PRML 演習 1.17-1.19

@daimatz

(演習 1.17) ガンマ関数は

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du \tag{1.141}$$

で定義される．部分積分を使って関係式 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ を証明せよ．また， $\Gamma(1) = 1$ を示し， x が整数なら $\Gamma(x+1) = x!$ となることを示せ．

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty u^x e^{-u} du \\
&= \left[-ue^{-u}\right]_0^\infty - \int_0^\infty xu^{x-1} \cdot (-e^{-u}) du \\
&= x \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du = x\Gamma(x)
\end{aligned}$$

また

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-u} du = \left[-e^{-u}\right]_0^\infty = 1$$

より

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\
&= x \times (x-1)\Gamma(x-1) \\
&= \cdots \\
&= x \times (x-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \cdot \Gamma(1) \\
&= x!
\end{aligned}$$

(演習 1.18) D 次元の単位球の表面積 S_D，体積 V_D を導くのに (1.126) を使うことができる．これにはまず，直交座標から極座標への変換から導かれる

$$\prod_{i=1}^{D}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_i^2}dx_i = S_D\int_0^{\infty}e^{-r^2}r^{D-1}dr \tag{1.142}$$

という事実を考える．ガンマ関数の定義 (1.141) と (1.126) から，この式の両辺を評価し，

$$S_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \tag{1.143}$$

を示せ．次に半径 0 から 1 まで積分し， D 次元単位球の体積が

$$V_D = \frac{S_D}{D} \tag{1.144}$$

で与えられることを示せ．最後に $\Gamma(1)=1$ および $\Gamma(3/2)=\sqrt{\pi}/2$ から，(1.143) と (1.144) が $D=2$ および $D=3$ の通常の表現に帰着されることを示せ．

(1.126) は

$$\begin{aligned} I(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right)dx \\ &= (2\pi\sigma^2)^{1/2} \end{aligned}$$

で， $\sigma = 1/\sqrt{2}$ とすると

$$\begin{aligned} I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)dx \\ &= \pi^{1/2} \end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned} \text{(1.142) の左辺} &= \prod_{i=1}^{D} I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \pi^{D/2} \end{aligned}$$

また (1.142) の右辺の積分は，変数変換 $r^2 = t$ とすると $2rdr = dt$ なので

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty}e^{-r^2}r^{D-1}dr &= \int_0^{\infty}e^{-t}t^{\frac{D}{2}-1}\cdot\frac{1}{2}dt \\ &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \end{aligned}$$

これらを (1.142) に代入して

$$\pi^{D/2} = S_D\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)$$

よって

$$S_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$$

また，半径 1 の D 次元球の表面積が S_D なのだから，半径 r の D 次元球の表面積は $r^{D-1}S_D$ となる．よってこの r を 0 から 1 まで積分することによって半径 1 の D 次元球の体積 V_D が求められて，

$$V_D = \int_0^1 r^{D-1}S_D dr = \frac{S_D}{D}$$

となる．

$D=2$ の場合「2 次元単位球の表面積＝単位円の周長」「2 次元単位球の体積＝単位円の面積」である．

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi \\
V_2 &= \frac{S_2}{2} = \pi
\end{aligned}
$$

$D=3$ の場合

$$
\begin{aligned}
S_3 &= \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} = 4\pi \\
V_3 &= \frac{S_3}{3} = \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}
$$

(演習 1.19) D 次元の半径 a の球と，同じ中心を持つ一辺 $2a$ の超立方体を考える．球面は超立方体の各面の中心で接している．演習問題 1.18 の結果を使って，球の体積と立方体の体積の比が

$$\frac{\text{球の体積}}{\text{立方体の体積}} = \frac{\pi^{D/2}}{D2^{D-1}\Gamma(D/2)} \tag{1.145}$$

で与えられることを示せ．スターリングの公式

$$\Gamma(x+1) \simeq (2\pi)^{1/2} e^{-x} x^{x+1/2} \tag{1.146}$$

が $x \gg 1$ で成り立つことを使って $D \to \infty$ の極限で比の値 (1.145) が 0 に収束することを示せ．また，超立方体の中心から 1 つの頂点までの距離を中心から側面までの距離で割った比が $\sqrt{D}$ となることを示し， $D \to \infty$ のとき ∞ に発散することを示せ．これらの結果から，高次元空間では立方体の体積のほとんどはたくさんの頂点に集中し，非常に長い「スパイク」になっていることがわかる！

半径 a の D 次元球の体積は $a^D V_D$，一辺 $2a$ の D 次元立方体の体積は $(2a)^D$ だから，

$$\begin{aligned}\frac{\text{球の体積}}{\text{立方体の体積}} &= \frac{a^D V_D}{(2a)^D} \\ &= \frac{\pi^{D/2}}{D2^{D-1}\Gamma(D/2)}\end{aligned}$$

ここで (1.146) を使うと

$$\Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \simeq (2\pi)^{1/2} e^{-(D/2-1)} \left(\frac{D}{2}-1\right)^{(D-1)/2}$$

これを (1.145) に代入して

$$\begin{aligned}\frac{\text{球の体積}}{\text{立方体の体積}} &\simeq \frac{2(e\pi)^{D/2}}{e(2\pi)^{1/2}\cdot D\cdot 2^D\cdot(D/2-1)^{(D-1)/2}} \\ &\to 0 \quad (D\to\infty)\end{aligned}$$

となる．

超立方体の中心から 1 つの頂点までの距離を d とすると

$$\begin{aligned}d^2 &= a^2+a^2+\cdots+a^2 \quad (D\text{ 個}) \\ &= Da^2\end{aligned}$$

より

$$d = \sqrt{D}a$$

となり，また超立方体の中心から 1 つの側面までの距離は a なのでその比は $\sqrt{D}$ となる．よって $D \to \infty$ のときこの比は ∞ に発散する．