|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | | Министерство образования и науки РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ | | |  Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  **«МИРЭА – Российский технологический университет»** | |
|  | |
|  | |
|  |  |

ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Лабораторная работа 2

 по курсу «**Случайные процессы**»

Тема: **Марковский процесс с непрерывным временем и пятью состояниями**

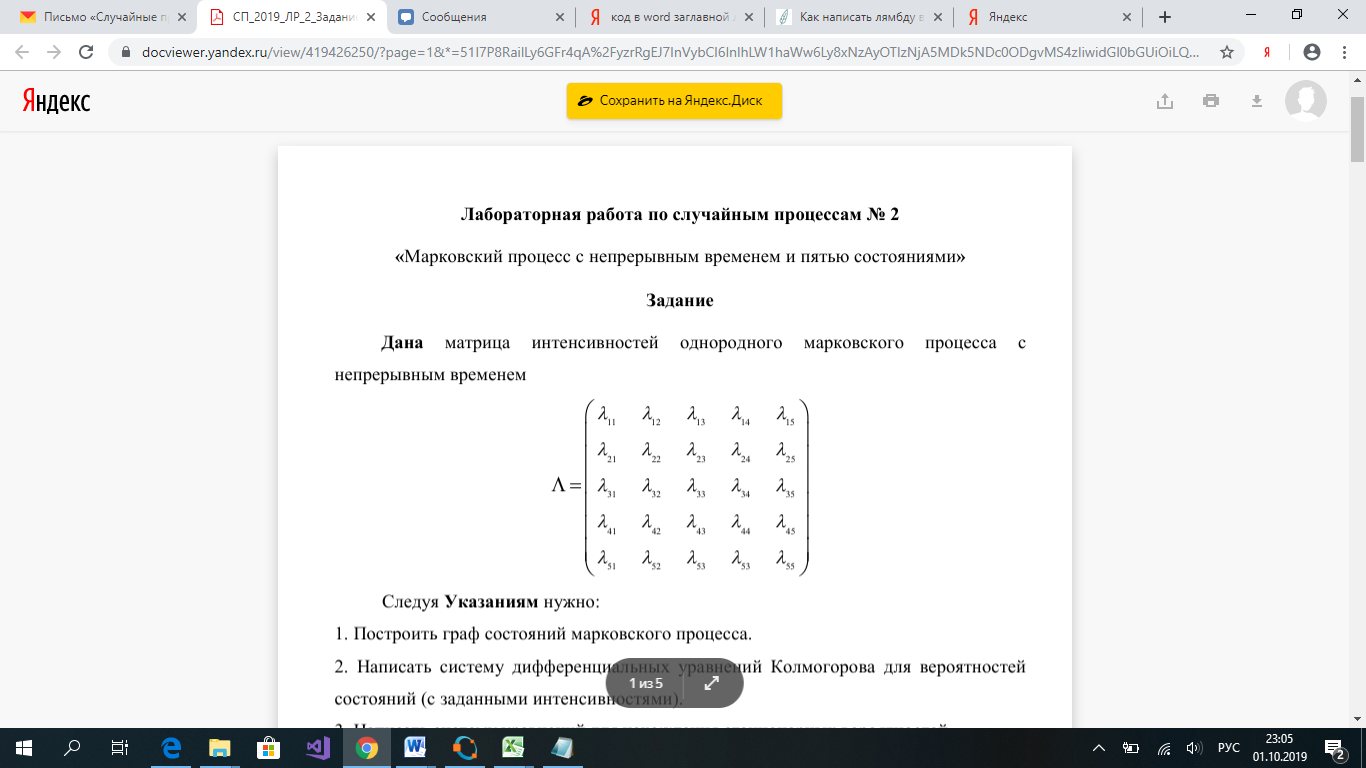
Выполнил:

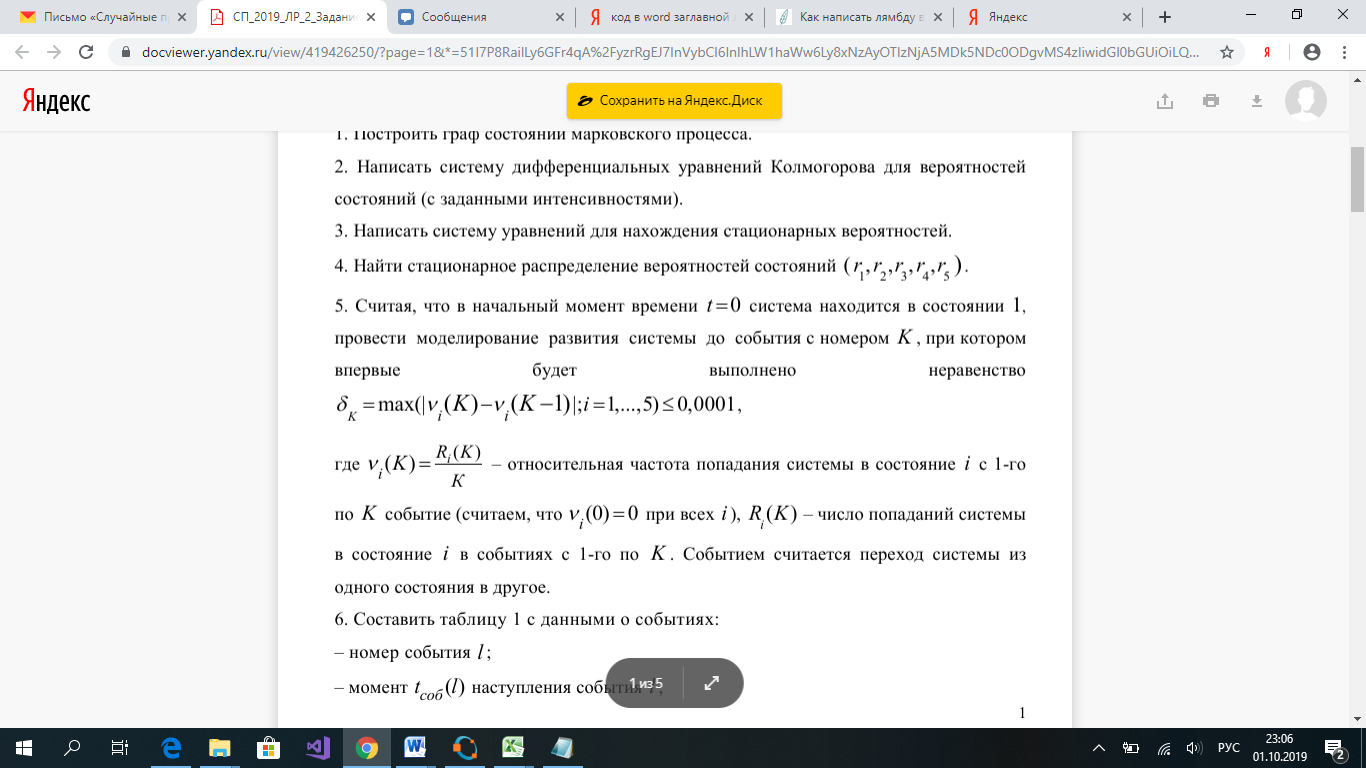
Студент 4-го курса

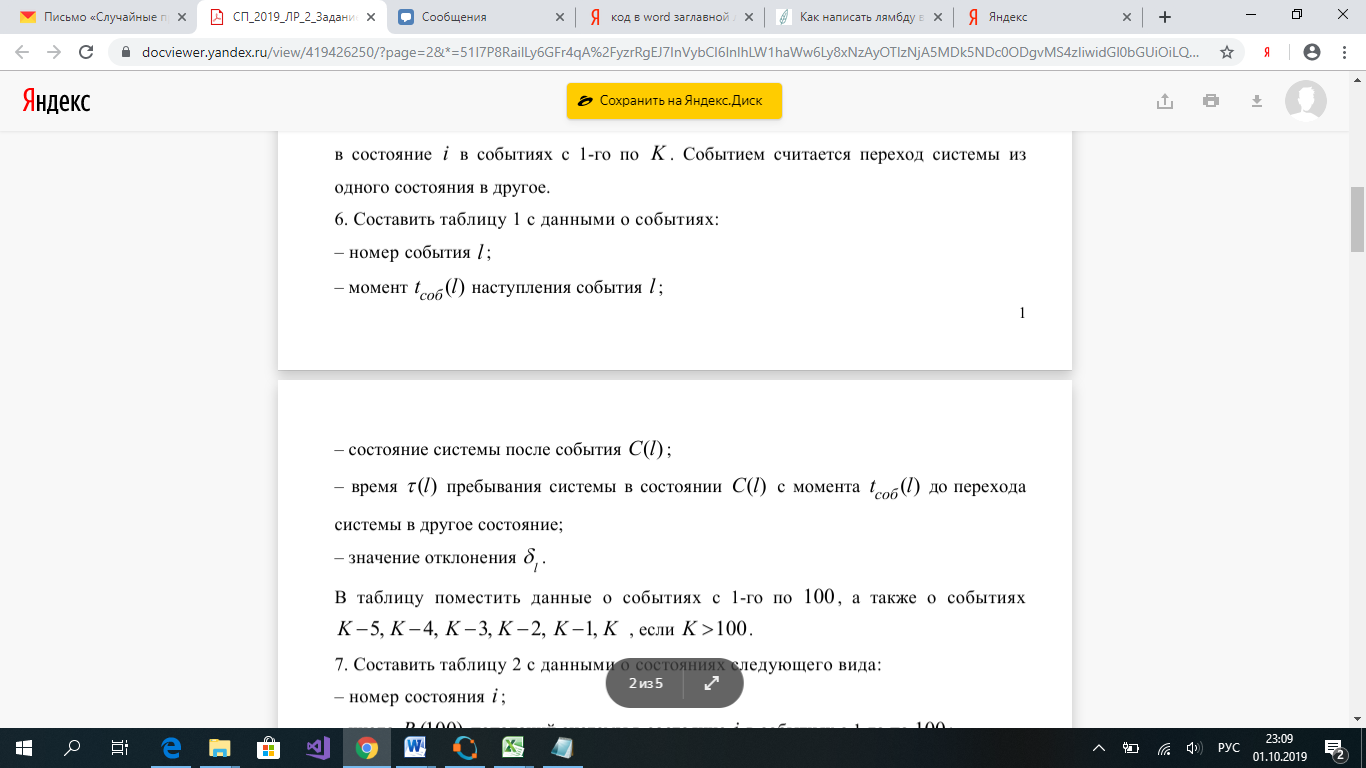
Жолковский Д.А.

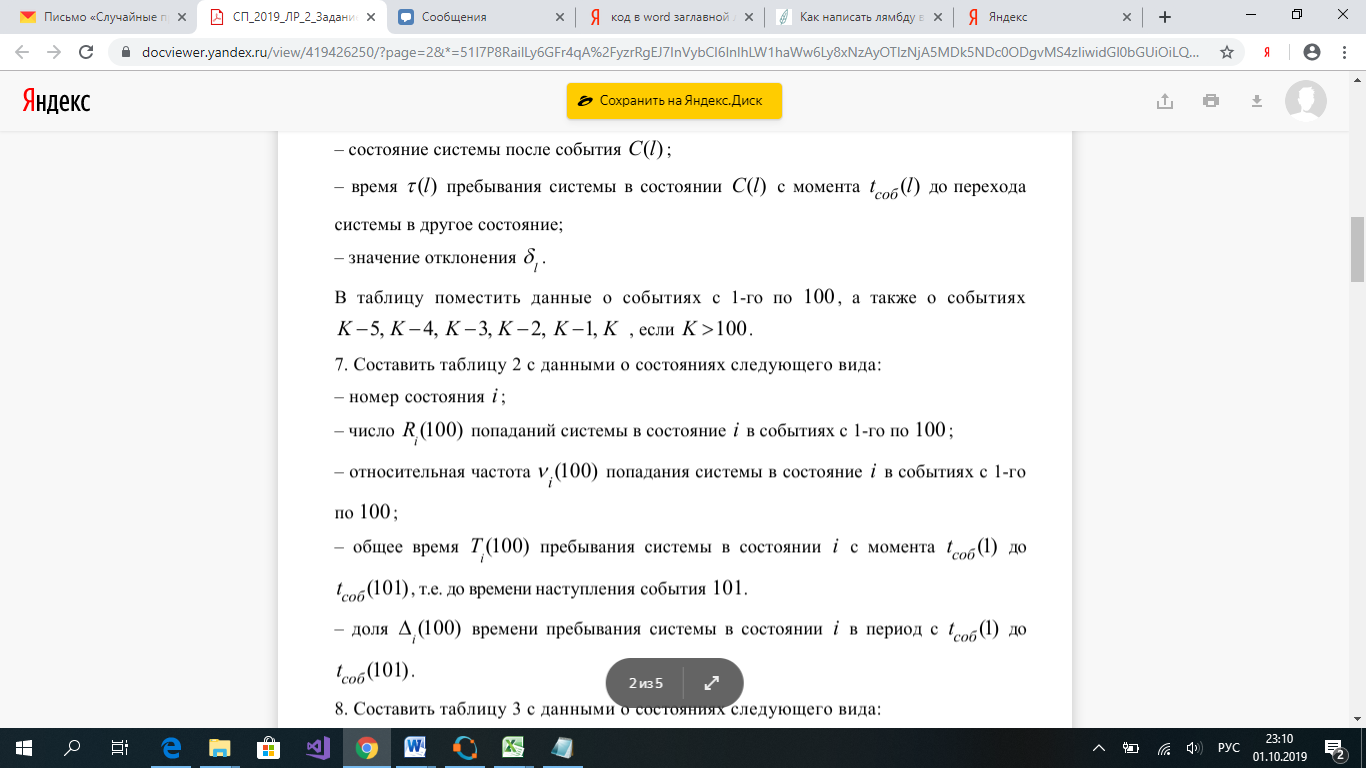
Группа: КМБО-01-16

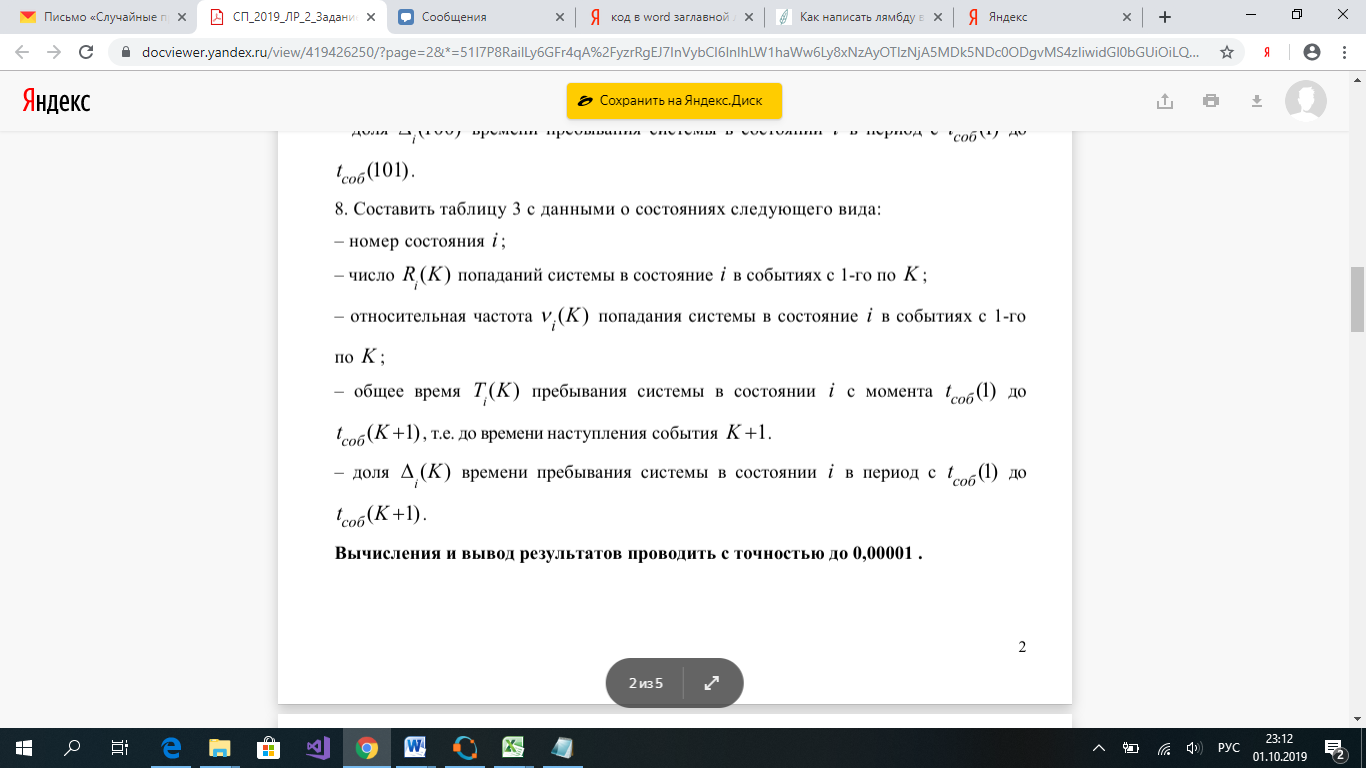
МОСКВА 2019











**Краткие теоретические сведения**

Случайный процесс называется марковским, если для любого целого неотрицательного m, любых моментов времени , любого набора состояний выполнено равенство



Процесс называется однородным (по времени), если условная вероятность перехода из состояния в состояние не зависит от s.



.



- матрица вероятностей перехода за время t.



Предполагаем, что переходные вероятности дифференцируемы в нуле:, при



- матрица интенсивностей (плотность вероятностей) перехода.



Ориентированный граф состояний, вершины которого (обозначаемых прямоугольниками) служат состояния системы, а стрелками обозначены возможные непосредственные переходы из состояния в состояние При этом каждой стрелке приписана соответствующая плотность вероятности перехода.



Пределы, если они существуют, называются *предельными* (или финитными) вероятностями состояний.



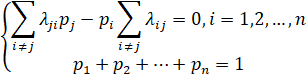
Распределение вероятностей состояний, которое не зависит от времени для любых и любых *i*=1,2,… называется стационарным.



дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний:



Формулы для нахождения стационарного распределения:



**Средства высокоуровневого интерпретируемого языка программирования Octave, которые использованы в программе расчета**

max(x) – выбор максимального значения в массиве х;

mix(x) – выбор минимального значения в массиве х;

zeros(m,n) – создание нулевой матрицы размера m х n;

disp("text") – вывод в командное окно строчки "text";

for … end, while … end – циклы с предусловием;

if … elseif … else … end – конструкция условного оператора;

size(x) – возвращение размера массива х;

abs(x) – модуль числа х;

fopen(filename, mode) – открытие файла filename в режиме mode

fprintf(f, s1, s2) – вывод информации в файл, где f – идентификатор файла (значение идентификатора возвращается функцией fopen), s1 – строка вывода, s2 – список выводимых переменных.

fclose(f) – закрытие файла с идентификатором файла f.

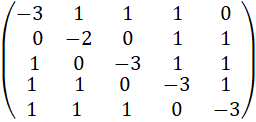
Rand-  генерация равномерного псевдослучайного числа в диапазоне 0..1

exprnd(1/lambda,1,N) – генерация N псевдослучайных чисел, распределенных по показательному закону с параметром λ = lambda;

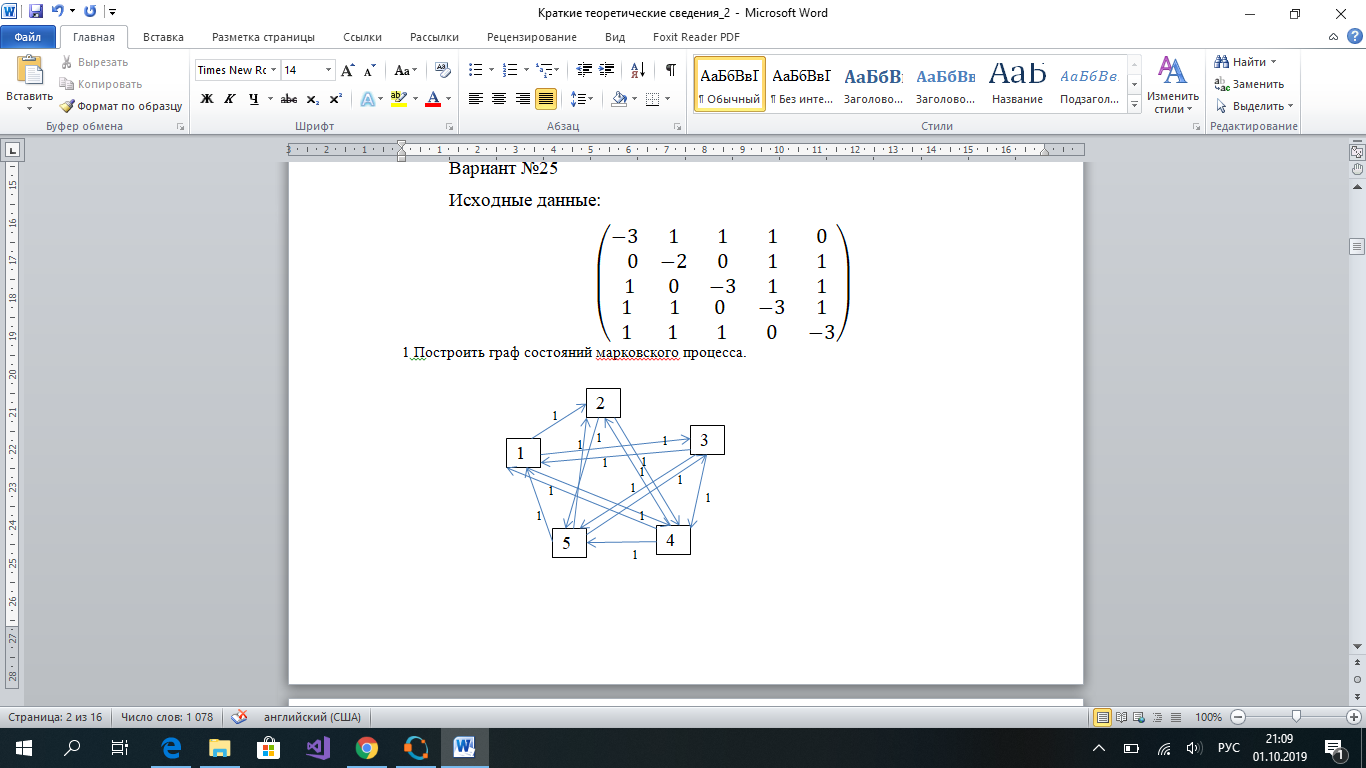
**Результаты расчетов**

Вариант №25

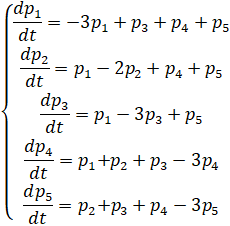
Исходные данные:



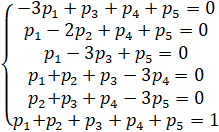
1 Построить граф состояний марковского процесса.



2 Написать систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний (с заданными интенсивностями).



3 Написать систему уравнений для нахождения стационарных вероятностей.



4 Найти стационарное распределение вероятностей состояний.

( , ,, , ) = =



5 K=7733

6 Таблица 1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *l* |  |  |  |  |
| 1 | 0.0516629 | 4 | 0.236541 | 1 |
| 2 | 0.288204 | 2 | 0.651383 | 0.5 |
| 3 | 0.939587 | 4 | 0.0945726 | 0.166667 |
| 4 | 1.03416 | 5 | 1.08767 | 0.25 |
| 5 | 2.12183 | 2 | 0.00254961 | 0.15 |
| 6 | 2.12438 | 5 | 0.247019 | 0.133333 |
| 7 | 2.37139 | 1 | 0.179406 | 0.142857 |
| 8 | 2.5508 | 2 | 0.0346794 | 0.0892857 |
| 9 | 2.58548 | 4 | 0.0693117 | 0.0833333 |
| 10 | 2.65479 | 1 | 0.527713 | 0.0888889 |
| 11 | 3.18251 | 2 | 0.763551 | 0.0636364 |
| 12 | 3.94606 | 5 | 0.23816 | 0.0681818 |
| 13 | 4.18422 | 3 | 0.365571 | 0.0769231 |
| 14 | 4.54979 | 5 | 0.380998 | 0.0549451 |
| 15 | 4.93079 | 1 | 0.551348 | 0.0571429 |
| 16 | 5.48213 | 3 | 1.27139 | 0.0583333 |
| 17 | 6.75352 | 5 | 0.173984 | 0.0441176 |
| 18 | 6.92751 | 2 | 0.985439 | 0.0424837 |
| 19 | 7.91295 | 5 | 0.441342 | 0.0380117 |
| 20 | 8.35429 | 2 | 1.54955 | 0.0368421 |
| 21 | 9.90383 | 5 | 0.0587864 | 0.0333333 |
| 22 | 9.96262 | 2 | 0.949447 | 0.0324675 |
| 23 | 10.9121 | 5 | 0.00714007 | 0.0296443 |
| 24 | 10.9192 | 3 | 0.00222757 | 0.0380435 |
| 25 | 10.9214 | 5 | 0.255543 | 0.0266667 |
| 26 | 11.177 | 2 | 0.00167691 | 0.0276923 |
| 27 | 11.1787 | 4 | 0.084336 | 0.0327635 |
| 28 | 11.263 | 5 | 0.181566 | 0.0238095 |
| 29 | 11.4446 | 3 | 0.155503 | 0.0307882 |
| 30 | 11.6001 | 4 | 0.237548 | 0.0287356 |
| 31 | 11.8376 | 1 | 0.693935 | 0.0290323 |
| 32 | 12.5315 | 4 | 0.551526 | 0.0262097 |
| 33 | 13.0831 | 5 | 0.0670552 | 0.0208333 |
| 34 | 13.1501 | 2 | 0.609919 | 0.0222816 |
| 35 | 13.76 | 4 | 0.00865569 | 0.0235294 |
| 36 | 13.7687 | 1 | 0.138589 | 0.0246032 |
| 37 | 13.9073 | 4 | 0.266756 | 0.0217718 |
| 38 | 14.174 | 5 | 0.523484 | 0.0184922 |
| 39 | 14.6975 | 3 | 0.465692 | 0.022942 |
| 40 | 15.1632 | 5 | 0.347124 | 0.0173077 |
| 41 | 15.5103 | 2 | 0.920599 | 0.0189024 |
| 42 | 16.4309 | 5 | 0.189431 | 0.0162602 |
| 43 | 16.6204 | 3 | 0.164021 | 0.0204873 |
| 44 | 16.7844 | 5 | 0.474835 | 0.0153277 |
| 45 | 17.2592 | 3 | 0.410425 | 0.0191919 |
| 46 | 17.6697 | 5 | 0.128652 | 0.0144928 |
| 47 | 17.7983 | 3 | 0.170149 | 0.0180389 |
| 48 | 17.9685 | 4 | 0.0312176 | 0.0172872 |
| 49 | 17.9997 | 2 | 0.500623 | 0.0161565 |
| 50 | 18.5003 | 4 | 0.251877 | 0.0163265 |
| 51 | 18.7522 | 2 | 0.632457 | 0.0152941 |
| 52 | 19.3846 | 5 | 0.0129019 | 0.0131976 |
| 53 | 19.3975 | 2 | 0.180001 | 0.0145138 |
| 54 | 19.5775 | 4 | 0.107354 | 0.0150245 |
| 55 | 19.6849 | 2 | 0.253989 | 0.0138047 |
| 56 | 19.9389 | 5 | 0.232538 | 0.0123377 |
| 57 | 20.1714 | 2 | 0.495541 | 0.0131579 |
| 58 | 20.667 | 4 | 0.199606 | 0.0139141 |
| 59 | 20.8666 | 1 | 0.605339 | 0.015488 |
| 60 | 21.4719 | 4 | 0.699021 | 0.0132768 |
| 61 | 22.1709 | 1 | 0.268023 | 0.0147541 |
| 62 | 22.4389 | 4 | 0.476642 | 0.0126917 |
| 63 | 22.9156 | 5 | 0.118049 | 0.0112647 |
| 64 | 23.0336 | 3 | 0.163791 | 0.0136409 |
| 65 | 23.1974 | 1 | 0.239266 | 0.0137019 |
| 66 | 23.4367 | 4 | 0.620274 | 0.0118881 |
| 67 | 24.057 | 2 | 0.872792 | 0.0115332 |
| 68 | 24.9298 | 5 | 0.079739 | 0.0105356 |
| 69 | 25.0095 | 2 | 0.135169 | 0.0110827 |
| 70 | 25.1447 | 4 | 0.132084 | 0.0111801 |
| 71 | 25.2768 | 1 | 0.238939 | 0.0124748 |
| 72 | 25.5157 | 3 | 0.442134 | 0.0121283 |
| 73 | 25.9578 | 4 | 0.692925 | 0.0106545 |
| 74 | 26.6507 | 2 | 0.000879672 | 0.0103665 |
| 75 | 26.6516 | 4 | 0.238609 | 0.0102703 |
| 76 | 26.8902 | 2 | 0.0268727 | 0.01 |
| 77 | 26.9171 | 4 | 0.52052 | 0.00991114 |
| 78 | 27.4376 | 1 | 0.959266 | 0.011322 |
| 79 | 28.3969 | 2 | 0.123609 | 0.00957481 |
| 80 | 28.5205 | 4 | 0.171341 | 0.00949367 |
| 81 | 28.6918 | 1 | 0.457057 | 0.0108025 |
| 82 | 29.1489 | 3 | 0.0502739 | 0.0106896 |
| 83 | 29.1992 | 5 | 0.0444733 | 0.00910961 |
| 84 | 29.2437 | 1 | 0.12124 | 0.010327 |
| 85 | 29.3649 | 3 | 0.192544 | 0.0102241 |
| 86 | 29.5574 | 4 | 0.582306 | 0.00889193 |
| 87 | 30.1397 | 2 | 0.445165 | 0.00882117 |
| 88 | 30.5849 | 4 | 0.450241 | 0.00862069 |
| 89 | 31.0351 | 5 | 0.0651197 | 0.00855465 |
| 90 | 31.1003 | 1 | 0.0430774 | 0.00961298 |
| 91 | 31.1433 | 4 | 0.705056 | 0.00830281 |
| 92 | 31.8484 | 5 | 0.359878 | 0.00824176 |
| 93 | 32.2083 | 1 | 0.0184044 | 0.00923329 |
| 94 | 32.2267 | 3 | 0.440306 | 0.00926561 |
| 95 | 32.667 | 4 | 0.139746 | 0.00795073 |
| 96 | 32.8067 | 5 | 0.453091 | 0.00789474 |
| 97 | 33.2598 | 1 | 0.00603271 | 0.00880584 |
| 98 | 33.2659 | 3 | 0.538553 | 0.00883652 |
| 99 | 33.8044 | 5 | 0.0787424 | 0.00762729 |
| 100 | 33.8832 | 2 | 0.687925 | 0.00787879 |
| … | … | … | … | … |
| 7727 | 2903.39 | 5 | 0.22654 | 0.000100069 |
| 7728 | 2903.62 | 3 | 0.252429 | 0.000111481 |
| 7729 | 2903.87 | 1 | 0.442766 | 0.000104253 |
| 7730 | 2904.31 | 4 | 0.213313 | 0.000100309 |
| 7731 | 2904.53 | 2 | 0.0955867 | 0.000101455 |
| 7732 | 2904.62 | 4 | 0.328706 | 0.000100274 |
| 7733 | 2904.95 | 5 | 0.328033 | 9.99974e-05 |

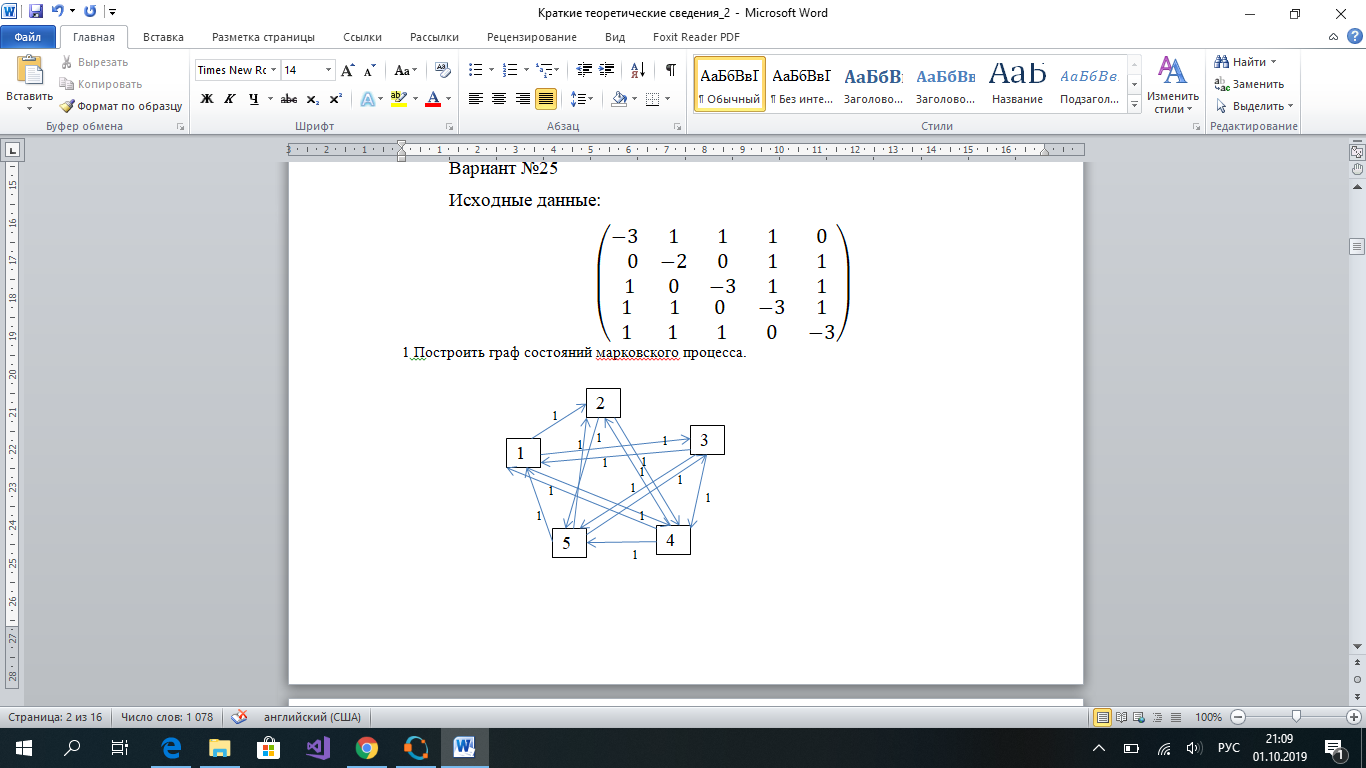
7 Таблица 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* |  |  |  |  |
| 1 | 15 | 0.15000 | 5.0476 | 0.14623 |
| 2 | 22 | 0.22000 | 10.8238 | 0.31356 |
| 3 | 14 | 0.14000 | 4.8326 | 0.14000 |
| 4 | 24 | 0.24000 | 7.5681 | 0.21924 |
| 5 | 25 | 0.25000 | 6.2473 | 0.18098 |

8 Таблица 3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* |  |  |  |  |
| 1 | 1502 | 0.19423 | 520.51 | 0.17916 |
| 2 | 1668 | 0.21570 | 823.39 | 0.28342 |
| 3 | 1071 | 0.13850 | 383.38 | 0.13196 |
| 4 | 1738 | 0.22475 | 594.71 | 0.20470 |
| 5 | 1754 | 0.22682 | 583.23 | 0.20075 |

**Анализ результатов и выводы**



K=7733

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 0.15000 | 0.22000 | 0.14000 | 0.24000 | 0.25000 |
|  | 0.19423 | 0.21570 | 0.13850 | 0.22475 | 0.22682 |
|  | 0.14623 | 0.31356 | 0.14000 | 0.21924 | 0.18098 |
|  | 0.17916 | 0.28342 | 0.13196 | 0.20470 | 0.20075 |

**Список литературы**

1. Лобузов А.А., Гумляева С.Д., Норин Н.В. Задачи по теории случайных процессов. — М.: МИРЭА, 1993.
2. Булинский А. В., А. Н. Ширяев А. Н. Теория случайных процессов: Учебник для вузов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005
3. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 2007.

**Приложение (Листинг программы)**

function sp2()

pkg load statistics

A=[-3, 1,1,1,0; 0,-2,0,1,1;1,0,-3,1,1;1,1,0,-3,1;1,1,1,0,-3];

s=1;

SS=zeros(1,10000);###sostoyniy

R=zeros(1,5);

v=zeros(1,5);

K=0;

delta=1;

tt=zeros(1,10000);###t\_sob

TAU=zeros(1,10000);

del=zeros(1,10000);

while delta>0.0001

count=0;

K=K+1;

lymb=0;

for i=1:5

if i!=s

lymb=lymb+A(s,i);

if A(s,i)>0

count=count+1;

end

end

endfor

lymb;

if K==1

tt(K)=exprnd(1/lymb,1,1);

else

TAU(K-1)=exprnd(1/lymb,1,1);

tt(K)=tt(K-1)+TAU(K-1);

end

if lymb>0

e=rand;

l=zeros(1,count+1);

sost=zeros(1,count+1);

f=2;

for i=1:5

if A(s,i)>0

for t=f:size(l,2)

l(t)=l(t)+A(s,i);

end

sost(f)=i;

f=f+1;

endif

endfor

l=l/lymb;

for t=1:size(l,2)-1

if e>=l(t) && e<=l(t+1)

s=sost(t+1);

break

end

end

SS(K)=s;

v\_=v;

R(s)=R(s)+1;

v=R/K;

delta=max(abs(v-v\_));

if K==100

R

v

end

del(K)=delta;

endif

endwhile

K

R

v

lymb=0;

for i=1:5

if i!=s

lymb=lymb+A(s,i);

end

endfor

lymb;

TAU(K)=exprnd(1/lymb,1,1);

tt(K+1)=tt(K)+TAU(K);

TAU;

T\_100=zeros(1,5);

for i=1:100

T\_100(SS(i))=T\_100(SS(i))+TAU(i);

endfor

T\_100

T\_K=zeros(1,5);

for i=1:K

T\_K(SS(i))=T\_K(SS(i))+TAU(i);

endfor

T\_K

DOL\_100=T\_100/(tt(101)-tt(1));

DOL\_K=T\_K/(tt(K+1)-tt(1));

DOL\_100

DOL\_K

r=solve\_lin\_equ([-3,0,1,1,1;1,-2,0,1,1;1,0,-3,0,1;1,1,1,-3,0;1,1,1,1,1],[0,0,0,0,1]);

f=fopen('prim\_1.doc','wt');

for l=1:K

fprintf(f,' %g %g %g %g %g\n',l, tt(l), SS(l), TAU(l),del(l));

end

fclose(f);

endfunction

function x=solve\_lin\_equ(A,B)

%solve\_lin\_equ([31,9;9,6],[9.196,2.732])

%Дано:А-матрица СЛАУ, В-вектор-столбец свободных членов СЛАУ

%Рез.: Если detA~=0, то х-вектор-столбец решение СЛАУ, в противном случае, если система совместна, то x(:,1)-частное решение, x(:,2:end)

%содержит в столбцах базис решения, соответствующий СЛАУ, либо x=[], если СЛАУ несовместная

A=[A,B(:)];

[A,r,q]=reduce2step(A); %'прямой ход'

if q==0

x=[];

else

x=obr\_hod(A,r);

%if prov(A,x,B)==0

% f=0

%else

% f=1

%end

end;

end;

function f=prov(A,x,B)

f=1;

C=zeros(size(A,1),1);

for i=1:size(A,1)

for j=1:size(A,2)

C(i)=C(i)+A(i,j)\*x(j);

end

if abs(C(i)-B(i))>=0.01

f=0;

break;

end;

end

end

function [A,r,q]=reduce2step(A)

%дано: А-прямоугольная матрица(расширенная)

%рез: А-приведение к ступенчатому виду

ik=1;

epsilon=1e-8;

for k=1:(size(A,2)-1) %перебор столбцов

[~,di]=max(abs(A(ik:end,k)));

di=di-1;

%ik+di-индекс строки с ведущим элементам в k-ом столбце

i=ik+di;

if abs(A(i,k))<epsilon

continue

end;

a=A(ik,k:end);

A(ik,k:end)=A(i,k:end);

A(i,k:end)=a;

for j=ik+1:size(A,1)

t=-A(j,k)/A(ik,k);

A(j,k:end)=A(j,k:end)+t\*A(ik,k:end);

end;

ik=ik+1;

end;

r=ik-1; %ранг матрицы СЛАУ

t=0;

for i=(r+1):(size(A,1))

if abs(A(i,size(A,2)))>0

t=1;

break;

end;

end;

if (t==1)

q=0;

else

q=1;

end;

end

function x=obr\_hod(A,r)

p=1;

w=[];

B=[];

for i=1:(size(A,2)-1)

if (A(p,i)~=0)&&(p<=r)

B=[B,A(1:r,i)];

p=p+1;

else

w=[w,i];

end;

end;

for i=1:length(w)

B=[B,A(1:r,w(i))];

end

B=[B,A(1:r,size(A,2))];

for i=r:-1:2

B(i,:)=B(i,:)/B(i,i);

for t=1:i-1

B(t,:)=B(t,:)-B(i,:)\*B(t,i);

end

end;

B(1,:)=B(1,:)/B(1,1);

for i=1:length(w)

B=[B(:,1:(w(i)-1)), B(:,r+i), B(:,w(i):end)];

B(:, r+2)=[];

end

if length(w)==0

x=B(:,size(B,2));

else

x=B;

end

end