W8PRML 演習問題 1.2

大上 雅史　(@tonets)

2012/10/02

1.2

正則化された二乗和誤差関数 (1.4) を最小にする係数 w_i が満たす (1.122) に類似した線形方程式系を書き下せ.

$$(1.4) \quad — \quad \widetilde{E}(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\{y(x_n,\boldsymbol{w}) - t_n\}^2 + \frac{\lambda}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2$$

$$(1.122) \quad — \quad \sum_{j=0}^{M} A_{ij}w_j = T_i$$

$$(1.123) \quad — \quad A_{ij} = \sum_{n=1}^{N}(x_n)^{i+j}, \qquad T_i = \sum_{n=1}^{N}(x_n)^i t_n$$

(1.4) に (1.1) の $y(x_n,\boldsymbol{w}) = \sum_{j=0}^{M} w_j(x_n)^j$ を代入し，w_i で偏微分して 0 と置く.

$$\widetilde{E}(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left\{\sum_{j=0}^{M} w_j(x_n)^j - t_n\right\}^2 + \frac{\lambda}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\widetilde{E}(\boldsymbol{w})}{\partial w_i} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial}{\partial w_i}\left\{\sum_{j=0}^{M} w_j(x_n)^j - t_n\right\}^2 + \lambda w_i \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\cdot 2\left\{\sum_{j=0}^{M} w_j(x_n)^j - t_n\right\}\sum_{j=0}^{M}\frac{\partial}{\partial w_i}w_j(x_n)^j + \lambda w_i \\
&= \sum_{n=1}^{N}\left\{\sum_{j=0}^{M} w_j(x_n)^j - t_n\right\}(x_n)^i + \lambda w_i \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=0}^{M} w_j(x_n)^j(x_n)^i - \sum_{n=1}^{N} t_n(x_n)^i + \lambda w_i \\
&= \sum_{j=0}^{M} w_j\sum_{n=1}^{N}(x_n)^{i+j} - \sum_{n=1}^{N}(x_n)^i t_n + \lambda w_i = 0 \\
&\therefore \sum_{j=0}^{M} A_{ij}w_j + \lambda w_i = T_i
\end{aligned}$$

もう少し書き換えるならば,

$$\sum_{j=0}^{M} \widetilde{A}_{ij}w_j = T_i$$

$$\widetilde{A}_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & (i \neq j) \\ A_{ij} + \lambda & (i = j) \end{cases}$$