535	2735.50864	3	0.3805	0.00011
7536	2736.49479	5	0.98615	0.0001

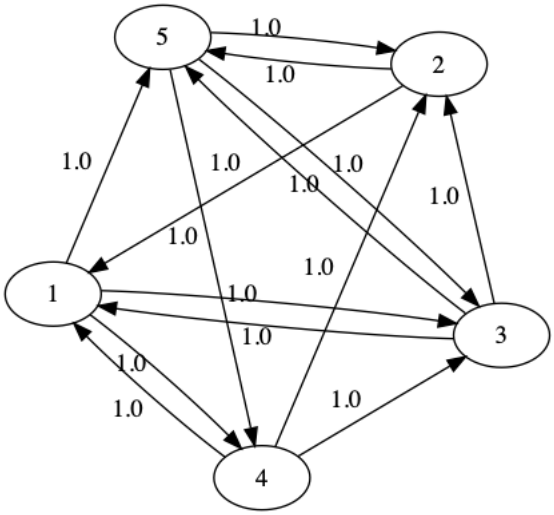
7 Таблица 2.

i	$R_i(100)$	$v_i(100)$	$T_i(100)$	$\Delta_i(100)$
1	27	0.27	417.81534	0.25003
2	16	0.16	280.44736	0.16783
3	18	0.18	264.49004	0.15828
4	21	0.21	385.94054	0.23096
5	18	0.18	322.35339	0.19291

8 Таблица 3.

i	$R_i(K)$	$v_i(K)$	$T_i(K)$	$\Delta_i(K)$
1	1586	0.21046	2133529.99512	0.20982
2	1465	0.1944	1940723.53619	0.19086
3	1506	0.19984	2056189.17699	0.20221
4	1121	0.14875	1519501.19484	0.14943
5	1858	0.24655	2518412.73536	0.24767

Анализ результатов и выводы



K = 7 5 3 6

i	1	2	3	4	5
r_i	0.19608	0.26797	0.18301	0.13725	0.21569
$v_i(100)$	0.27	0.16	0.18	0.21	0.18
$v_i(K)$	0.21046	0.1944	0.19984	0.14875	0.24655
$\Delta_i(100)$	0.25003	0.16783	0.15828	0.23096	0.19291
$\Delta_i(K)$	0.20982	0.19086	0.20221	0.14943	0.24767

Список литературы

1. Лобузов А.А., Гумляева С.Д., Норин Н.В. Задачи по теории случайных процессов. — М.: МИРЭА, 1993.
2. Булинский А. В., А. Н. Ширяев А. Н. Теория случайных процессов: Учебник для вузов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005
3. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 2007.

Приложение (Листинг программы)

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: UTF-8 -*-

import sys
import argparse

from IPython.display import Latex

import numpy as np
from numpy.linalg import matrix_power, solve
from random import choices, uniform
from math import log
import pandas as pd

from itertools import product
from inspect import isgeneratorfunction
from copy import copy

import networkx as nx
from networkx.drawing.nx_agraph import to_agraph

def createParser():
    parser = argparse.ArgumentParser()
    parser.add_argument('-p', '--path', default='Data/input.csv', type=str)
    return parser

# ### Методы

# Декоратор для округления возвращаемых значений других функций
def round_output(fn):
    rn = 5
    if isgeneratorfunction(fn):
        def rounder(*args, **kwargs):
            for output in fn(*args, **kwargs):
                if type(output) != tuple:
                    yield np.round(output, rn)
                else:
                    res = []
                    for element in output:
                        res.append(np.round(element, rn))
                    yield tuple(res)
        return rounder
    else:
        def rounder(*args, **kwargs):
            output = fn(*args, **kwargs)
            if type(output) != tuple:
                return np.round(output, rn)
            else:
```

```
                res = []
                for element in output:
                    res.append(np.round(element, rn))
                return tuple(res)
        return rounder

np.set_printoptions(precision=5, suppress=True) # formatter={'float': '{:
0.5f}'.format})
pd.options.display.float_format = '{:,.5f}'.format


def M2W(P):
    graph = {(str(i+1), str(j+1)): round(P[i][j], 5)
             for i, j in product(range(P.shape[0]), repeat=2) if P[i][j] >
0.}
    return graph

def plot_graph(P, path='graph'):
    graph = M2W(P)
    G=nx.MultiDiGraph()

    for edge in graph:
        G.add_edge(edge[0], edge[1])

    G.graph['edge'] = {'arrowsize': '1', 'splines': 'curved'}
    G.graph['graph'] = {'scale': '3'}

    A = to_agraph(G)
    A.layout('neato')#neato, dot, twopi, circo, fdp, nop, wc, acyclic, gvpr,
gvcolor, ccomps, sccmap, tred, sfdp, unflatten

    for pair in graph:
        edge = A.get_edge(pair[0], pair[1])
        edge.attr['label'] = str(graph[pair]) + "  "

    A.draw(f'{path}.png')


def save_table_csv(table, path, columns, index, convert=True):
    df = pd.DataFrame(np.array(table).T if convert else table,
                      index=index,
                      columns=columns)
    df.to_csv(path+'.csv', sep=';', encoding='utf-8')


def matrix2latex(matr, toint=False):
    start = r'$$\begin{pmatrix} '
    end = r' \end{pmatrix}$$'
    if not toint:
        body = r' \\ '.join([r' & '.join([str(x) for x in matr[i]]) for i in
range(matr.shape[0])])
```

```
    else:
        body = r' \\ '.join([r' & '.join([str(int(x)) for x in matr[i]]) for
i in range(matr.shape[0])])
    return start + body + end


def ode_system2latex(P, toint=False):
    matr = P.T

    start = r'\[\left\{\begin{array}{ r @{{}={}} r  >{{}}c<{{}} r
>{{}}c<{{}}  r } '
    end = r' \end{array}\right.\]'

    frac = lambda i: r'\frac{dp_' + r'{0}'.format(i+1) + r'}{q}' + r'&=&'
    check_first = lambda arr, j: j == [i for i, x in enumerate(arr) if x !=
0][0]
    def element(k, j, is_first):
        if not is_first:
            st = r'&+&' if k > 0 else r'&-&'
        else:
            st = r''

        if not toint:
            if abs(k) != 1:
                bd = r'{0}'.format(abs(k)) if not is_first else
r'{0}'.format(k)
            else:
                bd = r''
                if is_first:
                    bd = r'' if k > 0 else r'-'
        else:
            if abs(k) != 1:
                bd = r'{0}'.format(abs(int(k))) if not is_first else
r'{0}'.format(int(k))
            else:
                bd = r''
                if is_first:
                    bd = r'' if k > 0 else r'-'

            nd = r'p_{0}'.format(j+1)
        return st + bd + nd

    body = [frac(i) + r' '.join([element(matr[i][j], j, check_first(matr[i],
j)) for j in range(matr.shape[1]) if matr[i][j] != 0]) + r'\\'
            for i in range(matr.shape[0])]
    return start + r' '.join(body) + end


def stationary_system2latex(P, toint=False):
    matr = P.T
```

```
    start = r'\[\left\{\begin{array}{ r @{{}={}} r  >{{}}c<{{}} r
>{{}}c<{{}}  r } '
    end = r' \end{array}\right.\]'

    check_first = lambda arr, j: j == [i for i, x in enumerate(arr) if x !=
0][0]

    def element(k, j, is_first):
        if not is_first:
            st = r'&+&' if k > 0 else r'&-&'
        else:
            st = r''

        if not toint:
            if abs(k) != 1:
                bd = r'{0}'.format(abs(k)) if not is_first else
r'{0}'.format(k)
            else:
                bd = r''
                if is_first:
                    bd = r'' if k > 0 else r'-'
        else:
            if abs(k) != 1:
                bd = r'{0}'.format(abs(int(k))) if not is_first else
r'{0}'.format(int(k))
            else:
                bd = r''
                if is_first:
                    bd = r'' if k > 0 else r'-'

            nd = r'p_{0}'.format(j+1)
        return st + bd + nd

    body = [r' '.join([element(matr[i][j], j, check_first(matr[i], j)) for j
in range(matr.shape[1]) if matr[i][j] != 0]) + r' &=& 0' + r'\\'
            for i in range(matr.shape[0])]
    body += [r' '.join([element(1.0, j, check_first(np.ones(matr.shape[1]),
j)) for j in range(matr.shape[1])]) + r' &=& 1' + r'\\']
    return start + r' '.join(body) + end


@round_output
def get_stationary_d(P):
    A = np.concatenate((P.T[:-1], np.ones((1, P.shape[0]))), axis=0)
    B = np.zeros(P.shape[0])
    B[-1] = 1.
    x = solve(A, B)
    return x


def generate_next_state(current_state_id, P):
```

```
    return choices(population=range(5), weights=P[current_state_id])[0]

def generate_time_and_next_state(current_state_id, P):
    weights = [(i, (-1. / x) * log(uniform(1e-10, 1.)))
               for i, x in enumerate(P[current_state_id]) if x > 0.]
    return sorted(weights, key=lambda x: x[1])[0]

@round_output
def generate_n_states(P, stationary, dm=1e-4):
    matr = [[x if x > 0 else 0. for x in P[i]] for i in range(P.shape[0])]
    matr = [[x / sum(matr[i]) for x in matr[i]] for i in range(P.shape[0])]
    matr = np.array(matr)

    current_state_id = 0
    prev_state_id = current_state_id
    d = 1.
    t = 0
    K = 0
    v = [np.zeros(5)]
    r = [np.zeros(5)]
    tkidq = [[0, 0, 0, 0, 0]]
    while d > dm:
        prev_state_id = current_state_id
        current_state_id, cur_q =
generate_time_and_next_state(current_state_id, P)
        t += cur_q
        if current_state_id == prev_state_id:
            print('cur = prev')
            continue
        K += 1
        cur_r = copy(r[-1])
        cur_r[current_state_id] = cur_r[current_state_id] + 1
        r.append(cur_r)
        cur_v = copy(v[-1])
        cur_v = cur_r / K #(tkid[-1][1]+1)
        v.append(cur_v)
        d = max(v[-1] - v[-2])
        tkidq.append([t, K, current_state_id+1, d, cur_q])
    return (np.array(tkidq), np.array(r), np.array(v))


if __name__ == '__main__':
    parser = createParser()
    namespace = parser.parse_args(sys.argv[1:])


    # ### 0) Подготовка


    P = np.genfromtxt(namespace.path, comments="%")
```

```
    display(Latex(matrix2latex(P, True)))

    # ### 1) Построить граф

    plot_graph(P, 'Data/test')

    # ### 2) СДУ Колмогорова

    display(Latex(ode_system2latex(P, True)))

    # ### 3) СУ для стационарных вероятностей

    display(Latex(stationary_system2latex(P, True)))

    # ### 4) Стационарное распределение

    stationary = get_stationary_d(P)

    display(Latex(matrix2latex(stationary.reshape(1, -1))))

    # ### 5) Генерация

    tkidq, R, v = generate_n_states(P, stationary)

    print(f'K = {int(tkidq[-1][1])}')

    # ### 6) Таблица 1

    table = np.concatenate(
        (np.array([tkidq[1:101, 1], tkidq[1:101, 0], tkidq[1:101, 2],
tkidq[1:101, 4], tkidq[1:101, 3]]).T,
         np.array([tkidq[-6:, 1], tkidq[-6:, 0], tkidq[-6:, 2], tkidq[-6:,
4], tkidq[-6:, 3]]).T)
    )

    table1 = pd.DataFrame(table, columns=['l', 't', 'C', 'tau', 'delta'])
```

```
    table1.l = table1.l.astype(int)
    table1.C = table1.C.astype(int)
    table1 = table1.set_index('l')


    table1.to_csv('Data/table1.csv', encoding='utf-8', sep=';')


    # ### 7) Таблица 2


    table = []

    for i in range(5):
        table.append([i+1, R[100][i], v[100][i],
                      sum([t for t, _, state, _, _ in tkidq[1:101] if state-1
== i]),
                      sum([t for t, _, state, _, _ in tkidq[1:101] if state-1
== i]) / sum(tkidq[1:101, 0])
                     ])
    table = np.round(np.array(table), 5)


    table2 = pd.DataFrame(table, columns=['i', 'R', 'v', 'T', 'delta'])

    table2.i = table2.i.astype(int)
    table2.R = table2.R.astype(int)
    table2 = table2.set_index('i')


    table2.to_csv('Data/table2.csv', encoding='utf-8', sep=';')


    # ### 8) Таблица 3


    table = []

    for i in range(5):
        table.append([i+1, R[-1][i], v[-1][i],
                      sum([t for t, _, state, _, _ in tkidq[1:] if state-1 ==
i]),
                      sum([t for t, _, state, _, _ in tkidq[1:] if state-1 ==
i]) / sum(tkidq[1:, 0])
                     ])
    table = np.round(np.array(table), 5)


    table3 = pd.DataFrame(table, columns=['i', 'R', 'v', 'T', 'delta'])
```

```
    table3.i = table3.i.astype(int)
    table3.R = table3.R.astype(int)
    table3 = table3.set_index('i')


    table3.to_csv('Data/table3.csv', encoding='utf-8', sep=';')


    # ### Анализ


    table = []

    for i in range(5):
        table.append([stationary[i], v[100][i], v[-1][i],
                      sum([t for t, _, state, _, _ in tkidq[1:101] if state-1
== i]) / sum(tkidq[1:101, 0]),
                      sum([t for t, _, state, _, _ in tkidq[1:] if state-1 ==
i]) / sum(tkidq[1:, 0])
                     ])
    table = np.round(np.array(table).T, 5)


    table4 = pd.DataFrame(table, columns=['1', '2', '3', '4', '5'])

    table4.to_csv('Data/table4.csv', encoding='utf-8', sep=';')
```